Ристо Малчески
Скопје

МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ

Во математиката често се среќаваме со задачи од следниов вид:

Дадени се некој математички објект А и дозволени трансформации на истиот. Се поставува прашањето дали со повеќекратна примена на дозволените трансформации дадениот објект А може да се претвори (трансформира) во некој друг однапред зададен објект Б.

Решавањето на задачите од овој вид се сведува на следниве два случаја:

- ако одговорот на поставеното прашање е позитивен, тогаш доволно е да се наведе било кој пример кој покажува како може со помош на допустливите трансформации од објектот *А* да се добие објектот *Б* и
- ако одговорот на поставеното прашање е негативен, тогаш е потребно да се докаже дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот *А* никогаш нема да се добие објектот *Б*.

Очигледно, во првиот случај треба да го докажеме постоењето на низа допустливи трансформации која ја обезбедува трансформацијата на објектот *А* во објектот *Б*, што секогаш не е едноставна задача. Како да постапиме во вториот случај? Иако одговорот на ова прашање не е еднозначен, а уште помалку едноставен, сепак во многу случаи го користиме следниов метод:

- наоѓаме својство кое го има објектот *А* и кое не се менува кога на *А* ќе се примени која било од допустливите трансформации,
- докажуваме дека објектот *Б* го нема наведеното својство, и
- заклучуваме дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот *А* никогаш нема да се добие објектот *Б*.

Својството кое го има објектот *А* и кое не се менува кога на *А* ќе се примени допустлива трансформација го нарекуваме *инваријанта* на допустливата трансформација, а претходно опишаниот метод го нарекуваме *метод на инваријанти*. Ќе разгледаме неколку примери во кои ќе го користиме методот на инваријанти.

Пример 1. Квадратна табла 3×3 пополнета е со броевите 0,1,2,...,8, редоследно почнувајчи од горното лево теме. Во секој чекор можеме да избереме две соседни полиња (имаат заедничка страна) и броевите во нив да ги намалиме за вредноста на помалиот, без да ги менуваме останатите. Дали со ваквите промени може да се добие табла пополнета само со нули?

Решение. Таблата 3×3 ја боиме како шаховска табла. Разликата на збирот на броевите кои се наоѓаат на црните и збирот на броевите кои се наоѓаат на белите полиња е еднаква на 4. Со секој дозволен чекор оваа разлика не се менува, т.е. таа е инваријанта, па затоа со дозволените промени не е можно таблата да е пополнета само со нули. ■

Пример 2. Една 9×10 табла е покриена со 2×1 домина, а потоа домината се измешани. Докажи дека таблата не може повторно да се покрие со овие домина, така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање е во вертикална положба и обратно.

Решение. Нека таблата е поставена така што има 10 редици и 9 колони. Вертикалните домина од првата колона покриваат парен број полиња, па затоа и бројот на полињата покриени со хоризонталните домина е парен. Според тоа, хоризонталните домина покриваат парен број полиња од втората колона. Бидејќи и вертикалните домина од втората колона покриваат парен број полиња, добиваме дека остануваат парен број полиња кои се покриени од домина кои “преминуваат” и на третата колона. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека вкупниот број хоризонтални домина е парен. Но, вкупно имаме 45 домина, па затоа вкупниот број вертикални домина е непарен.

Од претходните разгледувања следува, дека при секое покривање парноста на вкупниот број хоризонтални домина и непарноста на вкупниот број вертикални домина се инваријанти, па затоа второто покривање во кое хоризонталните домина стануваат вертикални, а вертикалните хоризонтални не е можно. ■

Пример 3. На почетокот на таблата се напишани броевите 1,2,3,..., 2010. Во еден чекор е дозволено некои два броја a и b да ги замениме со бројот $ab+a+b$. Дали на овој начин може да се добие бројот

а) $2^{2011}-1$,   б) 2^{2011}.

Решение. Ако почетните броеви ги зголемиме за 1 ги добиваме броевите 2,3,4, ..., 2011, чиј производ е $2011!$. Но, $(a+1)(b+1)=(ab+a+b)+1$, па значи со зголемување на запишаните броеви за 1 нивниот прозвод не се менува, т.е. тој е инваријанта. Ако го добиеме бројот $2^{2011}-1$, тоа значи дека 2^{2011} е делител на 2011!, што не е точно. Ако добиеме 2^{2011}, тоа значи дека $2^{2011}+1$ е делител на 2011!, што не е точно бидејќи сите прости делители на $\frac{1}{3}(2^{2011}+1)$ се поголеми од 2011 (провери!). ■

Пример 4. На почетокот се запишани полиномите $x, x^3, x^5, ..., x^{2k+1}, ...$. Ако во еден момент се запишани полиномите $f(x)$ и $g(x)$, тогаш дозволено е да се запишат полиномите $af(x)+b$, ($a \geq 0$), $f(x)+g(x)$ или $f(x)g(x)$. Дали може со опишаната постапка да се добие полиномот $x^{2013}-20x+11$?

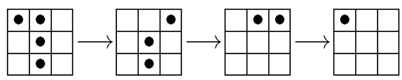
Решение. Почетните полиноми се неопаѓачки и со дозволените операции се запазува ова својство, т.е. тоа е инваријанта. Но, полиномот $x^{2013}-20x+11$ не е неопаѓачки на $\mathbf{R}$, бидејќи $f(0)=11>-8=f(1)$, што значи дека со опишаната постапка не може да се добие овој полином. ■

Пример 5. Дадени се броевите 0,1 и $\sqrt{2}$. Во еден чекор е дозволено еден од броеви да се замени со бројот кој се добива така што нему му се додава разликата на другите два помножена со некој рационален број. Дали со ваквите операции може да се добијат броевите 0, 2 и $\sqrt{2}$?

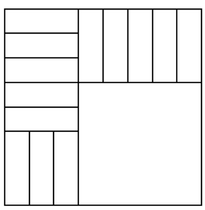
Решение. Секој број кој се добива со опишаната постапка може на единствен начин да се запише во обликот $a+b\sqrt{2}$, $a,b \in \mathbf{Q}$. На овој број во координатната рамнина му ја придружуваме точката (a,b), па така во секој момент на трите броја во рамнината му соодветсвуваат три точки, кои се темиња на триаголник. Понатаму, со наведените операции едно теме на триаголникот се поместува паралелно со спротивната страна (провери?). Но, тоа значи дека плоштината на триаголникот е инваријанта. Но, на броевите 0,1 и $\sqrt{2}$ соодветствува триаголник со темиња (0,0), (1,0) и (1,0), кој има плоштина $\frac{1}{2}$, а на броевите 0, 2 и $\sqrt{2}$ соодвествува триаголник со темиња (0,0), (2,0) и (0,1), кој има плоштина 1. Според тоа, со опишаната постапка од броевите 0,1 и $\sqrt{2}$ не може да се добијат броевите 0,1 и $\sqrt{2}$. ■

Пример 6. На бесконечна шаховска табла во квадрат $n \times n$ се распоредени n^2 жетони, на секое шполе по еден жетон. Се игра следната игра. Во еден потег еден жетон се преместува во хоризонтален или вертикален правец, преку жетонот на соседното поле, на следното поле, ако истото е слободно. Прескокнатот жетон се отстранува од таблата. За кои n може да се постигне на таблата да остане само еден жетон?

Решение. Нека претпоставиме дека играта може да заврши за $n = 3k$. Колоните и редиците последователно ги нумерираме со природните броеви. Нека S_m, $m = 0,1,2$ е бројот на жетоните на полињата (i, j) за кои важи $i + j \equiv m (\mathrm{mod}\, 3)$. На почетокот имаме $S_0 = S_1 = S_2 = 3k^2$, што значи дека броевите $S_m, m = 0,1,2$ имаа иста парност. Со секој потег се менува парноста на сите три броја, двата се намалуваат за 1, а третиот се зголемува за 1, што значи дека својството *броевите* $S_m, m = 0,1,2$ *имаат иста парност е инваријанта*. Но, ако на таблата може да остане само еден жетон, тогаш два од овие броја се еднакви на 0 и еден е еднаков на 1, што значи дека броевите S_m, $m = 0,1,2$ немаат иста парност. Значи, за $n = 3k$ целта не може да се постигне.



Цртеж 1



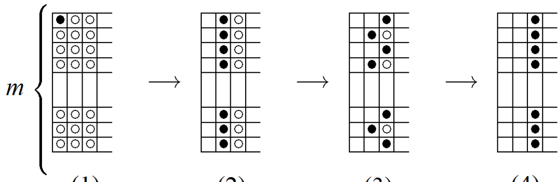
Цртеж 2

Ако $3 \nmid n$, тогаш целта може да се исполни. За $n \leq 2$ тоа лесно се проверува. За $n \geq 4$, со низата потези прикажани на цртеж 1 се отстрануваат по 3 жетони во правоаголникот 1×3, при што се користи само еден жетон и едно слободно поле. Така играта можеме да ја сведеме од квадрат $n \times n$, на квадрат $(n-3) \times (n-3)$, цртеж 2. ■

Пример 7. На правоаголна $m \times n$ табла на полињата се поставени жетони кои се бели од едната страна и црни од другата страна, така да сите жетони се свртени на белата страна, освен жетонот кој се наоѓа во еден од аглите на таблата кој е свртен на црната страна. Во еден потег е дозволено да се земе еден жетон кој е свртен на црната страна и притоа сите негови соседни по страни жетони се свртуваат. За кои m и n од таблата можеме да ги земеме сите жетони?

Решение. Нека A е бројот на жетоните свртени на белата страна, а B е бројот парови жетони соседни по страни. Со отстранување на црн жетон со k бели и p сосоеди, A се намалува за $k - p$, а B за $k + p$, па оттука следува дека бројот $A + B$ не ја менува парноста. На почетокот важи $A + B = 3mn - m - n - 1$ и ако успееме да ги земеме сите жетони, на крајот ќе важи $A + B = 0$. Според тоа, треба да важи $2\mid(3mn-m-n-1)$, што значи дека барем еден од броевите m и n мора да биде непарен.

Навистина, ако на пример m непарен, можеме да ја постигнеме целта (види цртеж). Имено, од позицијата (1) во позицијата (2) можеме да стигнеме со m чекори; потоа во позицијата (3) можеме да стигнеме со $\frac{m+1}{2}$ чекори, па во позицијата (4) можеме да стигнеме во следните $\frac{m-1}{2}$ чекори. Понатаму, ги повторуваме чекорите за премин од позицијата (2) во позицијата (4) и продолжуваме се додека не ја испразниме таблата. ■



(1) (2) (3) (4)

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Рамностран триаголник ABC со страна $\overline{AB}=n$ е поделен на n^2 единечни рамнострани триаголници. Во секое теме на малите триаголници придружен е по еден број, и тоа бројот 1 на темињата A,B,C и точката D таква да $\overline{AD}=\sqrt{3}$, а 0 на сите останати темиња. Во еден чекор броевите запишани во темињата на некој ромб со должина на страна 1 (составен од два мали триаголници), да ги зголемиме или намалиме за иста вредност. За кои n може да се постигне сите броеви да се еднакви на нула?
2. На почетокот на таблата се запишани n единици. Во еден чекор е дозволено од таблата да се избришат броевите x и y , а наместо нив да се запише бројот $\frac{x+y}{4}$. После $n-1$ чекори на таблата ќе остане само еден број. Докажи дека овој број не е помал од $\frac{1}{n}$.
3. Во сала има 2011^2 сијалици распоредени во темињата на квадратна решетка со страна 2010. На почетокот се запалени k сијалици. Во секој чекор избираме единечен квадрат, и ако во него се запалени 3 сијалици, ја палиме и четвртата. За кое k постои почетна позицијакоја допушта после конечен број чекори сите сијалици да бидат запалени?
4. На некои целобројни точки на бројната права се наоѓаат по неколку жетони. Дозволено е да ги изведуваме следниве два вида операции:
   1) Отстрануваме по еден жетон од точките $n-1$ и n и ставаме еден жетон на точката $n+1$,
   2) Отстрануваме два жетони од точката n и ставаме по еден на точките $n-2$ и $n+1$.

   Докажи дека после одреден број чекори веќе нема да можеме да извршиме ниту една операција. Докажи дека завршната операција не зависи од редоследот на потезите.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малчески, Р.: *Метод на инваријанти* I *и* II, Нумерус, Скопје, 2005
2. Тошиќ, Р.: *Инваријанте – варијације на тему*, АЛЕФ, Нови Сад, 1996
3. Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.: *Занимлива математика*, МММ, Скопје, 1994

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ