Алекса Малчески
Машински факултет - Скопје

СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ ОД ТРИ ПРОМЕНЛИВИ IV

Во претходните делови видовме дека својствата на симетрични полиноми може да се применуваат ефикасно за решавање на различни алгебарски задачи, како што е решавање на равенки, симетрични системи, упростување на алгебарски изрази, докажување на идентитети, разложување на множители. Природно е да се очекува и во други видови на проблеми и задачи да може ефективно да се применуваат особините на симетричните полиноми.

11. Неравенства

Еден тип на задачи кои широко се распространети, како во основната литература така и во литературата за ученици кои сакаат да ги прошират своите математички знаења се неравенствата. Некогаш е многу тешко да се провери дали дадено неравентво е точно или не е точно. Јасно е дека, во неравенствата кои се симетрични во однос на своите променливи да може да се применуваат резултатите за симетричните полиноми.

Едно од стандардните неравентва кое како помошна задача се јавува во докажувањето на многу неравенства е следното неравенство: за произволни реални броеви x,y,z е точно неравенството $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$, при што равенство се достигнува за само во случај кога $x=y=z$. Левата страна на неравенството е симетричен полином од променливите x,y,z. Ако се ослободиме од заградите, без тешкотии неравенството можеме да го запишеме во облик $2s_2-2\sigma_2\geq 0$, или ако ги искористиме формулите за степени суми изразени преку $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ истото неравенство можеме да го запишеме во облик

$$\sigma_1^2\geq 3\sigma_2. \tag{1}$$

Значи, за произволни реални броеви x,y,z точно е неравенството (1); равенство се достигнува за $x=y=z$.

Од неравенството (1) може да се добијат редица други неравенства. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Докажи дека за произволни реални броеви точно е неравенството $\sigma_2^2\geq 3\sigma_1\sigma_3$.

Решение. Неравенството (1) има облик

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx).$$

Ако во последното неравенство замениме $x=ab, y=ac, z=bc$, добиваме:

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3(a^2bc+b^2ac+c^2ab)\text{, или } (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c).$$

Тоа е неравенството кое што го докажуваме. Равенство се достигнува за $a=b=c$ или ако било кои два броја од нив се еднакви. Зашто?

Пример 2. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви x, y, z, точно е неравенството $\sigma_1\sigma_2 \ge 9\sigma_3$.

Решение. Бидејќи броевите x, y, z се позитивни, исполнети се неравенствата $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 > 0$. Заради тоа неравенствата $\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$, $\sigma_2^2 \ge 3\sigma_1\sigma_3$ можеме да ги измножиме. При тоа добиваме

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 \ge 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Ако скратиме со позитивниот број $\sigma_1\sigma_2$, го добиваме неравенството $\sigma_1\sigma_2 \ge 9\sigma_3$. Равенство $\sigma_1\sigma_2 = 9\sigma_3$ се достигнува само кога $x=y=z$. Зошто?

Точноста на неравенството од претходната задача може да се добие и од неравенството

$$(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right) \ge n^2,$$

во случајот $n=3$. Тогаш, од точноста на неравенството

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9,$$

по негово средување добиваме $\sigma_1\dfrac{\sigma_2}{\sigma_3} \ge 3^2 = 9$.

Пример 3. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви x, y, z е точно неравенството $\sigma_1^3 \ge 27\sigma_3$.

Решение. Користејќи го неравенството (1) и неравенството од примерот 2, добиваме

$$\sigma_1^4 = \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 \ge \sigma_1^2 \cdot 3\sigma_2 = 3\sigma_1(\sigma_1\sigma_2) \ge 3\sigma_1 \cdot 9\sigma_3 = 27\sigma_1\sigma_3.$$

Ако го поделиме неравенството $\sigma_1^4 \ge 27\sigma_1\sigma_3$ со позитивниот број σ_1, го добиваме бараното неравенство. Равенство $\sigma_1^4 = 27\sigma_1\sigma_3$ се достигнува само во случај кога $x=y=z$.

Пример 4. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви x, y, z, точно е неравенството $\sigma_2^3 \ge 27\sigma_3^2$.

Решение. Ако тргнеме од левата страна на неравенството и ги искористиме неравенствата од пример 1 и пример 2, добиваме

$$\sigma_2^3 = \sigma_2 \cdot \sigma_2^2 \ge \sigma_2 \cdot 3\sigma_1\sigma_3 = 3\sigma_3(\sigma_1\sigma_2) \ge 3\sigma_3 \cdot 9\sigma_3 = 27\sigma_3^2.$$

Задачи

Докажи дека за произволни реални броеви a,b,c,x,y,z *точни се следните неравенства:*

1. $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

2. $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$.

3. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$;

4. $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$;

5. $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$.

Докажи дека за произволни позитивни реални броеви a,b,c,x,y,z, *точни се следните неравенства:*

6. $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$;

7. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$;

8. $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$;

9. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(a+c-2b) \geq 0$.

10. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$.

11. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

12. $2(a^3+b^3+c^3) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$;

13. $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b} \geq \frac{9}{a+b+c}$;

14. $2(a^3+b^3+c^3) \geq c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)$ **;**

15. $\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{x+y+z}{3}$;

16. $3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$.

17. $8(a^3+b^3+c^3) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

18. $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

Докажи дека ако a,b,c *се страни на триаголник, тогаш точни се следните неравенства:*

19. $2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2$;

20. $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>2(a^3+b^3+c^3)$;

21. Докажи дека, ако $a+b+c=0$, тогаш $ab+bc+ca\le 0$.

22. Во множеството цели броеви да се реши равенката $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$.

23. Докажи дека од сите триаголници со периметер σ_1, рамностраниот има најголема плоштина.

24. Определи ја најголемата вредност на изразот $(1+u)(1+v)(1+w)$, ако

$$u+v+w=1 \text{ и } 0\le u,v,w\le \frac{7}{16}.$$

12. Рационализација на изрази

Симетричните полиноми дозволуваат да се решат многу посложени задачи од рационализација на алгебарски изрази,во однос на методите кои стандардно се користат во учебниците и учебните помагала. Јасно е дека методите на симетричните полиноми може да се користат во случај кога дадениот алгебарски израз може да се доведе до некаква врска со симетричните полиноми од три променливи.

Во некои случаи не мора да се применуваат симетричните полиноми. Во случај кога именителот е од облик $a\pm\sqrt[n]{b}$ или $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$, оваа задача може да се реши и без примена на симетрични полиноми. За тоа е доволно да се искористат формулите

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2+...-xy^{2k-1}+y^{2k}).$$

На пример, ако треба да ја рационализираме дропката (т. е. да се ослободиме од корени, радикали во именител) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}$, на почеток ќе го помножиме именителот со $\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}$, т. е. ќе ја прошириме дропката, (во именител ќе добиеме $\sqrt[6]{5}-\sqrt[6]{3}$), а пота ќе ја прошириме дропката со $\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}$. При тоа ќе добиеме

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})}{(\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3})(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})}=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}.$$

Сега можеме да ја искористиме втората од наведените формули во овој дел. Ќе ставиме $x=\sqrt[3]{5}$ и $y=\sqrt[3]{3}$. Тогаш, јасно е дека и броителот и именителот на последната дропка треба да ги помножиме со

$$x^2+xy+y^2=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\,.$$

По проширувањето добиваме

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}$$

$$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{3})^3}\,.$$

$$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{2}$$

Ситуацијата е многу посложена кога во именител имаме три и повеќе броеви кои се под знак на некој корен. Во такви случаи може да помогнат симетричните полиноми. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Да се рационализира изразот $\dfrac{q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Решение. Нека $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$ и $\sqrt{c}=z$. Тогаш именителот не е ништо друго него елементартен симетричен полином $\sigma_1=x+y+z$. Сакаме да најдеме множител, со кој после проширување на дропката именителот ќе биде изразен преку степените суми s_2 и s_4. Бидејќи тие суми имаат облик

$$s_2=x^2+y^2+z^2=a+b+c\,,\qquad s_4=x^4+y^4+z^4=a^2+b^2+c^2\,,$$

именителот ќе стане рационален израз.

За да најдеме таков множител ќе ги искористиме формулите за степени суми изразени преку елементарните симетрични полиноми:

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2\,,\qquad s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_2+2\sigma_2^2\,.$$

Гледаме дека во двете степени суми само последниот собирок(од десната страна) не се дели со σ_1. Но многу е лесно да ги искомбинираме двете степени суми, така што тој недостаток да се елиминира, т. е. отстрани. Заради тоа ќе го определиме квадратот на s_2,

$$s_2^2=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2,$$

и од него ќе ја одземеме двојната сума s_4. При тоа ќе добиеме

$$s_2^2-2s_4=-\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3=\sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3)\,,$$

од каде што

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3}{s_2^2-2s_4}\,.\qquad (*)$$

Ставајќи во последната формула $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ и $z=\sqrt{c}$, и сметајќи дека $s_2=x^2+y^2+z^2=a+b+c$, $s_4=x^4+y^4+z^4=a^2+b^2+c^2$, добиваме:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{4(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})-(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3-8\sqrt{abc}}{(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)}$$

Останува двете страни да се помножат со q и задачата е решена.

Забелешка. За да се избегнат непријаностите при ослободување од загради во броител во изразот $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3$, можеме да го трансформираме броителот во десната страна од формулата (*). Имено користејќи ја формулата

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_2\,,$$

формулата (*) можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_1\sigma_2-s_3-5\sigma_3}{s_2^2-2s_4}\,.$$

Оттука, заменувајќи како и претходно $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ и $z=\sqrt{c}$, го добиваме решението на задачата во појасен облик:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})-(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+b\sqrt{c})-5\sqrt{abc}}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}\,.$$

Пример 2. Да се рационализира изразот

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}\,.$$

Решение. Формулата за степената сума s_3 изразено преку σ_1,σ_2 и σ_3 е: $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$. Во изразот од десната страна на последното равенство само последниот собирок $3\sigma_3$ не се дели со σ_1. Ако го префрлиме него од десната страна, добиваме:

$$s_3-3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)\,,$$

па според тоа

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_1^2-3\sigma_2}{s_3-3\sigma_3}=\frac{s_2-\sigma_2}{s_3-3\sigma_3}\,.$$

Ако во последното равенство ставиме $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}\,.$$

Значи, ако именителот на дропката има облик $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, тогаш после множење со $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}$ се добива $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$. За да во именителот добиеме рационален израз, доволно е да се рациоанлизира, користејќи ја формулата

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)\,.$$

Имено, треба да ги помножиме и именителот и броителот во последната дропка со

$$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}\ .$$

Како резултат на тоа ќе добиеме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca})((a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2})}{(a+b+c)^3-27abc}$$

Разгледуваните примери се јавуваат како парцијални случаи на следната задача. Да се рационализира дропката $\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}$. Со други зборови, сакаме да го претставиме дадениот претходен израз во облик

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}=\frac{A}{B}$$

каде A и било каков израз, може и ирационален, но именителот B да биде рационален израз. Јасно е дека именителот ќе биде рационален, ако во него не се појавуваат самите корени $\sqrt[n]{a},\sqrt[n]{b},\sqrt[n]{c}$, туку само нивните n-ти степени. Со други зборови, ако воведеме ознаки $\sqrt[n]{a}=x,\sqrt[n]{b}=y,\sqrt[n]{c}=z$, треба да најдеме равенство од облик

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{f(x,y,z)}{g(x^n,y^n,z^n)},$$

каде f и g се некои полиноми. Последното равенство можеме да го запишеме во облик $g(x^n,y^n,z^n)=\sigma_1 f(x,y,z)$. Значи, треба да најдеме таков полином $g(x^n,y^n,z^n)$ кој се дели со $\sigma_1=x+y+z$.

Значи, останува проблемот како да се најде таков полином g. Се разбира природно е да ги искористиме својствата на симетричните полиноми. Најпрости симетрични полиноми кои што зависат само од n-тите степени на променливите x,y,z се

$$s_n=x^n+y^n+z^n\ ,\quad s_{2n}=x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\ ,\quad s_{3n}=x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}\ ,$$

итн. Ако можеме да ги искомбинираме тие степени суми за да конструираме од нив полином g кој се дели со σ_1, тогаш нашата задача е решена. Имено, на таков начин и постапивме при решавање во примерот 1.

Некогаш е тешко да се најде комбинација на операции меѓу степените суми $s_n,s_{2n},...$ за кои добиениот полином се дели со σ_1. Во тој случај може да ни помогне следната постапка. Да пробаме да ги искористиме не само степените суми $s_n,s_{2n},...$ (за добивање на алгебарски израз кој што се дели со σ_1), туку и σ_3. Ако воведеме ознаки $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$, $z=\sqrt[n]{c}$, добиваме

$$\sigma_3 = xyz = \sqrt[n]{abc}\,,$$

т.е. кон рационалните изрази s_n, s_{2n}, s_{3n} ние додаваме само еден ирационален израз $\sigma_3 = \sqrt[n]{abc}$. За ослободување од таа ирационалност може да ја искористиме постапката која е наведена во почетокот на овој дел(да се види решението на пример 2).

Во улога на пример за примена на овие општи методи ќе ја разгледаме следната задача.

Пример 3. Да се рационализира именителот на алгебарскиот израз

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}\,.$$

Решение. Овде ќе ја разгледаме само основната идеја на решението. Деталите на доказот се оставаат за вежба. Од основната таблица за степени суми формулите со кои се изразени s_4 и s_8 преку σ_1, σ_2 и σ_3 (не се запишани мономите кои содржат како множител σ_1) се:

$$s_4 = \ldots + 2\sigma_2^2\,,\; s_8 = \ldots + 2\sigma_2^4 - 8\sigma_2\sigma_3^2\,.$$

Според тоа

$$2s_8 - s_4^2 = \ldots - 16\sigma_2\sigma_3^2\,.$$

Пренесувајќи ги членовите кои го содржат σ_1, од десната на левата страна на равенството и квадрирајќи, добиваме

$$(2s_8 - s_4^2 - \ldots)^2 = 256\sigma_2^2\sigma_3^4\,.$$

Ако од левата страна на последното равенство се ослободиме од загради, добиваме:

$$(2s_8 - s_4^2)^2 + \ldots\ldots = 256\sigma_2^2\sigma_3^4\,.$$

На крај, бидејќи $s_4 = \ldots + 2\sigma_2^2$, добиваме

$$256\sigma_2^2\sigma_3^4 = 128 s_4\sigma_3^4 + \ldots$$

(како и претходно, не се запишани мономите кои содржат како множител σ_1), и затоа, префрлајќи ги на десна страна сите членови кои се делат со σ_1, добиваме:

$$(2s_8 - s_4^2)^2 - 128\sigma_2^2\sigma_3^4 = \ldots.\,.$$

Со други зборови, изразот $(2s_8 - s_4^2)^2 - 128\sigma_2^2\sigma_3^4$ се дели со σ_1, т. е.

$$(2s_8 - s_4^2)^2 - 128\sigma_2^2\sigma_3^4 = \sigma_1 A\,, \qquad (**)$$

каде A е некој симетричен полином. Ако сакаме да го најдеме јавниот вид на полиномот A, не е потребно да се прават сите претходни разгледувања.

Доволно е во добиената формула (**) да се заменат формулите за s_4 и s_8 изразени преку σ_1, σ_2 и σ_3 од основната таблица. На крај ако замениме $x = \sqrt[4]{a}$,

$y=\sqrt[4]{b}$ и $z=\sqrt[4]{c}$ (бидејќи $s_4=a+b+c$ и $s_8=a^2+b^2+c^2$, $\sigma_3=\sqrt[4]{abc}$), добиваме:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}=\frac{1}{\sigma_1}=\frac{A}{(2s_8-s_4^2)^2-128\sigma_2^2\sigma_3^4}$$
$$=\frac{A}{(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)^2-128(a+b+c)abc}$$

Опишаниот метод е со многу ограничени можности, бидејќи со наголемување на степеновиот показател на степените суми $s_n, s_{2n},...$ тие се потешко се пресметуваат, т. е. се изразуваат како полиноми од σ_1, σ_2 и σ_3. Уште потешко е да се избере потребната комбинација на степените суми за да се извлече σ_1 како заеднчки множител во именител. Освен тоа, овој метод е корисен само во случај кога во именителот бројот на собироците е три, т. е. не е поголем од три. Постојат поопшти методи за решавање на задачи од ваков тип, кои определуваат постандардни начини за решавање на задачи од рационализација на именител, кои излегуваат од рамките на овие разгледувања и затоа не ги презентираме.

На крајот на овој параграф ние ќе разгледаме уште еден вид на задачи поврзани со рационализација, кои се тесно поврзани со задачите претходно разгледувани во овој дел. Во општ вид, задачата која ќе ја разгледуваме може да се формулира на следниот нчин: да се рационализира алгебарскиот израз

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0 .$$

Со други зборови, треба да најдеме рационална врска меѓу променливите a,b и c кој е задоволен за сите вредности на своите променливи за кои е задоволено равенството $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0$. Не е тешко да се забележи аналогијата и сврзаноста на оваа задача со претходно разгледаните задачи од овој дел. Определуваме $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$ и $z=\sqrt[n]{c}$. Тогаш од условот на задачата

$$\sigma_1=x+y+z=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0 .$$

Во тој случај ако успееме (на пример комбинирајќи ги степените суми $s_n, s_{2n},...$) да најдеме полином g, таков што $g(x^n, y^n, z^n)=\sigma_1 f(x,y,z)$, заради равенството $\sigma_1=0$ би добиле $g(x^n, y^n, z^n)=0$. Тоа и би била рационалната врска меѓу a,b,c бидејќи $x^n=a, y^n=b, z^n=c$. Да забележиме дека заради условот $\sigma_1=0$ можеме да ја користиме ревидираната(скратената)таблица за пресметување на степените суми $s_n, s_{2n},...$, а не основната таблица за нивно пресметување. Тоа во голема мера ги скратува пресметувањата. Ќе разгледаме еден пример.

Пример 4. Да се рационализира изразот $\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}+c=0$.

Решение. Воведуваме ознаки (смени) $\sqrt[4]{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, $c=z$. Дадениот алгебарски израз од десната страна добива облик

$$\sigma_1=x+y+z=\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}+c=0.$$

Бидејќи $\sigma_1=0$, релацијата (**) го добива обликот

$$(2s_8-s_4^2)^2-128s_4\sigma_3^4=0.$$

Заради равенствата

$$s_4=x^4+y^4+z^4=a+b^2+c^4,\ s_8=a^2+b^4+c^8,\ \sigma_3^4=ab^2c^4,$$

добиваме:

$$(a^2+b^4+c^8-2ab^2-2ac^4-2b^2c^4)^2-128(a+b^2+c^4)ab^2c^4=0.$$

Тоа е бараната рационална релација меѓу a,b и c, која е точна за сите вредности на променливите за кои е исполнето равенството

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}+c=0.$$

Задачи

Рационализирај ги дропките:

1. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

Следните равенства да се рационализираат:

3. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+1=0$.

4. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}+b=0$.

5. $p\sqrt[3]{a^2}+q\sqrt[3]{a}+r=0$.

6. $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}+c=0$.

7. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$.

8. $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[4]{a^2+b^2}=0$.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија