МЕТОДА ТРАЈЕКТОРИЈА

Пера Цветиновић, Лозница

За одређивање броја неких комбинаторних објеката који поседују одређена својства може се згодно употребити једна геометријска метода. На пример, интересује нас колико има низова $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n$ код којих је ε_i једнако $+1$ или -1 и који испуњавају следећа два услова: (а) $+1$ се појављује p пута, а -1 q пута ($p > q$, $p+q=n$); (б) $s_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k \geq 0$ за свако k, $1 \leq k \leq n$. Сваком таквом низу може да се придружи једна изломљена линија у равни, тзв. *пут* или *трајекторија*, тако да различитим низовима одговарају различите трајекторије и обратно. На тај начин пребројавање низова своди се на пребројавање трајекторија, што је, као што ће се видети, далеко једноставније. Управо у томе се и састоји идеја методе трајекторија.

Пример 1. *Испред биоскопске благајне стоји у реду* $p+q$, $p \geq q$ *особа који желе да купе карте за представу. Цена карте је 5 динара. Свака од* p *особа има код себе новчаницу од 5 динара, а свака од преосталих* q *особа по новчаницу од 10 динара. Ако у благајни у почетку нема новца, на колико начина се тих* $p+q$ *особа може поређати у ред, тако да продаја карата иде без застоја (да нико не чека на кусур)?*

Решење. Уочимо један произвољан распоред посетилаца и обележимо га са $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p+q}$, где је

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1, & \text{ако } i\text{-ти посетилац има новчаницу од 5 динара} \\ -1, & \text{ако } i\text{-ти посетилац има новчаницу од 10 динара} \end{cases}$$

за $i = 1, 2, \ldots, p+q$. (Посетиоци се броје почев од благајне.)

Нека је

$$\begin{aligned} s_1 &= \varepsilon_1 \\ s_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\ldots \\ s_k &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k \\ &\ldots\ldots \\ s_{p+q} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{p+q}. \end{aligned}$$

Ако уочимо првих k, $k = 1, 2, \ldots, p+q$ посетилаца, тада збир s_k представља разлику броја оних који поседују новчанице од 5 динара и оних са новчаницама од 10 динара. Да би благајна радила без застоја први посетилац треба да има новчаницу од 5 динара. Ако је то испуњено, за другог посетиоца нема ограничења. Било да има 5, било 10 динара, благајна ће моћи да ради. Даље, међу првом тројицом, бар двојица морају имати новчанице од 5 динара итд. Није тешко закључити да је за несметан рад благајне неопходно и довољно да за свако k, $1 \leq k \leq p+q$, међу првих k посетилаца оних са новчаницама од 5 динара има бар онолико колико има посетилаца са новчаницама од 10 динара. Једино у том случају ће увек бити довољно новчаница од 5 динара за евентуалне кусуре. То значи да је $s_k \geq 0$ за свако $k = 1, 2, \ldots, p+q$.

У правоуглом координатном систему xOy уочимо тачке $A_1(1, s_1)$, $A_2(2, s_2)$, ... , $A_{p+q}(p+q, s_{p+q})$. Распореду $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p+q}$ придружимо изломљену линију – трајекторију $OA_1A_2 \ldots A_{p+q}$ која спаја координатни почетак O са тачком A_{p+q}. Она се састоји од $p+q$ дужи A_iA_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, p+q-1$; $A_0 \equiv O$) од којих свака има нагиб према x-оси 45° или 135°. Те дужи зваћемо *основним*. Основне дужи са нагибом од 45° зваћемо *растућим*, а оне са нагибом од 135° *опадајуће*. Свака трајекторија која спаја тачке $O(0,0)$ и $A_{p+q}(p+q, p-q)$ (запазимо да је $s_{p+q} = p-q$) састоји се од p растућих и q опадајућих основних дужи. На сл. 1 приказана је трајекторија која одговара распореду $(+1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, -1, +1, +1)$ и која спаја тачке $O(0,0)$ и $A_{10}(10, 4)$. У овом случају је $p = 7$, $q = 3$, $p+q = 10$, $p-q = 4$.

Сваком распореду $p+q$ особа испред биоскопске благајне, међу којима p има новчанице од 5, а q новчанице од 10 динара, одговара једна трајекторија која спаја тачке $O(0,0)$ и $A_{p+q}(p+q, p-q)$ и која се састоји од p растућих и q опадајућих дужи. Важи и обратно, тј. свакој таквој трајекторији одговара један распоред $p+q$ особа. Укупан број распореда $p+q$ особа, односно одговарајућих трајекторија, износи

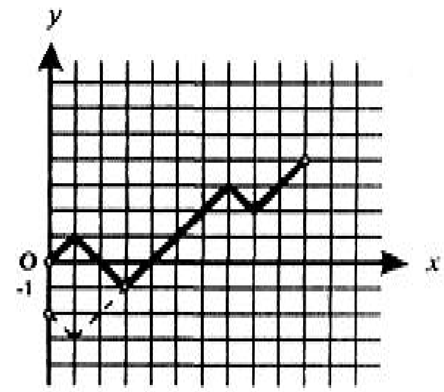
$$\binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!}\,. \tag{1}$$

Од $p+q$ места бира се p места за особе са новчаницама од 5 динара или код трајекторија, од $p+q$ места за основне дужи (растуће или опадајуће) бира се p места за растуће.

Као што смо већ запазили благајна ће радити без застоја уколико је $s_k \geq 0$ за свако $k = 1, 2, \ldots, p+q$. Када се преведе на језик трајекторија то значи да одговарајућа трајекторија не сме да "иде испод x-осе", што је еквивалентно са чињеницом да не додирује или сече праву $y = -1$. Број таквих трајекторија добија се када се од укупног броја трајекторија (1) одузме број оних које имају заједничких тачака са правом $y = -1$. Он одговара броју распореда посетилаца при којима благајна може несметано да ради.

За одређивање броја трајекторија које имају заједничких тачака са правом $y = -1$ (секу је или додирују) искористићемо следећу геометријску трансформацију.

Свакој трајекторији t која сече или додирује праву $y = -1$, придружимо нову трајекторију t', на јединствен начин, према следећем правилу: *Део трајекторије t од тачке $O(0,0)$ до прве заједничке тачке са правом $y = -1$ пресликамо симетрично у односу на праву $y = -1$.* Трајекторију t' чини тако добијена изломљена линије на коју је надовезан остатак трајекторије t.



Слика 1

На сл. 1 приказана је трајекторија t' чији је почетни део дат испрекиданом линијом. Овако добијена трајекторија t' спаја тачке $O'(0,-2)$ и $A_{p+q}(p+q, p-q)$.

Тако је успостављена бијекција (обострано једнозначно пресликавање) између свих трајекторија t које спајају тачке $O(0,0)$ и $A_{p+q}(p+q, p-q)$ и имају заједничких тачака са правом $y = -1$ и свих трајекторија t' које спајају тачке $O'(0,-2)$ и $A_{p+q}(p+q, p-q)$ без ограничења. Ако са p' и q' означимо број растућих, односно опадајућих, дужи трајекторија t' лако се види да је $p' = p+1$ и $q' = q-1$.

За одређивање броја трајекторија t' транслирамо x-осу, тако да се поклопи са правом $y = -2$. У новом координатном систему свака трајекторија t' спаја нови координатни почетак са тачком $(p+q, p-q+2)$ и састоји се од $p+1$ растућих и $q-1$ опадајућих дужи. Тако се проблем своди на раније решен. Према формули (1) тражени број износи

$$\binom{p+q}{p+1} = \frac{(p+q)!}{(p+1)! \cdot (q-1)!}. \tag{2}$$

Одузимајући (2) од (1) добијамо

$$\begin{aligned}\binom{p+q}{p} - \binom{p+q}{p+1} &= \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!} - \frac{(p+q)!}{(p+1)! \cdot (q-1)!} \\ &= \frac{p-q+1}{p+1} \cdot \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!} \\ &= \frac{p-q+1}{p+1} \binom{p+q}{p}.\end{aligned}$$

Дакле број "повољних" трајекторија, односно број распореда $p+q$ особа испред благајне, при којима се продаја карата одвија без застоја, једнак је $\frac{p-q+1}{p+1}\binom{p+q}{p}$. $\square$

Наведени пример је лепа илустрација примене тзв. *методе трајекторија* у решавању једног сложеног комбинаторног задатка. У њему су дошле до изражаја све битне карактеристике те методе.

Сада ћемо прецизно изложити методу трајекторија.

Нека је x произвољан природан и y произвољан цео број. *Трајекторија* која спаја тачке $(0,0)$ и (x,y) је свака изломљена линија која спаја редом тачке $(0,0)$, $(1,s_1)$, $(2,s_2)$, ... , (x,s_x), где је

$$s_i - s_{i-1} = \varepsilon_i = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

за свако $i = 1,2,\ldots,x$ ($s_0 = 0$, $s_x = y$). Тачке $(0,0)$, $(1,s_1)$, $2,s_2)$, ... , (x,s_x) зваћемо *теменима* трајекторије. Како је трајекторија једнозначно одређена бројевима s_1, s_2, ... , s_x, означаваћемо је и са $(s_1,s_2,\ldots,s_x)$.

Ако са $N(x,y)$ означимо број свих трајекторија које спајају тачке $(0,0)$ и (x,y), тада важи следеће тврђење:

Теорема 1. *Ако је x природан и y цео број, $x \geq |y|$, тада је*

$$N(x,y) = \begin{cases} \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\cdot\left(\frac{x-y}{2}\right)!}, & \text{ако су } x \text{ и } y \text{ исте парности} \\ 0, & \text{ако су } x \text{ и } y \text{ различите парности.} \end{cases}$$

Доказ. Свака трајекторија која спаја тачке $(0,0)$ и (x,y) састоји се од a растућих и b опадајућих основних дужи, где је $a+b=x$ и $a-b=y$, односно $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$. Како је $x \geq |y|$, a и b су ≥ 0. Уколико су x и y различите парности (један паран, а други непаран) a и b нису цели бројеви, па је у том случају $N(x,y)=0$. Ако су x и y исте парности (оба парна или оба непарна) a и b су цели и, слично као у решењу примера 1, добијамо да је број трајекторија једнак

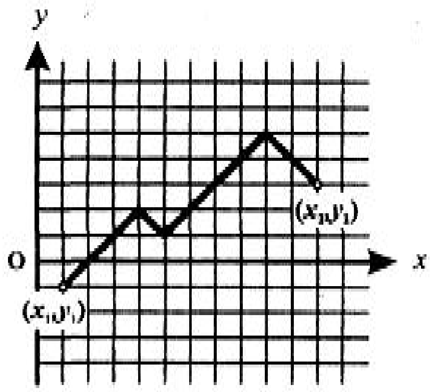
$$\binom{x}{a} = \binom{x}{\frac{x+y}{2}} = \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\cdot\left(\frac{x-y}{2}\right)!}. \ \square$$

Последица 1. *Број трајекторија које спајају тачке (x_1,y_1) и (x_2,y_2), где су x_1 и x_2 природни, y_1 и y_2 цели бројеви при чему је $x_1 < x_2$, $x_1 > |y_1|$, $x_2 - x_1 \geq |y_2 - y_1|$ и бројеви $x_1 + y_1$ и $x_2 + y_2$ су парни једнак је*

$$N(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\,. \ \square$$

Из овог тврђења следи да је број трајекторија које спајају тачке (x_1,y_1) и (x_2,y_2) једнак броју трајекторија које спајају тачке $(0,0)$ и $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (сл. 2).

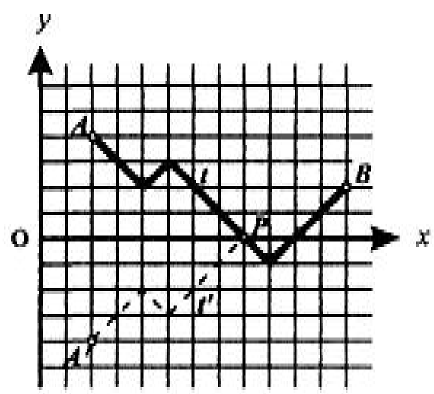
За методу трајекторија важну улогу има такозвани принцип симетрије. Према том принципу број трајекторија које воде из тачке A у тачку B и имају заједничких тачака са x-осом једнак је броју трајекторија из тачке A' у тачку B, где је A' тачка симетрична тачки A у односу на x-осу. Шта више, уместо x-осе може се узети било која права $y = -k$, где је k неки природан број. Важи



Слика 2

Теорема 2. *(Принцип симетрије) Нека су $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ тачке са целобројним координатама, при чему је $0 < x_1 < x_2$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ и нека је $A'(x_1, -y_1)$ тачка симетрична тачки A у односу на x-осу. Тада је број трајекторија из тачке A у тачку B, које имају заједничких тачака са x-осом, једнак броју трајекторија из тачке A' у тачку B.*

Доказ. Нека је t трајекторија која спаја тачке A и B и сече или додирује x-осу. Означимо са P прву заједничку тачку t и x-осе рачунајући од A. Трајекторији t придружимо трајекторију t' на следећи начин. Део трајекторије t од тачке A до тачке P заменимо њему симетричном фигуром у односу на x-осу. На остатку, од P до B, t' се поклапа са t (сл. 3).



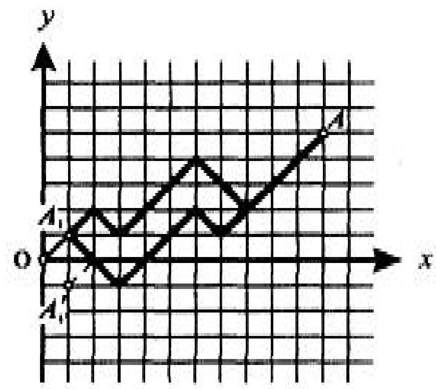
Слика 3

Очигледно t' спаја тачке A' и B. Лако је видети да је ово придруживање бијекција, тј. да свакој трајекторији t одговара тачно једна трајекторија t' и обратно. Из тога следи тврђење теореме. □

Трајекторију која спаја тачке $(0,0)$ и (x, y), x и y природни бројеви, и сем тачке $(0,0)$ нема других заједничких тачака са x-осом, зовемо *позитивном*. За такве трајекторије важи следећа теорема.

Теорема 3. *Број позитивних трајекторија које спајају координатни почетак $O(0,0)$ са тачком $A(x, y)$, где су x и y природни бројеви једнак је $\frac{y}{x} N(x, y)$.*

Доказ. Све позитивне трајекторије из координатног почетка O у тачку A, пролазе кроз тачку $A_1(1,1)$ (сл. 4). Укупан број трајекторија из тачке A_1 у тачку A, према последици 1, једнак је $N(x-1, y-1)$. Тим бројем обухваћене су и оне које секу или додирују x-осу (на сл. 4 приказана је једна од њих). Према теореми 2 таквих трајекторија има исто толико колико и трајекторија из тачке $A_1'(1,-1)$ у тачку A, а то је $N(x-1, y+1)$.



Слика 4

Отуда је број позитивних трајекторија из тачке $O(0,0)$ у тачку $A(x,y)$ једнак

$$
\begin{aligned}
N(x-1, y-1) - N(x-1, y+1) &= \binom{x-1}{\frac{x-1+y-1}{2}} - \binom{x-1}{\frac{x-1+y+1}{2}} \\
&= \frac{y}{x}\binom{x}{\frac{x+y}{2}} \\
&= \frac{y}{x} N(x,y)\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

Следећи пример је чувени проблем гласања који је Бертран поставио и решио 1887. године.

Пример 2. *На изборима за посланика била су два кандидата A и B. Након гласања кандидат A је добио a, док је кандидат B сакупио b гласова, при чему је $a > b$. Гласачи су гласали један за другим и није било неважећих листића. На колико је начина могло да се обави гласање, ако је кандидат A у сваком тренутку имао више гласова од кандидата B? Посебно испитати случај $a = n+1$, $b = n$.*

Решење. Сваком начину гласања придружимо низ $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{a+b}$, где је $\varepsilon_i = +1$ ако је i-ти гласач гласао за A, односно $\varepsilon_i = +1$ уколико је i-ти гласач гласао за B, $i = 1, 2, \ldots, a+b$. Тада сума $s_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i$ представља разлику броја гласова које је добио кандидат A и броја гласова које је добио кандидат B након гласања i-тог гласача. Како је кандидат A стално био у предности и није било неважећих листића, то је $s_i > 0$ за свако $i = 1, 2, \ldots, a+b$.

Из тога следи да сваком начину гласања у којем је кандидат A у сваком тренутку био испред кандидата B одговара једна позитивна трајекторија која спаја тачке $(0,0)$ и $(a+b, a-b)$ и обратно. Према теореми 3 број таквих трајекторија, а према томе и број тражених гласања, износи

$$\frac{a-b}{a+b} N(a+b, a-b) = \frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{a}.$$

За специјалан случај $a = n+1$, $b = n$ добијамо $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ различитих начина гласања. □

Бројеви облика $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ зову се *Каталанови бројеви* и имају важну улогу у комбинаторици.

Напомена. Метода трајекторија има значајне примене и у другим математичким дисциплинама као што су теорија вероватноће (случајна кретања на правој), математичка статистика (теорија контроле квалитета) итд.

З А Д А Ц И

1. (а) Одредити број свих n-варијација (уређених n-торки) чији су елементи +1 или -1.

(б) Одредити број свих $2n$-варијација чији су елементи +1 или -1 у којима елемената +1 има за $2k$ више него елемената -1.

2. (а) Ако су a и b природни бројеви доказати да је број трајекторија $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, таквих да је $s_1 > -b$, $s_2 > -b, \ldots$, $s_{n-1} > -b$, $s_n = a$ једнак $N(n,a) - N(n, a+2b)$.

(б) Ако су a и b природни бројеви, $b > a > 0$, тада је број трајекторија које испуњавају услове $s_1 < b$, $s_2 < b$, ... , $s_{n-1} < b$, $s_n = a$ једнак $N(n,a) - N(n, 2b-a)$. Доказати.

3. Број трајекторија које спајају тачке $(0,0)$ и $(2n, 0)$, n – природан број, чија су сва темена изузев почетног и крајњег изнад x-осе једнак је $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$. Доказати.

4. Доказати да је број трајекторија $OA_1A_2\ldots A_n$, таквих да су координате тачака O, A_{n-1} и A_n редом $(0,0)$, $(n-1, k-1)$ и (n,k), док је за остале тачке $A_i(i, s_i)$, $s_i < k$, једнак $\frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$.

5. Колико има пермутација $a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_n$ скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, таквих да је $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, ... , $a_n < b_n$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$?

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1996/97 година