РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, ОДРЖАН ВО 1965 ГОД.

Трети клас

1. Два автомобила тргнале едновремено од едно исто место по ист пат, но едниот со брзина од 40 км/ч, а другиот со брзина од 50км/ч. По половина час од тргнувањето на овие, од исто место и по истиот пат, започнал да се движи и еден трет автомобил и тој го достигнал побрзиот од првите два автомобила за 1,5 часови покасно отколку што го достигнал поспориот. Со која брзина се движел третиот автомобил?

2. Со помош на логаритмирање да се реши системот равенки:

$$x^y=y^x,\ x^p=y^q\ (p\neq q).$$

3. Во исечокот од една кружница, чиј радиус е R, е впишана друга кружница, со радиус r. Тетивата на исечокот е 2a.

а) Да се докаже дека е $\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{a}$;

б) Ако е $2a=R$, да се пресмета плоштината на секој од деловите на исечокот што остануваат надвор од впишаната кружница.

4. Во топка со радиус R е впишана една правилна четиристрана пирамида чии бочни триаголници имаат при врвот агол α. Да се пресметаат рабовите на пирамидата.

Четврти клас

1. Ученикот А замислил 5 позитивни броја

$$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$$

а ги соопшти на ученикот В сите различни збирови

$$в_1<в_2<в_3,\ldots<в_n$$

кои ги добил собирајќи два по два од овие броеви, но не кажувајќи му кој збир е добиен од кои два броја.

Колку вакви збирови му беа соопштени на ученикот В? Како може ученикот В, врз основа на она што му е речено, да состави 5 равенки, со помош на кои може да ги најде броевите x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5?

2. Дали постои бесконечна геометриска низа што монотоно

опаѓа,а чиј секој член претставува k-кратна вредност од збирот на сите членови што му следуваат?

Ако постои таква низа,дали може k да биде еднаков со оној член на полиномот

$$\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)^{12}$$

кој не го содржи x?

3. Од точката A се гледаат точките B,P и Q,а од точката B се гледаат точките A,Q и P и при тоа е $\sphericalangle BAQ=30^\circ$, $\sphericalangle QAP=45^\circ$, $\sphericalangle ABP=45^\circ$ и $\sphericalangle PBQ=30^\circ$.Освен тоа се знае уште дека е $PQ=a$ и дека секој од измерените агли се наоѓа надвор од останатите.

Да се најде $AB=x$.

4. Од една произволна точка $P(-\frac{p}{2},y)$ на директрисата на параболата $y^2=2px$ се повлечени две тангенти до параболата.

Да се докаже дека правата што минува низ допирните точки M_1 и M_2 на овие тангенти и параболата,минува и низ фокусот.

Да се определи геометриското место на средините на отсечката M_1M_2 ,ако точката P се движи по директрисата.

РЕШЕНИЈА

Трети клас

1. Нека е v брзината на тертиот автомобил,а t времето за кое тој го достигнал поспориот автомобил.Тогаш од дадените услови следува:

$$(t+0,5)40=vt,(t+2)50=v(t+1,5).$$

Со решавањето на овој систем равенки се добива:

$$t_1=1,\ v_1=60\ ;$$

$$t_2=-3,\ v_2=\frac{100}{3}.$$

На природата на задачата ѝ одговара само првото решение.

2. Од системот равенки

$$x^y=y^x,\ x^p=y^q$$

следува:

$$x=y^{\frac{x}{y}},\ x=y^{\frac{q}{p}};\ y^{\frac{x}{y}}=y^{\frac{q}{p}},\ \frac{x}{y}=\frac{q}{p},\ \frac{x}{q}=\frac{y}{p}\ .$$

Нека е

$$\frac{x}{q}=\frac{y}{p}=t;\quad x=qt,\ y=pt.$$

Тогаш е:

$$(qt)^p=(pt)^q,\quad q^pt^p=p^qt^q,\quad t^{p-q}=\frac{p^q}{q^p}.$$

$$t=\sqrt[p-q]{\frac{p^q}{q^p}}=\sqrt[q-p]{\frac{q^p}{p^q}};$$

$$x=q\sqrt[p-q]{\frac{p^q}{q^p}},\quad y=p\sqrt[q-p]{\frac{q^p}{p^q}}.$$

3.а) $\Delta OBC\sim\Delta OO_1D$ (сл.43)

Од сличноста на тие триаголници следува:

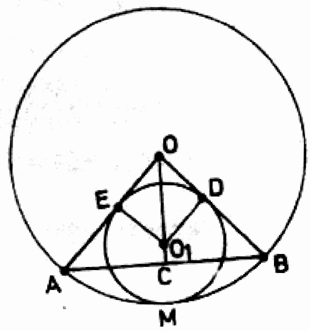
$a:R=r:(R-r)$, $a(R-r)=Rr$, $aR-ar=Rr$;

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{R}$$

б) За $2a=R$ централниот агол на исечокот изнесува 60°, $r=\frac{R}{3}$

Од триаголникот OO_1D имаме:

$$\overline{OD}=r\sqrt{3}=\frac{R\sqrt{3}}{3}.$$



Сл.43

$$P_{EDO}=P_1=r\cdot\overline{OD}-\frac{\pi r^2}{3}=r^2\sqrt{3}-\frac{\pi r^2}{3}=r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{R^2}{9}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

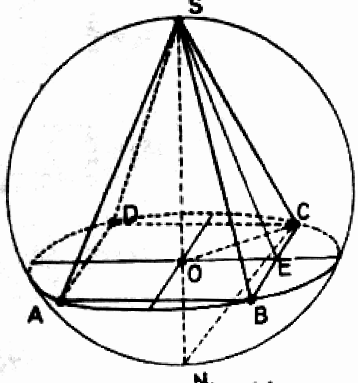
$$P_{MBD}=P_2=\frac{\pi R^2}{12}-\frac{\pi r^2}{3}-\frac{r\cdot\overline{OD}}{2}=\frac{\pi R^2}{12}-\frac{\pi r^2}{3}-\frac{r^2\sqrt{3}}{2}=\frac{R^2}{108}(5\pi-6\sqrt{3}).$$

4. Во пирамидата ABCDS(сл.44) основните рабови нека се обележени со а, бочните рабови нека се в, висината на пирамидата нека е H, а бочната висина нека е h.

Тогаш од триаголникот NCS следува:

$$2RH=\text{в}^2.$$

Од друга пак страна, од триаголникот OES, имаме:



Сл.44

$$H=\sqrt{h^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} ,$$

што значи, бидејќи е $h=a\cos\frac{\alpha}{2}$, $\frac{a}{2}=a\sin\frac{\alpha}{2}$, дека е

$$H=\sqrt{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=a\sqrt{\cos\alpha}.$$

Следува:

$$2Ra\sqrt{\cos\alpha}=a^2,\ a=2R\sqrt{\cos\alpha},\ s=4R\sqrt{\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} .$$

Четврти клас

1. На ученикот В му беа соопштени $C_5^2=\frac{5\cdot4}{2}=10$ различни збирови. За да се најдат броевите x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 ќе се формират следните пет равенки:

$$x_1+x_2=s_1,\ x_1+x_3=s_2 ,$$

$$x_3+x_5=s ,\ x_4+x_5=s_{10},$$

$$(x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_1+x_4)+(x_1+x_5)+(x_2+x_3)+(x_2+x_4)+(x_2+x_5)+$$

$$+(x_3+x_4)+(x_3+x_5)+(x_4+x_5)=\sum_{i=1}^{10}s_i$$

Петтата равенка може да се запише во вид:

$$4(x_1+x_2+x_3+x_4+x\ )=\sum_{i=1}^{10}s_i .$$

Со решавање на тој систем се добива:

$$x_1=s_1+s_2+s_{10}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}s_i ,$$

$$x_2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}s_i-(s_2+s_{10}),$$

$$x_3=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}s_i-(s_1+s_{10}),$$

$$x_4=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}s_i-(s_1+s_{10}),$$

$$x_5=s_1+s_9+s_{10}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}s_i .$$

2. Нека го обележиме било кој член на таа прогресија со a_n ,а нејзиниот збир со S .Тогаш според дадените услови, треба да биде:

$$a_n=k(S-S_n),$$

$$a_n = \frac{ka_1}{1-q} - \frac{ka_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{ka_1 q^n}{1-q} = \frac{ka_n q}{1-q}.$$

Оттука следува:

$$\frac{kq}{1-q} = 1,\quad q(k+1)=1,\quad q=\frac{1}{k+1}.$$

Дадениот услов ќе биде задоволен ако a_1 има било каква вредност,и ако е $q=\frac{1}{k+1}$.

Членот кој не го содржи x во полиномот $(\frac{a}{x}+\frac{x}{a})^{12}$ е

$$\binom{12}{r}\left(\frac{a}{x}\right)^{12-r}\left(\frac{x}{a}\right)^{r} = \binom{12}{r}\left(\frac{x}{a}\right)^{2r-12},$$

под услов да е $2r-12=0$,односно дека е $r=6$.

Тој член е,според тоа: $\binom{12}{6}=924$.

k може да биде 924,со што количникот на низата треба да е $q=\frac{1}{925}$.

3. Со оглед на тоа дека е

$\sphericalangle AQB=180^\circ-(30^\circ+75^\circ)=75^\circ$,

ΔABQ е рамнокрак и $AQ=x$ (сл.45)

Бидејќи е

$\sphericalangle APB=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$,

од триаголникот ABP имаме:

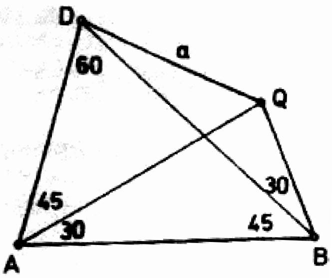
$$\frac{\overline{AP}}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 60^\circ},\quad \overline{AP}=\frac{x\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$$

Од ΔAQP следува:

$$a^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\overline{AP}.\overline{AQ}\cos 45^\circ,$$

$$a^2=\frac{x^2\sin^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ}+x^2-2\,\frac{x^2\sin 45^\circ.\cos 45^\circ}{\sin^2 60^\circ},$$

$$a^2=\frac{5-2\sqrt{3}}{3}x^2,\quad x=a\sqrt{\frac{3(5+2\sqrt{3})}{13}}.$$



Сл.45

4. Равенката на тангентата повлечена во некоја точка $T(x_1, y_1)$ на параболата $y^2=2px$, има вид:

$$yy_1=p(x+x_1). \qquad (1)$$

Ако тангентата е повлечена од некоја точка $P(-\frac{p}{2}, t)$ на директрисата, тогаш координатите на оваа точка треба да ја задоволуваат равенката (1), и така се добива

$$ty_1=p(x_1-\frac{p}{2}) \ . \qquad (2)$$

од системот равенки

$$ty_1=p(x_1-\frac{p}{2}),\ y_1^2=2px_1$$

се добива

$$x_1=\frac{2t^2+p^2+2t\sqrt{t^2+p^2}}{2p},\ y_1=t+\sqrt{t^2+p^2}\ ;$$

$$x_2=\frac{2t^2+p^2-2t\sqrt{t^2+p^2}}{2p},\ y_2=t-\sqrt{t^2+p^2}\ .$$

Според тоа допирните точки на параболата се:

$$M_1\left(\frac{2t^2+p^2+2t\sqrt{t^2+p^2}}{2p},\ t+\sqrt{t^2+p^2}\right),\ M_2\left(\frac{2t^2+p^2-2t\sqrt{t^2+p^2}}{2p},\ t-\sqrt{t^2+p^2}\right)\ .$$

Равенката на правата низ допирните точки M_1 и M_2 е

$$y-t-\sqrt{t^2+p^2}=\frac{p}{t}\left(x-\frac{2t^2+p^2+2t\sqrt{t^2+p^2}}{2p}\right).$$

Равенката на правата низ допирните точки е задоволена од координатите на фокусот $F(\frac{p}{2},0)$ со кое се потврдува дека таа права минува низ фокусот.

Координатите на средината на отсечката M_1M_2 се:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2t^2+p^2}{2p},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=t\ .$$

Ако од овие равенки се елиминира параметарот t, се добива:

$$2px=2y^2+p^2, \qquad y^2=p(x-\frac{p}{2})\ .$$

Значи, бараното геометриско место е парабола, со теме во точката $T(\frac{p}{2},0)$ и параметар $p_1=\frac{p}{2}$.

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески