БМО 1998

1. Определи го бројот на различните членови на конечната низа со општ член $[\frac{k^2}{1998}]$, каде $k=1,2,...,1997$.

Решение. Бидејќи разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1}^{999}$ е помала од 1, заклучуваме дека секои два соседни членови на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1}^{999}$ се еднакви или се разликуваат за 1. Бидејќи првиот член на таа низа е еднаков на $[\frac{0^2}{1998}]=0$, а последниот на $[\frac{999^2}{1998}]=499$, заклучуваме дека бројот на нејзините различни членови е 500. Од друга страна, разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1000}^{1997}$ е поголема од 1 и затоа членовите на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1000}^{1997}$ се различни.

Конечно, дадената низа има $500+998=1498$ различни членови.

2. Нека $n \geq 2$ е природен број и $0<a_1<a_2<...<a_{2n+1}$ се реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+...-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}}<\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}} .$$

Решение. Нека $m \geq 2$ е природен број. Со индукција по $n \geq 1$ ќе докажеме поопшто неравенство од даденото, т.е. ќе докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+...-\sqrt[m]{a_{2n}}+\sqrt[m]{a_{2n+1}}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}} .$$

За $n=1$ треба да докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+\sqrt[m]{a_3}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3} ,$$

т.е.

$$(a-b+c)^m-a^m \leq c^m-b^m ,$$

каде $a=\sqrt[m]{a_1}, b=\sqrt[m]{a_2}, c=\sqrt[m]{a_3}$.Последното следува од

$$\begin{aligned}(a-b+c)^m-a^m &=(c-b)(a^{m-1}+a^{m-2}(c-b)+...+a(c-b)^{m-2}+(c-b)^{m-1}) \\ &<(c-b)(b^{m-1}+b^{m-2}c+...+bc^{m-2}+c^{m-1}) \\ &=c^m-b^m,\end{aligned}$$

(искористивме дека $m>1, 0<a<b, 0<c-b<c$).

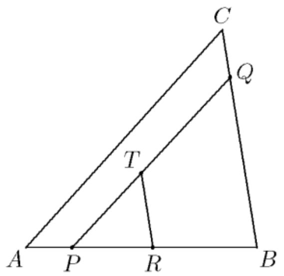
Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој $n \geq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}&\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+...-\sqrt[m]{a_{2n}}+\sqrt[m]{a_{2n+1}}-\sqrt[m]{a_{2n+2}}+\sqrt[m]{a_{2n+3}}< \\ &<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}-\sqrt[m]{a_{2n+2}}+\sqrt[m]{a_{2n+3}} \\ &<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}+a_{2n+3}}\end{aligned}$$

При што првото неравенство важи заради индуктивната претпоставка, а второто неравенство е веќе докажаната база на индукцијата, т.е. неравенството за три броја. Со тоа поопштото неравенство е докажано за $n+1$ и од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој природен број n.

3. Нека S е множеството внатрешни точки на даден триаголник без една контурна точка. Докажи, дека S може да се претстави како унија на затворени отсечки такви што не постојат две отсечки кои имаат заедничка точка.

Решение. Нека T е внатрешна точка на триаголникот ABC, Q е точка на страната BC таква што $TQ \parallel AC$, а P и R се точки на страната AB такви што $TP \parallel AC$ и $TR \parallel BC$. Ги разгледуваме сите затворени отсечки $XY, X \in AP,$ $X \neq P,$ $Y \in CQ,$ $Y \neq Q$. Овие отсечки го покриваат трапезот $APQC$ без отсечката PQ. Аналогно, отсечките $MN, M \in QT,$ $M \neq T,$ $N \in BR,$ $N \neq R$ го покриваат трапезот $TRBQ$ без отсечката TR. На крајот, на ист начин го покриваме $\triangle PRT$ без точката T со отсечки паралелни со PR.



4. Докажи, дека равенката $m^2 = n^5 - 4$ нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. *Прв начин.* Од условот следува дека n е природен број и $n \geq 2$, т.е. доволно е да бараме решенија во множеството природни броеви. Лесно се проверува дека можните остатоци на квадрат на еден природен број при делење со 11 се 0, 1, 3, 4, 5 и 9, т.е. $m^2 \equiv 0,1,3,4,5,9 \pmod{11}$. Аналогно $n^5 \equiv 0,1,10 \pmod{11}$, па затоа $n^5 - 4 \equiv 6,7,8 \pmod{11}$. Од горните конгруенции следува дека $m^2 \not\equiv n^5 - 4 \pmod{11}$, што значи дека дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

Втор начин. Равенката $m^2 = n^5 - 4$ нема решение по модул 11. Навистина, можни остатоци на m^2 по модил 11 се 0, 1, 3, 4, 5 и 9, а $n^5 - 4$ дава само остатоци 6, 7 и 8. Тоа значи дека равенката нема решение во множеството цели броеви.