Игор Димовски

Број на делители

Секое дете знае дека делењето е „проблематична” операција. Да се најде количник при делење на два природни броја е обратна постапка од постапката на множење на броеви. А, да се оди наназад, секако е потешко од одењето нанапред (па и од трчањето).
Проблемот е уште поголем кога ќе видиш дека количникот всушност можеби и не постои. Затоа, занимавањето со проблемите на деливост е доста весело. Сé започнува со релацијата “...е делител на...”.

Нека d и n се два произволни природни броеви. Се вели дека бројот d **е делител на** бројот n ако постои природен број q, така што

$$n = d \cdot q.$$

Ознака: $d \mid n$
Се чита: Бројот d е делител на бројот n, или уште: бројот n е делив со d.

Забележи дека всушност q е количникот при делење на деленикот n со делителот d, односно $n : d = q$.

Сега, нека D_n е множеството од сите делители на еден зададен приоден број n. Бројот на елементи на множеството D_n, всушност е **бројот на делители на природниот број n**.

На пример, ако $n = 6$, тогаш $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. Бројот 6 има 4 делители.
Ако $n = 18$, тогаш $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Значи, 18 има 6 делители.
Бројот 13 е делив само со самиот себе и како и сите природни броеви, делив е со 1. Значи $D_{13} = \{1, 13\}$, односно 13 има точно *два* делители.

Природниот број што има точно два делители е **прост број**. Бројот 13 е прост број. Прости се и броевите 2, 3, 5, 7, 11, 17, ...

Природниот број што има повеќе од два делители е **сложен број**. Броевите 6 и 18 се сложени броеви.

Бројот 1 не е ни прост ни сложен број. Тој има точно еден делител – $D_1 = \{1\}$.

Се поставува прашањето *како да се изброи* – колку точно делители има еден зададен природен број n?

Од самата дефиниција за прост број следува:
1° Ако n е прост број, тогаш бројот на делители на n е 2.

Да го разгледаме случајот кога $n = 32$. Ако бројот 32 го разложиме на прости множители, него ќе го запишеме како:

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$

Бројот 32 е делив со 1, со $2 = 2^1$, со $4 = 2^2$, со $8 = 2^3$, со $16 = 2^4$ и со самиот себе, односно со $32 = 2^5$. Бројот 32 не е делив со ниту еден друг број, бидејќи ако е делив со некој број што не е од облик 2^m, каде m е некој од броевите 1, 2, 3, 4 или 5, тогаш при разложувањето на бројот 32 ќе се појави уште некој прост број, различен од 2. Сите делители на бројот n = 32 = 2^5 може да се претстават во една низа:

1	2	4	8	16	32

шема 1

Значи, множеството делители на 32 е $D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Бројот $32 = 2^5$ има 6 делители.

Нека n е степен на некој прост број p. Тоа значи дека постои природен број k, така што

$$n = p^k = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k-\text{пати}}$$

Бројот n е делив со $1, p, p^2, \ldots, p^k$. Множеството $D_n = \{1, p, p^2, \ldots, p^k\}$ има $k + 1$ елементи. Следува дека:

2° Ако $n = p^k$, каде p е прост број (n е степен на некој прост број), тогаш бројот на делители на n е $k + 1$.

Да се вратиме сега на случајот $n = 18$. Ако 18 го разложиме на прости множители, се добива:

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^2.$$

Според својството 2°, бројот 2^1 има 2 делители (1 и 2), а бројот 3^2 има 3 делители (1, 3 и 9). Претходно утврдивме дека бројот на делители на 18 е еднаков на $6 = 2 \cdot 3$.

	1	3	9
1	1	3	9
2	2	6	18

шема 2

Навистина, ако земеме еден правоаголник со должина 3 и ширина 2 и го поделиме на 6 единични квадрати, во секој квадрат можеме да образуваме производ на еден делител на 2^1 и еден делител на 3^2. Со тоа се исцрпени сите делители на 18.

Оваа правоаголна шема функционира и за поголеми броеви, за кои инаку не е баш едноставно да се одреди бројот на делители. Да ги најдеме сите делители на бројот $n = 1600$. Разложувајќи го n на прости множители се добива:

$$n = 1600 = 2^6 \cdot 5^2$$

Бројот 2^6 има 7 делители - сите степени со основа 2 и експоненти 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а бројот 5^2 има 3 делители - сите степени со основа 5 и експоненти 0, 1, и 2. Нивниот производ $n = 1600 = 2^6 \cdot 5^2$ има $7 \cdot 3 = 21$ делители и тие сите се прикажани во правоаголната шема 3.

	1	2	4	8	16	32	64
1	1	2	4	8	16	32	64
5	5	10	20	40	80	160	320
25	25	50	100	200	400	800	1600

шема 3

3° Ако $n = p^k \cdot q^m$, каде p и q се прости броеви, тогаш бројот на делители на n е еднаков на производот $(k + 1)\cdot(m + 1)$.

Да го разгледаме и случајот $n = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$. При неговото разложување се јавуваат три прости броеви: 2, 3 и 7 како основа на степени со експоненти 3, 2 и 1 соодветно. Според својството 2°, бројот 2^3 има 4 делители, бројот 3^2 има 3 делители и бројот 7^1 има 2 делители. Како да се комбинираат делителите на 2^3, 3^2 и 7^1 за да ги преброиме сите делители на 504?

Да ги разгледаме прво можните комбинирања на делителите на 2^3 и 3^2. Според својството 3°, бројот $2^3 \cdot 3^2$ има вкупно $4 \cdot 3 = 12$ делители кои може да се прикажат во следната правоаголна шема од 4×3 единични квадрати :

	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
9	9	18	36	72

шема 4

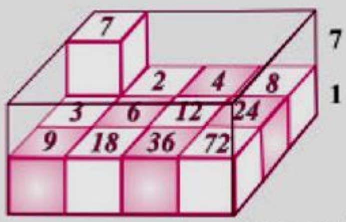
Ако квадратите од шемата 4 ги надградиме до единични коцки, се добива шема во форма на квадар составена од 4×3×1 единични коцки:

шема 5

Но, сега се во игра уште и делителите на бројот 7^1 - броевите 1 и 7. Множејќи ги броевите од шемата 5 со бројот 7, ќе добиеме уште еден квадар од 4×3×1 единични коцки:

шема 6

Последниот квадар (од шема 6) може да го ставиме врз претходниот (од шема 6) по што ќе добиеме два ката еден врз друг, кои формираат квадар од 4×3×2 единични коцки. На секоја коцка сме ѝ продружиле точно еден делител на бројот 504 и со тоа се исцрпени сите негови делители.



шема 7

Значи, бројот $n = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ има вкупно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ делители.

4° Ако $n = p^k \cdot q^m \cdot r^l$, каде p, q и r се прости броеви, тогаш бројот на делители на n е еднаков на производот $(k+1)\cdot(m+1)(l+1)$.

Овие својства може да се обопштат. Ако

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m},$$

каде p_1, p_2 ..., p_m се прости броеви, тогаш бројот на делители на бројот n изнесува

$$|D_n| = (k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_m+1).$$

Пример: Да се одреди бројот на делители на бројот $n = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 23^3$.

Решение: Бројот на делители на дадениот број n ќе го пресметаме ако ги помножиме експонентите на степените на петте прости броеви кои се јавуваат при неговото разложување, зголемени за по 1.

Значи, бројот n има $6\cdot8\cdot5\cdot3\cdot4 = 2880$.

Задачи за самостојна работа

Одреди го бројот на делители на бројот n =

1. 19 **2.** 31 **3.** 49 **4.** 121 **5.** 125 **6.** 625

7. 44 **8.** 63 **9.** 98 **10.** 100 **11.** 968 **12.** 1000

13. $2^5\cdot11^4$ **14.** $2\cdot3^2\cdot5$ **15.** $3^4\cdot5^2\cdot7^5\cdot11^3$ **16.** $2^9\cdot5^2\cdot13\cdot23^3$

Испиши ги сите делители на бројот n =

17. 17 **18.** 25 **19.** 45 **20.** 100 **21.** 3872 **22.** 1800

23. Бројот 6 може да се запише како збир на своите делители помали од самиот тој број ($6 = 1 + 2 + 3$). Ваквиот број се вика *совршен број*. Најди барем уште еден *совршен број*!

24. Докажи дека еден природен број има непарен број на делители ако и само ако тој е полн квадрат.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ