Републички натпревар 1997

I година

1. Дадена е низата $\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},...$. Кој број стои на 1997 -то место?

Решение. Лесно се воочува дека членовите на низата се подредени во „групи“, такви што збирот на броителот и именителот во секоја од нив е ист за сите броеви од таа „група“. Така, првата „група“, има еден член (со збир на броителот и именителот еднаков на 2), втората “група” има два члена (со збир на броителот и именителот еднаков на 3), третата група има три члена (со збир еднаков на 4), итн., n -тата група има n членови (со збир на броителот и именителот еднаков на $n+1$), т.е. тоа е „групата“ $\frac{n}{1},\frac{n-1}{2},\frac{n-2}{3},...,\frac{2}{n-1},\frac{1}{n}$. Заклучно со ова “група” низата содржи

$$S_n = 1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

члена. Бидејќи се бара кој член на низата се наоѓа на 1997 -то место, прво треба да определиме во која “група” се наоѓа бараниот член на низата. Имаме

$$\frac{n(n+1)}{2} \le 1997 \le \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

од каде што наоѓаме дека $n = 62$. Тогаш $S_{62} = 1953$, а до 1997 има место за уште 44 членови, кои се од “групата”

$$\frac{63}{1},\frac{62}{2},\frac{61}{3},...,\frac{20}{44},...,\frac{1}{63}.$$

Следствено, бараниот број е $\frac{20}{44}$.

2. На шаховска табла со димензии 8×8 во секое поле, на произволен начин, се поставени цифрите 0 и 1. Распоредот на цифрите може да се менува со потези на следниот начин: со еден потег се менува распоредот на цела редица или цела колона, при што нулите стануваат единици, а единиците нули. Докажете дека постои низа од потези со коишто на таблата ќе се добие состојба во која збирот на цифрите во секоја редица и секоја колона е поголем или еднаков на 4.

Решение. Нека претпоставиме дека на таблата постои редица или колона таква што бројот на единиците е помал од 4 . Со $S_\circ$ да го означиме бројот на единиците поставени на почетната позиција на таблата, а со S_1 да го означиме бројот на единици после промената на некој од потезите во следната стратегија:

Потег 1. Бараме редица која содржи помалку од 4 единици. Можни се два случаја.

1а) таква редица постои и истата ја менуваме, со што на таблата ќе добиеме редица која ќе има најмалку 5 единици, а бројот на единиците на таблата ќе се зголеми најмалку за две;

2а) таква редица не постои и тогаш одиме на вториот потег.

Потег 2. Бараме колона во која бројот на единиците е помал од 4. Можни се два случаја:

1б) таква колона постои и истата ја менуваме, со што на таблата ќе добиеме колона која ќе има најмалку 5 единици, а бројот на единиците на таблата ќе се зголеми за две;

2б) таква колона не постои и тогаш одиме на првиот потег.

Така во случаите 1а) и 1б) го менуваме и бројот на единиците на таблата, при што добиваме низа $S_\circ, S_1, S_2, S_3, \ldots$, за која важи $S_\circ < S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$. Но, на таблата има 64 полиња, на кои може да се постават најмногу 64 единици. Затоа постапката ќе заврши, т.е. после некој потег нема да може да го зголемиме бројот на единиците во ниедна редица и во ниедна колона, што значи збирот на елементите во секоја редица и секоја колона ќе биде поголем или еднаков на 4

3. Киро и Рампо ја играат следната игра: од две купчиња со камчиња, Киро го зема едното, а другото, по свој избор, го разделува на две купчиња. Рампо зема едно од двете нови купчиња, а другото по свој избор, го разделува на две нови купчиња итн. Играта ја губи оној што не може да го подели преостанатото купче. Во кој случај, со вистинска стратегија, играта ја добива Киро, а во кој случај Рампо? Која е стратегијата?

Решение. Ако барем едно купче е "парно", тогаш тоа купче Киро ќе го раздели на две непарни купчиња. Рампо, избирајќи едно од тие две купчиња, другото ќе го раздели на "парно" и " непарно". Сега, одново Киро ќе го избере "непарното" купче, а парното ќе го раздели на две "непарни" купчиња итн., се до последниот потег на Рампо на кого ќе му останат две купчиња со по едо камче, кои што, се разбира, не може да се поделат, па затоа Рампо ја губи играта.

Кога и двете купчиња имаат непарен број камчиња, тогаш по првиот потег на Киро, Рампо е во позиција да има на располагање "парно" и "непарно" купче, па затоа во овој случај Рампо ја добива играта.

Значи, стратегијата на ова игра е: на противникот да му оставите на располагање две "непарни" купчиња.

4. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC, D, E и F се подножните точки на висините спуштени од темињата A, B и C соодветно, и нека $\overline{AH} = \overline{HD}$ и $\overline{BH} = 2\overline{HE}$.

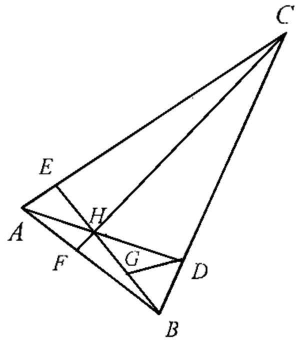
а) Најдете го односот $\overline{CH} : \overline{HF}$,

б) Најдете го аголот ACB .

Решение. а) Од условите на задачата имаме:

$$P_{AHC} = \tfrac{1}{2}\overline{AC} \cdot \tfrac{1}{3}\overline{BE} = \tfrac{1}{3}P_{ABC} \qquad \text{и} \qquad P_{BHC} = \tfrac{1}{2}\overline{BC} \cdot \tfrac{1}{2}\overline{AD} = \tfrac{1}{2}P_{ABC} \quad .$$

Според тоа,



$$P_{AHB}=P_{ABC}-P_{AHC}-P_{BHC}$$
$$=P_{ABC}-\tfrac{1}{2}P_{ABC}-\tfrac{1}{3}P_{ABC}=\tfrac{1}{6}P_{ABC}.$$

Но,

$P_{AHB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{HF}$ и $P_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CF}$,

и ако замениме во последното равенство, добиваме $\overline{HF}=\frac{1}{6}\overline{CF}$, од што следува $\overline{CH}:\overline{HF}=5:1$.

б) Нека G средина на $\overline{BH}$. Триаголникот BDH е правоаголен, со прав агол во темето D, па затоа

$$\overline{BG}=\overline{GH}=\overline{GD}.$$

Од $\overline{AH}=\overline{HD}$, $\overline{EH}=\overline{HG}$ и $\measuredangle AHE=\measuredangle DHG$, следува $\Delta AEH\cong\Delta DGH$. Според тоа, $\overline{AE}=\overline{DG}=\overline{HG}=\overline{EH}$, т.е. $\triangle AEH$ е рамнокрак и правоаголен, па значи $\measuredangle EAH=45^\circ$. Конечно, од триаголникот CAD добиваме

$$\measuredangle ACB=90^\circ-\measuredangle CAD=90^\circ-\measuredangle EAH=45^\circ.$$

II година

1. Во множеството на реалните броеви решете ја неравенката

$$\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{4x+15}+2x)(\sqrt{4x+15}-2x)}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{4x+15}+2x\ne 0\\ \sqrt{4x+15}-2x\ge 0.\end{cases}$$

Бидејќи $\sqrt{4x+15}+2x=0$ за $x=-\frac{3}{2}$, а

$$\sqrt{4x+15}\ge 2x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}4x+15\ge 0\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}4x+15\ge 4x^2\\ x\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -\frac{15}{4}\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{3}{2}\le x\le \frac{5}{2}\\ x\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-\tfrac{15}{4},\tfrac{5}{2}].$$

Конечно, $x\in[-\frac{15}{4},-\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$.

2. Нека p е прост број, $p>2$. Дали постојат природни броеви x и y такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$?

Решение. Нека претпоставиме дека постојат природни броеви x и y такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$. Со квадрирање на последното равенство добиваме

$$x+y+2\sqrt{xy}=2p. \tag{1}$$

Бидејќи, x,y и $2p$ се природни броеви, од (1) следува дека и $\sqrt{xy}$ е природен број, т.е. $xy=k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Тогаш, $x+y=2(p-k)$. Од последните две равенства заклучуваме дека x и y се решенија на квадратаната равенкаж

$$t^2-2(p-k)t+k^2=0. \tag{2}$$

Значи, решенијата на равенката (2) се природни броеви, па затоа нејзината дискриминанта е ненегативна и е полн квадрат, т.е.
$4p(p-2k)\ge 0$ и $4p(p-2k)=4m^2$.
Јасно, $4p(p-2k)\ge 0$, бидејќи во спротивно е $p=2k$, што противречи на $p>2$ и p е прост број. Според тоа $p(p-2k)=m^2$, $m\neq 0$, и бидејќи p е прост број, добиваме $m=pn$, за некој $n\in\mathbb{N}$, т.е. добиваме дека m^2 е делив со p^2. Но, последното не е можно бидејќи $p(p-2k)$ не е делив со p^2, т.е. $p-2k$ не е делив со p. Конечно, за секој прост број $p, p>2$, не постојат такви природни броеви x и y такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$.

3. Најдете природни броеви p и q такви што нулите на триномите x^2-px+q и x^2-qx+p да бидат природни броеви.

Решение. Нека x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2-px+q=0$, а y_1,y_2 на равенката $x^2-qx+p=0$. Од Виетовите формули имаме

$$x_1+x_2=p, \qquad x_1x_2=q, \tag{1}$$

$$y_1+y_2=q, \qquad y_1y_2=p. \tag{2}$$

Ќе разгледаме два случаја.

I **случај.** Еден од броевите x_1,x_2,y_1,y_2 е еднаков на 1. Нека тоа е x_1. Од (1) следува дека $q+1=p$ и со замена во (2) добиваме $y_1+y_2+1=y_1y_2$, т.е. $(y_1-1)(y_2-1)=2$. Бидејќи $y_1,y_2\in\mathbb{N}$, од последното равенство следува $y_1-1=1$, $y_2-1=2$, или $y_1-1=2$, $y_2-1=1$. Конечно наоѓаме $y_1=2, y_2=3$, или $y_1=3$, $y_2=2$, односно $p=6, q=5$. Аналогно, ако $y_1=1$, тогаш добиваме $p=5, q=6$.

II **случај.** Нека $x_1,x_2,y_1,y_2>1$. Од $x_1+x_2\le x_1x_2$ и $y_1+y_2\le y_1y_2$ добиваме $p\le q$ и $q\le p$, т.е. $p=q$. Но x_1,x_2 се природни броеви, па затоа $p^2-4p=n^2$, од што следува $p\ge 4$, и $(p+n-2)(p-n-2)=4$. Од $p\ge 4$ добиваме $p+n-2>0$, а оттука следува и дека $p-n-2>0$. Но, $p+n-2\ge p-n-2$, па затоа од последното равенство ги добиваме системите

$$\begin{cases} p+n-2=4 \\ p-n-2=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} p+n-2=2 \\ p-n-2=2 \end{cases}$$

Првиот систем нема целобројни решенија, а од вториот добиваме $p=4$, $n=0$. Конечно, бараните броеви се $p=6, q=5$; $p=5, q=6$ и $p=q=4$.

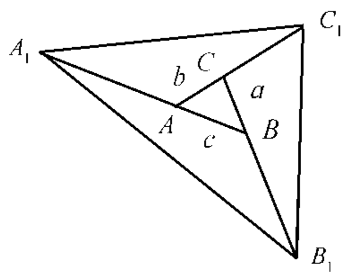
4. Даден е триаголник ABC. На полуправите BA, CB и AC определени се точки A_1, B_1 и C_1 соодветно, такви што

$$\overline{BA_1}=(1+n)\overline{AB},\ \overline{CB_1}=(1+n)\overline{CB},\ \overline{AC_1}=(1+n)\overline{AC}.$$

Определете го односот на плоштините на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$.

Решение. Ставаме $\overline{BA}=c$, $\overline{CB}=a$ и $\overline{AC}=b$, и добиваме

$$\overline{AA_1}=nc,\qquad \overline{BB_1}=na,\qquad \overline{CC_1}=nb.$$



Триаголниците C_1B_1B и C_1BC имаат еднакви висини спуштени на основите CB и BB_1, па затоа

$$\frac{P_{C_1B_1B}}{P_{C_1BC}}=\frac{na}{a}=n. \qquad (1)$$

Аналогно,

$$\frac{P_{C_1BC}}{P_{ABC}}=\frac{nb}{n}=n\ . \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $P_{C_1B_1B}=n^2P_{ABC}$. Значи, $P_{B_1C_1C}=(n^2+n)P_{ABC}$. Аналогно, $P_{A_1B_1B}=(n^2+n)P_{ABC}$ и $P_{C_1A_1A}=(n^2+n)P_{ABC}$. Конечно,

$$P_{A_1B_1C_1}=P_{ABC}+P_{A_1B_1B}+P_{B_1C_1C}+P_{C_1A_1A}=(3n^2+3n+1)P_{ABC},$$

т.е. $\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}}=3n^2+3n+1$.

III година

1. Во множеството на реалните броеви решете ја равенката

$$\log_{1997}(\sqrt{1+x^2}+x)=\log_{1996}(\sqrt{1+x^2}-x)$$

Решение. Нека $x>0$. Тогаш $\sqrt{x^2+1}+x>1$, па затоа $\log(\sqrt{x^2+1}+x)>0$. Од друга страна $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}<1$, што значи $\log(\sqrt{x^2+1}-x)<0$.

Според тоа, не постои реален број $x>0$, кој е решение на дадената равенка. Аналогно се покажува дека дека не постои реален број $x<0$ кој е решение на дадената равенка. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение на равенката е $x=0$.

2. Нека x, y и z се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Докажете дека

$$|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|\geq 1.$$

Решение. Од $x+y+z=0$, добиваме $\cos(x+y+z)=1$. Од адиционите теореми, својствата на апсолутната вредност и неравенствата $|\cos\alpha|\leq 1$ и $|\sin\alpha|\leq 1$, за секој $\alpha\in\mathbb{R}$, добиваме

$$\begin{aligned}1&=|\cos(x+y+z)|\\&=|\cos x\cos(y+z)-\sin x\sin(y+z)|\\&\leq|\cos x||\cos(y+z)|+|\sin x||\sin(y+z)|\\&\leq|\cos x|+|\sin(y+z)|\\&=|\cos x|+|\sin y\cos z+\cos y\sin z|\\&\leq|\cos x|+|\sin y||\cos z|+|\cos y||\sin z|\\&\leq|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

3. Дадени се осумнаесет отсечки со должини x_i, $i=1,2,3,...,18$, такви што $1\leq x_i\leq 1997$, $i=1,2,3,...,18$. Докажете дека меѓу овие отсечки постојат три со кои може да се конструира триаголник.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека должините на отсечките се такви што $1\leq x_1\leq x_2\leq ...\leq x_{18}\leq 1997$. Нека претпоставиме дека меѓу дадените отсечки не постојат три од кои може да се конструира триаголник. Тогаш $x_i\geq x_{i-1}+x_{i-2}$, $i=3,4,5,...,18$, и бидејќи $x_1,x_2\geq 1$, добиваме дека должината на осумнаесеттата отсечка ќе биде поголема или еднаква на осумнаесеттиот член на низата на фибоначи:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584.$$

Според тоа, $x_{18}\geq 2584$, што противречи на $1\leq x_i\leq 1997$, $i=1,2.3,4,5,...,18$. Значи, меѓу дадените отсечки постојат три од кои може да се конструира триаголник.

4. Права p допира кружница k опишана околу четириаголник $ABCD$. Со K да ја означиме допирната точка на правата и кружницата. Познато е дека правите AC и BD на правата p отсекуваат исечок симетричен во однос на точката K. Докажете дека и правите AB и CD на правата p отсекуваат исечок симетричен во однос на точката K.

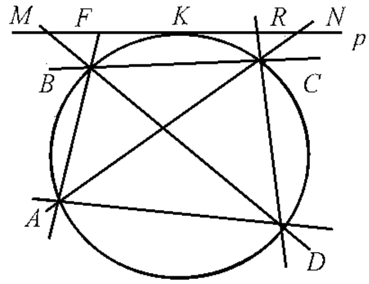
Решение. Ги воведуваме ознаките $AC\cap p=N, BD\cap p=M, AB\cap p=F$, $CD\cap p=R$, $\overline{FK}=x$, $\overline{RK}=y$, $\alpha=\measuredangle FBM, \beta=\measuredangle BFK, \gamma=\measuredangle KRC$ и $\varphi=\measuredangle BAC$.

Јасно $\measuredangle ABD=\alpha$, $\measuredangle ACD=\alpha$, $\measuredangle RCN=\alpha$ и $\varphi=\measuredangle BAC$. Од степен на точка во однос на кружница имаме

$$\overline{NC}\cdot\overline{NA}=\overline{NK}^2,\quad \overline{MB}\cdot\overline{MD}=\overline{MK}^2$$

и бидејќи $\overline{MK}=\overline{NK}$, следува

$$\overline{NC}\cdot\overline{NA}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}. \qquad (1)$$



Од синусната теорема, применета на $\triangle RNC$, $\triangle NFA$, $\triangle MRD$ и $\triangle FMB$ добиваме

$$\overline{MC}=(b-y)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},\quad \overline{NA}=(b+x)\frac{\sin\beta}{\sin\varphi},\quad \overline{MB}=(b-x)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\quad \overline{MD}=(b+y)\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}$$

Соодветно. Со замена во (1) добиваме

$$(b-y)(b+x)\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi}=(b-x)(b+y)\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi},$$

и бидејќи $\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi}\neq 0$, имаме

$$(b-y)(b+x)=(b-x)(b+y),$$

од што следува дека $x=y$, што и требаше да се докаже.

IV година

1. Нека растојанијата од точката M до темињата A,B и C на триаголникот ABC се p,q и r соодветно. Докажете дека не постојат реален број $d\neq 0$ и точка F во рамнината на триаголникот ABC такви што растојанијата од точката F до темињата A,B и C се еднакви на $\sqrt{p^2+d}$, $\sqrt{q^2+d}$ и $\sqrt{r^2+d}$ соодветно.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат реален број $d\neq 0$ и точка F во рамнината на триаголникот ABC такви што растојанијата од точката F до темињата A,B и C се $\sqrt{p^2+d}$, $\sqrt{q^2+d}$ и $\sqrt{r^2+d}$, соодветно. Тогаш

$$\overline{AF}^2-\overline{AM}^2=d,\ \overline{BF}^2-\overline{BM}^2=d,\ \overline{CF}^2-\overline{CM}^2=d \qquad (1)$$

Од друга страна, геометриското место на точки D за кои важи $\overline{DF}^2-\overline{DM}^2=d$ е права нормална на FM. Навистина, ако D_1 е проекција на D врз правата FM, тогаш

$$\begin{aligned}\overline{D_1F}^2-\overline{D_1M}^2&=(-\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DF})^2-(-\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DM})^2\\&=\overline{DF}^2-\overline{DM}^2+2\overrightarrow{DD_1}(\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DM})\\&=\overline{DF}^2-\overline{DN}^2+2\overrightarrow{DD_1}\overrightarrow{FM}\\&=\overline{DF}^2-\overline{DM}^2=d^2\ .\end{aligned}$$

Бидејќи на правата FM постои единствена точка D_1 за која важи

$$\overline{D_1F}^2 - \overline{D_1M}^2 = d^2,$$

заклучуваме дека сите точки на разгледуваното геометриско место ортогонално се проектираат во точката D_1, т.е. тоа е права нормална на правата FM. Конечно, од (1) следува дека правите AB, BA и CA се нормални на правата FM, т.е. точките A, B и C се колинеарни, што не е можно, бидеји тие се темиња на триаголник.

2. Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е строго растечка функција таква што за секои $x, y\in(0,+\infty)$ и за секој $\lambda\in(0,1)$ важи

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Докажете дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ не содржи бесконечна аритметичка прогресија.

Решение. Бидејќи f е строго растечка функција, добиваме дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ е строго растечка, па затоа секоја нејзина подниза е строго растечка. Да претпоставиме дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ содржи подниза која е бесконечна аритметичка прогресија, т.е. дека постои низа $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, таква што за секој $k\in\mathbb{N}$ важи $a_k = f(n_k)$. Јасно, разликата d на низата $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ е позитивнеа, од што следува $0<d=a_{k+1}-a_k = f(n_{k+1})-f(n_k)$, $k\in\mathbb{N}$, т.е.

$$n_k < n_{k+1},\ k\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

За членовите на низата $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ важи $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, $k>1$. Ако се искористи неравенството (1) при $\lambda=\frac{1}{2}$, за $k>1$ добиваме

$$f(n_k)=\frac{f(n_{k-1})+f(n_{k+1})}{2} > f(\frac{n_{k-1}+n_{k+1}}{2}).$$

Бидејќи f е строго растечка функција, од последното неравенство следува $n_k > \frac{n_{k-1}+n_{k+1}}{2}$, односно,

$$n_k - n_{k-1} > n_{k+1}-n_k,\ k>1. \tag{2}$$

Од неравенството (2) добиваме $n_2-n_1>n_3-n_2>\dots>n_i-n_{i-1}>n_{i+1}-n_i>\dots$, што не е можно, бидејќи според (1) броевите $n_{k+1}-n_k$, $k\in\mathbb{N}$ се природни, а не постојат бесконечно многу природни броеви помали од бројот n_2-n_1.

3. Иста како задача 3 од трета година

4. Иста како задача 4 од трета година