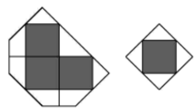
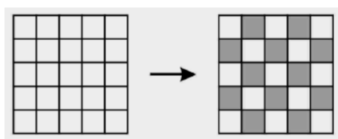
Сава Гроздев, Софија
Алекса Малчески, Скопје

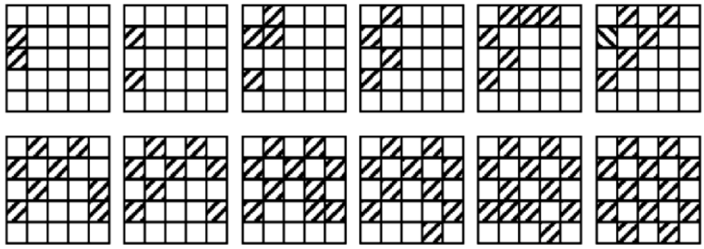
МАЛКУ МАТЕМАТИКА НА ШАХОВСКА ТАБЛА II
(продолжение)

Во претходниот број разгледавме повеќе задачи за покривање на шаховска табла со различни однапред дадени фигури. Покрај разгледаните видови задачи, се среќаваме и со проблеми на распоредување на табла, делимично покривање на табла, нејзино боење или пребојување. Во продолжение ќе се осврнеме на неколку задачи од разгледуваните видови.

1. Од квадрат со димензија 55×55 составен од единечни квадратчиња (клетки), по границите на клетките се исечени 400 триклеточни агли (квадрат 2×2, од кој е отстранета една клетка) и уште 500 единечни клетки. Докажи, дека две од исечените фигури имаат заедничка страна на клетка за граница.
Решение. Да ја сместиме секоја од исечените фигури во “опаковка”, како што е прикажано на цртежот десно. Ако тврдењето на задачата не е точно, тогаш опаковките не се сечат во внатрешни точки. Навистина, опаковката на фигура се состои точно од тие точки, за кои растојанието до фигурата не го надминува растојанието до која и да е клетка без заедничка страна со фигурата.

Тогаш, ако точка X е истовремено внатрешна за две опаковки (соодветните спакувани фигури немаат заедничка страна), тогаш растојанието од X до едната фигура не го надминува растојанието до втората фигура и обратно, тие растојанија се еднакви и X лежи на границата на двете опаковки, што е противречност.
Од претходно изнесеното следува, дека не постојат две опаковки кои имаат заедничка плоштина. Опаковката на триклеточниот агол има плоштина $\frac{11}{2}$, а опаковката на единечната клетка има плоштина 2. Значи, плоштината на сите опаковки ќе биде $400\cdot\frac{11}{2}+500\cdot2=3200$. Но, сите опаковки се наоѓаат во квадрат 56×56 (со ист центар како и дадениот), па како $56^2=3136<3200$, добиваме противречност.

2. Табла со димензии 5×5 е разделена на 25 единечни квадратчиња. Две единечни квадратчиња се соседни, ако имаат заедничка страна. На почетокот сите единечни квадратчиња се бели. Во еден чекор се избираат две соседни квадратчиња и се менуваат нивните бои, т.е. ако едно квадратче било бело, тоа станува црно, а ако било црно, тоа станува бело. Определи го најмалиот број на чекори за да се добие стандардно шаховско боење на таблата (види цртеж).

Решение. Црните квадратчиња при шаховското боење се 12 или 13 и никои две од нив не се соседни. Тоа значи, дека за добивање на шаховско боење, тргнувајќи од почетната соостојба, се потребни најмалку 12 чекори. Подолу се

прикажани 12 последователни чекори со кои се добива стандардно шаховско боење на таблата. Реализацијата не е единствена.



3. Квадрат со димензии 5×5 е поделен на 25 единечни квадратчиња, кои на почетокот се бели (види го цртежот од претходната задача). Една трансформација на квадратот се состои во промена на бојата на три последователни единечни квадратчиња во еден ред или во една колона (белите квадратчиња стануваат црни, а црните – стануваат бели). Определи го најмалиот можен број на трансформации кои се потребни за да се добие стандардно шаховско боење на дадениот квадрат (види го цртежот од претходната задача).

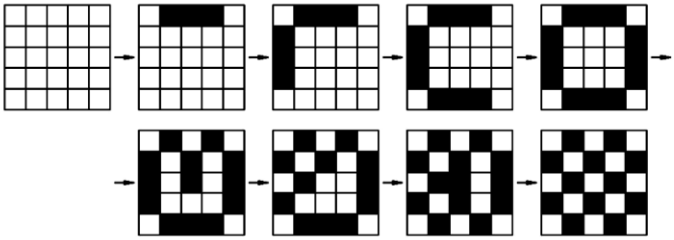
Решение. Да разгледаме три единечни квадратчиња, наредени едно до друго по права линија. Тие формираат право тримино. Трансформацијата, опишани во условот на задачата, може да се разгледува како поставување на прави тримина.

Нека претпоставиме дека таблата е шаховски обоена и да ја решиме обратната задача, т.е. да го определиме најмалиот број трансформаии со кој таблата станува бела. Јасно, вака формулиранатa задача е еквивалентна на почетната задача.

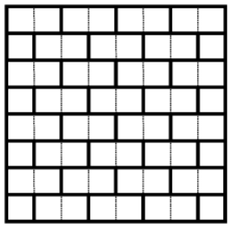
Нека таблата има 12 бели и 13 црни квадратчиња. Јасно, ако имаме 13 црни квадратчиња, тогаш најмалиот број трансформации за таблата да стане бела нема да е помал отколку во случајот кога имаме 12 црни квадратчиња. Понатаму, бело квадратче на таблата може да остане бело само ако врз него се постави парен број тримина, т.е. ако се трансформираат парен број пати (вклучително и нула пати). Црно квадратче може да стане бело само као врз него се постават непарен број тримина. Бидејќи имаме 12 црни квадратчиња (парен број) и збир на парен број непарни броеви е парен број, добиваме дека за промена на бојата на црните квадратчиња се потребни парен број трансформации. Според тоа, за да таблата стане бела треба да извршиме парен број трансформации.

Секое тримино може да покрие најмногу 2 црни квадратчиња и затоа за промена на бројата на 12 црни квадратчиња се потребни најмалку 6 тримина, т.е. 6 трансформации. Јасно, покривање на црните квадратчиња со 6 тримина е можно, на пример, по едно тримино на средината на првиот, третиот и петтиот ред на таблата, по едно тримино на десната страна на вториот и четвртиот ред на таблата и едно тримино на средината на петтата колона на таблата. Но, очигледно едно покривање на 12 црни квадратчиња со 6 тримина не дава резултат. Имено, во исто време дел од белите квадратчиња ќе станат црни, па затоа се потребни нови трансформации. Според тоа, за добивање на бела табла не се доволни 6 трансформации.

Претходно видовме дека треба да извршиме парен број трансформации, па затоа бројот на трансформациите е најмалку 8. Подолу е прикажан пример, како со точно 8 трансформации се постигнува саканата цел.



4. Даден е квадрат со димензии 8×8. Двајца играчи последователно бојат по едно единечно квадратче од квадратот, секој со сопствена боја. Победува играчот кој ќе успее со својата боја да обои квадрат со димензии 2×2. Докажи, дека постои стратегија за вториот играч, која на првиот играч не му дозволува да победи.



Решение. За вториот играч е доволно да ја користи поделбата на почетниот квадрат прикажана на цртежот десно. Во оваа поделба имаме 8 единечни квадратчиња (по 2 на парните редови сметајќи одгоре надолу) и 28 правоаголници со димензии 1×2. При тоа секој 2×2 квадрат содржи точно по еден 1×2 правоаголник.
Стратегијата на вториот играч е следната: Ако првиот играч обои единечно квадратче, тогаш вториот играч исто така ќе обои единечно квадратче. Ако првиот играч обои квадратче од некој 1×2 правоаголник, тогаш вториот играч го бои другото квадратче од истиот правоаголник. Притоа ниту еден 1×2 правоаголник нема да биде еднобоен, па затоа и ниту еден 2×2 квадрат нема да биде еднобоен.

5. Даден е 3×3 квадрат составен од 9 единечни квадратчиња, кои треба да се обојат така што во редовите, во колоните и на двете дијагонали да нема единечни квадратчиња обоени во иста боја. Колку најмалку бои треба да се искористат?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Решение. Да ги нумерираме квадратчињата како цртежот десно. Боите на квадратчињата 1, 2 и 3 треба да се различни, бидејќи се во ист ред. Бојата на 5 треба да е различна од боите на 1 и на 3, бидејќи секое од нив се наоѓа на дијагонала. Таа боја треба да е различна и од бојата на 2, бидејќи со 2 се наоѓа во иста колона. Така заклучуваме, дека се потребни барем четири различни бои. Ако допуштиме, дека се точно четири бои, ќе следува, дека боите на 7 и 2 се исти, бидејќи бојата на 7 треба да е различна од бојата на 1 (заедно со 1 се наоѓа во иста колона). Исто така треба бојата на 7 да е различна и од боите на 3 и 5 (бидејќи заедно со нив се наоѓа на иста дијагонала). На истиот начин следува, дека и бојата на 9 е иста со бојата на 2. Но, тогаш 7 и 9 ќе имаат иста боја, а тоа противречи на условот. Заклучуваме, дека се потребни барем пет различни бои.

б	з	ц
ж	с	б
з	ц	ж

На цртеж лево е прикажано едно можно боење со пет бои: б (бе-

ла), з (зелена), ц (црвена), с (сина) и ж (жолта боја).
Забелешка. Даденото боење не е единствено.

6. Квадрат со димензија $n\times n$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Некои од квадратчињата се обоени со црна боја, а останатите се обоени со бела боја. За секои два реда и секои две колони четирите квадратчиња кои се наоѓаат во тие два реда и тие две колони не се обоени со иста боја. Определи ја најголемата можна вредност на n.

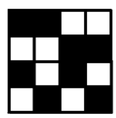
Решение. Ќе докажеме дека бараната најголема вредност е $n=4$. Квадратот даден на цртежот десно, квадратчињата означени со X се обоени во црна боја, докажува дека $n\geq 4$.

		X	X
	X	X	
X	X		
X			X

Нека претпоставиме дека квадрат со страна $n\geq 5$ го има саканото својство. Тогаш постои и квадрат со страна $n=5$ со саканото својство. Од принципот на Дирихле следува дека барем три од квадратчињата во првиот ред се обоени со иста боја (нека тие квадратчиња се црни). Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се првите три квадратчиња. Ако во првите три квадратчиња на произволен ред од останатите четири реда има барем две црни квадратчиња, тогаш постојат два реда и две колони за кои четирите пресечни квадратчиња се еднобојни (црни), што е противречност.
Според тоа, меѓу првите три квадратчиња на секој ред освен првиот има најмногу едно црно квадратче, а останатите две се бели. Но, на три места две бели квадратчиња може да се распоредат на три различни начини, а имаме 4 редови, па затоа во два реда ќе имаме ист распоред на белите квадратчиња, што повторно е противречност.

7. Квадрат со страна 5 е поделен на 25 единични квадратчиња и секое од нив е обоено со една од две бои. Докажи дека постојат четири еднобојни квадрати чии центри се темиња на правоаголник со страни паралелни со страните на квадратот. Докажи дека тврдењето не важи за квадрат со страна 4.

Решение. Нека споменатите бои во задачата се црна и бела. Редовите на таблата да ги означиме со 1,2,3,4 и 5, а колоните со a,b,c,d и e независно од редоследот. Во првиот ред барем три полиња се обоени со иста боја. Нека тоа се $a1, b1$ и $c1$ и нека се обоени бело. Ако две од полињата $a2, b2, c2$ се обоени бело, тогаш бараниот правоаголник е најден. Слично важи и за редовите 3, 4 и 5. Затоа, да претпоставиме дека во секоја од следните четири тројки $a2, b2, c2$; $a3, b3, c3$; $a4, b4, c4$ и $a5, b5, c5,$ има барем по две црни полиња. Бидејќи има само 3 различни можности на распоредување на два елементи на три полиња, следува дека постојат две од тие четири тројки за кои црните полиња се еднакво распоредени. Според тоа, и во овој случај, бараниот правоаголник е најден.
Дека тврдењето на задачата не важи за квадрат со страна 4 се гледа од боењето на цртежот десно.



8. За едно пополнување со 0 и 1 на правоаголна табела со 5 реда и n колони (n – природен број) ќе велиме дека е "добро", ако можеме да избереме 3 реда и 3 колони од табелата така што во полињата во кои тие се сечат, е запишан еден и

ист број. Определи го најмалиот m, за кој секое пополнување со 0 и 1 на табела со 5 реда и n колони, каде $n \geq m$, е добро.

Решение. За едно пополнување со 0 и 1 на табела со 5 реда и n колони ќе велиме дека е "специјално", ако во секоја колона од табелата има точно 3 нули, т.е. 2 единици или точно 3 единици, т.е. 2 нули. Јасно, едно специјално пополнување на табела со 5 реда е добро ако и само ако во табелата има барем 3 еднакви колони. Различни колони со 5 реда, во кои има точно 3 нули и 2 единици или точно 3 единици и 2 нули, има точно 20 (бројот на различни колони со точно 3 нули, како и на оние со точно 3 единици, е еднаков на 10). Според тоа, ако во една табела со 5 реда и 40 колони ја земаме секоја од погоре опишаните 20 колони по двапати, ќе добиеме специјално пополнување на табелата, кое не е добро.

Нека сега имаме табела со 5 реда и $40+s$ ($s \geq 1$) колони, пополнета со 0 и 1. Од даденото пополнување правиме ново на следниов начин: ако во дадена колона од табелата има повеќе од 3 нули, тогаш првите една или две ги заменуваме со единици, така што во колоната да останат точно 3 нули. Соодветно, ако во дадена колона има повеќе од 3 единици, тогаш првите една или две ги заменуваме со нули, така што во колоната да останат точно 3 единици. Јасно, така добиеното пополнување е специјално. Уште повеќе, ако специјалното пополнување е добро, тогаш оригиналното пополнување исто така е добро. Навистина, ако во специјалното пополнување можеме да избереме 3 реда и 3 колони, кои се сечат во полиња, во кои, на пример, е запишан бројот нула, тогаш избраните колони се добиени од оригиналното пополнување со отстранување на некои од нулите. Затоа нулите, во кои се сечат избраните редови и колони, се наоѓаат и во оригиналното пополнување.

Колоните на специјалното пополнување да ги поделиме на две групи: во едната се колони, кои содржат точно 3 нули, а во другата – тие кои содржат точно 3 единици. Бидејќи вкупниот број на колони е $40+s$, во едната група ќе имаме барем 21 колона на табелата. Без ограничување на општоста нека тоа е групата колони кои содржат точно 3 нули. Бидејќи имаме 10 различни колони кои содржат 3 нули, а во таа група има барем 21 колона, некоја од колоните ќе се сретне барем 3 пати и затоа пополнувањето е добро.

Конечно, бараниот m е бројот 41.

9. Град има форма на квадрат со димензии $n \times n$ и е поделен на 1×1 квартови . Во некои од квартовите се поставени предаватели на еден од трите мобилни оператори A, B и C. Секој предавател го опслужува квартот во кој се наоѓа, како и соседните квартови (соседни се квартовите кои имаат заедничка страна или теме). Еколошките стандарди забрануваат монтирање на повеќе од еден предавател во секој кварт. Монтирани се помалку од 2010 предаватели и секој кварт е опслужен од секој оператор. Определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. Позицијата на даден кварт ќе ја означиме со подредениот пар координати $(i, j), i, j = 1, 2, ..., n$. Бидејќи има помалку од 2010 предаватели, заклучуваме дека некој оператор, да кажеме A има помалку од $2010 : 3 = 670$ предаватели. Да забележиме дека ако координатите на два кварта се разликуваат за повеќе од 2, тогаш тие немаат заеднички соседен кварт, па затоа не може да бидат опслужени од еден предавател. Нека $n \geq 76$ и да ги разгледаме кварто-

вите $(3i-2,3j-2)$, за $i,j=1,2,...,26$. Координатите на секои два од овие квартови се разликуваат барем за 3 (при соседни вредности на i и j тие се разликуваат точно за 3), па затоа овие квартови треба да бидат опслужувани од различни предаватели на операторот A. Но, тоа не е можно, бидејќи бројот на тие квартови е $26\cdot 26=676$, а $676>670$. Според тоа, $n<76$.
Ако $n=75$, тогаш предавателите може да се монтираат на следниов начин:

- предавателите на операторот A во квартовите $(3i-1,3j-1)$, за $i,j=1,2,...,25$,
- предавателите на операторот B во квартовите $(3i,3j-1)$, за $i,j=1,2,...,25$ и во квартовите $(1,3j-1)$, за $j=1,2,...,25$, и
- предавателите на операторот C во квартовите $(3i-1,3j)$, за $i,j=1,2,...,25$ и во квартовите $(3i-1,1)$, за $j=1,2,...,25$.

Тогаш секој кварт од градот ќе биде опслужен од сите три оператори. Навистина, квартовите

$$(3i-1,3j-1),(3(i+1)-1,3j-1),(3i-1,3(j+1)-1) \text{ и } (3(i+1)-1,3(j+1)-1),$$

за $i,j=1,2,...,24$ се аголни за квадрат 4×4 и во секој од нив има предавател на операторот A. Овие четири предаватели ги опслужуваат сите квартови од квадратот 4×4, па затоа секој кварт од градот се опслужува од операторот A. Аналогно се покажува дека предавателите на операторите B и C, распоредени на опишаниот начин, ги опслужуваат сите квартови на градот. Притоа, вкупниот број на предаватели е $3\cdot 25\cdot 25+2\cdot 25=1925<2010$. Според тоа, најголемата можна вредност е $n=25$. На долниот цртеж е прикажан распоредот на предавателите за $i,j=1,2,3,4,5$.

	B			**B**			**B**			**B**			**B**	
C	**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**
	B			**B**			**B**			**B**			**B**	
C	**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**
	B			**B**			**B**			**B**			**B**	
C	**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**
	B			**B**			**B**			**B**			**B**	
C	**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**
	B			**B**			**B**			**B**			**B**	
C	**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**		**A**	**C**
	B			**B**			**B**			**B**			**B**	

Литература

1. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. Занимлива математика, MMM, Скопје, 1994
2. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics, The Bulgarian Experience (Theory and Practice), Ruta, Sofia, 2007