# МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С3

збирка задачи за прв дел

II година

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

**Ристо Малчески**
**Алекса Малчески**
**Даниел Велинов**
**Самоил Малчески**
**Сања Костадинова**

# МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С3
# (збирка задачи за II година, прв дел)

**Скопје, 2019**

Рецензенти
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент С3 : (збирка задачи за II година, прв дел) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2019. - 248 стр. ;25 см

Други автори: Алекса Малчески, Даниел Велинов, Самоил Малчески, Сања
Костадинова. - Библиографија: стр. 244-248

ISBN 978-608-4904-02-1
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Велинов, Даниел [автор] 4. Малчески, Самоил [автор] 5. Костадинова, Сања [автор]
а) Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111544074

# СОДРЖИНА

# ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С3 е продолжение на книгите Математички талент С1 и С2 и истата е наменета за талентираните ученици по математика од втора година од средното образование. Книгата, всушност, е првиот дел од збирката задачи за втора година и во овој дел се содржани 547 решени задачи и во четири одделни дела се обработени комплексните броеви, квадратната функција и квадратната равенка, задачи од неравенства и задачи од теоријата на броеви. Третиот и четвртиод дел всушност се продолженија на соодветните делови од книгата Математички талент С1. Така во третиот дел се обработени неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, Енгеловиот принцип на минимум и неравенството на Чебишев, а на крајот се дадени дополнителни задачи во кои всушност се врши повторување на содржините од неравенства од книгата Математички талент С1.

Како и во книгите *Математички талент* С1 и С2 и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите повторно не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од теоријата на броеви се во пет дела, и тоа: Функциите $\tau(n)$ и $\sigma(n)$, Функциите $[x]$ и $\{x\}$, Теорема на Чебишев, Ферматови и совршени броеви и Дополнителни задачи, дел во кој се дадени задачи со деливост, конгруенции и Диофантови равенки.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Зоран Мисајлески и д-р Томи Димовски, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје — Авторите

ноември, 2019 г.

# I КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

**1.** Ако $|a|=1$ или $|b|=1$ ($a \neq b$), тогаш $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$. Докажи!

**Решение.** Нека $|a|=1$. Тогаш $|\bar{a}|=1$, па затоа

$$1=\frac{1}{|\bar{a}|}=\frac{|a-b|}{|\bar{a}|\cdot|a-b|}=\frac{|a-b|}{|a\bar{a}-\bar{a}b|}=\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}=\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|.$$

**2.** Нека $a>0$ е реален број и $b\in\mathbb{C}$ таков што $b\neq -a$. Пресметај го модулот на комплексниот број $\frac{a+b}{1+\frac{\bar{b}}{a}}$.

**Решение.** Комплексниот број можеме да го запишеме во облик

$$\frac{a+b}{1+\frac{\bar{b}}{a}}=a\frac{a+b}{a+\bar{b}}=a\frac{a+b}{\bar{a}+\bar{b}}=a\frac{a+b}{\overline{a+b}},$$

заради тоа што $a=\bar{a}$ и $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$. Сега, од тоа што $|a|=a$ и равенството $|a+b|=|\overline{a+b}|$, имаме

$$\left|\frac{a+b}{1+\frac{\bar{b}}{a}}\right|=\left|a\frac{a+b}{\overline{a+b}}\right|=|a|\frac{|a+b|}{|\overline{a+b}|}=|a|.$$

**3.** Ако $\alpha=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, докажи дека $\alpha^2+\alpha+1=0$ и $\alpha^3=1$. Потоа определи ги реалниот и имагинарниот дел на бројот $\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}$, каде што $a$ и $b$ се реални броеви.

**Решение.** Имаме се броевите

$$\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}+1=\frac{-2\mp 2i\sqrt{3}}{4}+\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}+1=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}+1=0.$$

Сега

$$0=\alpha(\alpha^2+\alpha+1)=\alpha^3+\alpha^2+\alpha=\alpha^3+(\alpha^2+\alpha+1)-1=\alpha^3-1,$$

од каде следува $\alpha^3=1$. Понатаму,

$$\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}=\frac{a\alpha^3+b\alpha}{(a+b\alpha)\alpha}=\frac{a+b\alpha}{(a+b\alpha)\alpha}=\frac{1}{\alpha}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Да забележиме дека во именителот на дропката $\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}$ мора да биде различен од нула, што ќе биде исполнето ако $a^2+b^2\neq \quad a^2+b^2\neq 0$ ).

**4.** Ако $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ докажи дека за секои $a,b$ и $c$ важи

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+c\alpha+b\alpha^2)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

**Решение.** Од $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ следува $\alpha^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha+\alpha^2=-1$, $\alpha^3=1$. Имаме

$$\begin{aligned}(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+c\alpha+b\alpha^2)&=a^2+ab(\alpha+\alpha^2)+bc(\alpha+\alpha^2)+b^2+c^2\\&=a^2-ab-ac-bc+b^2+c^2,\end{aligned}$$

па затоа

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+c\alpha+b\alpha^2)=(a+b+c)(a^2-ab-ac-bc+b^2+c^2)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$

**5.** Докажи дека

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}\ .$$

**Решение.** Имаме

$$(\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}})^2=1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}+2\sqrt{1+3}=6\ .$$

Според тоа,

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}\ .$$

**6.** Пресметај го збирот $\sum_{k=1}^{n} i^k=i+i^2+...+i^n$, каде $i$ е имагинарната единица.

**Решение.** Имаме $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. Ќе разгледаме четири случаи, и тоа

а) Ако $n=4p$, тогаш од

$$i^{4s+1}+i^{4s+2}+i^{4s+3}+i^{4s+4}=i-1-i+1=0\text{ , за секој }\ s=0,1,...,p-1$$

добиваме

$$\sum_{k=1}^{4p} i^k=i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4p-3}+i^{4p-2}+^{4p-1}+i^{4p}=0\ .$$

б) Ако $n=4p+1$, тогаш

$$\sum_{k=1}^{4p+1} i^k=i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4p-3}+i^{4p-2}+^{4p-1}+i^{4p}+i^{4p+1}=0+i^{4p+1}=0+i=i$$

в) Ако $n=4p+2$, тогаш

$$\sum_{k=1}^{4p+2} i^k=i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4p-3}+i^{4p-2}+^{4p-1}+i^{4p}+i^{4p+1}+i^{4p+2}$$
$$=0+i^{4p+1}+i^{4p+2}=0+i-1=i-1$$

г) Ако $n=4p+3$, тогаш

$$\sum_{k=1}^{4p+2} i^k=i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4p-3}+i^{4p-2}+^{4p-1}+i^{4p}+i^{4p+1}+i^{4p+2}+i^{4p+3}$$
$$=0+i^{4p+1}+i^{4p+2}+i^{4p+3}=0+i-1-i=-1$$

**7.** Пресметај ја вредноста на збирот

$$\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}+(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2+(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^3+...+(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{1986}\ .$$

**Решение.** Ќе го искористиме резултатот $(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2=i$, а за пократко пишување ставаме $z=\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. Ако со $S$ го означиме бараниот збир, ќе имаме

$$
\begin{aligned}
S &= z + i + z\cdot i + i^2 + z\cdot i^2 + i^3 + \ldots + z\cdot i^{992} + i^{993} \\
&= z(1 + i + i^2 + \ldots + i^{992}) + i(1 + i + i^2 + \ldots + i^{992}) \\
&= (z+i)(1+i+i^2+\ldots+i^{992}) \\
&= (z+i)[(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\ldots+(i^{988}+i^{989}+i^{990}+i^{991})+i^{992}] \\
&= (z+i)\left[(1+i-i-1)+(1+i-i-1)+\ldots+(1+i-i-1)+1\right] \\
&= z+i = \tfrac{1+i}{\sqrt{2}}+i = \tfrac{1+(1+\sqrt{2})i}{2}.
\end{aligned}
$$

**8.** Нека $u=-1+i\sqrt{3}$, $v=-1-i\sqrt{3}$, $w=2$ и $n$ е природен број кој не е делив со 3. Докажи дека $u^n+v^n+w^n=0$.

**Решение.** Имаме $u^3=(-1+i\sqrt{3})^3=8$ и $v^3=(-1-i\sqrt{3})^3=8$. Освен тоа $u^2=2v$ и $v^2=2u$.

Ако $n=3k+1$, каде $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$u^n+v^n+w^n=8^k u+8^k v+8^k w=8^k(u+v+2)=0.$$

Доказот за $n=3k+2$, $k\in\mathbb{N}$ е аналоген. Деталите ги оставаме на читателот.

**9.** Определи ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $z=(\frac{3+i}{2-i})^n$ е реален.

**Решение.** Комплексниот број $\frac{3+i}{2-i}$ можеме да го запишеме во облик

$$\tfrac{3+i}{2-i}=\tfrac{3+i}{2-i}\tfrac{2+i}{2+i}=\tfrac{6+5i+i^2}{4-i^2}=\tfrac{5+5i}{5}=1+i.$$

Значи, $z=(1+i)^n$. Ако $n$ е парен број, односно $n=2k$ за некој $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$z=(1+i)^n=(1+i)^{2k}=[(1+i)^2]^k=(2i)^k.$$

Ако пак $k$ е парен број, односно $k=2m$ за некој $m\in\mathbb{N}$, тогаш

$$z=(2i)^{2m}=(4i^2)^m=4^m(-1)^m.$$

Значи, ако $n=4m$, т.е. $4\mid n$ тогаш $z\in\mathbb{R}$.

Ако $4\nmid n$, тогаш $n$ има еден од облиците $4m+1$, $4m+2$ или $4m+3$. Во секој од тие случаи имаме

$$z=(1+i)^{4m+1}=4^m(-1)^m(1+i)\notin\mathbb{R},$$

$$z=(1+i)^{4m+2}=4^m(-1)^m(1+i)^2=4^m\cdot(-1)^m\cdot 2i\notin\mathbb{R},$$

$$z=(1+i)^{4m+3}=4^m(-1)^m(1+i)^3=4^m(-1)^m\cdot 2i(1+i)=4^m\cdot(-1)^m\cdot 2(-1+i)\notin\mathbb{R}.$$

Значи, $z$ е реален број ако и само ако $4\mid n$.

**10.** Даден е комплексниот број $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Пресметај го производот:

$$(z+\tfrac{1}{z})(z^2+\tfrac{1}{z^2})\ldots(z^{2012}+\tfrac{1}{z^{2012}}).$$

**Решение.** Од

$$z^2=(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2=\tfrac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ и } z^3=\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=1$$

следува:

$$\begin{aligned}(z+\tfrac{1}{z})(z^2+\tfrac{1}{z^2})\dots(z^{2012}+\tfrac{1}{z^{2012}})&=((z+z^2)(z^2+z)(1+1))^{670}(z+z^2)(z^2+z)\\&=2^{670}(z^2+z)^{1342}=2^{670}(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2})^{1342}\\&=2^{670}(-1)^{1342}=2^{670}.\end{aligned}$$

**11.** Ако за комплексниот број $z\neq -3+2i$ важи $|\frac{z-2+3i}{z+3-2i}|=1$, тогаш $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$. Докажи!

**Решение:** Ако $z=a+bi$ тогаш од условот во задачата добиваме

$$|(a-2)+(b+3)i|=|(a+3)+(b-2)i|,$$

а оттука

$$(a-2)^2+(b+3)^2=(a+3)^2+(b-2)^2.$$

Од последното равенство имаме $10a-10b=0$ па затоа $\mathrm{Re}(z)=a=b=\mathrm{Im}(z)$.

**12.** Докажи, дека ако модулот на еден комплексен број е еднаков на 1, тогаш тој може да се претстави во обликот $\frac{c+i}{c-i}$, каде $c$ е реален број.

**Решение.** Ако $|z|=1$ и $c=i\frac{z+1}{z-1}$, тогаш $z=\frac{c+i}{c-i}$ и $|\frac{c+i}{c-i}|=1$, т.е.

$$\frac{c+i}{c-i}\cdot\frac{\bar{c}-i}{\bar{c}+i}=1.$$

Со средување на последното равенство добиваме $c-\bar{c}=0$. Значи, $c\in\mathbb{R}$ и $z=\frac{c+i}{c-i}$, што и требаше да докажеме.

**13.** Докажи, дека ако $|z^2+1|=2|z+1|$, $z\in\mathbb{C}$, тогаш $|z|\leq\sqrt{7}$.

**Решение.** Нека $z=x+iy$. Тогаш

$$z+1=x+1+iy \text{ и } z^2+1=x^2-y^2+1+2xyi,$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned}&|z^2+1|=2|z+1| \Leftrightarrow (x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2=4((x+1)^2+y^2) &&\Leftrightarrow\\&x^4+y^4+1-2x^2y^2+2x^2-2y^2+4x^2y^2=4x^2+8x+4+4y^2 &&\Leftrightarrow\\&x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2-8x-3-6y^2=0 &&\Leftrightarrow\\&(x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)+4x^2-8x+4-7=0 &&\Leftrightarrow\\&(x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)+4(x-1)^2-7=0.\end{aligned}$$

Ако ставиме $r^2=x^2+y^2$ тогаш од последното равенство следува дека

$$\begin{aligned}&(r^2)^2-6r^2-7\leq 0 &&\Leftrightarrow && (r^2-7)(r^2+1)\leq 0 &&\Leftrightarrow\\&r^2-7\leq 0 &&\Leftrightarrow && r^2\leq 7 &&\Leftrightarrow && |r|\leq\sqrt{7}\end{aligned}$$

што требаше и да се докаже.

**14.** Докажи дека за секој комплексен број $z$, ако $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.

**Решение.** Да претпоставиме дека постои комплексен број $z$ таков што $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $|z^2+1|<1$. Нека $z=a+bi$. Тогаш

$$z+1=a+1+bi \text{ и } z^2+1=a^2-b^2+1+2abi.$$

Од $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ добиваме

$$(a+1)^2+b^2<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad a^2+2a+1+b^2<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$2a^2+4a+2+2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$

$$2b^2<-2a^2-4a-1. \tag{1}$$

Од $|z^2+1|<1$ добиваме

$$(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$

$$a^4+b^4+1-2a^2b^2+2a^2-2b^2+4a^2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$

$$a^4+b^4+1+2a^2b^2+2a^2-2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$

$$(a^2+b^2)^2<2b^2-2a^2. \tag{2}$$

Ако оценката на $2b^2$ од (1) ја замениме во (2) добиваме

$$(a^2+b^2)^2<-2a^2-4a-1-2a^2 \quad\Leftrightarrow\quad (a^2+b^2)^2+4a^2+4a+1<0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(a^2+b^2)^2+(2a+1)^2<0.$$

Последното неравенство не е можно. Следува дека за секој комплексен број $z$, ако $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.

**15.** Ако $z$ е комплексен број таков што $|z|=1$, докажи дека

$$\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\overline{a_0}z^2+\overline{a_1}z+\overline{a_2}}\right|=1, \text{ каде } a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}.$$

**Решение.** Нека $|z|=1$. Тогаш

$$\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\overline{a_0}z^2+\overline{a_1}z+\overline{a_2}}\right|=\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\bar{a}_0z^2+\bar{a}_1z+\bar{a}_2}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}}\right|=\left|\frac{a_2z|z|^2+a_1|z|^2+a_0\bar{z}}{\bar{a}_0z|z|^2+\bar{a}_1|z|^2+\bar{a}_2\bar{z}}\right|=\left|\frac{a_2z+a_1+a_0\bar{z}}{\overline{a_2z+a_1+a_0\bar{z}}}\right|=\frac{|a_2z+a_1+a_0\bar{z}|}{|\overline{a_2z+a_1+a_0\bar{z}}|}=1.$$

**16.** За комплексниот ненулти број $z$, важи $z^3=\bar{z}$. Пресметај го $z^{2004}$.

**Решение.** Од $z^3=\bar{z}$ следува $\bar{z}^3=z$. Со множење на двете равенства добиваме $z^3\bar{z}^3=\bar{z}z$, односно $|z|^6=|z|^2$. Бидејќи $z\neq 0$, имаме $|z|^4=1$, па затоа $|z|=1$.

Според тоа, $z^4=\bar{z}z=|z|^2=1$, па затоа $z^{2004}=(z^4)^{501}=1$.

**17.** За ненултите комплексни броеви $z$ и $w$ важи $|z|=|w|=|z-w|$. Пресметај $(\frac{z}{w})^{99}$.

**Решение.** Од условот на задачата следува $|\frac{z}{w}+=1=|\frac{z}{w}-1|$. Нека $u=\frac{z}{w}$. Тогаш $u\overline{u}=1$ и $(u-1)(\overline{u}-1)=1$, па затоа $1=(u-1)(\frac{1}{u}-1)=-\frac{(u-1)^2}{u}$, од каде добиваме $u^2=u-1$. Последното равенство го множиме со $u$ и добиваме $u^3=u^2-u=-1$. Според тоа,

$$u^{99}=(u^3)^{33}=(-1)^{33}=-1,\text{ т.е. } (\tfrac{z}{w})^{99}=-1.$$

**18.** За ненултиот комплексен број $z$ важи $z^8=\overline{z}$. Кои вредности може да ги прими бројот $z^{2019}$.

**Решение.** Од $z^8=\overline{z}$ следува $z^9=z\overline{z}=|z|^2$, т.а. $|z|^9=|z|^2$ и како $|z|\neq 0$ добиваме $|z|=1$.

Бидејќи $z^9=1$, од $z^{2019}=(z^9)^{224}z^3=z^3$ и $(z^3)^3=z^9=1$, ако ставиме $w=z^3$, ја добиваме равенката $w^3-1=0$, т.е. равенката $(w-1)(w^2+w+1)=0$, чии решенија се $w_1=1, w_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, $z^3\in\{1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$, што значи дека $z^{2019}\in\{1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$.

**19.** Нека $a,b,c$ се комплексни броеви такви што

$$a+b+c=0 \text{ и } ab+bc+ca=0.$$

Докажи, дека $|a|=|b|=|c|$.

**Решение.** Од првото равенство добиваме $a+b=-c$, па затоа со замена во второто равенство наоѓаме

$$0=ab+bc+ca=ab+c(a+b)=ab-c^2,\text{ т.е. } ab=c^2.$$

Аналогно добиваме $bc=a^2$ и $ca=b^2$. Од добиените равенства следува

$$|a|\cdot|b|=|c|^2,\ |b|\cdot|c|=|a|^2 \text{ и } |c|\cdot|a|=|b|^2.$$

Ако ги поделиме првите две равенства добиваме $\frac{|a|}{|c|}=\frac{|c|^2}{|a|^2}$, т.е. $|a|^3=|c|^3$, па затоа $|a|=|c|$. Аналогно се добива дека $|b|=|c|$, па затоа важи $|a|=|b|=|c|$.

**20.** Ако $|z_1|=|z_2|=1$ и $z_1z_2\neq -1$, докажи дека $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број. Докажи!

**Решение.** Имаме,

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\cdot\frac{\overline{1+z_1z_2}}{\overline{1+z_1z_2}}=\frac{(z_1+z_2)(1+\overline{z_1}\,\overline{z_2})}{|1+z_1z_2|^2}$$

$$=\frac{z_1+z_2+z_1\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}{|1+z_1z_2|^2}=\frac{z_1+\overline{z_1}}{|1+z_1z_2|^2}+\frac{z_2+\overline{z_2}}{|1+z_1z_2|^2}.$$

Но, $z_1+\overline{z_1}$ и $z_2+\overline{z_2}$ се реални броеви, па затоа и $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број.

**21.** Нека $a,b,c$ се комплексни броеви. Ако $1+c+c^2=0$, докажи дека

$$(ac^2+bc)(bc^2+ac)=a^2-ab+b^2.$$

**Решение.** Од $1+c+c^2=0$, имаме $c+c^2+c^3=0$, т.е. $c^3=-(c+c^2)=-(-1)=1$ Затоа

$$\begin{aligned}(ac^2+bc)(bc^2+ac)&=c^2(ac+b)(bc+a)=c^2(abc^2+a^2c+b^2c+ab)\\&=c^2[ab(c^2+1)+c(a^2+b^2)]=c^2[ab(-c)+c(a^2+b^2)]\\&=c^3(a^2-ab+b^2)=a^2-ab+b^2.\end{aligned}$$

**22.** Нека $z_1$ и $z_2$ се комплексни броеви такви што важи $|z_1+2z_2|=|2z_1+z_2|$. Докажи, дека за секој релаен број $\alpha$ важи $|z_1+\alpha z_2|=|\alpha z_1+z_2|$.

**Решение.** За секој реален број $\alpha$ важи

$$\begin{aligned}|z_1+\alpha z_2|^2-|\alpha z_1+z_2|^2&=(z_1+\alpha z_2)\overline{(z_1+\alpha z_2)}-(\alpha z_1+z_2)\overline{(\alpha z_1+z_2)}\\&=(z_1+\alpha z_2)(\overline{z_1}+\alpha\overline{z_2})-(\alpha z_1+z_2)(\alpha\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=|z_1|^2+\alpha^2|z_2|^2+\alpha(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})-\alpha^2|z_1|^2-|z_2|^2-\alpha(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})\\&=(1-\alpha^2)(|z_1|^2-|z_2|^2).\end{aligned}\tag{1}$$

Бидејќи $|z_1+2z_2|=|2z_1+z_2|$, односно $|z_1+2z_2|^2-|2z_1+z_2|^2=0$ и како според (1) за $\alpha=2$ важи

$$|z_1+2z_2|^2-|2z_1+z_2|^2=(1-2^2)(|z_1|^2-|z_2|^2),$$

добиваме дека важи $|z_1|^2-|z_2|^2=0$. Затоа, повторно од (1) следува дека

$$|z_1+\alpha z_2|^2-|\alpha z_1+z_2|^2=0, \text{ т.е. } |z_1+\alpha z_2|=|\alpha z_1+z_2|.$$

**23.** Ако $a,b$ и $c$ се комплексни броеви такви што $|a|=|b|=1$ и $\overline{a}\neq b$, тогаш $\frac{\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{a}bc}{\overline{a}-b}$ е имагинарен број. Докажи!

**Решение.** Нека $w=\frac{\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{a}bc}{\overline{a}-b}$. Тогаш $\overline{w}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\overline{c}}{a-\overline{b}}$. Од $|a|=|b|=1$ следува дека $a\overline{a}=b\overline{b}=1$. Имаме:

$$\overline{w}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\overline{c}}{a-\overline{b}}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\overline{c}}{a-\overline{b}}\cdot\frac{\overline{a}b}{\overline{a}b}=\frac{a\overline{a}b+\overline{a}b\overline{b}+\overline{a}bc+a\overline{a}b\overline{b}\overline{c}}{a\overline{a}b-\overline{a}b\overline{b}}=\frac{b+\overline{a}+\overline{a}bc+\overline{c}}{b-\overline{a}}=-w$$

и оттука следува $\operatorname{Re} w=0$.

**24.** Нека $z_1,z_2$ и $z_3$ се комплексни броеви со модул 1 и нека $z_1+z_2+z_3=0$. Докажи дека

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|.$$

**Решение.** Од $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ добиваме

$$|z_1+z_2|=|z_2+z_3|=|z_3+z_1|=1.$$

Нека $z_k=x_k+iy_k$, $k=1,2,3$. Од $|z_k+z_j|=1$ за $k\neq j$ добиваме

$$(x_k^2+x_j^2)+(y_k^2+y_j^2)+2(x_kx_j+y_ky_j)=1$$
$$2+2\cdot(x_kx_j+y_ky_j)=1$$
$$2(x_kx_j+y_ky_j)=-1\,.$$

Користејќи го тоа, за модулот на $z_k-z_j$ ( $k,j\in\{1,2,3\}$ , $k\neq j$ ) добиваме

$$\begin{aligned}|z_k-z_j|^2&=(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2\\&=(x_k^2+x_j^2)+(y_k^2+y_j^2)-2(x_kx_j+y_ky_j)\,,\\&=2-1=1,\end{aligned}$$

т.е. $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=1$ .

**25.** Ако $z_1,z_2,z_3$ се комплексни броеви такви што
$$|z_1|=|z_2|=|z_3| \text{ и } z_1+z_2+z_3=0,$$
тогаш изразот
$$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$$
има константна вредност. Докажи!

**Решение.** *Прв начин.* Нека $|z_1|=|z_2|=|z_3|=k$ , тогаш од условот $z_1+z_2+z_3=0$ добиваме:
$$z_1+z_2=-z_3,\quad \text{т.е. } |z_1+z_2|=|-z_3|=k$$
Аналогно наоѓаме дека $|z_2+z_3|=|-z_1|=k$ и $|z_3+z_1|=|-z_2|=k$ , па добиваме:
$$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=3k^2$$

*Втор начин.* Користејќи дека $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ и $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, за секои $z,w\in\mathbb{C}$, имаме:

$$\begin{aligned}A&=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2\\&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_2+z_3)(\overline{z_2+z_3})+(z_3+z_1)(\overline{z_3+z_1})\\&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_2+z_3)(\overline{z_2}+\overline{z_3})+(z_3+z_1)(\overline{z_3}+\overline{z_1})\\&=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_3\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}\\&=\overline{z_1}(z_1+z_2+z_3)+\overline{z_2}(z_1+z_2+z_3)+\overline{z_3}(z_1+z_2+z_3)+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\\&=(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\end{aligned}$$

Бидејќи $z_1+z_2+z_3=0,\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=c,$ следува дека изразот $A$ има константна вредност: $3c^2$ .

**Забелешка.** Задачата можеме да ја решиме ако комплексните броеви ги запишеме во алгебарска (стандардна) форма $z_k=x_k+y_ki\quad(k=1,2,3)$, тогаш:
$$|z_1+z_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \text{ итн,}$$
а од условот $z_1+z_2+z_3=0$, следува: $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$.

**26.** Нека $z_1, z_2, ..., z_n$ се комплексни броеви такви што $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ и $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$. Докажи дека $\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = n(|z|^2 + 1)$.

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned} |z - z_k|^2 &= (z - z_k)(\overline{z - z_k}) = (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z_k}) = z\overline{z} - z\overline{z_k} - z_k\overline{z} + z_k\overline{z_k} \\ &= |z|^2 - z\overline{z_k} - z_k\overline{z} + |z_k|^2 = |z|^2 - z\overline{z_k} - z_k\overline{z} + 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Од условот $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$, следува $\overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n} = 0$, па затоа од (1) добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (|z|^2 + 1 - z\overline{z_k} - z_k\overline{z}) = n(|z|^2 + 1) - z\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_k \\ &= n(|z|^2 + 1) - z \cdot 0 - \overline{z} \cdot 0 = n(|z|^2 + 1). \end{aligned}$$

**27.** Ако $a, b$ и $c$ се комплексни броеви такви што

$$|a| = |b| = |c| = r, \; r > 0$$

тогаш

$$|ab + bc + ca| = r\,|a + b + c|.$$

Докажи!

**Решение.** Од $r^2 = |a|^2 = a\overline{a}$ следува $\frac{1}{a} = \frac{\overline{a}}{r^2}$. Аналогно $\frac{1}{b} = \frac{\overline{b}}{r^2}$ и $\frac{1}{c} = \frac{\overline{c}}{r^2}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= abc\left(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}\right) = abc\left(\tfrac{\overline{a}}{r^2} + \tfrac{\overline{b}}{r^2} + \tfrac{\overline{c}}{r^2}\right) \\ &= \tfrac{abc}{r^2} \cdot \overline{a + b + c} \end{aligned},$$

од што следува дека

$$|ab + bc + ca| = \tfrac{|abc|}{r^2}\,|\overline{a + b + c}| = r\,|a + b + c|,$$

што и требаше да се докаже.

**28.** Најди комплексен број $z$ што ги задоволува равенствата $|z + 2i| = |z - 4i|$ и $|z - 4| = 1$.

**Решение.** Нека $z = x + iy$. Тогаш

$$\begin{aligned} &|x + yi + 2i| = |x + yi - 4i| \\ &\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} \\ &x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \\ &y = 1. \end{aligned}$$

Од вториот услов добиваме

$$\begin{aligned} &|x + iy - 4| = 1 \\ &\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 1 \\ &(x - 4)^2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$x = 4.$$

Следствено, бараниот комплексен број е $z = 4 + i$.

**29.** Докажи дека за секои комплексни броеви $z_1$ и $z_2$ важи

$$|1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2.$$

**Решение.** Од $z\overline{z} = |z|^2$, непосредно следува

$$\begin{aligned}|1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - \overline{z_1}z_2)\overline{(1 - \overline{z_1}z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}\\ &= (1 - \overline{z_1}z_2)(1 - \overline{z_2}z_1) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})\\ &= 1 - \overline{z_1}z_2 - \overline{z_2}z_1 + \overline{z_1}z_1\overline{z_2}z_2 - \overline{z_1}z_1 - \overline{z_2}z_2 + \overline{z_1}z_2 - \overline{z_2}z_1\\ &= 1 + |z_1 z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2\\ &= (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

**30.** Определи ги комплексните броеви $z$ за кои

$$|z| = \tfrac{1}{|z|} = |z - 1|.$$

**Решение.** Јасно, равенките се определени за $z \neq 0$. Од равенката $|z| = \frac{1}{|z|}$, добиваме $|z|^2 = 1$, односно

$$|z| = 1. \qquad (1)$$

Од претходната равенка и равенката $|z| = |z - 1|$ ја добиваме равенката

$$|z - 1| = 1. \qquad (2)$$

Ако комплексниот број $z$ го запишеме во алгебарски облик $z = x + iy$, од (1) и (2) добиваме

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}. \qquad (3)$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, ја добиваме равенката $2x - 1 = 0$. од каде $x = \frac{1}{2}$. Ако замениме во било која од равенките од системот (3), ја добиваме равенката $y^2 = \frac{3}{4}$. Нејзини решенија се $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, множеството броеви

$$\{\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\},$$

е решение на равенките.

**31.** Определи ги сите комплексни броеви $z$ за кои важат равенствата

$$\left|\tfrac{z-12}{z-8i}\right| = \tfrac{5}{3} \text{ и } \left|\tfrac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

**Решение.** Ако $z = x + iy$, тогаш од условот на задачата добиваме

$$\left|\tfrac{z-12}{z-8i}\right|^2 = \tfrac{|z-12|^2}{|z-8i|^2} = \tfrac{(x-12)^2 + y^2}{x^2 + (y-8)^2} = \tfrac{25}{9} \text{ и } \left|\tfrac{z-4}{z-8}\right|^2 = \tfrac{|z-4|^2}{|z-8|^2} = \tfrac{(x-4)^2 + y^2}{(x-8)^2 + y^2} = 1,$$

од што го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+27x-50y+38=0 \\ x=6 \end{cases}$$

чии решенија се $x=6, y=17$ и $x=6, y=8$. Според тоа, бараните броеви се $z=6+17i$ и $z=6+8i$.

**32.** Нека $a$ е комплексен број таков што важи $a^5+a+1=0$. Колку вредности може да има изразот $a^2(a-1)$?

**Решение.** Важи

$$\begin{aligned} a^5+a+1 &= a^5-a^4+a^4-a^3+a^3-a^2+a^2+a+1 \\ &= a^2(a^3-a^2)+a(a^3-a^2)+(a^3-a^2)+(a^2+a+1) \\ &= (a^3-a^2)(a^2+a+1)+(a^2+a+1) \\ &= (a^3-a^2+1)(a^2+a+1). \end{aligned}$$

Ако $a^2+a+1=0$, тогаш $a^2(a-1)=-(a+1)(a-1)=1-a^2=a+2$. Од $a^2+a+1=0$ следува $a=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, па во тој случај добиваме $a^2(a-1)=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$. Од $a^3-a^2+1=0$, следува $a^2(a-1)=a^3-a^2=-1$. Значи, изразот $a^2(a-1)$ може да прими три вредности $-1, \frac{3-i\sqrt{3}}{2}, \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

**33.** Докажи дека постојат само конечно многу подредени тројки комплексни броеви $(x-y, y-z, z-x)$ кои ги задоволуваат равенствата

$$x(x-1)+2yz=y(y-1)+2xz=z(z-1)+2xy.$$

**Решение.** Нека $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$. Тогаш $x=a+y$, $z=y-b$, $c=-(a-b)$, па дадените равенства се трансформираат во: $a^2-a=-2ab=b^2+b$. Ако $a\neq 0$, тогаш $b=\frac{1-a}{2}$, па со решавање на равенката $a^2-a=(\frac{1-a}{2})^2+\frac{1-a}{2}$, се добива $a=1$ или $a=-1$, од каде што ги добиваме тројките $(1,0,-1)$ и $(-1,1,0)$. Ако $a=0$, тогаш од $b^2+b=0$, се добива $b=0$ или $b=-1$, со што ги добиваме тројките $(0,0,0)$ и $(0,-1,1)$.

**34.** Нека $A=\{z_1,z_2,....,z_{1996}\}$ е множество од комплексни броеви и нека за секој $i\in\{1,2,3,....,1996\}$ е исполнето равенството

$$\{z_iz_1, z_iz_2,....,z_iz_{1996}\}=A.$$

а) Докажете дека за секој $i$ е исполнето $|z_i|=1$.

б) Докажете дека од $z\in A$ следува $\overline{z}\in A$.

**Решение.** а) Да претпоставиме дека за некое $i$ важи $|z_i|>1$. Нека е тоа токму бројот со максимален модул. Тогаш $z_i^2=z_i\overline{z_i}\in A$, па

$$|z_i^2|=|z_i|^2>|z_i|,$$

што противречи на максималноста на $|z_i|$.

Ако за некое $i$ важи $0<|z_i|<1$, избирајќи го токму бројот со минимален модул, повторно добиваме прориврečност $|z_i^2|=|z_i|^2<|z_i|$, со минималноста на $|z_i|$.

На крајот ако за некое $i$ важи $|z_i|=0$, т.е. $z_i=0$, па сите елементи од $A$ би биле еднакви на нула, што е невозможно.

Следствено, за секој $i$ е исполнето $|z_i|=1$.

б) Нека $z\in A$. Ги разгледуваме броевите $z,z^2,z^3,\dots$. Според условот на задачата и овие елементи припаѓаат во $A$. Бидејќи $A$ е конечно множество, за некои $m$ и $l$ мора да важи $z^m=z^l$, односно $z^k=1$. Ако ставиме $z'=z^{k-1}$, добиваме $z'z=z^k=1$, а од тука

$$z'=\tfrac{1}{z}=\tfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\tfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\tfrac{\overline{z}}{1}=\overline{z},$$

бидејќи $|z|=1$, според а). Така $\overline{z}=z'\in A$.

**35.** Реши го, во множеството комплексни броеви, системот равенки $z^{19}w^{25}=1$, $z^5w^7=1$, $z^4+w^4=2$.

**Решение.** Од $z^5w^7=1$ добиваме $z^{15}w^{21}=1$, па затоа $\frac{z^{19}w^{25}}{z^{15}w^{21}}=1$, т.е. $z^4w^4=1$. Од последната и од третата равенка на системот добиваме дека $z^4$ и $w^4$ се решенија на равенката $t^2-2t+1=0$, т.е. $z^4=w^4=1$. Според тоа $1=z^5w^7=zw^3$. Натаму, $zw^4=w$ па $z=w$. Решенијата на системот се $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(i,i)$ и $(-i,-i)$.

**36.** Да се докаже неравенството

$$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2},$$

каде $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n\in\mathbb{R}$.

**Решение.** Да ги разгледаме комплексните броеви $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2,\dots$, $z_n=a_n+ib_n$. Од неравенството на триаголник за овие комплексни броеви следува

$$|z_1+z_2+z_3+...+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+|z_3|+...+|z_n|.$$

Сега, ако во горното неравенство замениме $z_k=a_k+ib_k$, за $k=1,2,3,...,n$, го добиваме бараното неравенство.

**37.** Нека $a$ и $b$ се комплексни броеви и $c>0$. Докажи дека

$$|a+b|^2\leq(1+c)|a|^2+(1+\tfrac{1}{c})|b|^2. \tag{1}$$

**Решение.** Бидејќи

$$|a+b|^2=(a+b)\overline{(a+b)}=(a+b)(\overline{a}+\overline{b})=a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b},$$

даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a\overline{b}+b\overline{a}\le ca\overline{a}+\tfrac{1}{c}b\overline{b}\,.$$

$$ca(\overline{a}-\tfrac{1}{c}\overline{b})-b(\overline{a}-\tfrac{1}{c}\overline{b})\ge 0\,,$$

$$(ca-b)(\overline{a}-\tfrac{1}{c}\overline{b})\ge 0\,,$$

$$(ca-b)\tfrac{1}{c}(c\overline{a}-\overline{b})\ge 0\,,$$

$$\tfrac{1}{c}(ca-b)(\overline{ca-b})\ge 0\,,\quad \text{(бидејќи } c \text{ е реален број)}$$

$$|\,ca-b\,|^2\ge 0\,.$$

Конечно, од точноста на последното неравенство, следува точноста на неравенството (1).

**38.** Нека $v$ и $w$ се два различни ненулти комплексни броеви. Докажи дека важи:

$$|\,zw+\overline{w}\,|\le|\,zv+\overline{v}\,|\,,$$

за секој $z\in\mathbb{C},|\,z\,|=1$ ако и само ако постои $k\in[-1,1]$, така што $w=kv$.

**Решение.** Ако постои $k\in[-1,1]$ таков што $w=kv$, тогаш неравенството е очигледно.

Обратно, нека $t>1$ е таков што $w-tv\ne 0$. Дефинираме комплексен број: $z=\frac{t\overline{v}-\overline{w}}{w\text{-}tv}$, за кој важи $|\,z\,|=1$. Притоа $zw+\overline{w}=\frac{t(w\overline{v}-\overline{w}v)}{w\text{-}tv}$, односно $zv+\overline{v}=\frac{w\overline{v}-\overline{w}v}{w\text{-}tv}$, па затоа

$$|\,zw+\overline{w}\,|=t\,|\,zv+\overline{v}\,|\,.$$

Но, $t>1$ па затоа од последното равенство и равенството од условот на задачата следува $|\,zw+\overline{w}\,|=|\,zv+\overline{v}\,|=0$, што значи дека $\frac{w}{v}=k\in\mathbb{R}$. Конечно со замена во неравенството од условот на задачата добиваме $k\in[-1,1]$.

**39.** Нека $u$ и $v$ се комплексни броеви. Докажи дека

$$(1+uv)(1+\overline{uv})\le(1+u\overline{u})(1+v\overline{v})\,.$$

**Решение.** *Прв начин.* Имаме

$$(1+uv)(1+\overline{uv})\le(1+u\overline{u})(1+v\overline{v})\;\Leftrightarrow\; uv+\overline{uv}\le u\overline{u}+v\overline{v}\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;(u-\overline{v})(\overline{u}-v)\ge 0\;\Leftrightarrow\;(u-\overline{v})(\overline{u-\overline{v}})\ge 0\;\Leftrightarrow\;|\,u-\overline{v}\,|^2\ge 0\,,$$

и како за било кои комплексни броеви $u$ и $v$ последното равенство е точно, добиваме дека и почетното равенство е точно.

*Втор начин.* Нека $u=a+ib$ и $v=c+di$. Воведуваме ознаки $L=(1+uv)(1+\overline{uv})$ и $D=(1+u\overline{u})(1+v\overline{v})$. Сега

$$L=[1+(a+ib)(c+di)][1+(a-ib)(c-di)]$$

$$=[1+ac-bd+(ad+bc)i][1+ac-bd-(ad+bc)i]=(a+ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

$$=1+a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+2ac-2bd$$

$$D=[1+(a+ib)(a-ib)][1+(c+di)(c-di)]$$
$$=[1+a^2+b^2][1+c^2+d^2]=1+a^2+b^2+c^2+d^2+a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$$

Според тоа,

$$D-L=(a^2-2ac+c^2)+(b^2+2bd+d^2)=(a-c)^2+(b+d)^2\geq 0\,,$$

од каде добиваме $D\geq L$ што и требаше да се докаже.

**40.** Најди го множеството точки во комплексната рамнина што одговараат на броевите $z=x+iy$ за коишто $\operatorname{Im}(z+z^{-1})=0$.

**Решение.** Имаме:

$$z+z^{-1}=x+iy+\tfrac{1}{x+iy}=x+iy+\tfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\tfrac{x(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)i+x-iy}{x^2+y^2}$$
$$=\tfrac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}+\tfrac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}i\,.$$

Од условот $\operatorname{Im}(z+z^{-1})=0$ следува $\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}=0$, односно $y(x^2+y^2-1)=0$.

Според тоа, $y=0$ или $x^2+y^2-1=0$. Од $y=0$ и фактот дека $z\neq 0$ следува $\operatorname{Im}z=0,\ z\neq 0$, а од $x^2+y^2-1=0$ следува $|z|=1$. Според тоа, бараното множество точки е:

$$\{z\mid \operatorname{Im}z=0,\ z\neq 0\}\cup\{z\mid |z|=1\}\,.$$

**Забелешка.** Јасно, $z\neq 0$, бидејќи во спротивно $\frac{1}{z}$ не постои.

**41.** Одреди ја минималната вредност на изразот $|z-\frac{1}{z}|$, ($z$ е комплексен број), ако $|z|=2$.

**Решение.** Нека $z=a+bi$, тогаш, поради $|z|=2$ следува $a^2+b^2=4$, па имаме:

$$|z-\tfrac{1}{z}|^2=\tfrac{|z^2-1|^2}{|z|^2}=\tfrac{1}{4}|z-1|^2\cdot|z+1|^2=\tfrac{1}{4}|a+bi-1|^2\cdot|a-bi+1|^2$$
$$=\tfrac{1}{4}(a^2-2a+1+b^2)(a^2+2a+1+b^2)=\tfrac{1}{4}(5-2a)(5+2a)$$
$$=\tfrac{1}{4}(25-4a^2)=\tfrac{1}{4}(25-4(4-b^2))=\tfrac{1}{4}(9+4b^2)=b^2+\tfrac{9}{4}.$$

Значи, $|z-\frac{1}{z}|=\sqrt{b^2+\frac{9}{4}}$, па $\min\{|z-\frac{1}{z}|\}=\frac{3}{2}$ за $b=0$. Оттука $a=\pm 2$.

Следствено, дадениот израз достигнува најмала вредност 1,5 за $z=\pm 2$.

# II КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА И КВАДРАТНА РАВЕНКА

## 1. КВАДРАТНА РАВЕНКА

**1.** Реши ја равенката $x+\frac{x}{x}+\frac{x}{x+\frac{x}{x}}=1$.

**Решение.** Јасно, $x=0$ не е решение на равенката. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$x+\frac{x}{x+1}=0. \qquad (1)$$

Од (1) следува дека $x=-1$ не е решение на равенката. Според тоа, решенијата треба да ги бараме во множеството $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

Ако равенката (1) ја помножиме со $x+1$, ја добиваме равенката $x^2+2x=0$, т.е. равенката

$$x(x+2)=0. \qquad (2)$$

Очигледно, решенијата на (2) се $x_1=0$ и $x_2=-2$. Од нив само $x_2=-2$ е решение на почетната равенка.

**2.** Да се реши равенката

$$x^2+3x=|a(x+3)|,$$

во множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

**Решение.** Равенката ќе ја запишеме во облик $x(x+3)=|a||x+3|$. Ќе разгледаме три случаи: $x+3=0$, $x+3>0$ и $x+3<0$.

Во првиот случај добиваме $x+3=0$ и $x\cdot 0=|a|\cdot 0$. Според тоа, во овој случај решение е $x=-3$ за $a\in\mathbb{R}$.

Во вториот случај имаме $x+3>0$ и $x=|a|$. Бидејќи $|a|\geq 0>-3$, добиваме дека во овој случај решение е $x=|a|$, $a\in\mathbb{R}$.

Во третиот случај имаме $x+3<0$ и $x=-|a|$. При тоа $x=-|a|$ е решение на равенката ако и само ако $-|a|<-3$. Според тоа, решение е $x=-|a|$ за $|a|>3$, односно $x=-|a|$, за $a\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

Конечно имаме за $a\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ решенија се $x_1=-3$, $x_2=|a|$ и $x_3=-|a|$, а за $a\in[-3,3]$ решенија се $x_1=-3, x_2=|a|$

**3.** Ако $z^2+z+1=0$, тогаш $z^{2002}+z^{-2002}=-1$. Докажи!

**Решение.** Решенијата на равенката се коњугирано комплексни броеви. Притоа за решенијата $z$ на равенката е исполнето $z\neq 1$ и $z\neq -1$. Ако $z^2+z+1=0$ ја помножиме со $z-1\neq 0$, добиваме $(z-1)(z^2+z+1)=0$, т.е. . $z^3-1=0$. Значи за решенијата на равенката $z^2+z+1=0$ е исполнето равенството $z^3=1$ и $\frac{1}{z^3}=1$. Уште повеќе

$$z^2+1=-z \text{, и } \frac{z^2+1}{z}=-1.$$

Бројот 2002 можеме да го запишеме во облик $2002=667\cdot 3+1$, од каде добиваме

$$z^{2002}+\frac{1}{z^{2002}}=(z^3)^{667}z+\frac{1}{(z^3)^{667}z}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=-1.$$

**4.** Три квадратни равенки во сведен (нормален) облик имаат дискриминанти $D_1, D_2, D_3$ кои се квадрати на цели броеви $m,n,p$ за кои што $|m|=|n|+|p|$. Дали постои избор по еден корен од секоја равенка, таков што нивниот збир е еднаков на збирот на преостанатите три корени.

**Решение.** Нека претпоставиме дека $x^2+p_1x+q_1=0$, $y^2+p_2y+q_2=0$ и $z^2+p_3z+q_3=0$ се квадратни равенки за кои што

$$p_1^2-4q_1=m^2,\ p_2^2-4q_2=n^2,\ p_3^2-4q_3=p^2,$$

а нивните решенија се $x_{1/2}=\frac{-p_1\pm|m|}{2}$, $y_{1/2}=\frac{-p_2\pm|n|}{2}$ и $z_{1/2}=\frac{-p_3\pm|p|}{2}$. За нивните решенија се исполнети равенствата $x_1-x_2=|m|$, $y_1-y_2=|n|$ и $z_1-z_2=|p|$, односно $x_2=x_1-|m|$, $y_1=y_2+|n|$, $z_1=z_2+|p|$. Според тоа

$$\begin{aligned}y_1+z_1+x_2&=(y_2+|n|)+(z_2+|p|)+(x_1-|m|)\\&=y_2+z_2+x_1+(|n|+|p|-|m|)\\&=y_2+z_2+x_1.\end{aligned}$$

**5.** За кои вредности на параметарот $k$, равенката

$$|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=k$$

има бесконечно множество решенија?

**Решение.** Ако $x^2-6x+5\ge 0$, тогаш $x^2-6x+8>0$, па равенката го добива видот $2x^2-12x+13-k=0$. Оваа равенка не може да има повеќе од две решенија за ниедна вредност на параметарот $k$.

До ист заклучок доаѓаме кога $x^2-6x+5\ge 0$ и $x^2-6x+8\le 0$.

Ако, пак, $x^2-6x+5<0$ и $x^2-6x+8>0$, тогаш равенката го добива видот

$$x^2-6x+8-x^2+6x-5=k,$$

т.е. $k=3$. Следствено, за $k=3$ решение на дадената равенка е секој реален број $x$ кој ги задоволува условите $x^2-6x+5\le 0$ и $x^2-6x+8\ge 0$. Решението на првата неравенка е интервалот $M_1=[1,5]$, на втората $M_2=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$, а решението на системот-нивниот пресек $M=M_1\cap M_2=[1,2]\cup[4,5]$.

Ако, пак, $x^2-6x+5>0$ и $x^2-6x+8<0$, тогаш равенката го добива видот

$$-x^2+6x-8+x^2-6x+5=k,$$

т.е. $k=-3$. Следствено, за $k=-3$ решение на дадената равенка е секој реален број $x$ кој ги задоволува условите $x^2-6x+5\ge 0$ и $x^2-6x+8\le 0$. Решението на првата неравенка е интервалот $M_1=(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$, на втората $M_2=[2,4]$, а решението на системот-нивниот пресек $M=M_1\cap M_2=\varnothing$.

Значи, за $k=3$ равенката има бесконечно множество решенија. Тоа множество е $[1,2]\cup[4,5]$.

**6.** Дали може квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0,$$

каде $a,b,c\in\mathbb{Z}$ да има дискриминанта еднаква на 23.

**Решение.** Дискриминантата на равенката е $D=b^2-4ac$. Од равенството

$$b^2-4ac=23 \qquad (1)$$

ги добиваме еквивалентните равенства $b^2-25=4ac-2$ I

$$(b-5)(b+5)=2(2ac-1). \qquad (2)$$

Јасно, $2\,|\,2(2ac-1)$ и $4\nmid 2(2ac-1)$. Ќе разгледаме два случаи.

а) Ако $b$ е непарен број, тогаш $b-5$ и $b+5$ се парни броеви, па според тоа $(b-5)(b+5)$ е делив со $4$. Бидејќи $4\nmid 2(2ac-1)$ добиваме дека равенството (2) а со тоа и равенството (1) не е точно.

б) Ако $b$ е парен број, тогаш $b-5$ и $b+5$ се непарни броеви, па според тоа $(b-5)(b+5)$ не е делив со $2$. Бидејќи $2\,|\,2(2ac-1)$, добиваме дека равенството (2) а со тоа и равенството (1) не е точно.

**7.** Определи ги сите парови цели броеви $(a,b)$, така да $a+b$ е корен на равенката

$$x^2+ax+b=0.$$

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се цели броеви, такви што $a+b$ е корен на равенката $x^2+ax+b=0$. Според тоа,

$$(a+b)^2+a(a+b)+b=0,$$

односно

$$b^2+(3a+1)b+2a^2=0. \qquad (1)$$

Значи, парот цели броеви $(a,b)$ е решение на равенката (1). Равенката (1) има целобројни решенија, ако нејзината дискриминанта

$$D=(3a+1)^2-8a^2=(a+3)^2-8$$

е квадрат на цел број. Јасно, за $a+3=0,\pm1,\pm2$ разликата $(a+3)^2-8$ не е полн квадрат, а исто така и за $a+3=\pm4,\pm5$ разликата $(a+3)^2-8$ не е полн квадрат. Понатаму, лесно се докажува дека за $|a+3|\geq 6$ важи

$$(a+2)^2<(a+3)^2-8<(a+3)^2,$$

т.е. $(a+3)^2-8$ не е полн квадрат.

За $a+3=\pm3$, бројот $(a+3)^2-8=9-8=1=1^2$ е полн квадрат. Значи, равенката (1) има целобројни решенија за $a=0$ и $a=-6$. При тоа, за $a=0$ решенија се $b=0$ и $b=-1$, а за $a=-6$ решенија се $b=9$ и $b=8$.

Лесно се проверува дека кога $(a,b)$ е: $(0,0),(0,-1),(-6,8),(-6,9)$, тогаш $a+b$ е решение на равенката $x^2+ax+b=0$. .

**8.** Одреди ја најголемата вредност на разликата $x-y$ ако

$$2(x^2+y^2)=x+y. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека $a=x-y$, односно $x=a+y$. Ако замениме во (1), добиваме

$$2(y+a)^2+2y^2=a+2y,$$

односно $4y^2+2(2a-1)y+2a^2-a=0$. Последната равенка е задоволена и за $a=a_{\max}$. Таа има барем еден реален корен $y$ ако и само ако

$$D=(2a-1)^2-4(2a^2-a)\geq 0,$$

односно $4a^2-1\leq 0$. Ова е точно само ако $a\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Така $a_{\max}=\frac{1}{2}$.

**9.** Да се најдат сите парови реални броеви $(a,b)$ такви што

$$2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(a+1)(ab+1).$$

**Решение.** Дадената равенка ќе ја запишеме како квадратна равенка по $a$:

$$a^2(b^2-b+2)-a(b+1)^2+2b^2-b+1=0.$$

Нејзината дискриминанта е $\Delta=-(b-1)^2(7b^2-2b+7)$. Бидејќи

$$7b^2-2b+7=7(b^2-2\cdot\tfrac{1}{7}b+\tfrac{1}{49}+\tfrac{48}{49})=7(b-\tfrac{1}{7})^2+\geq\tfrac{48}{7}>0,$$

добиваме дека $\Delta\leq 0$. Равенката има реални решенија ако и само ако $\Delta\geq 0$. Единствена вредност за $b$ за која што $\Delta\geq 0$ е $b=1$. Но тогаш $2a^2-4a+2=0$, т.е. $2(a-1)^2=0$. Според тоа, единствено реално решение е $a=1, b=1$.

**10.** За кои вредности на $k\in\mathbb{Z}$ равенката $kx^2-(1-2k)x+k-2=0$, $k\neq 0$ има рационални корени?

**Решение.** Корените на квадратната равенка ќе бидат рационални броеви, само ако нејзината дискриминанта е точен квадрат. Дискриминантата е:

$$D=(1-2k)^2-4k(k-2)=4k+1.$$

Ако $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, тогаш и $D\in\mathbb{Z}$. Бидејќи $D=4k+1$ е непарен број, следува дека $D$ е квадрат на непарен број, т.е. $4k+1=(2m+1)^2$, од каде следува $k=m(m+1)$. Значи, $k=m(m+1)$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}$, т.е. $k\in\{2,6,12,...\}$.

**11.** Броевите $a$ и $b$ се рационални и важи $a^2+b^2\neq 0$. Докажи дека корените на равенката

$$(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$$

се исто така рационални броеви.

**Решение.** Ако $a=b\neq 0$, тогаш равенката го добива видот $2x=1$ и нејзино решение е $x=\frac{1}{2}$.

Ако $a=-b\neq 0$, тогаш равенката го добива видот $2x=-1$ и нејзино решение е $x=-\frac{1}{2}$.

Нека $a\neq b$. Тогаш равенката ќе ја запишеме во облик

$$(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$$

Решенијата на последната равенка се

$$x_{1/2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4ab(a^2-b^2)}}{2(a^2-b^2)},$$

и како

$$(a^2+b^2)^2-4ab(a^2-b^2)=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^3b+4ab^3=(a^2-2ab-b^2)^2,$$

добиваме дека решенијата на равенката се

$$x_{1/2}=\frac{a^2+b^2\pm(a^2-2ab-b^2)}{2(a^2-b^2)},$$

и тоа се рационални броеви.

**12.** Докажи дека секој парен број може да биде вредност на изразот

$$2x^2+11y+12y^2+4x+5y+6.$$

**Решение.** *Прв начин.* Треба да докажеме дека за секој цел број $m$, равенката

$$2x^2+11y+12y^2+4x+5y+6=2m$$

има барем едно решение во $\mathbb{Z}$. За таа цел ја запишуваме равенката во видот

$$(2x+3y)(x+4y)+4x+5y+6=2m,$$

и ставајќи $2x+3y=0$, т.е. $y=-\frac{2}{3}x$, добиваме: $2x+18=6m$, и оттука

$$x=3m-9 \text{ а } y=6-2m.$$

Значи, за произволен парен број $2m$, постои двојка цели броеви

$$(x,y)=(3m-9,6-2m)$$

за која што дадениот израз е еднаков на $2m$.

*Втор начин.* Дадениот израз да го означиме со $A(x,y)$, го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned}A(x,y)&=2x^2+11y+12y^2+4x+5y+6\\&=x(2x+3y)+4y(2x+3y)+2(2x+3y)+6-y\\&=(2x+3y)(x+4y+2)+(6-y)\end{aligned}$$

Да ставиме $6-y=m$, $m\in\mathbb{Z}$ и $x+4y+2=0$. Тогаш: $y=6-m$, $x=4m-26$. Значи,

$$A(4m-26,6-m)=m,\ m\in\mathbb{Z},$$

т.е. секој цел број $m$ може да биде вредност на дадениот израз, па следствено и секој парен цел број.

**13.** Докажи дека равенката

$$3(a+b+c)x^2+4(ab+bc+ca)x+4abc=0$$

има реални решенија за секои $a,b,c\in\mathbb{R}$. При кои услови решенијата се еднакви меѓу себе?

**Решение.** За дискриминантата на квадратната равенка добиваме

$$\begin{aligned}D&=16(ab+bc+ca)^2-48(a^2bc+b^2ac+c^2ab)\\&=16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab-3a^2bc-3b^2ac-3c^2ab)\\&=16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab)\\&=8(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab)\\&=8[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2]\ge 0\end{aligned}$$

што значи дека дадената равенка има реални решенија. Равенката ќе има двоен корен ако и само ако $D=0$, т.е. ако и само ако $ab=bc=ca$.

**14.** За која најмала вредност на $p\in\mathbb{N}$, равенката $x^2+px+1988=0$ ќе има целобројни решенија? Најди ги тие решенија. **Решение.** Дадената равенка ќе има целобројни решенија, само ако нејзината дискриминанта е точен квадрат, т.е.

$$D=p^2-4\cdot 1988=k^2.$$

Од $p^2-k^2=7952$ следува

$$(p-k)(p+k)=7952.$$

Бројот 7952 го разложуваме само на парни множители, бидејќи $p-k$ и $p+k$ се со иста парност (двата истовремено не може да бидат непарни, зошто?). Можни се следниве случаи:

$1^\circ$ $(p-k)(p+k)=2\cdot 3976$, од каде што следува

$$\begin{cases}p-k=2\\p+k=3976\end{cases},$$

т.е. $p=1989$

$2^\circ$ $(p-k)(p+k)=4\cdot 1988 \Rightarrow p=996$

$3^\circ$ $(p-k)(p+k)=8\cdot 994 \Rightarrow p=501$

$4^\circ$ $(p-k)(p+k)=8\cdot 568 \Rightarrow p=291$

$5^\circ$ $(p-k)(p+k)=28\cdot 284 \Rightarrow p=156$

$6^\circ$ $(p-k)(p+k)=56\cdot 142 \Rightarrow p=99$

Според тоа, најмалата вредност на $p\in\mathbb{N}$ е бројот 99. Во тој случај равенката е $x^2+99x+1988=0$, од каде што добиваме $x_1=-71$, $x_2=-28$.

**Забелешка.** Дадената равенка можеме да ја запишеме во видот

$$x(x+p)=-1988.$$

Потоа може при претпоставка $x<x+p$ да се разгледаат сите можни случаи, претставувајќи го бројот 1988 во канонична форма.

**15.** Нека $P(x)=x^2+ax+b$ каде $a$ и $b$ се цели броеви. Ако $P(x)$ е полн квадрат за бесконечно многу цели броеви $x$, тогаш $a^2=4b$. Докажи!

**Решение.** Од условот на задачата постојат бесконечно многу парови $(x,k)$, за кои $x^2+ax+b-k^2=0$. Според тоа, за бесконечно многу природни броеви $k$ $a^2-4b+4k^2$ е полн квадрат на природен број. Значи, постои најмал природен број $n$, за кој што

$$-n<\frac{a^2-4b-1}{4}<n$$

и кој го исполнува уловот на задачата. Но тогаш

$$-4n<a^2-4b-1<4n$$

$$4n^2-4n+1<a^2-4b+4n^2<4n^2+4n+1$$

$$(2n-1)^2<a^2-4b+4n^2<(2n+1)^2$$

Но, $a^2-4b+4n^2$ е полн квадрат, па затоа $a^2-4b+4n^2=4n^2$, т.е. $a^2-4b=0$.

**16.** Дадени се реалните броеви $a,b$ и $c$. Докажи дека барем една од равенките

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0$$

$$x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$

$$x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

има реални решенија.

**Решение.** Ќе ги разгледаме броевите $a_1=a-b$, $b_1=b-c$ и $c_1=c-a$. Притоа,

$$a_1+b_1+c_1=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0\,.$$

Од последното равенство, добиваме дека барем еден од трите собироци не е позитивен. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е бројот $b-c$. Значи $b-c\le 0$, па за првата равенка имаме дискриминанта

$$D=(a-b)^2-4(b-c)\ge 0\,.$$

Првата равенка има решенија

$$x_{1/2}=\frac{-(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2-4(b-c)}}{2}\in\mathbb{R}\,.$$

Аналогно се разгледуваат и другите случаи.

**17.** За кои вредности на параметарот $a$ равенките

$$x^2+ax+1=0 \text{ и } x^2+x+a=0$$

имаат заеднички корен.

**Решение.** Нека $\alpha$ е заеднички корен на равенките, тогаш

$$\alpha^2+a\alpha+1=0 \text{ и } \alpha^2+\alpha+a=0\,.$$

Со елиминација на $\alpha^2$ добиваме $a\alpha+1=\alpha+a$, т.е. $(a-1)\alpha=(a-1)$.

*i*) За $a=1$ ($\alpha$ е кој било реален број), равенките се еквивалентни.

*ii*) Ако $a\ne 1$, тогаш $\alpha=1$, па од првата равенка наоѓаме: $1^2+a\cdot 1+1=0$, т.е. $a=-2$.

Значи, за $a=1$ равенките се еквивалентни (имаат по два заеднички корени), а за $a=-2$ имаат само еден заеднички корен.

**18.** Ако равенките $ax^2+bx+c=0$ и $Ax^2+Bx+C=0$ имаат барем едно заедничко решение, тогаш $(aC-Ac)^2=(aB-Ab)(bC-Bc)$. Докажи!

**Решение.** Да го означиме заедничкото решение на двете равенки со $y$ . Тогаш

$$ay^2+by+c=0 \tag{1}$$

$$Ay^2+By+C=0 \tag{2}$$

Ако првото равенсво го помножиме со $A$ , а второто со $a$ и потоа добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB-Ab)y=Ac-aC\,. \tag{3}$$

Од друга страна, ако првото равенство го помножиме со $B$ , а второто со $b$ и добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB-Ab)y^2=bC-Bc\,. \tag{4}$$

Ако $aB-Ab\neq 0$ , тогаш изразувајќи го $y$ од (3) и заменувајќи го во (4) се добива бараното равенство.

Нека $aB-Ab=0$. Тогаш, од (3) и (4) добиваме $aC-Ac=bC-Bc=0$, па значи и во овој случај важи $(aC-Ac)^2=(aB-Ab)(bC-Bc)$.

**19.** Најди ги сите реални броеви $x$ , за кои дропката $\frac{x}{x^2-5x+7}$ е цел број.

**Решение.** Нека $k\in\mathbb{Z}$ и нека $\frac{x}{x^2-5x+7}=k$ , тогаш

$$kx^2-(5k+1)x+7k=0\,. \tag{1}$$

Равенката (1) ќе има реални корени по $x$, ако нејзината дискриминанта е ненегативен број, т.е.

$$D=(5k+1)^2-28k^2=-3k^2+10k+1\geq 0\,.$$

Оттука $k\in[\frac{5-2\sqrt{7}}{3},\frac{5+2\sqrt{7}}{3}]$, односно $k\in\{0,1,2,3\}$.

Според тоа, имаме четири можности:

$i$) ако $k=0$, тогаш $x_1=0$ ,

$ii$) ако $k=1$, равенката (1) го добива обликот $x^2-6x+7=0$, од каде што $x_{2/3}=3\pm\sqrt{2}$ ;

$iii$) ако $k=2$ , тогаш $x_4=2$ , $x_5=\frac{7}{2}$ ;

$iv$) ако $k=3$, тогаш $x_6=3$, $x_7=\frac{7}{3}$.

Значи, дропката $\frac{x}{x^2-5x+7}$ е цел број, за вредностите на $x$ од множеството

$$\{0,2,3,\tfrac{7}{2},\tfrac{7}{3},3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\}\,.$$

**20.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21.$$

**Решение.** Имаме

$$x^2-x+1=(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\geq\tfrac{3}{4}, \quad (1)$$

$$4y^2+6y+4=4(y+\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{7}{4}\geq\tfrac{7}{4} \quad (2)$$

и

$$4z^2-12z+25=4(z-\tfrac{3}{2})^2+16\geq 16. \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува дека

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)\geq 16\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{7}{4}=21 \quad (4).$$

Равенство е исполнето аком и само ако во (1), (2) и (3) се исполнети равенства. Но, условот за равенствата е зададената равенка

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21$$

па според тоа решение на равенката е $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{4}$ , $z=\frac{3}{2}$.

**21.** Нека $a$ и $b$ се дадени реални броеви, така што $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$ и $a\neq -b$. Да се реши равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0.$$

**Решение.** За изразот $L$ од левата страна на равенката имаме:

$$L=(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a+b})+(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+b})=\frac{2x+a+b}{x(x+a+b)}+\frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)}$$

$$=\frac{(2x+a+b)[2x^2+2(a+b)x+ab]}{x(x+a)(x+b)(x+a+b)}.$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(2x+a+b)[2x^2+2(a+b)x+ab]=0,$$

чии решенија се $x_1=-\frac{a+b}{2}$, $x_{2/3}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Од претпоставките за $a$ и $b$, дадени во задачата, следува дека корените $x_1,x_2,x_3$ се различни од нула, од $-a$, од $-b$ и од $-(a+b)$.

**22.** Реши ја равенката

$$(x^2-a^2)^2-4ax-1=0.$$

**Решение.** Имаме

$$(x^2-a^2)^2-4ax-1=0$$

$$(x^2+a^2)^2-4a^2x^2-4ax-1=0$$

$$(x^2+a^2)^2-(2ax+1)^2=0$$

$$(x^2+a^2-2ax-1)(x^2+a^2+2ax+1)=0$$

$$[(x-a)^2-1][(x+a)^2+1]=0$$

$$(x-a-1)(x-a+1)[(x+a)^2+1]=0.$$

Конечно, решенијата на дадената равенка се

$$x_1 = a+1,\ x_2 = a-1,\ x_3 = -a+i,\ x_4 = -a-i\ .$$

**23.** Реши ја равенката

$$(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3\ .$$

**Решение.** Воведуваме смени $u = x^2+3x-4,\ v = 2x^2-5x+3$, после што равенката го добива обликот $u^3+v^3=(u+v)^3$, т.е. $3uv(u+v)=0$. Оттука следува

$$x^2+3x-4=0 \text{ или } 2x^2-5x+3=0 \text{ или } 3x^2-2x-1=0\ ,$$

па затоа решенијата на дадената равенка се

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1,\ x_4 = -\tfrac{1}{3},\ x_5 = \tfrac{3}{2},\ x_6 = -4\ .$$

**24.** Нека $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Дали е можно вредноста на дискриминантата на квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0\ ,$$

да биде еднаква на 23.

**Решение.** Дискриминантата на равенката е $D = b^2-4ac$. Равенството

$$b^2-4ac=23 \tag{1}$$

е еквивалентно на равенство $b^2-25=4ac-2$, т.е. на равенството

$$(b-5)(b+5)=2(2ac-1)\ . \tag{2}$$

Јасно, $2\,|\,2(2ac-1)$ и $4 \nmid 2(2ac-1)$. Ќе разгледаме два случаи.

Ако $b$ е непарен број, тогаш $b-5$ и $b+5$ се парни броеви, па според тоа $(b-5)(b+5)$ е делив со 4. Бидејќи $4 \nmid 2(2ac-1)$ добиваме дека равенството (2), а со тоа и равенството (1) не е можно.

Ако $b$ е парен број, тогаш $b-5$ и $b+5$ се непарни броеви, па според тоа $(b-5)(b+5)$ не е делив со 2. Бидејќи $2\,|\,2(2ac-1)$, добиваме дека равенството (2), а со тоа и равенството (1) не е можно.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека за било кои цели броеви $a,b,c \in \mathbb{Z}$ вредноста на дискриминантата на квадратната равенка не може да биде еднаква на 23.

**25.** Броевите $a, b, c$ се такви што $a>0$, $b>a+c$. Докажи дека решенијата на равенката $ax^2+bx+c=0$ се реални и различни.

**Решение.** Ако $c<0$, тогаш $b^2-4ac \geq -4ac > 0$. Ако $c \geq 0$, тогаш $a+c>0$, $b^2 > (a+c)^2$ и $b^2-4ac > (a+c)^2-4ac = (a-c)^2 \geq 0$.

Според тоа, при дадените услови вредноста на дискриминантата на разгледуваната квадратна равенка е позитивна, што значи дека нејзините решенија се реални и различни.

**26.** Докажи дека решенијата на равенката

$$(a^2-a-2)x^2+(2a^2-2a+5)x+a^2-a-2=0\ ,\ a \neq -1,\ a \neq 2\ .$$

се реални.

**Решение.** Имаме

$$D=(2a^2-2a+5)^2-4(a^2-a-2)(a^2-a-2)=(2a^2-2a+5)^2-(2(a^2-a-2))^2$$
$$=(2a^2-2a+5-2a^2+2a+4)(2a^2-2a+5+2a^2-2a-4)$$
$$=9(4a^2-4a+1)=9(2a-1)^2\geq 0,$$

од каде заклучуваме дека корените на разгледуваната равенка се реални.

**27.** Нека $a,b$ и $c$ се произволни реални броеви. Докажи дека равенката

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0\,,$$

има реални решенија.

**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0\,. \qquad (1)$$

За дискриминантата на равенката (1) добиваме

$$D=[2(a+b+c)]^2-4(ab+bc+ca)=4(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)$$
$$=4[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]=2(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=2(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$
$$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0$$

Бидејќи $D$ е ненегативен број, равенката (1) има реални решенија, што значи дека и дадената равенка има реални решеија.

**28.** Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Дали равенката

$$(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0\,,$$

има реални и различни решенија.

**Решение.** За дискриминантата на равенката имаме

$$D=[2(a+b+c)]^2-12(a^2+b^2+c^2)=4[(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)]$$
$$=-4(3a^2+3b^2+3c^2-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=-4(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=-4(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$
$$=-4[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\leq 0$$

Според тоа, ако $a\neq b$ или $b\neq c$ или $c\neq a$ равенката има коњугирано комплексни корени, а ако $a=b=c$ равенката има реални и еднакви решенија.

Значи, разгледуваната равенка нема реални и различни решенија.

**29.** а) Нека $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Докажи, дека решенијата на равенката

$$x^2-(m^2+1)x+m^2=0$$

се позитивни реални броеви.

б) За кои вредности на параметарот $m$, за решенијата $x_1$ и $x_2$ на дадената равенката е исполнето равенството $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$?

**Решение.** а) Дискриминантата на равенката е

$$D=(m^2+1)^2-4m^2=(m^2-2m+1)(m^2+2m+1)=(m-1)^2(m+1)^2=(m^2-1)^2\geq 0,$$

што значи дека нејзините решенија се

$$x_{1,2}=\frac{(m^2+1)\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{m^2+1\pm|m^2-1|}{2},$$

$x_1=m^2$ и $x_2=1$. Но, $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ па затоа $x_1,x_2>0$.

б) Ако за $x_1=m^2$ и $x_2=1$ е исполнетот равенството $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$, тогаш важи $|m|+1=3$, од каде добиваме $m=\pm 2$.

**30.** Нека за реалните коефициенти $a,b,c$, $a\neq 0$, на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ важи $\frac{b+c}{a}\leq -1$. Докажи, дека равенката има реални решенија.

**Решение.** Ако $\frac{b+c}{a}\leq -1$ го помножиме со $a^2$, добиваме $ab+ac\leq -a^2$, односно $-ac\geq a^2+ab$. Тогаш

$$b^2-4ac\geq b^2+4a^2+4ab=(b+2a)^2\geq 0,$$

а оттука следува дека дадената равенка има реални решенија.

**31.** Нека $a$ и $b$ се ненулти реални броеви, такви што равенката

$$a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$$

има двоен корен. Докажи дека $|a|=|b|$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека $|a|\neq|b|$. Тогаш од својствата на апсолутната вредност следува $a\neq\pm b$, т.е. $a\neq b$ и $a\neq -b$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(a+b)x^2-2(a^2+b^2)x+a^3+b^3=0$$

За дискриминантата $D$ на равенката имаме

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(a^2+b^2)^2-(a+b)(a^3+b^3)\\&=a^4+2a^2b^2+b^4-a^4-ab^3-ba^3-b^4\\&=-ab(a^2-2ab+b^2)\\&=-ab(a-b)^2.\end{aligned}$$

Но, $a$ и $b$ се ненулти реални броеви и $a\neq b$, па затоа $\frac{D}{4}\neq 0$, што значи дека равенката нема двоен корен. Последното противречи на условот на задачата, па од добиената противречност следува дека $|a|=|b|$.

*Втор начин.* Ќе разгледаме два случаи.

*Случај* 1. $a$ и $b$ се со ист знак.

а) $a,b>0$. Во тој случај $a(x-a)^2\geq 0$, $b(x-b)^2\geq 0$, па равенството ќе биде исполнето ако $x\in\mathbb{R}$ е таков што $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$, а тоа е можно ако и само ако $x=a$ и $x=b$, т.е. $a=b$, што требаше да се докаже.

б) $a, b < 0$. Во овој случај $a = -|a|$ и $b = -|b|$, па равенката го добива обликот $-|a|(x-a)^2 + (-|b|)(x-b)^2 = 0$, т.е. $|a|(x-a)^2 + |b|(x-b)^2 = 0$. Понатаму овој подслучај се разгледува како и првиот подслучај од овој случај, при што се добива $a = b$.

*Случај* 2. $a$ и $b$ се со различен знак. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a > 0$ и $b < 0$. Постојат позитивни реални броеви $c$ и $d$ такви што $a = c^2$ и $b = -d^2$. Во тој случај равенката го добива обликот

$$\begin{aligned}0 &= a(x-a)^2 + b(x-b)^2\\ &= c^2(x-a)^2 - d^2(x-b)^2\\ &= (c(x-a))^2 - (d(x-b))^2\\ &= (c(x-a) - d(x-b))(c(x-a) + d(x-b))\\ &= ((c-d)x - (ac-bd)((c+d)x - (ac+bd)).\end{aligned}$$

Ако $c \neq d$ равенката има две различни решенија, т.е. два различни корени, и тоа

$$x_1 = \frac{ac-bd}{c-d} = \frac{c^3+d^3}{c-d} \text{ и } x_2 = \frac{ac+bd}{c+d} = \frac{c^3-d^3}{c+d}.$$

Да забележиме дека $|x_1| > |x_2|$, бидејќи $|c^3 + d^3| > |c^3 - d^3|$ и $|c-d| < |c+d|$. Значи, за да е исполнет условот од задачата, т.е. равенката да има едно единствено решение, мора $c = d$, од каде што пак се добива $b = -a$, што требаше да се докаже.

**32.** Равенката $ax^2 + bx + c = 0$ има реални решенија. Докажи, дека равенката $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ исто така има реални решенија.

**Решение.** Ќе разгледаме два случаи.

а) $ac \le 0$. Тогаш $-4a^3c^3 \ge 0$ од каде што добиваме дека дискриминантата $D = b^6 - 4a^3c^3 \ge 0$. Значи, равенката $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ има реални решенија.

б) $ac > 0$. Квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$ има реални решенија, па затоа

$$b^2 - 4ac \ge 0,$$
$$b^2 \ge 4ac > 0.$$

Но тогаш $b^6 \ge 64a^3c^3 > 4a^3c^3$. Значи, $D = b^6 - 4a^3c^3 > 0$, што е доволен услов за да $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ има реални решенија.

**33.** Нека $a$ и $b$ се реални броеви. Докажи дека барем една од равенките

$$x^2 + 2ax + b = 0; \quad ax^2 + 2bx + 1 = 0; \quad bx^2 + 2x + a = 0$$

има реални решенија.

**Решение.** Ако барем еден од броевите $a$ и $b$ е 0, тогаш третата равенка има реални корени. Затоа нека претпоставиме дека $ab \neq 0$. Тогаш сите три равенки се квадратни равенки и нивните дискриминанти се соодветно:

$$D_1 = a^2 - b, \quad D_2 = b^2 - a, \quad D_3 = 1 - ab.$$

За збирот на трите дискриминанти имаме

$$D_1+D_2+D_3=a^2+b^2+1-a-b-ab=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+)(b-1)^2]\geq 0,$$

од каде што следува дека некоја од дискриминантите е ненегативна. Следствено, соодветната равенка има реални решенија.

**34.** За кои вредности на параметарот $a$ равенката

$$2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$$

има четири различни решенија.

**Решение.** Бидејќи $(x+1)^2=|x+1|^2$, равенката можеме да ја запишеме во облик

$$2a|x+1|^2-|x+1|+1=0. \qquad (1)$$

Ако воведеме смена $t=|x+1|$, ја добиваме равенката

$$2at^2-t+1=0. \qquad (2)$$

Равенката (1) има четири реални корени, ако и само ако равенката (2) има два реални позитивни корени. Решенија на равенката (2) се $t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4a}$. За да броевите $t_1$ и $t_2$ се реални, потребно е дискриминантата $D$ да е позитивна, т.е. $D=1-8a>0$, од каде следува дека $a<\frac{1}{8}$. Од друга страна, за $a<0$, бројот $t_1=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$ е негативен, што противречи на $t_1,t_2>0$, па затоа $a>0$.

Конечно, од $a>0$ и $a<\frac{1}{8}$, следува $a\in(0,\frac{1}{8})$.

**35.** Нека $P(x)$ е квадратен трином со водечки коефициент 1 таков што полиномите $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имаат заеднички корен. Докажи, дека $P(0)P(1)=0$.

**Решение.** Нека $t$ е заеднички корен на двата полиноми. Тогаш

$$0=P(P(P(t)))=P(P(0)).$$

Ако $P(x)=x^2+ax+b$, тогаш $P(0)=b, P(1)=a+b+1$, па затоа

$$P(0)P(1)=b(a+b+1)=ab+b^2+b=P(b)=P(P(0))=0.$$

**36. Р**еши ја равенката $x^6-7x^2+\sqrt{6}=0$.

**Решение.** *Прв начин.* Да ставиме $a=\sqrt{6}$. Тогаш $a^2=6$, $a^2+1=7$, па равенката го добива видот:

$$x^6-(a^2+1)x^2+a=0,$$

а потоа ја трансформираме во квадратна равенка по $a$:

$$x^2a^2-a-x^6+x^2=0,$$

чии корени се: $a_1=x^2$, $a_2=\frac{1-x^4}{x^2}$.

Од првата равенка добиваме $x_{1/2}=\pm\sqrt{a}=\pm\sqrt[4]{6}$, а втората ја трансформираме во биквадратна по $x$:

$$x^4+ax^2-1=0.$$

Оттука $x^2 = \frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{10}}{2}$, т.е. добиваме уште два реални корена $x_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}$ ио два коњугирано комплексни корени $x_{5/6} = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}$

*Втор начин.* Со смената $y = x^2$ добиваме:

$$y^3 - 6y - y + \sqrt{6} = 0$$
$$y(y^2 - 6) - (y - \sqrt{6}) = 0$$
$$y(y - \sqrt{6})(y + \sqrt{6}) - (y - \sqrt{6}) = 0$$
$$(y - \sqrt{6})[y^2 + y\sqrt{6} - 1] = 0$$

Имаме, $y - \sqrt{6} = 0$, од каде добиваме $y_1 = \sqrt{6}$, т.е. $x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{6}$ и $y^2 + y\sqrt{6} - 1 = 0$, од каде добиваме $y_{2/3} = \frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+4}}{2}$, т.е. $x_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}$ и $x_{5/6} = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}$.

**37.** Квадратниот трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ е таков што равенката $f(x) = x$ нема реални корени. Докажи дека и равенката $f(f(x)) = x$ нема реални корени.

**Решение.** Нека $f(x) = x$ нема реални корени, односно $f(x) - x = 0$ нема реални корени. Значи за $a > 0,\ \ f(x) - x > 0$ или за $a < 0,\ \ f(x) - x < 0$.

Нека $a > 0$. Од $f(x) > x$ следува дека $f(f(x)) > f(x) > x$. Слично, ако $a < 0$ имаме $f(f(x)) < x$. Значи, $f(f(x)) = x$ нема реални корени.

**38.** Докажи, дека секој комплексен број $z$ за кој постои точно еден комплексен број $a$ таков што

$$z^3 + (2-a)z^2 + (1-3a)z + a^2 - a = 0 \qquad (1)$$

важи $z^3 = 1$.

**Решение.** Нека $z$ е комплексен број таков што за некој $a$ важи (1). Тогаш

$$a^2 - a(z^2 + 3z + 1) + (z^3 + 2z^2 + z) = 0\,.$$

Ако постои точно еден комплексен број $a$ за кој важи горното равенство, тогаш дискриминантата на последната квадратна равенка (по непозната $a$) е еднаква на нула, па затоа последователно добиваме

$$(z^2 + 3z + 1)^2 - 4(z^3 + 2z^2 + z) = 0$$
$$z^4 + 2x^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0 \qquad .$$
$$(z^2 + z + 1)^2 = 0.$$

Значи, $z^2 + z + 1 = 0$ и ако последното равенство го помножиме со $z - 1$ добиваме $z^3 = 1$.

**39.** Реши ја равенката

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-|x-3|-\frac{1}{|x-3|}} = 4.$$

**Решение.** Дадената равенка последователчно е еквивалентна на равенките

$$2^{|x-3|+\frac{1}{|x-3|}}=2^2$$

$$|x-3|+\frac{1}{|x-3|}=2$$

$$|x-3|^2-2|x-3|+1=0$$

$$(|x-3|-1)^2=0.$$

Од последната равенка добиваме $|x-3|=1$, односно $x=4$ или $x=2$. Јасно, тоа се решенија и на почетната равенка.

**40.** Определи ја најмалата вредност на функцијата $y=x(x+1)(x+2)(x+3)$ и за кои вредности на $x$ таа се достигнува.

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}y&=[x(x+3)][(x+1)(x+2)]=(x^2+3x)[(x^2+3x)+2]\\&=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1-1=(x^2+3x+1)^2-1.\end{aligned}$$

Изразот $(x^2+3x+1)^2-1$ има најмала вредност ако и само ако $x^2+3x+1=0$. Последната равенка има реални и различни решенија $x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, што значи дека најмалата вредност на функцијата $y_{\min}=-1$ се достигнува за две вредности на променливата $x$ и тоа $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

**41.** Реши ја равенката $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

**Решение.** *Прв начин.* Бидејќи

$$(x+1)(x+4)=x^2+5x+4 \text{ и } (x+2)(x+3)=x^2+5x+6,$$

дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3.$$

Да воведиме смена $t=x^2+5x+4$. Тогаш ја добиваме равенката $t(t+2)=3$ чии решенија се $t_1=-3, t_2=1$. За $t_1$ ја добиваме равенката $x^2+5x+4=-3$ и нејзините решенија се комплексните броеви $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $x_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, а за $t_2$ равенката $x^2+5x+4=1$ и нејзините решенија се $x_3=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ и $x_4=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$. Сите решенија на дадената равенка во множеството комплексни броеви се $x_1, x_2, x_3$ и $x_4$.

*Втор начин.* Како во првиот начин равенката ја трансформираме во обликот $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$. Воведуваме смена $t=x^2+5x$ и ја добиваме равенката $(t+4)(t+6)=3$, т.е. $t^2+10t+21=0$. Нејзините решенија се $t_1=-3$ и $t_2=-7$. За $t_1$ ја добиваме равенката $x^2+5x+3=0$ и нејзините решенија се $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ и

$x_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$, а за $t_2$ равенката $x^2+5x+7=0$ чии нејзини се $x_3=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $x_4=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

*Трет начин.* Дадените равенка е еквивалентна со равенката

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3.$$

Натаму

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=((x^2+5x+5)-1)((x^2+5x+5)+1)=(x^2+5x+5)^2-1$,

па ја добиваме равенката $(x^2+5x+5)^2=2^2$, што значи $x^2+5x+5=2$ или $x^2+5x+5=-2$. Решенијата на првата равенка се $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$, а на втората $x_3=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $x_4=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

*Четврт начин.* Во равенката да воведиме смена $z=x+\frac{5}{2}$. Тогаш ја добиваме еквивалентната на неа равенка $(z-\frac{3}{2})(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})(z+\frac{3}{2})=3$. Оттука $(z^2-(\frac{3}{2})^2)\,(z^2-(\frac{1}{2})^2)=3$. Со средување ја добиваме биквадратната равенка $16z^4-40z^2-39=0$. Нејзините решенија се $z_1=\frac{\sqrt{13}}{4}$, $z_2=-\frac{\sqrt{13}}{4}$, $z_3=i\frac{\sqrt{3}}{4}$ и $z_4=-i\frac{\sqrt{3}}{4}$. Соодветните вредности за $x$ се решенијата на почетната равенка:

$$x_1=\frac{\sqrt{13}}{4}-\frac{5}{2},\ x_2=-\frac{\sqrt{13}}{4}-\frac{5}{2},\ \ x_3=i\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{5}{2}\ \text{ и }\ x_4=-i\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{5}{2}.$$

*Петти начин.* Со множење на левата страна од равенката добиваме

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+21=0. \qquad (1)$$

Да се обидеме равенката да ја запишеме во обликот

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0. \qquad (2)$$

Со изедначување на коефициентите пред соодветните степени на $x$ во левите страни од (1) и (2) добиваме $10=a+c$, $21=bd$, $35=b+ac+d$ и $50=ad+bc$. Едно решение на овој систем е $a=5,\ b=3,\ c=5$ и $d=7$. Според тоа почетната равенка е еквивалентна со $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)=0$. Натаму $x^2+5x+3=0$ или $x^2+5x+7=0$ и со решавање на овие две равенки ги добиваме решенијата

$$x_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2},\ x_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2},\ x_3=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ \text{ и }\ x_4=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**42.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2.$$

**Решение.** Имаме:

$$8\cdot(3x+1)\cdot 6\cdot(4x+1)\cdot 4\cdot(6x+1)\cdot 2\cdot(12x+1)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2,$$

односно

$$(24x+8)(24x+6)(24x+4)(24x+2)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

Воведуваме смена $24x+5=y$, и ја добиваме равенката

$$(y+3)(y+1)(y-1)(y-3)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$$

т.е. равенката

$$y^4 - 10y^2 + 9 - 2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 0\,.$$

Во множеството реални броеви решенија на последната равенка се

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{5+\sqrt{25-9+2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}} = \pm\sqrt{5+\sqrt{16(1+48)}} = \pm\sqrt{33}\,,$$

па затоа $x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{33}}{24}$ се решенијата на почетната равенка во множството реални броеви .

**43.** Определи го бројот на реалните решенија на равенката

$$|\,x^2 - 2\,|\,x\,|+1| = 3\,|\,2-x\,|-1\,?$$

**Решение.** Бидејќи $x^2 = |\,x\,|^2$, дадената равенка ја запишуваме во видот

$$(|\,x\,|-1)^2 - 3\,|\,x-2\,|+1 = 0\,. \qquad (1)$$

На секој од интервалите $(-\infty,0)$, $[0,2)$ и $[2,+\infty)$ на левата страна на равенката (1) добиваме квадратен трином. Одделно ќе гио разгледаме трите случаи.

1) На интервалот $(-\infty,0)$ важи $x^2+5x-4=0$, т.е. $x = \frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$ и само $\frac{-5-\sqrt{41}}{2}$ припаѓа на интервалот $(-\infty,0)$.
2) На интервалот $[0,2)$ важи $x^2+x-4=0$, т.е. $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ и само $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ припаѓа на интервалот $[0,2)$.
3) На интервалот $[2,+\infty)$ важи $x^2-5x+8=0$ и оваа равенка нема реални решенија.

Значи, дадената равенка има две реални решенија.

**44.** Определи ги сите функции $f(x) = ax+b$ такви што

$$f(f(x)) = (|\,a\,|+|\,b\,|+2)x + b^2 - 6b\,, \text{ за секој } x\in\mathbb{R}\,.$$

**Решение.** Од $f(f(x)) = a(ax+b)+b = a^2x+ab+b$ и условот на задачата следува

$$a^2 = |\,a\,|+|\,b\,|+2,\ (a+1)b = b^2-6b\,.$$

Ако $b=0$, тогаш $a^2 = |\,a\,|+2$, од каде следува $a=\pm 2$.

Ако $b\neq 0$, тогаш од втората равенка добиваме $b=a+7$, па затоа

$$a^2 = |\,a\,|+|\,a+7\,|+2\,.$$

Решенијата нма последната равенка се $a=-3$ и $a=1+\sqrt{10}$, и притоа $b=4$ и $b=8+\sqrt{10}$, соодветно.

Конечно, бараните функции се

$$f(x) = \pm 2x,\ f(x) = -3x+4 \text{ и } f(x) = (1+\sqrt{10})x + 8 + \sqrt{10}\,.$$

**45.** Дадени се полиномите $f(x) = x^3+ax+b$ и $g(x) = x^3+a^2x^2+b^2$, каде

$a$ и $b$ се реални параметри. Определи ги сите вредности на $a$ и $b$ за кои некој од од броевите $-2$, $-1$ и 1 е заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$.

**Решение.** Од $g(1)=1+a^2+b^2>0$ следува дека заедничкиот корен не може да биде 1. Нека претпоставиме дека $-2$ е заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$. Тогаш $f(-2)=-8-2a+b=0$ и $g(-2)=-8+4a^2+b^2=0$, од каде добиваме $b=2(a+4)$, $4a^2+4(a+4)^2=8$, т.е. $a^2+4a+7=0$. Последната равенка нема реални решенија, па затоа $-2$ не може да биде заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$. Останува да провериме дали $-1$ може да биде заеднички корен на разгледуваните полиноми. Имаме $f(-1)=-1-a+b=0$ и $g(-1)=-1+a^2+b^2=0$, па затоа $b=a+1$ и $a^2+(a+1)^2=1$, т.е. $2a^2+2a=0$, од каде добиваме $a=0$ или $a=-1$ и соодветно $b=1$ или $b=0$.

**46.** Производот на едно решение на квадратната равенка $ax^2+bx+b=0$ и едно решение на квадратната равенка $ax^2+ax+b=0$ е еднаков на 1. Определи ги решенијата на равенките.

**Решение.** Нека $y$ и $z$ се решенија на равенките

$$ax^2+ax+b=0 \text{ и } ax^2+bx+b=0,$$

соодветно, за кои $yz=1$. Тогаш $z=\frac{1}{y}$ и $a\frac{1}{y^2}+b\frac{1}{y}+b=0$, т.е. $by^2+by+a=0$.

Ако ги собереме равенките $ay^2+ay+b=0$ и $by^2+by+a=0$ добиваме

$$(a+b)y^2+(a+b)y+a+b=0, \text{ т.е. } (a+b)(y^2+y+1)=0.$$

Имаме $y^2+y+1=(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Затоа, $a+b=0$, т.е. $b=-a$. Значи, равенките се $ax^2+ax-a=0$ и $ax^2-ax-a=0$. Но, равенките се квадратни па затоа $a\neq 0$, од каде добиваме дека дадените равенки се $x^2+x-1=0$ и $x^2-x-1=0$ и нивните решенија се $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, соодветно.

**47.** Нека $f(x)$ е квадратен трином и $a, b, c$ се по парови различни реални броеви. Пресметај ја $f(a+b+c)$, ако $f(a)=bc$, $f(b)=ac$ и $f(c)=ab$.

**Решение.** Нека $f(x)=px^2+qx+r$. Тогаш

$$\begin{cases} pa^2+qa+r=bc \\ pb^2+qb+c=ca \\ pc^2+qc+r=ab \end{cases}$$

Ако од првите две равенки ја одземеме третата равенка, добиваме

$$\begin{cases} p(a^2-c^2)+q(a-c)=b(c-a) \\ p(b^2-c^2)+q(b-c)=a(c-b) \end{cases}.$$

Од условот на задачата имаме $a\neq b$ и $a\neq c$, па последниот систем го добива обликот

$$\begin{cases} p(a+c)+q=-b \\ p(b+c)+q=-a \end{cases}.$$

Ако од првата равенка на последниот систем ја одземеме втората добиваме $p(a-b)=a-b$. Од $a\neq b$ добиваме $p=1$, па според тоа $q=-(a+b+c)$ и $r=ab+bc+ca$. Значи,

$$f(x)=x^2-(a+b+c)x+ab+bc+ca \text{ и } f(a+b+c)=ab+bc+ca .$$

**48.** Нека $a,b$ и $c$ се реални броеви и $a\neq c$. Равенките $ax^2+bx+c=0$ и $cx^2+bx+a=0$ имаат заедничко решение ако и само ако $(a+c)^2=b^2$. Докажи!

**Решение.** Нека претпоставиме дека равенките имаат заедничко решение $x_0$, т.е. дека $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $ax_0^2+bx_0+c\equiv 0$. Ако од првата ја одземеме втората равенка, добиваме $(a-c)x_0^2+c-a=0$, т.е. $(a-c)(x_0^2-1)=0$. Бидејќи $c\neq a$, т.е. $a-c\neq 0$, последното равенство е можно ако и само ако $x_0^2-1=0$. Според тоа, заедничкото решение е $x_0=1$ или $x_0=-1$. Во случајот $x_0=1$, коефициентите $a,b$ и $c$ на равенките го задоволуваат условот $a+b+c=0$, а во случајот $x_0=-1$ го исполнуваат условот $a-b+c=0$. Значи, ако равенките имаат заедничко решение, тогаш $a+c=\pm b$, т.е. $(a+c)^2=b^2$.

Обратно, нека претпоставиме дека коефициентите $a,b$ и $c$ на равенките го задоволуваат условот $(a+c)^2=b^2$. Според тоа $a+c=\pm b$.

Во случајот $a+c=-b$, првата равенка го добива обликот $ax^2-(a+c)x+c=0$. а втората равенка го добива обликот $cx^2-(a+c)x+a=0$. Лесно се проверува дека во овој случај заедничко решение на равенките е $x_0=1$.

Во случајот $a+c=b$ првата равенка го добива обликот $ax^2+(a+c)x+c=0$ а втората равенка го добива обликот $cx^2+(a+c)x+a=0$. Лесно се проверува дека во овој случај заедничко решение на равенките е $x_0=-1$.

**49.** Нека $a>0$ и $p,q\in\mathbb{R}$. Докажи, дека за секое реално решение $x$ на равенката $x^2+px+q=0$ важи

$$x\geq \frac{4q-(p+a)^2}{4a}. \qquad (1)$$

**Решение.** Равенката има реални решенија, па затоа $p^2-4q\geq 0$. Во (1) ставаме $x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Последното неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$p^2-4q\pm 2a\sqrt{p^2-4q}+a^2\geq 0$$
$$(\sqrt{p^2-4q}\pm a)^2\geq 0.$$

Конечно од точноста на последното неравенство следува точноста на неравенството (1).

**50.** Реши ја равенката
$$x^2+(\tfrac{x}{x-1})^2=8\,.$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките
$$x^2+2x\tfrac{x}{x-1}+(\tfrac{x}{x-1})^2-2\tfrac{x^2}{x-1}-8=0$$
$$(x+\tfrac{x}{x-1})^2-2\tfrac{x^2}{x-1}-8=0$$
$$(\tfrac{x^2}{x-1})^2-2\tfrac{x^2}{x-1}-8=0\,.$$

Воведуваме смена $\frac{x^2}{x-1}=t$ и ја добиваме равенката $t^2-2t-8=0$. Решенија на последната равенка се $t_1=4$ и $t_2=-2$, па според тоа ги добиваме равенките $x^2-4x+4=0$ и $x^2+2x-2=0$. Првата равенка има решенија $x_{1/2}=2$, а решенија на втората се $x_{3/4}=-1\pm\sqrt{3}$.

Конечно, решенијата на почетната равенка се $2,-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}$.

**51.** Реши ја равенката
$$(x^2-8)(x+1)^2+x^2=0\,.$$

**Решение.** Јасно, $-1$ не е решение на равенката, па затоа таа последователно е еквивалентна со равенките
$$x^2-8+\frac{x^2}{(x+1)^2}=0$$
$$(x-\tfrac{x}{x+1})^2+2\tfrac{x^2}{x+1}-8=0$$
$$(\tfrac{x^2}{x+1})^2+2\tfrac{x^2}{x+1}-8=0.$$

Воведуваме смена $t=\frac{x^2}{x+1}$ и ја добиваме $t^2+2t-8=0$, чии решенија се 2 и $-4$. Од $\frac{x^2}{x+1}=2$ ги добиваме $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$, а од $\frac{x^2}{x+1}=-4$ добиваме $x_3=-2$.

**52.** Определи ги сите реални броеви $c$ за кои равенката
$$(x^2-4x-c)^2-8x^2+32x+8c=0$$
има точно две реални решенија.

**Решение.** Дадената равенката е еквивалентна со равенката
$$(x^2-4x-c)^2-8(x^2-4x-c)=0\,.$$

Воведуваме смена $t=x^2-4x-c$, и ја добиваме равенката $t^2-8t=0$, чии решенија се 0 и 8. Значи, $x^2-4x-c=0$ или $x^2-4x-c=8$. Дискриминантата на првата равенка е $D_1 = 4(c+4)$, а на втората равенка е $D_2 = 4(4+c+8) = 4(c+12)$. Равенката има точно две реални решенија ако:

$$1)\ \begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 < 0 \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \text{ или } 3)\ \begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}.$$

Решение има само третиот систем, т.е. $c \in (-12,-4)$.

**53.** Во зависност од вредноста на реалниот параметар, во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(a-1)(1+x+x^2)^2 = (a+1)(1+x^2+x^4).$$

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}1+x^2+x^4 &= (1+x+x^2)^2 - (2x+2x^2+2x^3)\\ &= (1+x+x^2)^2 - 2x(1+x+x^2)\\ &= (1+x+x^2)((1+x+x^2)-2x),\end{aligned}$$

па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$(a-1)(1+x+x^2)^2 = (a+1)(1+x+x^2)((1+x+x^2)-2x)$$

$$(1+x+x^2)(((a-1)-(a+1))(1+x+x^2)+2x(a+1)) = 0$$

$$(1+x+x^2)(-2(1+x+x^2)+2x(a+1)) = 0$$

$$(1+x+x^2)(1-ax+x^2) = 0.$$

Равенката $1+x+x^2 = 0$ нема реални решенија. Дискриминатата на равенката $x^2-ax+1=0$ е $D=a^2-4$, па затоа оваа равенка има реални решенија ако и само ако $|a| \geq 2$. Конечно,

- за $a \in (-2,2)$ дадената равенка нема реални решенија,
- за $a = 2$ равенката има едно решение $x = 1$,
- за $a = -2$ равенката има едно решение $x = -1$ и
- за $a < -2$ или $a > 2$ равенката има реални и различни решенија

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}.$$

**54.** Дадена е равенката

$$x^2 + (a-2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Определи ги вредностите на параметарот $a$ за кои апсолутната вредност на едниот корен е двапати поголема од апсолутната вредност на другиот корен.

**Решение.** Имаме

$$x_{1/2} = \frac{-(a-2) \pm \sqrt{(a-2)^2 - 4(-2a^2+5a-3)}}{2} = \frac{2-a \pm \sqrt{9a^2-24a+16}}{2} = \frac{2-a \pm \sqrt{(3a-4)^2}}{2} = \frac{2-a \pm (3a-4)}{2}.$$

Значи,

$$x_1 = \frac{2-a+(3a-4)}{2} = a-1, \quad x_2 = \frac{2-a-(3a-4)}{2} = 3-2a.$$

Можни се два случаи:

а) Ако $|x_1| = 2|x_2|$, тогаш $|a-1| = 2|3-2a|$, т.е. $\pm(a-1) = 2(3-2a)$. Решенија на последните две равенки $a = \frac{7}{5}$ и $a = \frac{5}{3}$.

б) Ако $|x_2| = 2|x_1|$, тогаш $|3-2a| = 2|a-1|$, т.е. $\pm(3-2a) = 2(a-1)$. Решение на последните равенки е $a = \frac{5}{4}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека постојат три врдности за $a$ и тоа $\frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{3}$.

**55.** Најди го реалниот број $m$ така што равенката

$$(x^2 - 2mx - 4(m^2+1))(x^2 - 4x - 2m(m^2+1)) = 0 \qquad (1)$$

има точно три различни реални корени.

**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2mx - 4(m^2+1) = 0 \\ x^2 - 4x - 2m(m^2+1) = 0. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Дискриминантата на првата и втората равенка се

$$D_1 = 4(5m^2+4) \text{ и } D_2 = 4(4 + 2m(m^2+1)),$$

соодветно. Јасно, $D_1 > 0$. Тогаш, бидејќи првата равенка има секогаш два различни реални корени, можни се следниве случаи:

А) Втората равенка има точно еден реален корен, различен од корените на првата.

Б) Втората равенка има два различни реални корени, но еден од нив е еднаков со корен на првата равенка.

А) Во овој случај ја добиваме равенката

$$D_2 = m^3 + m + 2 = (m+1)(m^2 - m + 2) = 0$$

која во множеството реални броеви има едно решение $m = -1$. Тогаш решенија на првата равенка се 2 и $-4$, а на втората решение е 2, односно равенката (1) има две реални решенија. Значи $m = -1$ не е бараното решение.

Б) Нека $x_0$ е заедничкиот корен на равенките од системот. Тогаш ако од $x_0^2 - 2mx_0 - 4(m^2+1) = 0$ го одземеме $x_0^2 - 4x_0 - 2m(m^2+1) = 0$ добиваме

$$(4-2m)x_0 = (m^2+1)(4-2m).$$

Ако $m = 2$ тогаш првата и втората равенка на (2) се еднакви па (1) има точно два реални различни корени. Значи $m \neq 2$, а тогаш $x_0 = m^2 + 1$. Со замена на $x_0$ во првата равенка ја добиваме равенката $(m^2+1)(m^2 - 2m - 3) = 0$, а нејзини реални решенија се $m_1 = -1$ и $m_2 = 3$. Од дискусијата под А), $m = -1$ не е бараното решение. Ако $m = 3$ тогаш корени на првата равенка се 10 и $-4$, а на втората $-4$ и $-6$. Значи бараното решение е $m = 3$.

**56.** Реши ја равенката

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\frac{3}{x}+\frac{3}{x-5}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-1}=0$$
$$\frac{3(2x-5)}{x^2-5x}+\frac{2x-5}{x^2-5x+4}+\frac{4(2x-5)}{x^2-5x+6}=0\,.$$

Оттука е јасно дека едно решение на равенката е $x_1=\frac{5}{2}$. Ако за $x\neq\frac{5}{2}$ ја поделиме равенката со $2x-5$ и воведеме смена $x^2-5x=t$, ја добиваме равенката

$$\frac{3}{t}+\frac{1}{t+4}+\frac{4}{t+6}=0\,,$$

од која по множењето со $t(t+4)(t+6)$ се сведува на квадратна равенка и чиишто решенија се $t_1=-\frac{9}{2}$ и $t_2=-2$. Со замена на овие вредности во направената смена добиваме две квадратни равенки чиишто решенија се $x_{2/3}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ и $x_{4/5}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. Јасно, добиените решенија се решенија и на почетната равенка (Зошто?).

**57.** Реши ја равенката

$$x^4+2x^3+7x^2+6x+8=0\,.$$

**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x^2+x)^2+6(x^2+x)+8=0\,.$$

Воведуваме смена $t=x^2+x$ и ја добиваме равенката $t^2+68+8=0$ чии решенија се $t_1=-4$ и $t_2=-2$. Значи, $(t+4)(t+2)=0$, односно

$$(x^2+x+4)(x^2+x+2)=0\,.$$

Конечно, множеството на решенија на почетната равенка е

$$\{\tfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{2},\tfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}\}\,.$$

**58.** Реши ја равенката $x^4-5x^3+5x^2-5x+1=0$.

**Решение.** Очигледно е дека $x=0$ не е решение на равенката. Според тоа, дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x^2-5x+5-5\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$(x^2+\frac{1}{x^2})-5(1+\frac{1}{x})+5=0$$
$$(1+\frac{1}{x})^2-5(1+\frac{1}{x})+3=0$$

Воведуваме смена $t=x+\frac{1}{x}$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2-5t+3=0$ која има решенија $t_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. Значи ги добиваме квадратните равенки

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\,,\text{ т.е. } x^2-\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}x+1=0$$

кои имаат решенија

$$x_{1/2}=\frac{1}{2}(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\pm\sqrt{(\frac{5+\sqrt{13}}{2})^2-4})\text{ или } x_{3/4}=\frac{1}{2}(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\pm\sqrt{(\frac{5-\sqrt{13}}{2})^2-4})$$

т.е.

$$x_{1/2}=\frac{1}{4}(5+\sqrt{13}\pm\sqrt{22+10\sqrt{13}})\text{ или } x_{3/4}=\frac{1}{4}(5-\sqrt{13}\pm\sqrt{22-10\sqrt{13}})\,.$$

**59.** Реши ја равенката

$$(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4 .$$

**Решение.** Бидејќи $x=0$ не е решение на равенката, таа е еквивалентна со равенката

$$(\tfrac{x^2+2x+1}{x})^4+(\tfrac{x^2+1}{x})^4-2=0 .$$

Со смената , $\frac{x^2+1}{x}=p-1$, ја добиваме равенката

$$(p-1)^4+(p+1)^4-2=0 ,$$

која е еквивалентна со равенката $p^4+6p^2=0$. Решенијата на последната равенка се $p_1=p_2=0$, $p_3=i\sqrt{6}$ и $p_4=-i\sqrt{6}$.

За $p_1=p_2=0$, добиваме $x^2+x+1=0$, од каде наоѓаме $x_1=x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $x_3=x_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

За $p_3=i\sqrt{6}$ ја добиваме равенката $x^2+(1-i\sqrt{6})x+1=0$, од која следуваат решенијата $x_{5/6}=\frac{-1+i\sqrt{6}\pm\sqrt{-9-2i\sqrt{6}}}{2}$,

За $p_3=-i\sqrt{6}$ , ја добиваме равенката $x^2+(1+i\sqrt{6})x+1=0$ , од која следуваат решенијата $x_{7/8}=\frac{-1-i\sqrt{6}\pm\sqrt{2i\sqrt{6}-9}}{2}$.

**60.** Во множеството реални броеви реши ја равенката $x^4+4x^3+6x^2+2x+1=0.$

**Решение.** *Прв начин.* Ќе докажеме дека равенката нема реални решенија. Ако $x\geq 0$ е реално решение, тогаш $x^4+4x^3+6x^2+2x+1>0$, што не е можно. Значи доколку има решение тоа е негативен реален број.

Сега да ја запишеме равенката во следниов облик $(x+1)^4-2x=0$. Сега $x=-1$ не е решение. Ако $x<-1$ или $-1<x<0$, тогаш $(x+1)^4$ и $-2x$ се позитивни, па и нивниот збир е позитивен. Значи равенката нема реални решенија.

*Втор начин.* Левата страна од равенката ќе ја трансформираме на следниов начин

$$\begin{aligned}x^4+4x^3+6x^2+2x+1&=x^4+4x^3+4x^2+x^2+x^2+2x+1\\&=x^2(x^2+4x+4)+x^2+(x+1)^2\\&=x^2(x+2)^2+x^2+(x+1)^2\end{aligned}$$

Значи добивме дека почетната равенка е еквивалентна со равенката

$$x^2(x+2)^2+x^2+(x+1)^2=0 .$$

Збирот на квадратите на три броја може да биде нула ако и само ако сите броеви се нули. Тоа во нашиов случај не е можно, бидејќи мора истовремено да важи $x=0$ и $x=-1$. Значи равенката нема реални решенија.

**61.** Реши ја равенката $x^4+2ax^3+bx^2+2ax+1=0$.

**Решение.** Имаме

$$(x^2+ax+1)^2=x^4+2ax^3+(a^2+2)x^2+2ax+1.$$

па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$(x^2+ax+1)^2-(a^2+2-b)x^2=0$$
$$(x^2+(a+\sqrt{a^2+2-b})x+1)(x^2+(a-\sqrt{a^2+2-b})x+1)=0.$$

Значи, решавањето на почетната равенка го сведовме на решавање на две квадратни равенки. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

**62.** Во множеството на реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}.$$

**Решение.** За дефиниционата област на равенката имаме :

$$5x^2+14x+9=5(x+1)(x+\tfrac{9}{5})\geq 0,\ x^2-x-20=\left(x-5\right)\left(x+4\right)\geq 0 \text{ и } x+1\geq 0,$$

од каде добиваме дека равенката е дефинирана за $x\geq 5$. Последователно добиваме

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1},$$
$$\sqrt{(5x+9)(x+1)}=\sqrt{(x-5)(x+4)}+5\sqrt{x+1},$$
$$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x-5)(x+4)(x+1)},$$
$$2(x^2-4x-5)+3x+12=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)},$$
$$2(x-5)(x+1)+3(x+4)=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)},$$
$$\tfrac{2(x-5)(x+1)+3(x+4)}{x+4}=\tfrac{5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)}}{x+4},$$
$$\tfrac{2(x-5)(x+1)}{x+4}+3=5\sqrt{\tfrac{(x-5)(x+1)}{x+4}}.$$

Воведуваме смена $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=y$, при што добиваме $2y^2-5y+3=0$. Решенија на последната равенка се $y_1=\frac{3}{2}, y_2=1$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=\frac{3}{2}$, последователно добиваме

$$\tfrac{(x-5)(x+1)}{x+4}=\tfrac{9}{4}$$
$$4(x-5)(x+1)=9(x+4)$$
$$4x^2-25x-56=0$$

и оттука $x_{1/2}=\frac{25\pm\sqrt{625+896}}{8}$, т.е. $x_1=8$, $x_2=-\frac{7}{4}$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=1$, последователно добиваме

$$\tfrac{(x-5)(x+1)}{x+4}=1$$
$$(x-5)(x+1)=x+4,$$
$$x^2-5x-9=0$$

и оттука $x_{3/4}=\frac{5\pm\sqrt{25+36}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

Конечно, бидејќи $x\geq 5$ решенијата на почетната равенка се 8 и $\frac{5+\sqrt{61}}{2}$.

**63.** Реши ја равенка $\frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$.

**Решение.** За $x\neq -5$ последователно добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенки

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$$

$$\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}=5\sqrt{x^2+x+6}-5\sqrt{x^2-x-4}$$

$$6\sqrt{x^2-x-4}=4\sqrt{x^2+x+6}$$

$$3\sqrt{x^2-x-4}=2\sqrt{x^2+x+6}.$$

Последната равенка ја кавдрираме и последователно добиваме

$$9(x^2-x-4)=4(x^2+x+6)$$

$$5x^2-13x-60=0$$

$$x_1=5,\ x_2=-\frac{12}{5}.$$

Со непосредна проверка се уверуваме дека најдените решенија се решенија и на почетната равенка.

**64.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x+\sqrt{1-x}+1=\sqrt{x}+3\sqrt{x(1-x)}.$$

**Решение.** Јасно е дека дефиниционата област на равенката е интервалот $[0,1]$. Дадена равенка е еквивалентна со равенката

$$(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})(2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}-1)=0.$$

Според тоа, $\sqrt{x}=\sqrt{1-x}$ или $2\sqrt{x}=\sqrt{1-x}+1$.

*Случај* 1. Од $\sqrt{x}=\sqrt{1-x}$, добиваме $x=1-x$, односно $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$. Лесно се проверува дека $\frac{1}{2}$ е решение на почетната равенката.

*Случај* 2. Ја квадрираме $2\sqrt{x}=\sqrt{1-x}+1$ и добиваме $4x=2-x+2\sqrt{1-x}$. Ако добиената равенка $5x-2=2\sqrt{1-x}$ ја квадрираме, ја добиваме добиваме равенката $25x^2-20x+4=4-4x$, шии решенија се $x_1=0$ и $x_2=\frac{16}{25}$. Со непосредна проверка се уверуваме дека $\frac{16}{25}$ е решение на почетната равенка.

Значи, решенија на почетната равенка се $\frac{1}{2}$ и $\frac{16}{25}$.

**65.** Реши ја равенката $3\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

**Решение.** *Прв начин.* Од $2-x\geq 0$ и $x-1\geq 0$ следува дека дефинционата област на равенката е $D=[1,2]$. Равенката ја запишуваме во видот

$3\sqrt{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ и по квадрирањето и средувањето, добиваме $\sqrt{x-1}=5x-9$. Со уште едно квадрирање, при што земаме предвид дека $5x-9\geq 0$, т.е. $x\geq\frac{9}{5}$, ја добиваме квадратната равенка $25x^2-91x+82=0$ чии корени се $x_1=2$ и $x_2=\frac{41}{25}$ при што само првиот ги задоволува условите.

*Втор начин.* Ќе ставиме $\sqrt{x-1}=y$, $y\geq 0$. Тогаш,

$$x-1=y^2,\ 2-x=1-y^2$$

$$3\sqrt{1-y^2}+y=1,\text{ при што } 1-y^2\geq 0,\text{ т.е. } y\in[0,1],$$

$$9(1-y)(1+y)=(1-y)^2$$

$$(1-y)(8+10y)=0$$

$$y=1,$$

од каде добиваме $\sqrt{x-1}=1$, т.е. $x=2$. Решението $y=-0{,}8$ не го земаме предвид бидејќи не го задоволува условот $y\in[0,1]$.

**66.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}\ .$$

**Решение.** Воведуваме смени $a-x=t^4$ и $b-x=z^4$ и дадената равенка го добива обликот $\sqrt[4]{t^4}+\sqrt[4]{z^4}=\sqrt[4]{t^4+z^4}$, т.е. $t+z=\sqrt[4]{t^4+z^4}$. Последната равенка ја степенуваме на степен 4 и добиваме $(t+z)^4=(\sqrt[4]{t^4+z^4})^4$, односно

$$4t^3z+6t^2z^2+4tz^3=0,$$

т.е.

$$2tz(2t^2+3zt+2z^2)=0. \qquad (1)$$

Решенија на (1) се $t=0$, $z=0$ или решенијата на равенката $2(t^2+z^2)=-3tz$.

Ако $t=0$, тогаш $a-x=0$, т.е. $x=a$, а ако $z=0$, тогаш $b-x=0$, т.е. $x=b$.

Равенката $2(t^2+z^2)=-3tz$ со квадрирање се сведува на $t^4+z^4=t^2z^2$. Ако во последната равенка замениме $t=\sqrt[4]{a-x}$, $z=\sqrt[4]{b-x}$, ја добиваме равенката

$$a+b-2x=\sqrt{(a-x)(b-x)},$$

која има два комплексни корени $x_3$ и $x_4$ (провери!).

Конечно, реално решение на равенката е $x=a$, ако $b\geq a$, или $x=b$ ако $a\geq b$.

**67.** Определи ги сите целобројни вредности $m$ за кои равенката

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=m$$

има реални решенија. За определените вредности на параметарот $m$ определи ги решенијата на равенката.

**Решение.** Јасно, $m\geq 0$. Според тоа $m-\sqrt{5+x}=\sqrt{3+x}\geq 0$, од каде добиваме $m\geq\sqrt{5+x}$. Со квадрирање на последната неравенка имаме

$$x \le m^2 - 5. \tag{1}$$

Ако равенката ја запишеме во облик $\sqrt{3+x} = m - \sqrt{5+x}$ и ја квадрираме, добиваме $2m\sqrt{5+x} = m^2 + 2$, а со уште едно квадрирање добиваме

$$x = \frac{m^4 - 16m^2 + 4}{4m^2}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{m^4 - 16m^2 + 4}{4m^2} \le m^2 - 5$, $m^2 \ge 2$, $|m| \ge \sqrt{2}$. Според тоа, решение на дадената равенка е $x = \frac{m^4 - 16m^2 + 4}{4m^2}$, за $m \in \mathbb{Z}$, $m \ge \sqrt{2}$.

**68.** Реши ја равенката

$$\left(\frac{x^3+x}{3}\right)^3 + \frac{x^3+x}{3} = 3x.$$

**Решение.** Воведуваме смена $\frac{x^3+x}{3} = y$ и добиваме $y^3 + y = 3x$ и $x^3 + x = 3y$. Значи, ако $x_0$ е решение на равенката на почетната равенка и $\frac{x_0^3 + x_0}{3} = y_0$, тогаш $(x_0, y_0)$ е решение на системот равенки

$$\begin{cases} x^3 + x = 3y \\ y^3 + y = 3x \end{cases}. \tag{1}$$

Лесно се покажува дека важи и обратното тврдење, па затоа доволно е да се реши системот (1). Ако од првата равенка на системот ја одземеме втората добиваме

$$(x^3 - y^3) + (x - y) = 3(y - x)$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 3(y - x)$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 4) = 0 \tag{2}$$

Бидејќи за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$x^2 + xy + y^2 + 4 = x^2 + 2x\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 + 4 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + 4 \ge 4,$$

од равенката (2) следува $x - y = 0$, т.е. $x = y$. Според тоа, $\frac{x^3+x}{3} = x$, од каде добиваме $x(x^2 - 2) = 0$, односно $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$ и $x_3 = -\sqrt{2}$. Со непосредна проверка се покажува дека најдените решенија се решенија и на почетната равенка.

**69.** Реши ја равенката

$$(1+x)^4 - 2(1-x)^4 = (1-x^2)^2.$$

**Решение.** Нека $a = 1 + x$ и $b = 1 - x$. Тогаш $1 - x^2 = ab$, па затоа дадената равенка го добива обликот $a^4 - 2b^4 = a^2b^2$, т.е. $(a^2 + b^2)(a^2 - 2b^2) = 0$. Според тоа, $a^2 + b^2 = 0$ или $a^2 - 2b^2 = 0$.

*Случај* 1. Единствено реално решение на равенката $a^2 + b^2 = 0$ е $a = b = 0$ и тогаш $1 - x = 0$ и $1 + x = 0$, што не е можно.

*Случај* 2. Равенката $a^2 - 2b^2 = 0$ има решенија $a = \pm b\sqrt{2}$. Според тоа,

$$1+x=\pm(1-x)\sqrt{2}$$

од каде добиваме $x_1=3-2\sqrt{2}$ и $x_2=3+2\sqrt{2}$. Со непосредна проверка се покажува дека најдените решенија се решенија и на почетната равенка.

**70.** а) Ако $x$, $y$, $z$ се реални броеви, сите различни од $1$, такви што $xyz=1$, докажи дека:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1.$$

б) Докажи дека равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви $x$, $y$, $z$.

**Решение.** а) Нека $a=\frac{x}{1-x}$, $b=\frac{y}{1-y}$ , $c=\frac{z}{1-z}$. Имаме:

$$abc=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}=\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}=(a+1)(b+1)(c+1)$$

што е еквивалентно со:

$$ab+ac+bc+a+b+c+1=0$$

Одовде следува дека :

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)+2(a+b+c)+2$$

па:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c+1)^2+1\geq 1$$

од каде следува бараното неравенство. Равенство важи ако и само ако

$$a+b+c+1=0$$

односно, ако и само ако

$$ab+ac+bc=0$$

б) Имаме:

$$\frac{xy}{(1-x)(1-y)}+\frac{xz}{(1-x)(1-z)}+\frac{yz}{(1-y)(1-z)}=0$$

од каде добиваме $xy+xz+yz=3$. Бидејќи $x=\frac{1}{yz}$, ова се трансформира до:

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+yz=3 \text{ и } z^2y^2-(3z-1)y+z=0$$

Оваа равенка може да ја набљудуваме како квадратна равенка по $y$. Дискриминантата на равенката е:

$$D=(3z-1)^2-4z^3=(z-1)^2(1-4z),$$

Па ако го избереме $z$ таков што $z=\frac{1-m^2}{4}$, за некој ненулти рационален број $m$, тогаш $\sqrt{D}$ е рационален број, па и решението $y$ е рационален број. Конечно, $x=\frac{1}{yz}$, и $x$ е рационален.

**71.** Реши ја равенката: $x^4+2ax^3+bx^2+2ax+1=0$.

**Решение.** Да забележиме дека

$$(x^2+ax+1)^2=x^4+2ax^3+(a^2+2)x^2+2ax+1.$$

Значи, горната равенка може да се запише како

$$(x^2+ax+1)^2-(a^2+2-b)x^2=0\,.$$

Левата страна на равенката е разлика од квадрати, па имаме:

$$(x^2+(a+\sqrt{a^2+2-b})x+1)(x^2+(a-\sqrt{a^2+2-b})x+1)=0\,.$$

Сега проблемот на решавање на почетната равенка го сведовме на решавање на две квадратни равенки. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

**72.** Реши ја равенката:

$$x^4+2x^3+7x^2+6x+8=0\,.$$

**Решение.** Равенката може да се запише како

$$(x^2+x)^2+6(x^2+x)+8=0\,.$$

Ставајќи смена $t=x^2+x$, таа се сведува на квадратна равенка, од каде со решавање добиваме дека $t_1=-4$ и $t_2=-2$. Оттука,

$$(x^2+x+4)(x^2+x+2)=0\,.$$

Конечно, множеството на решенија на почетната равенка е

$$\{\tfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{2},\tfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}\}\,.$$

**73.** Реши ја равенката $(x^2+5x+1)(x^2+4x)=20(x+1)^2$.

**Решение.** *Прв начин.* Имаме:

$$(x^2+5x+1)(x^2+4x)=20(x+1)^2$$
$$x^4+5x^3+x^2+4x^3+20x^2+4x-20x^2-40x-20=0$$
$$x^4+9x^3+x^2-36x-20=0$$
$$x^4-4x^2+9x^3-36x+5x^2-20=0$$
$$x^2(x^2-4)+9x(x^2-4)+5(x^2-4)=0$$
$$(x^2-4)\,(x^2+9x+5)=0$$

Оттука:

$$x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm 2$$
$$x^2+9x+5=0 \quad\Rightarrow\quad x_{3,4}=\tfrac{-9\pm\sqrt{61}}{2}\,.$$

*Втор начин.* Забележуваме дека $(x^2+4x)+(x+1)=x^2+5x+1$. Затоа нека: $x^2+4x=a$, $x+1=b$. Тогаш равенката го добива видот:

$$(a+b)\,a=20b^2$$
$$a^2+ab-20b^2=0 \quad /:b^2 \quad \left(b\neq 0,\ \text{т.е. } x\neq -1\right)$$
$$(\tfrac{a}{b})^2+\tfrac{a}{b}-20=0$$
$$(\tfrac{a}{b})_{1,2}=\tfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\tfrac{-1\pm 9}{2}$$
$$\tfrac{a}{b}=-5 \quad\Leftrightarrow\quad a=-5b \quad \text{и} \quad \tfrac{a}{b}=4 \quad\Leftrightarrow\quad a=4b$$

1) Ако $a=-5b$, т.е. $x^2+4x=-5(x+1)$, тогаш $x^2+9x+5=0$ од каде што добиваме $x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{61}}{2}$.

2) Ако $a=4b$, т.е. $x^2+4x=4(x+1)$, тогаш $x^2=4$, од каде што $x_{3,4}=\pm 2$.

Со проверка се убедуваме дека сите четири решенија ја задоволуваат почетната равенка.

Значи, $M=\{-2, 2, \frac{-9-\sqrt{61}}{2}, \frac{-9+\sqrt{61}}{2}\}$.

**74.** За кои вредности на $a$, за произволно $b$ постои барем едно $c$, така што системот

$$\begin{cases} 2x+by=ac^2+c \\ bx+2y=c-1 \end{cases}$$

да има барем едно решение?

**Решение.** Имаме: $\Delta=4-b^2$ и $\Delta_x=2ac^2+2c-bc+b$.

Ако $\Delta\neq 0$, т.е. $b\neq\pm 2$, тогаш системот има единствено решение за кои било $a$ и $c$.

Ако $\Delta=0$, тогаш за системот да има решение треба да биде и $\Delta_x=0$. За $b=2$ добиваме $ac^2=-1$, па оваа равенка има решение по $c$ за секое $a\in(-\infty,0)$. За $b=-2$ ја добиваме равенката $ac^2+2c-1=0$, којшто има решение по $c$ за секое $a\in[-1,+\infty)$.

Следствено, дадениот систем има барем едно решение за произволно $b$ и некое $c$ ако и само ако $a\in[-1,0]$.

**75.** Реши ја во $\mathbb{R}$ равенката $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$.

**Решение.** Дадената равенка ќе ја запишеме во видот

$$x^2+(x^2-3x)=2x\sqrt{x^2-3x}+1.$$

Ако ставиме $x^2-3x=y^2$, добиваме $x^2+y^2=2xy+1$, односно $(x-y)^2=1$. Оттука добиваме $x-y=\pm 1$, т.е. $x-1=\sqrt{x^2-3x}$ или $x+1=\sqrt{x^2-3x}$. Првата равенка нема решение, а решението на втората равенка е $-\frac{1}{5}$.

**76.** Во множеството реални броеви реши ја равенката $x+a^3=\sqrt[3]{a-x}$.

**Решение.** Равенката е определена за секој $x\in\mathbb{R}$. Воведуваме смена $x=a-y^3$ и добиваме

$$a-y^3+a^3=\sqrt[3]{a-(a-y^3)}$$

$$y^3+y=a^3+a.$$

Очигледно е дека едно решение на равенката е $y=a$. Ќе покажеме дека други решенија равенката нема. Од формулите за скратено множење имаме

$$y^3 - a^3 + y - a = 0$$
$$(y-a)(y^2 + ay + y^2 + 1) = 0\,.$$

Од последната равенка имаме $y - a = 0$ или $y^2 + ay + y^2 + 1 = 0$. Според тоа, $y = a$ е едно решение, од каде добиваме дека решение на почетната равенка е

$$x = a - a^3\,. \qquad (1)$$

Бидејќи

$$y^2 + ay + y^2 + 1 = y^2 + 2\tfrac{a}{2}y + \tfrac{a^2}{4} + \tfrac{3a^2}{4} + 1 = (y + \tfrac{a}{2})^2 + \tfrac{3a^2}{4} + 1 \geq 1\,,$$

равенката $y^2 + ay + y^2 + 1 = 0$ нема решение. Конечно, единствено решение е (1).

**77.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{3}{x^2+2x+4} + \frac{5}{x^2+2x+6} + \ldots + \frac{2011}{x^2+2x+2012} = 1006\,.$$

**Решение.** За $k = 1,2,3,\ldots,1006$ имаме

$$x^2 + 2x + 2k = x^2 + 2x + 1 + 2k - 1 = (x+1)^2 + 2k - 1$$
$$\frac{1}{x^2+2x+2k} \leq \frac{1}{2k-1}$$
$$\frac{2k-1}{x^2+2x+2k} \leq \frac{2k-1}{2k-1} = 1\,.$$

*Случај* 1. Ако $x \neq -1$, тогаш $\frac{2k-1}{x^2+2x+2k} < 1$, $k = 1,2,3,\ldots,1006$ па според тоа

$$\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{3}{x^2+2x+4} + \frac{5}{x^2+2x+6} + \ldots + \frac{2011}{x^2+2x+2012} < \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{1006} = 1006\,.$$

*Случај* 2. Ако $x = -1$ тогаш $\frac{2k-1}{x^2+2x+2k} = 1$, $k = 1,2,3,\ldots,1006$ па според тоа

$$\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{3}{x^2+2x+4} + \frac{5}{x^2+2x+6} + \ldots + \frac{2011}{x^2+2x+2012} = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{1006} = 1006\,.$$

Значи, единствено решение на равенката е $x = -1$.

**78.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x+4} = 0\,.$$

**Решение.** Изразот $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x+4}$ е определен за секоја реална вредност на $x$. Понатаму, ако $x_1 < x_2$, тогаш

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 2 < x_2 + 2 & & \sqrt[3]{x_1+2} < \sqrt[3]{x_2+2} \\ x_1 + 3 < x_2 + 3 & \Rightarrow & \sqrt[3]{x_1+3} < \sqrt[3]{x_2+3} \\ x_1 + 4 < x_2 + 4 & & \sqrt[3]{x_1+4} < \sqrt[3]{x_2+4} \end{array}$$

од каде добиваме

$$\sqrt[3]{x_1+2} + \sqrt[3]{x_1+3} + \sqrt[3]{x_1+4} < \sqrt[3]{x_2+2} + \sqrt[3]{x_2+3} + \sqrt[3]{x_2+4}\,.$$

Ако $x_0$ е решение на равенката, тогаш за $x_1 < x_0$ имаме

$$\sqrt[3]{x_1+2} + \sqrt[3]{x_1+3} + \sqrt[3]{x_1+4} < \sqrt[3]{x_\circ+2} + \sqrt[3]{x_\circ+3} + \sqrt[3]{x_\circ+4} = 0\,,$$

а за $x_0 < x_2$ имаме

$$0=\sqrt[3]{x_\circ+2}+\sqrt[3]{x_\circ+3}+\sqrt[3]{x_\circ+4}<\sqrt[3]{x_2+2}+\sqrt[3]{x_2+3}+\sqrt[3]{x_2+4}$$

Сега е јасно дека равенката има единствено решение. Не е тешко да се види дека решение на равенката е $x_0=-3$.

**79.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}\,.$$

**Решение.** По квадрирањето добиваме

$$x^2+x+1+\tfrac{1}{x^2}+2\sqrt{x^2+x+1+\tfrac{1}{x^2}}=x+3$$

или

$$2\cdot\sqrt{x^2+x+1+\tfrac{1}{x^2}}=2-(x^2+\tfrac{1}{x^2})\,.$$

Бидејќи $x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2$ и левата страна е ненегативна, следува дека $x^2+\frac{1}{x^2}=2$, што е можно само за $x=1$ или $x=-1$. Со проверка заклучуваме дека бројот $-1$ е единствено решение на равенката.

**80.** Реши ја во множеството реални броеви равенката

$$\sqrt[3]{\tfrac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\tfrac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\tfrac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\tfrac{b-x}{b+x}}\text{, ако } a\neq b\text{, } ab<0\text{, } a+b\neq 0\,.$$

**Решение.** Нека $x$ е решение на равнката. Ако и двете страни на равенката ги кубираме, добиваме

$$\tfrac{a+x}{a-x}-3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{a+x}{a-x}}+3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{a-x}{a+x}}-\tfrac{a-x}{a+x}=\tfrac{b+x}{b-x}-3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{b+x}{b-x}}+3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{b-x}{b+x}}-\tfrac{b-x}{b+x}\,,$$

т.е.

$$\tfrac{a+x}{a-x}-\tfrac{a-x}{a+x}=\tfrac{b+x}{b-x}-\tfrac{b-x}{b+x}$$

Последната равенка ќе ја запишеме во облик

$$\tfrac{4ax}{a^2-x^2}=\tfrac{4bx}{b^2-x^2}\text{, т.е. } x(\tfrac{a}{a^2-x^2}-\tfrac{b}{b^2-x^2})=0\,.$$

Едно нејзино решение очигледно е $x_1=0$. Равенката $\frac{a}{a^2-x^2}-\frac{b}{b^2-x^2}=0$ можеме да ја запишеме во облик $x^2=-ab$. Нејзини решенија се $x_{2/3}=\pm\sqrt{-ab}$.

**81.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{(1-x^2)}\text{, ако } m\in\mathbb{N}\,.$$

**Решение.** Да забележиме дека $x=1$ не е корен на равенката. Затоа, равенката ја делиме со $\sqrt[m]{(1-x)^2}$ и добиваме

$$\sqrt[m]{(\tfrac{1+x}{1-x})^2}-1=\sqrt[m]{\tfrac{1+x}{1-x}}\,.$$

Воведуваме смена $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=t$, па добиваме: $t^2-1=t$, т.е. $t^2-t-1=0$. Решенијата на оваа квадратна равенка се: $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи $t_1<0$, следува дека

$t_1$ не е корен на почетната равенка ако $m$ е парен број. Затоа, ако $m$ е парен бројдобиваме $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, т.е. $\frac{1+x}{1-x}=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m$, од каде добиваме $x=\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m-1}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m+1}$.

Ако $m$ е непарен број, тогаш равенката има две решенија $x_{1/2}=\frac{(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^m-1}{(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^m+1}$. .

**82.** Реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}.$$

**Решение.** Го префрлуваме $\sqrt{x^2-x-20}$ на другата страна, а потоа квадрираме и добиваме:

$$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}\,,$$

т.е.

$$2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)} \qquad (*)$$

Дефиниционата област на појдовната равенка ја наоѓаме од условите:

$$5x^2+14x+9\geq 0,\ x^2-x-20\geq 0,\ x+1\geq 0,$$

$$(x+1)(5x+9)\geq 0,\ (x-5)(x+4)\geq 0,\ x+1\geq 0.$$

и добиваме $x\geq 5$. За овие вредности на $x$ имаме:

$$\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}=\sqrt{x^2-4x-5}\cdot\sqrt{x+4}\,,$$

па делејќи ги двете страни на равенката (*) со $x+4$ и заменувајќи $\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}}$ со $y$ ја добиваме квадратната равенка $2y^2-5y+3=0$, чии корени се: $y_1=\frac{3}{2}$ и $y_2=1$.

Со решавање на равенките

$$\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}}=\frac{3}{2} \text{ и } \sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x-4}}=1$$

добиваме:

$$x_1=8,\ x_2=-\frac{7}{4},\ x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2},$$

од кои, поради $x\geq 5$ задоволуваат само $x_1$ и $x_3$.

Значи, решенија на појдовната равенка се: $x_1=8$ и $x_2=\frac{5+\sqrt{61}}{2}$ .

**83.** Реши ја равенката $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{27-14x}=1$.

**Решение.** *Прв начин.* Ако ја кубираме равенката добиваме:

$$8(x-1)+3\cdot 2\sqrt[3]{x-1}\ \sqrt[3]{27-14x}\ \underbrace{(2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{27-14x})}_{=1}+27-14x=1,$$

односно

$$6\sqrt[3]{(x-1)(27-14x)}=6x-18\,.$$

Со кубирање на оваа равенка добиваме: $x^3+5x^2-14x=0$. Решенија на последната равенка се: $x_1=0,\ x_2=-7, x_3=2$.

*Втор начин.* Воведуваме смена $\sqrt[3]{x-1}=A,\ \sqrt[3]{27-14x}=B$. Тогаш важи

$$B=1-2A. \tag{1}$$

Натаму важи $14A^3+B^3=13$ и со замена на (1) во оваа равенка добиваме

$$\begin{aligned}14A^3+1-6A+12A^2-8A^3=13 \quad &\Leftrightarrow \quad 6A^3+12A^2-6A-12=0\\ &\Leftrightarrow \quad A^2(A+2)-(A+2)=0\\ &\Leftrightarrow \quad (A-1)(A+1)(A+2)=0.\end{aligned}$$

Според тоа $A+2=0$ или $A-1=0$ или $A+1=0$, т.е. $\sqrt[3]{x-1}=-2$ или $\sqrt[3]{x-1}=-1$ или $\sqrt[3]{x-1}=1$. Значи $x=-7$ или $x=0$ или $x=2$, па тие се решенијата на дадената равенка.

**84.** Реши ја равенката

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

**Решение.** Прво да ја определиме дефиниционата област на равенката. Треба да важи $1-x^2\ge 0$ и $4x^3-3x\ge 0$. Од првото неравенство имаме $x\in[-1,1]$, а од второто $x(2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})\ge 0$, односно $x\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},0]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},\infty)$. Според тоа ако $x$ е решение на равенката тогаш $x\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},0]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$. Сега да ги квадрираме двете страни на равенката и по средувањето добиваме $16x^6-24x^4+10x^2-1=0$. Ставаме $y=x^2$ и равенката се трансформира во $16y^3-24y^2+10y-1=0$. Натаму ја разложуваме левата страна

$$8y^2(2y-1)-8y(2y-1)+2y-1=0,$$

односно

$$(2y-1)(8y^2-8y+1)=0.$$

Според тоа $2y-1=0$ или $8y^2-8y+1=0$. Од $2y-1=0$ добиваме $y=\frac{1}{2}$, а од $8y^2-8y+1=0$, $y_2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ и $y_2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. За $x$ имаме $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x_4=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x_5=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ и $x_6=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Останува да провериме кои од $x_1,\dots,x_6$ припаѓаат во дефиниционата област на равенката. Важи $0<x_1<\frac{\sqrt{3}}{2}$, па $x_1$ не е решение на равенката. За $x_2$ имаме $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<0$ па $x_2$ е решение. Слично $x_3=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}>\frac{\sqrt{2+1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, па $x_3$ е решение. Од претходното $x_4=-x_3<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, па $x_4$ не е решение. Слично $0<\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}<\frac{\sqrt{2-1}}{2}=\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$, па $x_5$ не е решение. На крајот

$0 > x_6 = -x_5 > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, па $x_6$ е решение. Конечно решенијата на почетната равенка се

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ и } x_6 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

**85.** За кои вредности на реалниот параметар $a$ равенката

$$\sqrt{2x-3a} + \sqrt{2x+3a} = 1$$

има решение?

**Решение.** Изразот на левата страна е реален број ако и само ако $2x-3a \geq 0$ и $2x+3a \geq 0$, т.е. $x \geq \frac{3a}{2}$ и $x \geq -\frac{3a}{2}$. Оттука следува дека $x \geq \frac{3|a|}{2}$. Со квадрирање се добива дека

$$2x-3a+2\sqrt{4x^2-9a^2}+2x+3a=1$$
$$2\sqrt{4x^2-9a^2}=1-4x$$

Значи мора $1-4x \geq 0$ т.е. $x \geq \frac{1}{4}$. Значи мора $\frac{3|a|}{2} \leq \frac{1}{4}$, односно $|a| \leq \frac{1}{6}$.

Според ова дадената равенка има решение за $|a| \leq \frac{1}{6}$.

**86.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1.$$

**Решение.** Јасно е дека за решенијата на равенката треба да е исполнет условот $x \geq -1$. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{x+1}+2^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 2\sqrt{x+1}+1^2} = 1$$
$$\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} = 1$$

Сега јасно е дека равенката го добива обликот

$$|\sqrt{x+1}-2| + |\sqrt{x+1}-1| = 1$$

Множеството $[-1,+\infty)$, т.е. дефинионата област ќе ја разбиеме на три множества. $[-1,0]$, $(0,3]$, $(3,+\infty)$.

а) $x \in [-1,0]$. Равенката го добива обликот $-(\sqrt{x+1}-2)-(\sqrt{x+1}-1)=1$, т.е. $-2\sqrt{x+1}=-2$. Нејзиното решение е $x=0 \in [-1,0]$. Истото решение и на почетната равенка.

б) $x \in (0,3]$. Равенката го добива обликот $-(\sqrt{x+1}-2)+(\sqrt{x+1}-1)=1$. Очигледно е дека секој $x \in (0,3]$ е нејзино решение.

в) $x \in (3,+\infty)$. Равенката го добива обликот $(\sqrt{x+1}-2)+(\sqrt{x+1}-1)=1$. Нејзино репение е $x=3$, кое е исто така и решение на почетната равенка.

Решение на равенката е множеството $[0,3]$.

## 2. ВИЕТОВИ ПРАВИЛА

**1.** Состави квадратна равенка со:

а) рационални коефициенти, ако еден нејзин корен е $2+\sqrt{3}$ .

б) реални коефициенти, ако еден нејзин корен е $\frac{2+i}{1-i}$ .

**Решение.** а) Бидејќи коефициентите се рационални броеви, треба да бидат исполнети условите $x_1+x_2\in\mathbb{Q}$ и $x_1x_2\in\mathbb{Q}$, а тоа е можно само ако $x_2=2-\sqrt{3}$. Тогаш:

$$p=-(x_1+x_2)=-(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})=-4 \ ,$$
$$q=x_1x_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

па равенката гласи $x^2-4x+1=0$ .

б) Ќе го користиме ставот дека ако $x_1=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$ е корен на равенката $ax^2+bx+c=0$, тогаш $x_2=\overline{x_1}=\alpha-i\beta$ е нејзин корен. Тогаш од

$$x_1=\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+3i}{2},$$

следува дека $x_2=\frac{1-3i}{2}$, односно

$$p=-(x_1+x_2)=-\frac{1+3i+1-3i}{2}=-1,$$
$$q=x_1x_2=\frac{1+3i}{2}\cdot\frac{1-3i}{2}=\frac{1+9}{2}=\frac{5}{2}.$$

Следствено, бараната равенка е $x^2-x-\frac{5}{2}=0$, т.е. $2x^2-2x-5=0$.

**2.** Состави квадратна равенка чии корени се четврти степени од корените на равенката $ax^2+bx+c=0$.

**Решение.** Решенијата на дадената равенка да ги означиме со $x_1$ и $x_2$. Нека бараната равенка е $y^2+py+q=0$ со решенија $y_1$ и $y_2$. Од Виетовите формули за дадената равенка имаме $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и за бараната равенка $x_1x_2=\frac{c}{a}$ и $y_1+y_2=-p$, $y_1y_2=q$. Притоа $y_1=x_1^4$ и $y_2=x_2^4$. Имаме

$$-p=x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^4=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2 \quad \text{и}$$
$$q=y_1y_2=(x_1x_2)^4.$$

Значи $p=-\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$ и $q=\frac{c^4}{a^4}$, па бараната равенка е

$$y^2-\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}y+\frac{c^4}{a^4}=0,$$

т.е. $a^4y^2-(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)y+c^4=0$.

**3.** Ако за коефициентите $a,b,c$ на равенката $ax^2+bx+c=0$ важи равенството $2b^2-9ac=0$, тогаш едниот корен на таа равенка е двапати поголем од другиот корен. Докажи!

**Решение.** *Прв начин.* Ако $2b^2 - 9ac = 0$ го поделиме со $a^2$, ќе добиеме $2(-\frac{b}{a})^2 - 9\frac{c}{a} = 0$. Ако $\alpha$ и $\beta$ се корени на равенката $ax^2 + bx + c = 0$, тогаш според Виетовите формули имаме $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, па добиваме:

$$2(\alpha+\beta)^2 - 9\alpha\beta = 0$$

$$2\alpha^2 - 5\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$$

$$(\alpha - 2\beta)(2\alpha - \beta) = 0$$

т.е. $\alpha = 2\beta$ или $\beta = 2\alpha$, што и требаше да се докаже.

*Втор начин.* Од $2b^2 - 9ac = 0$, следува $4ac = \frac{8b^2}{9}$, $b^2 - 4ac = b^2 - \frac{8b^2}{9} = \frac{b^2}{9}$, па за корените на равенката добиваме $x_{1/2} = \frac{-b \pm \frac{b}{3}}{2a}$, т.е. $x_1 = -\frac{b}{3a}$, $x_2 = -\frac{2b}{3a}$, па затоа $x_2 = 2x_1$.

**4.** Одреди го параметарот $m$ во равенката

$$x^2 - 2(m+1)x - 2m - 1 = 0,$$

така што збирот на квадратите на корените да биде најмал.

**Решение.** Користејќи ги Виетовите врски добиваме $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ и $x_1x_2 = -(2m+1)$, па затоа

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m+1)^2 + 2(2m+1) = 4m^2 + 12m + 6 = (2m+3)^2 - 3.$$

Збирот $x_1^2 + x_2^2$ ќе биде најмал (и ќе изнесува $-3$) за $2m + 3 = 0$, т.е. за $m = -\frac{3}{2}$.

**5.** Познато е дека двете решенија на равенката $x^2 + bx + c = 0$ лежат во интервалот $(3,4)$. Докажи дека важи неравенството

$$2c + 7b + 24 < 0. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека $x_1, x_2$ се решенијата на дадената равенка. Од условот на задачата, следува дека се исполнети неравенствата

$$(x_1 - 3)(x_2 - 4) < 0 \text{ и } (x_1 - 4)(x_2 - 3) < 0.$$

Ако ги собереме овие две неравенства, после ослободувањето од заградите добиваме

$$2x_1x_2 - 7(x_1 + x_2) + 24 < 0. \qquad (2)$$

Од Виетовите формули следува $x_1 + x_2 = -b$ и $x_1x_2 = c$, па ако замениме во неравенството (2) го добиваме неравенството (1).

**6.** Дадена е квадратната равенка

$$a^4x^2 + 5a^2bx + 4b^2 = 0,\ a, b \neq 0.$$

а) Да се докаже дека ова равенка има реални и различни корени за кои било $a$ и $b$.

б) Ако корените $x_1$ и $x_2$ на равенката го задоволуваат условот

$$4(x_1 + x_2) = 5(x_1x_2 + 1),$$

тогаш тие не зависат од $a$ и $b$. Докажи!

**Решение.** а) Имаме $D=9a^4b^2>0$, што значи дека корените на равенката се реални и меѓусебно различни за кои било ненулти $a$ и $b$.

б) Според Виетовите правила, равенството $4(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$ добива облик $2b+a^2=0$, при кој услов равенката се сведува на равенката $2x^2-5x+2=0$, чии корени се $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$.

**7.** Најди ги сите вредности на $p$ и $q$, за кои што корените на равенката $x^2+px+q=0$ се еднакви на $p$ и $q$.

**Решение.** Нека $x_1$ и $x_2$ се корени на равенката $x^2+px+q=0$. Тогаш според Виетовите формули имаме $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$. По услов $x_1=p$, $x_2=q$, па добиваме $p+q=-p$, $pq=q$. Последната од равенките ја запишуваме во видот $(p-1)q=0$.

$i$) Ако $q=0$, тогаш од првата равенка добиваме $p=0$.

$ii$) Ако $p-1=0$, т.е. $p=1$, тогаш од првата равенка добиваме $q=-2$.

Следствено, постојат две вредности за $p$ и $q$: $p_1=q_1=0$ или $p_2=1$, $q_2=-2$, и соодветно равенките се $x^2=0$ или $x^2+x-2=0$.

**8.** Решенијата на квадратната равенка $x^2+bx+c=0$ припаѓаат на интервалот $(2,3)$. Докажи дека важи $5b+2c+12<0$.

**Решение.** Може да забележиме дека од условот според кој решенијата $x_1,x_2\in(2,3)$, точни се следниве неравенства:

1) $x_1-2>0, x_2-3<0$, од каде

$$(x_1-2)(x_2-3)<0 \tag{1}$$

2) $x_2-2>0, x_1-3<0$, од каде

$$(x_2-2)(x_1-3)<0 \tag{2}$$

Сега, користејќи ги Виетовите правила и неравенствата (1) и (2) добиваме:

$$\begin{aligned} 5b+2c+12 &= -5(x_1+x_2)+2x_1x_2+12 \\ &= (x_1x_2-2x_1-3x_2+6)+(x_1x_2-3x_1-2x_2+6), \\ &= (x_1-3)(x_2-2)+(x_1-2)(x_2-3)<0. \end{aligned}$$

**9.** Равенката $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ има реални решенија За која вредност на реалниот параметар $a$, збирот на квадратите на нејзините решенија е најголем?

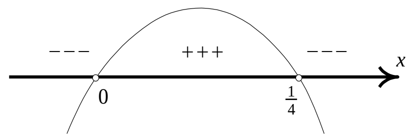
**Решение**. Равенката има решенија ако $D=4a^2-4(2a^2+4a+3)\geq 0$. Добиваме $a^2+4a+3\leq 0$, односно $(a+1)(a+3)\leq 0$ и оттука $a\in[-3,-1]$. Ако ги означиме решенијата на равенката со $x_1$ и $x_2$, за збирот на нивните квадрати имаме $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Бидејќи $x_1+x_2=-2a$ и $x_1x_2=2a^2+4a+3$, добиваме

$x_1^2+x_2^2=4a^2-4a^2-8a-6=-8a-6$. Тогаш најголемата вредност на $x_1^2+x_2^2$ се достигнува за $a=-3$, а изнесува 18.

**10.** При кои вредности на параметарот $c$ корените на равенката $x_1$ и $x_2$ на равенката $x^2+x+c=0$ го задоволуваат неравенството $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geq 2$.

**Решение.** Според Виетовите правила, имаме $x_1+x_2=-1$, $x_1x_2=c$ и, притоа, $c\neq 0$, коешто произлегува од условот (1) и $x_1x_2=c$. Користејќи го тоа, добиваме

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{1-2c}{c}$.




Сега неравенството (1) е еквивалентно со неравенството $\frac{1-2c}{c}\geq 2$, т.е. $0<c<\frac{1}{4}$.

**11.** Ако $x_1$ и $x_2$ се корени на равенката $x^2-ax-a=0$, $a\in\mathbb{R}$, тогаш

$$x_1^3+x_2^3+x_1^3x_2^3\geq 0.$$

Докажи!

**Решение.** Од Виетовите формули имаме $x_1+x_2=a$, $x_1x_2=-a$. Тогаш

$$x_1^3+x_2^3+x_1^3x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+(x_1x_2)^3=a^3+3a^2-a^3=3a^2\geq 0.$$

**12.** Нека $a,b\in\mathbb{Z}$ и $x_1$ и $x_2$ се решенија на равенката $x^2+ax+b=0$. Докажи дека $x_1^n+x_2^n\in\mathbb{Z}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

**Решение.** Ја воведуваме означата $S_n=x_1^n+x_2^n$. Од Виетовите формули следува дека

$$S_1=x_1+x_2=-a\in\mathbb{Z} \text{ и } S_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2b\in\mathbb{Z}.$$

Нека претпоставиме дека за некој $k\geq 3$ важи $S_{k-1},S_{k-2}\in\mathbb{Z}$. Тогаш, ако го искористиме равенството

$$(x_1+x_2)(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})=x_1^n+x_2^n+x_1x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}),$$

т.е. равенството $S_k=-aS_{k-1}-bS_{k-2}$, од индуктивната претпоставка следува дека $S_k\in\mathbb{Z}$.

Конечно од принципот на математичка индукција следува дека $S_n\in\mathbb{Z}$, за секој $n\in\mathbb{N}$ што и требаше да се докаже.

**13.** Нека $\alpha$ и $\beta$ се корени на равенката $ax^2+bx+c=0$ и нека $S_n=\alpha^n+\beta^n$, $n\in\mathbb{N}$. Најди врска меѓу $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}$.

**Решение.** *Прв начин.* Бидејќи $\alpha$ и $\beta$ се корени на дадената равенка, следува точноста на равенствата: $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ и $a\beta^2+b\beta+c=0$.

Ако првото од нив го помножиме со $\alpha^n$, а второто со $\beta^n$ и потоа ги собереме, добиваме $a(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+b(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+c(\alpha^n+\beta^n)=0$, односно:

$$aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0.$$

*Втор начин.* Од Виетовите формули за равенката $ax^2+bx+c=0$ имаме $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. Тогаш од

$$(-\tfrac{b}{a})S_{n+1}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)=S_{n+2}+\tfrac{c}{a}S_n,$$

добиваме:

$$aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0.$$

**14.** Дадена е квадратната равенка $3a^2x^2+10a\sqrt{b}x+3b=0$, $b>0, a\neq 0$. Докажи дека ако корените на равенката, $x_1$ и $x_2$, го задоволуваат условот

$$3(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1),$$

тогаш тие не зависат од $a$ и $b$.

**Решение.** Од $3(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$ и Виетовите формули следува

$$3(-\tfrac{10a\sqrt{b}}{3a^2})=5(\tfrac{3b}{3a^2}+1), \text{ т.е. } -2a\sqrt{b}=b+a^2.$$

Затоа, $(\sqrt{b}+a)^2=0$, т.е. $\sqrt{b}+a=0$, од каде добиваме $a=-\sqrt{b}$. Според тоа, дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$3bx^2-10bx+3b=0,$$
$$3x^2-10x+3=0.$$

Решенијата на последната равенка не зависат од $a$ и $b$, па затоа и решенијата на почетната равенка не зависат од $a$ и $b$.

**15.** Разликата на нулите на квадратниот трином $x^2+px+q$ е $a$. Определи го квадратниот трином за кој што $p+q$ има најмала вредност.

**Решение.** Нека $x_1, x_2$ се нули на квадратниот трином $x^2+px+q$, односно се корени на квдратната равенка $x^2+px+q=0$. Од условот на задачата $x_1-x_2=a$. Според Виетовите формули имаме $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$. Значи, изразот $p+q$ може да се запише во облик $p+q=x_1x_2-(x_1+x_2)$. Но, од равенството $x_1-x_2=a$ имаме $x_2=x_1-a$, па затоа

$$p+q=x_1(x_1-a)-x_1-(x_1-a)=x_1^2-(a+2)x_1+a=(x_1-\tfrac{a+2}{2})^2+a-\tfrac{(a+2)^2}{4}.$$

Последниот израз има најмала вредност ако и само ако $x_1=\frac{a+2}{2}$, и притоа $x_2=\frac{2-a}{2}$. Сега $p=-(x_1+x_2)=-2$ и $q=x_1x_2=1-\frac{a^2}{4}$. Бараниот трином е

$$A(x)=x^2-2x+1-\tfrac{a^2}{4}.$$

**16.** Докажи дека разликата на решенијата на равенката

$$5x^2-2(5a+3)x+5a^2+6a+1=0,$$

не зависи од вредноста на параметарот $a$.

**Решение.** Ако ги искористиме Виетовите формули, за апсолутната вредност на разликата на решенијата на дадената равенбка добиваме

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$
$$=\sqrt{(\tfrac{2(5a+3)}{5})^2-4\tfrac{5a^2+6a+1}{5}}=\sqrt{\tfrac{4}{25}(5a+3)^2-\tfrac{4}{25}\cdot 5(5a^2+6a+1)}$$
$$=\tfrac{2}{5}\sqrt{25a^2+30a+9-25a^2-30a-5}=\tfrac{2}{5}\sqrt{4}=\tfrac{4}{5}.$$

Конечно, бидејќи апсолутната вредност на разликата на решенијата на дадената равенка не зависи од параметарот $a$, заклучуваме дека и разликата на решенијата не зависи од параметарот $a$.

**17.** Најди го реалниот број $\lambda$ така што разликата на решенијата на равенката $8x^2-\lambda x+3=0$ е еднаква на $\frac{5}{16}$.

**Решение.** *Прв начин.* Нека $x_1$ и $x_2$ се решенија на дадената равенка. Тогаш имаме

$$|x_1-x_2|=\tfrac{5}{16}$$
$$(x_2-x_2)^2=\tfrac{25}{256}$$
$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\tfrac{25}{256}.$$
$$(-\tfrac{\lambda}{8})^2-4\cdot\tfrac{3}{8}=\tfrac{25}{256}$$
$$\lambda^2=\tfrac{409}{4}$$

Оттука $\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{409}}{2}$.

*Втор начин.* Решенијата на дадената равенка се $x_{1,2}=\frac{\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-96}}{16}$ и тие се реални ако и само ако $\lambda^2\geq 96$. Тогаш од $|x_1-x_2|=\frac{5}{16}$ ја добиваме равенката $2\sqrt{\lambda^2-96}=5$ чии решенија се $\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{409}}{2}$. Притоа $\lambda_{1/2}^2=\frac{409}{4}>96$, па навистина решенијата што ќе се добијат за овие вредности на $\lambda$ се реални и различни.

**18.** Нека $x,y,a$ и $b$ се позитивни реални броеви, такви што $x+y=a+2$ и $xy=b$. Докажи дека $ab\geq 8(b-a-1)$. Кога се достигнува знак за равенство?

**Решение.** Од условот на задачата следува дека броевите $x$ и $y$ се корени на равенката $z^2-(a+2)z+b=0$. Последното е исполнето ако $D=(a+2)^2-4b\geq 0$, т.е. $\frac{(a+2)^2}{4}\geq b$.

Од друга страна неравенството $ab \ge 8(b-a-1)$ е еквивалентно на неравенството $(8-a)(8+b) \le 72$. Ако $a \ge 8$, тогаш последното неравенство очигледно е исполнето. За $0 < a < 8$ доволно е да го докажеме неравенството

$$(8-a)(8+\tfrac{(a+2)^2}{4}) \le 72\,,$$

кое е еквивалентно на неравенството $a(a-2)^2 \ge 0$.

**19.** Решенијата на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ припаѓаат на интервалот $[0,1]$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека $u$ и $v$ се решенијата на равенката $ax^2+bx+c=0$, при што без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $0 \le u \le v \le 1$. Од Виетовите формули следува $u+v=-\frac{b}{a}$ и $uv=\frac{c}{a}$, т.е. $b=-a(u+v)$, $c=auv$.

Ако замениме во изразот (1), добиваме

$$\begin{aligned}\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} &= \frac{[a+a(u+v)][2a+a(u+v)]}{a[a+a(u+v)+auv]} = \frac{a(1+u+v)a(2+u+v)}{a^2(1+u+v+uv)}\\ &= \frac{(1+u+v)(2+u+v)}{(1+u)(1+v)} = 2+\frac{u}{1+v}+\frac{v}{1+u}\\ &\le 2+\frac{u}{1+u}+\frac{1}{1+u}=3.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $u=v=1$. Притоа важи $c=a$ и $b=-2a$ и дадената равенка е го добива обликот $a(x-1)^2=0$.

Според тоа, бараната најголема можна вредност на изразот (1) е 3.

**20.** Ако секој корен на равенката $x^2+px+q=0$ се зголеми за 1, се добиваат корените на равенката $x^2-p^2x+pq=0$. Определи ги $p$ и $q$.

**Решение.** Од Виетовите формули за првата равенка имаме $\alpha+\beta=-p$ и $\alpha\beta=q$. Од Виетовите формули за втората равенка добиваме $\alpha+\beta+2=p^2$ и $(\alpha+1)(\beta+1)=pq$, т.е.

$$\alpha+\beta=p^2-2 \text{ и } \alpha\beta=pq-(\alpha+\beta)-1=pq-p^2+1\,.$$

Значи,

$$p^2+p-2=0 \text{ и } q+p^2-1=pq\,.$$

Сега, од првата равенка добиваме $p_1=1$ или $p_2=-2$, а втората е еквивалентна со равенката $(p-1)q=p^2-1$. Јасно, ако $p=1$, тогаш $q$ е произволен реален број, а ако $p=-2$, тогаш $q=-1$.

**21.** Ако секој решение на равенката $x^2+3x-7=0$ го зголемиме за реципрочната вредност на другото решени, ги добиваме решенијата на равенката $2x^2+ax+b=0$. Определи ги $a$ и $b$.

**Решение.** Нека $\alpha$ и $\beta$ се решенијата на $x^2+3x-7=0$. Тогаш за нив важи $\alpha+\beta=-3$ и $\alpha\beta=-7$. Според условот, решенијата на $2x^2+ax+b=0$ се $\alpha+\frac{1}{\beta}$ и $\beta+\frac{1}{\alpha}$. Тогаш:

$$a=-2(\alpha+\tfrac{1}{\beta}+\beta+\tfrac{1}{\alpha})=2(-(-3)-\tfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})=2(3-\tfrac{-3}{-7})=\tfrac{36}{7} \text{ и}$$
$$b=2(\alpha+\tfrac{1}{\beta})(\beta+\tfrac{1}{\alpha})=2(\alpha\beta+\tfrac{1}{\alpha\beta}+2)=2(-7-\tfrac{1}{7}+2)=-\tfrac{72}{7}.$$

**22.** Ако равенките $x^2+px+q=0$ и $x^2+px-q=0$ имаат целобројни решенија, тогаш постојат цели броеви $a$ и $b$, такви што $p^2=a^2+b^2$. Докажи!

**Решение.** Ќе докажеме дека $p$, $q$, $D_1=\sqrt{p^2-4q}$ и $D_2=\sqrt{p^2+4q}$ се цели броеви.

Решенијата на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ се $x_{1,2}=\frac{-p\pm D_1}{2}$ и тие по услов се цели броеви. Затоа, нивниот збир $\frac{-p+D_1}{2}+\frac{-p-D_1}{2}=-p$ е цел број, т.е $p$ е цел број и нивната разлика $\frac{-p+D_1}{2}-\frac{-p-D_1}{2}=D_1$ е цел број. Од Виетовите формули имаме $x_1x_2=q\in\mathbb{Z}$, како производ на цели броеви. Слично, од втората равенка добиваме дека $D_2\in\mathbb{Z}$.

Понатаму, од $p^2-4q=D_1^2$ и $p^2+4q=D_2^2$ следува дека $D_1$ и $D_2$ имаат иста парност со $p$. Ако ги собереме последните равенства добиваме $2p^2=D_1^2+D_2^2$, т.е. $p^2=\frac{D_1^2+D_2^2}{2}$. Затоа

$$p^2=\frac{D_1^2+D_2^2}{2}=(\frac{D_1+D_2}{2})^2+(\frac{D_1-D_2}{2})^2=a^2+b^2,$$

каде $a=\frac{D_1+D_2}{2}$ и $b=\frac{D_1-D_2}{2}$ се цели броеви, бидејќи $D_1$ и $D_2$ се со иста парност.

**23.** Определи ги сите реални броеви $a$ и $b,$ $b>0,$ такви што решенијата на равенките $x^2+ax+a=b$ и $x^2+ax+a=-b$ се четири последователни цели броеви.

**Решение.** Нека $x_1,x_2$ и $x_3,x_4$ се решенијата на првата и втората равенка, соодветно. Тогаш, од Виетовите формули следува дека збирот на нивните решенија е еднаков на $-2a$. Но, решенијата на дадените равенки се четири последователни цели броеви, па затоа

$$x+x+1+x+2+x+3=-2a,$$
$$x=-\frac{a+3}{2}.$$

Според тоа, решенијата на дадените равенки се $-\frac{a+3}{2}$, $-\frac{a+1}{2}$, $-\frac{a-1}{2}$ и $-\frac{a-3}{2}$. Имаме, $x_{1,2}=-\frac{a\pm3}{2}$ и $x_{3,4}=-\frac{a\pm1}{2}$, или обратно. Повторно ги користиме Виетовите формули и добиваме:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = (a-b)+(a+b)$$
$$(-\tfrac{a+3}{2})(-\tfrac{a-3}{2}) + (-\tfrac{a+1}{2})(-\tfrac{a-1}{2}) = 2a\ ,$$
$$a^2 - 4a - 5 = 0$$

т.е. $a=-1$ или $a=5$.

За $a=-1$ корените се $-1,0,1,2$ и $b=1$. За $a=5$ корените се $-4,-3,-2,-1$ и $b=1$. Значи бараните броеви се $a=-1$ и $b=1$ или $a=5$ и $b=5$.

**24.** Нека $k$ е еден од количниците на решенијата на квадратната равенка $px^2 - qx + q = 0$, каде $p,q>0$. Изрази ги преку $k$ решенијата на равенката

$$\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0\ . \qquad (1)$$

**Решение.** Ако $a$ и $b$ се решенија на равенката $px^2 - qx + q = 0$, тогаш од условот на задачата имаме $\frac{a}{b} = k$, а според Виетовите формули имаме $a+b = \frac{p}{q}$, $ab = \frac{p}{q}$. Бидејќи $p$ и $q$ се позитивни реални броеви, од второто равенство добиваме дека $a$ и $b$ се со ист знак, па затоа од првото равенство следува дека $a$ и $b$ се позитивни. Сега, ако го коренуваме второто равенство, добиваме $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{p}{q}}$.

Ако ги поделиме равенствата $a+b = \frac{q}{p}$ со $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{p}{q}}$, добиваме $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$.

Во последното равенство заменуваме $\frac{a}{b} = k$, и добиваме

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\ . \qquad (2)$$

Последното равенство го множиме со $\sqrt{k}\sqrt{p}$ и добиваме

$$\sqrt{p}(\sqrt{k})^2 - \sqrt{q}\sqrt{k} + \sqrt{p} = 0\ .$$

Значи, $\sqrt{k}$ е корен на равенката (1). Бидејќи $\sqrt{k}$ е корен на равенката (1) и важи (2), од Виетовите формули следува дека добиваме дека $\frac{1}{\sqrt{k}}$ е вториот корен на равенката (1).

Конечно, ако $a_1, b_1$ се решенијата на равенката (1), тогаш $a_1 = \sqrt{k}$ и $b_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

**25.** Дали постојат реални броеви $a,b,c$ и $d$ такви што условите:

а) равенката $ax^2 + bdx + c = 0$ има реални различни корени $x_1, x_2$,

б) равенката $bx^2 + cdx + a = 0$ има реални различни корени $x_2, x_3$,

в) равенката $cx^2 + adx + b = 0$ има реални различни корени $x_3, x_1$,

се истовремено исполнети.

**Решение.** Нека претпоставиме дека такви броеви постојат. Тогаш равенките под а), б) и в) имаат по две реални и различни решенија, секоја посебно, па затоа $a \neq 0, b \neq 0$ и $c \neq 0$. Понатаму, од Виетовите формули следува $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, $x_2x_3 = \frac{a}{b}$

и $x_3x_1 = \frac{b}{c}$. Ги множиме последните три равенства и добиваме $x_1^2x_2^2x_3^2 = 1$. Според тоа $x_1x_2x_3 = t$ каде $t = \pm 1$. Од последното равенство и Виетовите формули имаме $x_1 = t\frac{b}{a}$, $x_2 = t\frac{c}{b}$ и $x_3 = t\frac{a}{c}$. Сега, ако $x_1$ го замениме во $ax^2 + bdx + c = 0$, $x_2$ го замениме во $bx^2 + cdx + a = 0$ и $x_3$ го замениме во $cx^2 + adx + b = 0$ ги добиваме равенствата: $b^2(1+dt) = -ac$, $c^2(1+dt) = -ab$ и $a^2(1+dt) = -bc$. Но, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, па затоа $1 + dt \neq 0$. Сега ако последните три равенства ги поделиме по парови, лесно се добива дека $a^3 = b^3 = c^3$, од што бидејќи $a, b, c$ се реални броеви добиваме $a = b = c$. Последното противречи на условот $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$, што значи дека не постојат реални броеви за кои дадените услови се истовремено исполнети.

**26.** Нека $x_0$ и $x_1$ се реални решенија на равенката $x^2 + a_1x + b_1 = 0$, $x_0$ и $x_2$ се реални решенија на равенката $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ и $x_0$ и $x_3$ се реални решенија на равенката $x^2 + a_3x + b_3 = 0$. Определи ги решенијата на равенката

$$x^2 + \frac{a_1+a_2+a_3}{3}x + \frac{b_1+b_2+b_3}{3} = 0. \qquad (1)$$

**Решение.** Од $x_0^2 + a_1x_0 + b_1 = 0$, $x_0^2 + a_2x_0 + b_2 = 0$ и $x_0^2 + a_3x_0 + b_3 = 0$ следува

$$3x_0^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

односно

$$x_0^2 + \frac{a_1+a_2+a_3}{3}x_0 + \frac{b_1+b_2+b_3}{3} = 0$$

па затоа $x_0$ е реално решение на равенката (1). Тоа значи дека и второто решение на (1) е реален број. Од $x_0 + x_1 = -a_1$, $x_0 + x_2 = -a_2$ и $x_0 + x_3 = -a_3$ добиваме

$$3x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = -(a_1 + a_2 + a_3),$$

односно

$$x_0 + \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = -\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

и како

$$x_0 \cdot \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_0x_1+x_0x_2+x_0x_3}{3} = \frac{b_1+b_2+b_3}{3},$$

од Виетовите формули следува дека $x_0$ и $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ се решенијата на равенката (1).

**27.** Определи ги ги сите вредности на реалниот параметар $a \neq 0,1$ за кои равенките $x^2 - (2a+1)x + a = 0$ и $x^2 + (a-4)x + a - 1 = 0$ имаат реални решенија $x_1$ и $x_2$, и $x_3$ и $x_4$, соодветно и за кои е исполнето равенството

$$\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_4}{x_2} = \frac{x_1x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)}{a}. \qquad (1)$$

**Решение.** Равенството (1) е еквивалентно со равенството

$$a(x_1x_2 + x_3x_4) = x_1x_2x_3x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Од Виетовите формули ја добиваме равенката

$$a(2a-1)=a(a-1)(a+5).$$

Но, $a\neq 0$, па од последната равенка ја добиваме равенката $a^2+2a-4=0$, чиишто решенија се $-1-\sqrt{5}$ и $-1+\sqrt{5}$.

**28.** Збирот на четирите корени на квадратните триноми $f$ и $g$ со еднакви водечки коефициенти е еднаков на нула. Квадратниот трином $f+g$ има два корени. Докажи дека збирот на тие корени е еднаков на нула.

**Решение.** Ако $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=ax^2+dx+e$, тогаш

$$f(x)+g(x)=2ax^2+(b+d)x+c+e.$$

Според Виетовите формули збирот на корените на $f(x)$ е $-\frac{b}{a}$, а збирот на корените на $g(x)$ е $-\frac{d}{a}$. Според условот на задачата збирот на корените на $f$ и $g$ е еднаков на нула, па затоа $-\frac{b+d}{a}=-(\frac{b}{a}+\frac{d}{a})=-\frac{b}{a}-\frac{d}{a}=0$.

Конечно, ако ги искористиме Виетовите формули, тогаш за збирот на корените на триномот $f+g$ добиваме $-\frac{b+d}{2a}=0$.

**29.** Дадени се равенките $x^2-ax+b-4=0$ и $y^2-by+a-\frac{1}{4}=0$, $a,b\in\mathbb{R}$. Определи за кои вредности на $a$ и $b$, корените не втората равенка се еднакви на реципрочните вредности од корените на првата равенка?

**Решение.** Нека $\alpha$ и $\beta$ се корени на првата равенка. Од условот на задачата следува дека $\alpha,\beta\neq 0$, па затоа $b\neq 4$. Од Виетовите формули, применети за првата равенка добиваме $\alpha+\beta=a$ и $\alpha\beta=b-4$, а применети за втората равенка добиваме $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=b$ и $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=a-\frac{1}{4}$. Ако од првите две замениме за $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$ во последните две равенкиа ги добиваме равенките $a=b(b-4)$ и $1=(b-4)(a-\frac{1}{4})$. Од последните две равенки последователно добиваме

$$(b-4)(b(b-4)-\tfrac{1}{4})=1,$$

$$b^3-8b^2+\tfrac{63}{4}b=0.$$

Решенијата на последната равенка се: $b_1=0$, $b_2=\frac{7}{2}$, $b_3=\frac{9}{2}$, а соодветните вредности за $a$ се $a_1=0$, $a_2=-\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{9}{4}$.

**30.** Нека $p$ и $q$ се реални броеви такви што $p+q=198$. Ако решенијата на равенката $x^2+px+q=0$ се цели броеви, определи ги решенијата на оваа равенка и реалните броеви $p$ и $q$.

**Решение.** Ако $x_1$ и $x_2$ се решенија на равенката $x^2+px+q=0$, тогаш од Виетовите формули следува

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Од последните равенства и равенството $p+q=198$ добиваме

$$198 = p+q = -(x_1+x_2)+x_1x_2 = (x_1-1)(x_2-1)-1 .$$

Според тоа, $(x_1-1)(x_2-1)=199$. Но, $x_1, x_2$ се цели броеви, па затоа $x_1-1, x_2-1$ се цели броеви, а како 199 е прост број, од последната равенка следува

$$\begin{cases} x_1-1=1 \\ x_2-1=199 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-199 \end{cases}$$

Решенијата $(x_1, x_2)$ на последните два система се $(2,200)$ и $(0,198)$. За решението $(2,200)$ го добиваме системот

$$\begin{cases} 2p+q=-4 \\ 200p+q=-40000, \end{cases}$$

чие решение е $p=-202$, $q=400$. За решението $(0,198)$, го добиваме системот

$$\begin{cases} q=0 \\ 198p+9=-198^2, \end{cases}$$

чие решение е $p=-198, q=0$.

**31.** Определи ги паровите квадратни триноми $x^2+ax+b$ и $x^2+cx+d$ такви што $a$ и $b$ се корени на $x^2+cx+d$, а $c$ и $d$ се корени на $x^2+ax+b$.

**Решение.** Од Виетовите формули добиваме $a=-(c+d)$, $b=cd$, $c=-(a+b)$, $d=ab$, т.е. го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+c+d=0 \\ b=cd \\ d=ab \end{cases} \qquad (1)$$

Ако од првата ја одземеме втората равенка, добиваме $b=d$, па затоа системот (1) е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b=d \\ b=bc \\ b=ba \end{cases}$$

Можни се два случаи.

*Случај* 1. $b=0$. Тогаш $a+c=0$, т.е. $c=-a$. Значи, $c=-a$, $a\in\mathbb{R}$ и $b=d=0$ и квадратните триноми се $x^2+ax$ и $x^2-ax$.

*Случај* 2. $b\neq 0$. Тогаш $a=c=1$, $b=d=-2$, па затоа квадратните триноми се $x^2+x-2$ и $x^2+x-2$.

Со непосредна проверка се покажува дека најдените квадратни триноми ги задоволуваат условите на задачата.

**32.** Определи ги вредностите на реалниот параметар $a$, за кои што решенијата $x_1, x_2$ на равенката $x^2-2ax+a+2=0$ се реални ненегативни броеви и

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leq 2\sqrt{5}.$$

**Решение.** Корените $x_1, x_2$ се реални ненегативни броеви ако

$$D=4(a^2-a-2)\geq 0,\quad x_1+x_2=2a\geq 0 \text{ и } x_1x_2=a+2\geq 0,$$

од што следува $a\geq 2$. Сега

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}\leq 20 \Leftrightarrow \sqrt{a+2}\leq 10-a.$$

Ако $a>10$, последната неравенка нема решение, а ако $a\in[2,10]$ таа е еквивалентна на равенката $a+2\leq(10-a)^2$, т.е. на равенката $a^2-21a+98\geq 0$. Оттука наоѓаме $a\in(-\infty,7]\cup[14,+\infty)$ и ако земеме предвид дека $a\in[2,10]$ добиваме дека бараните вредности на параметарот $a$ се $a\in[2,7]$

**33.** Равенката $x^2+ax+b=0$ има две реални и различни решенија. Докажи, дека равенката

$$x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$$

има четири реални и различни решенија.

**Решение.** Нека $x_1$ и $x_2$ се решенијата на равенката $x^2+ax+b=0$. Од Виетовите формули следува $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b$. Според тоа, равенката

$$x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0 \tag{1}$$

го добива обликот

$$x^4-(x_1+x_2)x^3+(x_1x_2-2)x^2+(x_1+x_2)x+1=0$$
$$x^4-x_1x^3-x_2x^3+x_1x_2x^2-2x^2+x_1x+x_2x+1=0$$
$$x^2(x^2-x_2x-1)-x_1x(x^2-x_2x-1)-(x^2-x_2x-1)=0$$
$$(x^2-x_1x-1)(x^2-x_2x-1)=0.$$

Значи, решенијата на равенката (1) е унија од решенијата на равенките

$$x^2-x_1x-1=0 \tag{2}$$

$$x^2-x_2x-1=0. \tag{3}$$

Равенките (2) и (3) немаат заедничко решение. Навистина, ако претпоставиме дека $p$ е заедничко решение на равенките (2) и (3), тогаш

$$p^2-x_1p-1=0 \text{ и } p^2-x_2p-1=0.$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, добиваме

$$(x_2-x_1)p=0.$$

Бидејќи $x_2\neq x_1$, т.е. $x_1-x_2\neq 0$, добиваме $p=0$. Но, $p=0$ не е решение на ниту една од равенките (2) и (3). Според тоа равенката (1) има четири различни решенија. Тие се реални броеви, бидејќи $x_1^2+4>0$ и $x_2^2+4>0$.

**34.** Нека $x, y, a$ се реални броеви такви што важи

$$x+y=x^3+y^3=x^5+y^5=a\,.$$

Определи ги сите можни вредности на бројот $a$.

**Решение.** Условот на задачата ќе го запишеме во видот

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=a \\ x^5+y^5=a. \end{cases} \tag{1}$$

Ако $x=-y$, тогаш очигледно $a=0$.

Нека $a\neq 0$ е таков, што постојат $x,y\in\mathbb{R}$ за кои важи (1). Да ја разгледаме квадратната равенка

$$z^2-az+p=0\,, \tag{2}$$

чии решенија се $x$ и $y$. Тогаш, од Виетовите формули последователно добиваме

$$\begin{aligned} &x+y=a \\ &x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2p \\ &x^3+y^3=a^3-3ap \\ &x^4+y^4=a^4-4a^2p+2p^2 \\ &x^5+y^5=a^5-5a^3p+5ap^2 \end{aligned}$$

Од

$$\begin{cases} x^3+y^3=a \\ x^3+y^3=a^3-3ap \end{cases}$$

следува $a^3-3ap=a$ и како $a\neq 0$ наоѓаме

$$p=\tfrac{a^2-1}{3}\,. \tag{3}$$

Од

$$\begin{cases} x^5+y^5=a \\ x^5+y^5=a^5-5a^3p+5ap^2 \end{cases}$$

следува $a=a^5-5a^3p+5ap^2$ и како $a\neq 0$ наоѓаме $a^4-5a^2p+5p^2=1$. Сега користејќи го равенството (3) добиваме $a^4-5a^2\tfrac{a^2-1}{3}+5(\tfrac{a^2-1}{3})^2=1$ или

$$a^4-5a^2+4=0\,.$$

Решенија на последната равенка се $-2,-1,1,2$.

Конечно, можните вредности за $a$ се $-2,-1,0,1,2$.

**Забелешка.** Решенијата на квадратната равенка (2) се реални бидејќи од $|a|\leq 2$ следува дека за нејзината дискриминанта важи

$$D=a^2-4p=a^2-4\tfrac{a^2-1}{3}=\tfrac{4-a^2}{3}\geq 0\,.$$

**35.** Дадени се 15 квадратни триноми $x^2-p_ix+q_i$, $i\in\{1,2,3,...,15\}$, чии коефициенти се различни, припаѓаат на множеството $\{1,2,3,...,30\}$ и ниту еден број не е коефициент во два триноми. За еден корен на квадратен трином ќе велиме дека е „добар“ ако тој е поголем од 20. Колку најмногу „добри“ корени може да имаат дадените 15 квадратни триноми?

**Решение.** Нека $x^2 + px + q$ е еден од дадените квадратни триноми. Тој може да има најмногу еден добар корен. Навистина, ако претпоставиме дека и $x_1$ и $x_2$ се добри корени, тогаш од Виетовите формули следува дека

$$p = x_1 + x_2 > 20 + 20 > 30\,,$$

што противречи на условот на задачата: $p \in \{1, 2, 3, ..., 30\}$.

Понатаму, еден квадратен трином има добар корен, ако $p > 20$. Навистина, ако претпоставиме дека $p \leq 20$ и триномот има добар корен, тогаш од корените $x_{1/2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ на триномот добар е коренот $x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Тоа значи дека $\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 20$. Од последното неравенство последователно добиваме

$$\begin{aligned} &\sqrt{p^2 - 4q} > 40 - p \\ &4q < 80p - 1600 \\ &q < 20p - 400 \leq 20 \cdot 20 - 400 = 0 \end{aligned}$$

што е спротивно на изборот на $q$.

Во множеството $\{1, 2, 3, ..., 30\}$ има 10 броеви поголеми од 20 кои може да бидат вредности за $p$ а тие се 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 и 30. Ќе докажеме дека за секој од овие броеви постои трином кој има добар корен. Ќе направиме избор $p_k = 20 + k$, $q_k = k$, $k = 1, 2, 3, ..., 10$. Тогаш

$$D_k = p_k^2 - 4q_k = (20+k)^2 - 4k = 400 + 40k + k^2 - 4k > 400 - 40k + k^2 = (20-k)^2$$

при што имаме

$$x_k^{\max} = \frac{p_k + \sqrt{D_k}}{2} > \frac{20 + k + \sqrt{(20-k)^2}}{2} = \frac{20 + k + 20 - k}{2} = 20\,.$$

Конечно, дадените 15 квадратни триноми може да имаат најмногу 10 добри корени.

**36.** Определи ја квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$, ако е познато дека разликата на нејзините решенија е 7, а разликата на нивните кубови е 91.

**Решение.** Од условите на задачата следува $x_1 - x_2 = 7$ и $x_1^3 - x_2^3 = 91$. Затоа,

$$91 = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 7(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

и оттука добиваме $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 13$. Имаме:

$$q = x_1 x_2 = \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - (x_1 - x_2)^2}{3} = \frac{13 - 7^2}{3} = -12\,,$$

$$p^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2 = 7^2 - 4 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

и оттука $p = \pm 1$. Значи, бараните равенки се $x^2 + x - 12 = 0$ и $x^2 - x - 12 = 0$.

**37.** Нека $p$ е прост број, $p>2$. Дали постојат природни броеви $x$ и $y$ такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$ ?

**Решение.** Нека претпоставиме дека постојат природни броеви $x$ и $y$ такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$. Со квадрирање на последното равенство добиваме

$$x+y+2\sqrt{xy}=2p. \qquad (1)$$

Бидејќи, $x,y$ и $2p$ се природни броеви, од (1) следува дека и $\sqrt{xy}$ е природен број, т.е. $xy=k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Тогаш, $x+y=2(p-k)$. Од последните две равенства заклучуваме дека $x$ и $y$ се решенија на квадратната равенка

$$t^2-2(p-k)t+k^2=0. \qquad (2)$$

Значи, решенијата на равенката (2) се природни броеви, па затоа нејзината дискриминанта е ненегативна и е точен квадрат, т.е.

$$4p(p-2k)\geq 0 \text{ и } 4p(p-2k)=4m^2.$$

Јасно, $4p(p-2k)\geq 0$, бидејќи во спротивно $p=2k$, што противречи на $p>2$ и $p$ е прост број. Според тоа $p(p-2k)=m^2$, $m\neq 0$, и бидејќи $p$ е прост број, добиваме $m=pn$, за некој $n\in\mathbb{N}$. Конечно, за секој прост број $p, p>2$, не постојат природни броеви $x$ и $y$ такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$.

**38.** Определи природни броеви $p$ и $q$ такви што нулите на $x^2-px+q$ и $x^2-qx+p$ ќе бидат природни броеви.

**Решение.** Нека $x_1$ и $x_2$ се решенија на равенката $x^2-px+q=0$, а $y_1,y_2$ на равенката $x^2-qx+p=0$. Од Виетовите формули имаме

$$x_1+x_2=p, \qquad x_1x_2=q$$
$$y_1+y_2=q, \qquad y_1y_2=p.$$

Ќе разгледаме два случаја.

*I случај.* Еден од броевите $x_1,x_2,y_1,y_2$ е еднаков на 1. Нека тоа е $x_1$. Од (1) следува дека $q+1=p$ и со замена во (2) добиваме $y_1+y_2+1=y_1y_2$, т.е. $(y_1-1)(y_2-1)=2$. Бидејќи $y_1,y_2\in\mathbb{N}$, од последното равенство следува $y_1-1=1$, $y_2-1=2$, или $y_1-1=2$, $y_2-1=1$. Конечно наоѓаме $y_1=2, y_2=3$, или $y_1=3$, $y_2=2$, односно $p=6, q=5$.

***II случај.*** Нека $x_1,x_2,y_1,y_2>1$ . Од $x_1+x_2\leq x_1x_2$ и $y_1+y_2\leq y_1y_2$ добиваме $p\leq q$ и $q\leq p$ , т.е. $p=q$. Но $x_1,x_2$ се природни броеви, па затоа $p^2-4p=n^2$, од што следува $p\geq 4$, и $(p+n-2)(p-n-2)=4$. Од $p\geq 4$ добиваме $p+n-2>0$, а оттука следува и дека $p-n-2>0$. Но, $p+n-2\geq p-n-2$, па затоа од последното равенство ги добиваме системите

$$\begin{cases} p+n-2=4 \\ p-n-2=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} p+n-2=2 \\ p-n-2=2 \end{cases}.$$

Првиот csстем нема целобројни решенија, а од вториот добиваме $p=4$, $n=0$. Конечно, бараните броеви се $p=6, q=5$; $p=5, q=6$ и $p=q=4$.

**39.** Дадени се корените $x_0$ и $x_1$, $x_0$ и $x_2$ ,…, $x_0$ и $x_n$ на квадратните полиноми $P_1(x)=x^2+b_1x+c_1$, $P_2(x)=x^2+b_2x+c_2$, …, $P_n(x)=x^2+b_nx+c_n$, соодветно. Најди ги корените на квадратниот полином

$$P(x)=x^2+\tfrac{b_1+b_2+...+b_n}{n}x+\tfrac{c_1+c_2+...+c_n}{n}$$

**Решение.**Од условот на задачата имаме

$$x_0^2+b_1x_0+c_1=x_0^2+b_2x_0+c_2=x_0^2+b_3x_0+c_3=...=x_0^2+b_nx_0+c_n=0\ .$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме

$$nx_0^2+(b_1+b_2+b_3+...+b_n)x_0+(c_1+c_2+...+c_n)=0,$$

т.е. $x_0$ е решение на разгледуваниот полином $P(x)$. Затоа, дискриминантата на $P(x)$ е ненегативна и тој има втор реален корен $x^*$. Од Виетовите формули имаме:

$$x_0+x_1=-b_1, x_0+x_2=-b_2\ , \ldots.\ , x_0+x_n=-b_n,\ x_0+x^*=-\tfrac{1}{n}(b_1+b_2+...+b_n).$$

Ако последното равенство го помножиме со $n$ и од него ги одземеме првите $n$ равенства добиваме $x^*=\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)$ .

**40.** Квадратните равенки $x^2+a_ix+b_i=0$, $i=\overline{1,8}$ имаат заеднички корен $x_0=2$, а збирот на другите корени е 2008. Докажи дека корените на равенката

$$x^2+\tfrac{a_1+a_2+...+a_8}{8}x+\tfrac{b_1+b_2+...+b_8}{8}=0$$

се прости броеви.

**Решение.** Според претходната задача корените на полиномот

$$P(x)=x^2+\tfrac{a_1+a_2+...+a_8}{8}x+\tfrac{b_1+b_2+...+b_8}{8}$$

се $x_0=2$ и $x^*=\frac{1}{8}(x_1+x_2+...+x_n)=\frac{2008}{8}=251$ и тоа се прости броеви.

**41.** Дали постојат квадратни триноми $ax^2+bx+c$ и $(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$ со целобројни коефициенти, такви што секој од нив има по два различни цели корени?

**Решение.** Да претпоставиме дека постојат такви триноми. Нека $x_1$ и $x_2$ се корени на $ax^2+bx+c$ а $y_1$ и $y_2$ се корени на $(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$. Од Виетовите формули следува: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$; $y_1+y_2=-\frac{b+1}{a+1}$; $y_1y_2=\frac{c+1}{a+1}$.

Бидејќи $x_1$ , $x_2$, $y_1$ и $y_2$ се цели броеви следува дека $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b+1}{a+1}$, $\frac{c+1}{a+1}$ се цели броеви. Еден од броевите $a$ и $a+1$ е парен. Нека е тоа $a$. Тогаш и $b$ и $c$ се парни броеви. Значи $a+1$, $b+1$, $c+1$ се непарни. Следува дека броевите $y_1+y_2$ и $y_1y_2$ се непарни. Но збирот и производ на два броја не може да бидат во исто време непарни. Значи, не постојат квадратни триноми со бараното својство.

# 3. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

**1.** За функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ знаеме дека се исполнети условите

$$f(-1)<1,\ f(1)>-1 \text{ и } f(3)<-4$$

Одреди го знакот на коефициентот $a$.

**Решение.** Имаме

$$\begin{array}{lcl} f(-1)<1 & & a-b+c<1 \\ f(1)>-1 & \Leftrightarrow & a+b+c>-1 \\ f(3)<-4 & & 9a+3b+c<-4 \end{array}$$

Ако ја помножиме втората неравенка со $-2$, а потоа ги собереме трите неравенки, добиваме $8a<-1$ т.е. $a<-\frac{1}{8}$, од што следува дека $a<0$.

Значи, коефициентот $a$ е негативен број.

**2.** Нека $P(x)=ax^2+bx+c$ е квадратен трином со ненегативни реални коефициенти. Докажи дека за било кој позитивен реален број $x$ е исполнето

$$P(x)P(\tfrac{1}{x})\geq[P(1)]^2.$$

**Решение.** За било кој позитивен реален број $p$ имаме $p+\frac{1}{p}\geq 2$, (неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина). Сега, бидејќи $ab,bc$ и $ca$ се позитивни реални броеви, имаме

$$\begin{aligned} P(x)P(\tfrac{1}{x}) &= (ax^2+bx+c)(a\tfrac{1}{x^2}+b\tfrac{1}{x}+c) \\ &= a^2+b^2+c^2+ab(x+\tfrac{1}{x})+bc(x+\tfrac{1}{x})+ca(x^2+\tfrac{1}{x^2}) \\ &\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2=[P(1)]^2. \end{aligned}$$

**3.** Докажи дека ако функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ прима целобројни вредности кога $x$ е цел број, тогаш $2a, a+b$ и $c$ се цели броеви.

**Решение.** Нека $x$ е цел број. Тогаш $f(x)=ax^2+bx+c$ е исто така цел број. Од $f(0)=c$ следува $c$ е цел број. Од $f(1)=a+b+c$, односно $a+b=f(1)-c$, следува дека $a+b$ е цел број. Од $f(2)=4a+2b+c$, односно

$$f(2)=2a+2(a+b)+c$$

следува дека и $2a$ е цел број.

Да забележиме дека важи и обратното. Навистина, нека $2a, a+b$ и $c$ се цели броеви и нека $x$ е цел број. Тогаш од $f(x)=ax^2+bx+c$, односно

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c=ax^2-ax+bx+ax+c \\ &= ax(x-1)+(a+b)x+c=2a\tfrac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c \end{aligned}$$

ќе следува дека и $f(x)$ е цел број.

**4.** Нека $p(t)=at^2+bt+c$ е полином со ненегативни коефициенти. Докажи дека

$$(p(xy))^2 \leq p(x^2)p(y^2).$$

**Решение.** Непосредно добиваме:

$$\begin{aligned}(p(xy))^2-p(x^2)p(y^2) &= (a(xy)^2+bxy+c)^2-(ax^4+bx^2+c)(ay^4+by^2+c)\\ &= a^2x^4y^4+b^2x^2y^2+c^2+2abx^3y^3+2acx^2y^2+2bcxy-a^2x^4y^4-\\ &\quad -abx^4y^2-acx^4-abx^2y^4-b^2x^2y^2-bcx^2-acy^4-bcy^2-c^2\\ &= 2abx^3y^3+2acx^2y^2+2bcxy-abx^4y^2-acx^4-abx^2y^4-bcx^2-acy^4-bcy^2\\ &= abx^2y^2(2xy-x^2-y^2)+ac(2x^2y^2-x^4-y^4)+bc(2xy-x^2-y^2)\\ &= -ab(x-y)^2-ac(x^2-y^2)^2-bc(x-y)^2 \leq 0\end{aligned}$$

**5.** Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, таква што $|f(x)|\leq 1$ за $|x|\leq 1$. Докажи дека $|a|\leq 2$.

**Решение.** Имаме, $f(0)=c$, па затоа $|c|\leq 1$. Понатаму, $|f(1)|=|a+b+c|\leq 1$ и $|f(-1)|=|a-b+c|\leq 1$. Според тоа

$$\begin{aligned}|2a| &= |(a+b+c)+(a-b+c)-2c|\\ &\leq |a+b+c|+|a-b+c|+|-2c|\leq 1+1+2=4,\end{aligned}$$

т.е. $|a|\leq 2$.

**6.** Нека $5a+3b+3c=0$, каде $a$, $b$ и $c$ се реални броеви и $a\neq 0$. Докажи дека квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ има барем едно решение $x_0$, такво што $x_0\in[0,2]$.

**Решение.** За квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ имаме $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$ и $f(2)=4a+2b+c$. Според тоа $f(0)+f(1)+f(2)=5a+3b+c=0$. Ако $f(0), f(1), f(2)\neq 0$, тогаш два се позитивни и еден е негативен или еден е позитивен, а другите два се негативни. Може да се разгледаат сите комбинации од претходниот дел, па според тоа, во сите случаи постои точка $x_0\in[0,2]$, таква што $f(x_0)=0$, т.е. $ax_0^2+bx_0+c=0$. Навистина,

1° $f(0), f(1)>0, f(2)<0$. Постои $x_0\in(1,2)$ така што $ax_0^2+bx_0+c=0$.

2° $f(0), f(2)>0, f(1)<0$. Постојат $x_0\in(0,1)$ и $x_1\in(1,2)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

3° $f(1), f(2)>0, f(0)<0$. Постои $x_\circ\in(0,1)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$.

4° $f(0), f(1)<0, f(2)>0$. Постои $x_\circ\in(1,2)$ така што $ax_0^2+bx_0+c=0$.

5° $f(0), f(2)<0, f(1)>0$. Постојат $x_\circ\in(0,1)$ и $x_1\in(1,2)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

$6^\circ$ $f(1), f(2) < 0, f(0) > 0$. Постои $x_\circ \in (0,1)$ така што $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

Случајот кога еден од броевите $f(0), f(1), f(2)$ е нула е тривијален.

**7.** Ако $a,b,c$ се должини на страните од триаголник, тогаш функцијата $f(x) = (a+b)x^2 - 2cx + a + b$ е позитивна за секој реален број $x$. Докажи!

**Решение.** Дискриминантата на равенката можеме да ја запишеме во облик

$$D = (2c)^2 - 4(a+b)^2 = 4(c-a-b)(c+a+b).$$

Бидејќи $a,b,c$ се должини на страни на триаголник имаме

$$c-a-b<0, a+b+c>0,$$

па според тоа $D<0$. Квадратната функција нема реални корени и бидејќи $a+b>0$, добиваме $f(x)>0, x\in\mathbb{R}$.

**8.** Ако $a,b,c$ се должини на страните од триаголник, тогаш функцијата $f(x) = b^2x^2 + (b^2+c^2-a^2)x + c^2$ е позитивна за секој реален број $x$. Докажи!

**Решение.** Дискриминантата на равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned} D &= (b^2+c^2-a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2+c^2-a^2)^2 - (2bc)^2 \\ &= (b^2+c^2-a^2-2bc)^2(b^2+c^2-a^2+2bc)^2 \\ &= [(b-c)^2-a^2][(b+c)^2-a^2] \\ &= (b-c-a)(b+a-c)(b+c-a)(b+c+a). \end{aligned}$$

Бидејќи $a,b,c$ се должини на страни на триаголник имаме

$$b-c-a<0, a+b-c>0, b+c-a>0, a+b+c>0,$$

па според тоа $D<0$. Квадратната функција нема реални корени и бидејќи $b^2>0$, добиваме $f(x)>0, x\in\mathbb{R}$.

**9.** Ако $10x+11y=\frac{1}{3}$, тогаш $x^2+y^2\ge\frac{1}{1989}$. Докажи!

**Решение.** Од условот $10x+11y=\frac{1}{3}$, следува дека $y=\frac{1-30x}{33}$

$$x^2+y^2 = x^2+(\tfrac{1-30x}{33})^2 = \tfrac{1089x^2+1-60x+900x^2}{1089} = \tfrac{1}{1089}(1989x^2-60x+1).$$

Бидејќи функцијата $f(x)=1989x^2-60x+1$ има минимум

$$f_{\min} = \tfrac{4ac-b^2}{4a} = \tfrac{4\cdot1989-3600}{4\cdot1989} = \tfrac{121}{221},$$

добиваме дека:

$$x^2+y^2 \ge \tfrac{1}{1089}\cdot\tfrac{121}{221} = \tfrac{1}{1989}.$$

*Обопштување.* Ако $ax+by=c$, тогаш $x^2+y^2\ge\frac{c^2}{a^2+b^2}$. Ако $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, тогаш $x^2+y^2\ge\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}$.

**10.** Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=(|x+1|+1)(x-3)$.

**Решение.** Бидејќи

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & x\geq -1 \\ -(x+1), & x<-1 \end{cases}$$

функцијата го добива обликот

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-6, & x\geq -1 \\ -x^2+3x, & x<-1 \end{cases}$$

Графикот на $g(x)=x^2-x-6$ е парабола: “отворена” нагоре; со теме $T(\frac{1}{2},-\frac{25}{4})$; пресеци со $x$-оската $A(-2,0)$ и $B(3,0)$; и пресек со $y$-оската $C(0,-6)$. Графикот на $h(x)=-x^2+3x$ е парабола: “отворена” надолу, со теме $T'(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$; пресеци со $x$-оската $A'(0,0)$ и $B'(3,0)$; и пресек со $y$-оската $C'(0,0)$.

Направи сам скица на графикот на $f(x)$.

**11.** Нека $a,b,c$ се реални броеви такви што $a+2b+c<0$ и $a-2b+c>0$. Докажи, дека важи $b^2>ac$.

**Решение.** *Прв начин.* Да ја разгледаме функцијата $f(x)=ax^2+2bx+c$. Бидејќи $f(1)=a+2b+c<0$ и $f(-1)=a-2b+c>0$, заклучуваме дека квадратната функција $f(x)$ ја сече $x-$оската меѓу точките $-1$ и 1, што значи дека таа има две реални и различни нули. Оттука следува дека нејзината дискриминантата е позитивна, т.е. $(2b)^2-4ac>0$, што значи $b^2>ac$.

*Втор начин.* Важи $2b<a+c<-2b$, па затоа $(a+c)^2<4b^2$. Од друга страна $(a+c)^2\geq 4ac$, па затоа $4ac<4b^2$, т.е. $b^2>ac$.

**12.** Нека $n\in\mathbb{N}$, $a_k,p_k\in\mathbb{R}$, за секој $k\in\{1,2,...,n\}$ и $p_1+p_2+...+p_n>0$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x-a_k)^2$, каде $x$ е реален број.

**Решение.** Имаме

$$\sum_{k=1}^{n}p_k(x-a_k)^2=\sum_{k=1}^{n}p_k(x^2-2xa_k+a_k^2)=(\sum_{k=1}^{n}p_k)x^2-2(\sum_{k=1}^{n}p_ka_k)x+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k^2\,.$$

Значи дадениот израз е квадратна функција од $x$. Бидејќи коефициентот пред квадратниот член е позитивен следува дека најмалата вредност се достигнува во темето на параболата, т.е. за

$$x=\frac{-(-2\sum\limits_{k=1}^{n}p_ka_k)}{2\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_ka_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}$$

и таа е еднаква на

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^2 - \frac{(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k)^2}{\sum_{k=1}^{n} p_k}.$$

**13.** Определи ги сите комплексни броеви $z$ за кои количникот на имагинарниот дел на петтиот степен на $z$ и петтиот степен на имагинарниот дел на $z$ е најмал можен број.

**Решение.** Нека $z = a + ib$, каде $a, b \in \mathbb{R}$. Тогаш

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z^5 &= \operatorname{Im}(a^5 + 5a^4bi - 10a^3b^2 - 10a^2b^3i + 5ab^4 + b^5i) \\ &= 5a^4b - 10a^2b^3 + b^5. \end{aligned}$$

Треба да ја определиме најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{\operatorname{Im} z^5}{(\operatorname{Im} z)^5} = \frac{5a^4b - 10a^2b^3 + b^5}{b^5} = 5\frac{a^4}{b^4} - 10\frac{a^2}{b^2} + 1.$$

Воведуваме смена $x = \frac{a^2}{b^2}$. Според тоа, треба да ја најдеме најмалата можна вредност на функцијата $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ определена со $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$. Оваа квадратна функција достигнува минимум за $x = -\frac{-10}{2 \cdot 5} = 1$, при што $\min f = -4$. Притоа важи $\frac{a^2}{b^2} = 1$, т.е. $a = \pm b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Според тоа, бараните броеви се од видот $z = a(1 \pm i), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**14.** Нека $x, y, a$ и $b$ се позитивни реални броеви, такви што $x + y = a + 2$ и $xy = b$. Докажи дека $ab \geq 8(b - a - 1)$. Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Од условот на задачата следува дека броевите $x$ и $y$ се корени на равенката $z^2 - (a+2)z + b = 0$. Последното е исполнето ако $D = (a+2)^2 - 4b \geq 0$, т.е. $\frac{(a+2)^2}{4} \geq b$.

Од друга страна неравенството $ab \geq 8(b - a - 1)$ е еквивалентно на неравенството $(8 - a)(8 + b) \leq 72$. Ако $a \geq 8$, тогаш последното неравенство очигледно е исполнето. Ако $0 < a < 8$, тогаш доволно е да го докажеме неравенството

$$(8 - a)(8 + \frac{(a+2)^2}{4}) \leq 72,$$

кое е еквивалентно со точното неравенство $a(a-2)^2 \geq 0$.

**15.** Квадратната функција $p(x) = ax^2 + bx + c$ е со целобројни коефициенти $a$ и $b$. Докажи, дека за секој цел број $m$ постои цел број $n$ таков што

$$p(n)p(n+1) = p(m).$$

**Решение.** Нека $p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$, каде $\alpha$ и $\beta$ се решенија на равенката $ax^2 + bx + c = 0$. Тогаш

$$\begin{aligned} p(n)p(n+1) &= (n-\alpha)(n-\beta)(n+1-\alpha)(n+1-\beta) \\ &= [n^2-(\alpha+\beta)n+\alpha\beta+n-\alpha][n^2-(\alpha+\beta)n+\alpha\beta+n-\beta] \\ &= (m-\alpha)(m-\beta) \\ &= p(m), \end{aligned}$$

каде $m = n^2-(\alpha+\beta)n+\alpha\beta+n = n^2+an+b+n \in \mathbb{Z}$.

**16.** Нека функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ нема реални нули и $a+b+c>0$. Докажи дека $c>0$.

**Решение.** Бидејќи функција $f(x)=ax^2+bx+c$ нема реални нули, заклучуваме дека $f(x)=ax^2+bx+c>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$ или $f(x)=ax^2+bx+c<0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Понатаму, бидејќи $f(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c>0$, заклучуваме дека $f(x)>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Конечно, $c=f(0)>0$.

**17.** Дадени се по парови различните реални броеви $a,b$ и $c$. Докажи, дека барем две од равенките

$$(x-a)(x-b)=x-c,\ (x-b)(x-c)=x-a \text{ и } (x-c)(x-a)=x-b$$

имаат реално решение.

**Решение.** *Прв начин*. Да означиме

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-b)(x-c)-(x-a), \\ f_2(x) &= (x-c)(x-a)-(x-b), \\ f_3(x) &= (x-a)(x-b)-(x-c) \end{aligned}$$

и да претпоставиме дека најмногу една од овие квадратни функции има реална нула. Тогаш две од нив, на пример $f_1$ и $f_2$ немаат реални нули. Бидејќи коефициентите пред $x^2$ се позитивни, важи $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Но, тогаш полиномот

$$\begin{aligned} f_1(x)+f_2(x) &= (x-b)(x-c)-(x-a)+(x-c)(x-a)-(x-b) \\ &= (x-c)(2x-a-b)-(2x-a-b) \\ &= (2x-a-b)(x-c-1) \end{aligned}$$

има реални нули $c+1$ и $\frac{a+b}{2}$, што е противречност.

*Втор начин*. Како и претходно нека претпоставиме дека $f_1$ и $f_2$ немаат реални нули. Тогаш дискриминантите им се негативни, т.е. $(b+c+1)^2<4(bc+a)$ и $(c+a+1)^2<4(ac+b)$. Затоа $(b-c-1)^2<4a-4b$ и $(c-a+1)^2<4b-4a$, од каде следува дека $(b-c-1)^2+(c-a+1)^2<4b-4a+4a-4b=0$, што е противречност.

**18.** Параболата $y=ax^2+bx+c$ минува низ точките $A(-2,1)$ и $B(2,9)$, и нема заеднички точки со $Ox$-оската.

Кои вредности може да ги има апсцисата на темето на параболата?

**Решение.** Од условот дека параболата минува низ точките $A(-2,1)$ и $B(2,9)$ добиваме

$$\begin{cases} 4a-2b+c=1 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases}.$$

Ако од втората ја одземеме првата равенка, добиваме $b=2$ и потоа $4a+c=5$.

Од условот на задачата, параболата нема заеднички точки со $Ox$-оската, па според тоа нема реални нули. Значи, нејзината дискриминанта е негативна, т.е.

$$D=b^2-4ac=4-4a(5-4a)<0.$$

Решението на последната неравенка е $\frac{1}{4}<a<1$. Од друга страна, параболата можеме да ја запишеме во обликот

$$f(x)=ax^2+b+c=ax^2+2x+5-4a=a(x^2+2\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2})-\frac{1}{a}+5-4a$$

$$=a(x+\tfrac{1}{a})^2-\tfrac{4a^2-5a+1}{a}.$$

Сега, апсцисата на темето на праболата е $x_T=-\frac{1}{a}$, па од претходно добиените неравенства за $a$ имаме $-4<x_T<-1$, што се бараните вредности за апцисата на темето на параболата.

**19.** Нека $a,b,c$ се реални броеви и $a\neq 0$. Ако $x_1$ е решение на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ и $x_2$ е решение на квадратната равенка $-ax^2+bx+c=0$, докажи дека едно од решенијата $x_3$ на квадратната равенка $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$ е меѓу $x_1$ и $x_2$, т.е. $x_1\leq x_3\leq x_2$ или $x_2\leq x_3\leq x_1$.

**Решение.** Ако $c=0$, тогаш 0 е решение на сите три равенки и твдењето на задачата важи. Нека претпоставиме дека $c\neq 0$. Тогаш $x_1\neq 0, x_2\neq 0$. Да ја разгледаме квадратната функција $f(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+c$. Од $ax_1^2+bx_1+c=0$, следува

$$f(x_1)=\frac{a}{2}x_1^2+bx_1+c=ax_1^2+bx_1+c-\frac{a}{2}x_1^2=-\frac{a}{2}x_1^2,$$

а од $-ax_2^2+bx_2+c=0$, следува

$$f(x_2)=\frac{a}{2}x_2^2+bx_2+c=-ax_2^2+bx_2+c+\frac{3a}{2}x_2^2=\frac{3a}{2}x_2^2.$$

Според тоа, $f(x_1)f(x_2)<0$, па затоа квадратната функција $f(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+c$ во $x_1$ и $x_2$ прима вредности со спротивни знаци. Оттука следува дека постои решение на равенката $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$ кое е меѓу $x_1$ и $x_2$. Имено, параболата $y=f(x)$ ја сече $x-$оската во некоја точка која е меѓу точките $(x_1,0)$ и $(x_2,0)$.

**20.** Нека $5a+3b+3c=0$, каде $a,b$ и $c$ се реални броеви и $a\neq 0$. Докажи, дека квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ им барем едно решение $x_0$, такво што $x_0\in[0,2]$.

**Решение.** За квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ имаме $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$ и $f(2)=4a+2b+c$. Според тоа $f(0)+f(1)+f(2)=5a+3b+c=0$.

Ако барем еден од броевите $f(0), f(1)$ или $f(2)$ е нула, тогаш тврдењето на задачата е докажано.

Ако $f(0), f(1), f(2)\neq 0$, тогаш два од нив се позитивни и еден е негативен или еден од нив е позитивен, а другите два се негативни, т.е. можни се следниве случаи:

1) $f(0), f(1)>0$ и $f(2)<0$, тогаш постои $x_0\in(1,2)$ таков што $ax_0^2+bx_0+c=0$

2) $f(0), f(2)>0$ и $f(1)<0$, тогаш постојат $x_0\in(0,1)$ и $x_1\in(1,2)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

3) $f(1), f(2)>0$ и $f(0)<0$, тогаш постои $x_0\in(0,1)$ таков што $ax_0^2+bx_0+c=0$

4) $f(0), f(1)<0$ и $f(2)>0$, тогаш постои $x_0\in(1,2)$ таков што $ax_0^2+bx_0+c=0$

5) $f(0), f(2)<0$ и $f(1)>0$, тогаш постојат $x_0\in(0,1)$ и $x_1\in(1,2)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

6) $f(1), f(2)<0$ и $f(0)>0$, тогаш постои $x_0\in(0,1)$ таков што $ax_0^2+bx_0+c=0$

Според тоа, во секој случај постои $x_0\in[0,2]$, таков што $f(x_0)=0$, т.е. $ax_0^2+bx_0+c=0$.

**21.** Дали постои вредност на параметарот $a$, таква што темето на параболата

$$y=4x^2-4(a+1)x+a$$

да лежи во вториот квадрант.

**Решение.** Параболата можеме да ја запишеме во обликот

$$y=4(x-\tfrac{a+1}{2})^2-(a^2+a+1).$$

Според тоа, нејзино теме е $T(\frac{a+1}{2},-(a^2+a+1))$. Бидејќи

$$a^2+a+1=a^2+2\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}=(a+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\geq\tfrac{3}{4},$$

за $a\in\mathbb{R}$, добиваме дека $-(a^2+a+1)\leq-\frac{3}{4}<0$. Значи, точката $T$ припаѓа или на третиот или на четвртиот квадрант. Според тоа, не постои вредност на параметарот $a$ за кој темето на параболата лежи во вториот квадрант.

**22.** Дадено е множество параболи

$$f(x)=ax^2+(2a-3)x+a+1,\ a\in\mathbb{R}, a\neq 0.$$

Определи го геометриското место на темињата на параболите. Каква е зависноста меѓу координатите на темињата на парболите?

**Решение.** Нека точката $T(x_T, y_T)$ е теме на параболата

$$f(x) = ax^2 + (2a-3)x + a + 1. \tag{1}$$

Параболата ќе ја запишеме во облик

$$f(x) = a(x + \tfrac{2a-3}{2a})^2 + \tfrac{16a-9}{4a}.$$

Според тоа, $T(\frac{3-2a}{2a}, \frac{16a-9}{4a})$, односно $x_T = \frac{3-2a}{2a}, y_T = \frac{16a-9}{4a}$. Значи, $a = \frac{3}{2(1+x_T)}$ и ако замениме во $y_T$ добиваме

$$y_T = \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2} x_T.$$

Значи, геометриското место на темињата на двете параболи е

$$A = \{(\tfrac{3-2a}{2a}, \tfrac{16a-9}{4a}) \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\},$$

и сите точки припаѓаат на правата $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$. Не е тешко да се види дека секоја точка од $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x,\ x \neq -1$ е теме на една од множеството параболи зададени со (1).

**23.** Дадено е множеството параболи $y = (k-2)x^2 - 2kx + k + 2$, каде $k \neq 2$ е реален број.

а) Определи го геометриското место на точки на кое припаѓаат темињата на даденото множество параболе.

б) Дали дадените параболи имаат заедничка точка.

**Решение.** а) Апсцисите на темињата на параболите се $x = \frac{2k}{2(k-2})= \frac{k}{k-2}$, а ординатите се $y = \frac{4(k^2-4)-4k^2}{4(k-2)} = -\frac{4}{k-2}$. Од $x = \frac{k}{k-2}$ наоѓаме $k = \frac{2x}{x-1}$, па затоа

$$y = -\frac{4}{\frac{2x}{x-1} - 2} = -2x + 2.$$

Според тоа, геометрискоро место на темињата на даденото множество параболи е правата $y = -2x + 2$.

б) Равенката на параболата ќе ја запишеме во видот

$$k(x^2 - 2x + 1) - y + 2 - 2x^2 = 0.$$

Точката чии координати се решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ -y + 2 - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

лежи на сите параболи. Од првата равенка имаме $x = 1$ и со замена во втората равенка добиваме $y = 0$. Значи, сите параболи минуваат низ точката $A(1, 0)$.

**24.** Најди ги сите точки од рамнината низ кои не минува графикот на ниту една функција од фамилијата $\{y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3 \mid p \in \mathbb{R}\}$.

**Решение.** Ако $(x_0, y_0)$ е точка со бараното својство, тогаш нејзините координати не ја задоволуваат равенката

$$y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3,\ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Според тоа, нашата задача е еквивалентна со задачата: кој услов треба да го задоволуваат $x$ и $y$ така што квадратната равенка

$$2p^2 - 4xp + x^2 - y - 3 = 0 \qquad (1)$$

нема реални решенија.

За да равенката (1) нема реални решенија потребно и доволно е нејзината дискриминанта да е негативна, т.е. да важи $8x^2 + 8y + 24 < 0$, од каде добиваме

$$y < -x^2 - 3. \qquad (2)$$

Според тоа, низ точките $(x, y)$ кои го задоволуваат условот (2) не минува ниту една функција од разгледуваната фамилија.

**25.** Дадена е квадратната функција $f(x) = x^2 + px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$. Ако $|f(0)| > 1$ и $f(-1)f(1) > 0$, тогаш $f$ нема нули на $[-1,1]$. Докажи!

**Решение.** Нека $f(x_1) = 0$, за некој $x_1 \in (-1,1)$. Тогаш постои $r \in (x_1, 1)$, таков што $f(-1)f(r) < 0$. Но, $f(-1)f(1) > 0$, па затоа $f(r)f(1) < 0$, што значи дека постои $x_2 \in (r,1)$ таков што $f(x_2) = 0$. Значи, ако функцијата има нула на $(-1,1)$, тогаш има две нули на $(-1,1)$, па од Виетовите формули следува $1 > |x_1 x_2| = |q|$, што противречи на $|q| = |f(0)| > 1$.

**26.** Даден е квадратниот полином $f(x) = x^2 + 2x + b$, каде $b$ е реален параметар. Определи ги сите вредности на $b$ за кои равенката $f(f(x)) = 0$ има точно три реални корени.

**Решение.** Ако $f(x) = 0$ има корени $\alpha_1 < \alpha_2$, тогаш корените на $f(f(x)) = 0$ се совпаѓаат со корените на $f(x) = \alpha_1$ и $f(x) = \alpha_2$. Притоа е јасно дека за да постојат точно три различни корени потребно и доволно е $f(x) = \alpha_1$ да има точно еден двоен корен.

Минимумот на $f(x)$ се достигнува за $x = -1$ и тој е еднаков на $b - 1$. Според тоа, $\alpha_1 = b - 1$ и $f(b-1) = 0$, од каде следува $b^2 + b - 1 = 0$. Решенијата на последната равенка се $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

За $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ имаме $\alpha_1 = b - 1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} > \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и оваа вредност на $b$ не е решение на задачата.

За $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ имаме $\alpha_1 = b - 1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ и од $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ следува дека $\alpha_1$ навистина е помалиот корен на $f(x) = 0$. Конечно, $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

**27.** Во множеството реални броеви реши ја равенката $\sqrt{m^2 x^2 + 1} = x - \frac{m}{2}$.

**Решение.** Бидејќи левата страна на равенката мора да биде позитивна, таква мора да биде и десната, па затоа $x > \frac{m}{2}$. Со квадрирање добиваме

$$m^2x^2+1=x^2-mx+\tfrac{m^2}{4}$$

т.е.

$$4(m^2-1)x^2+4mx+4-m^2=0. \qquad (1)$$

Од $D=16m^2-16(m^2-1)(4-m^2)=16(m^2-2)^2\geq 0$ следува дека корените на равенката (1) се реални. Треба да најдеме колку корени на равенката (1) се поголеми од $\frac{m}{2}$.

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ која има две реални нули $x_1$ и $x_2$. Нека $t$ е даден реален број различен од нулите на функцијата. Можни се два случаи:

- $af(t)<0$. Ако $a>0$, тогаш $f(t)<0$, што значи дека $t$ е меѓу нулите на функцијата, а ако $a<0$, тогаш $f(t)>0$, што повторно значи дека $t$ е меѓу корените на функцијата. Значи, ако $af(t)<0$, тогаш еден корен на равенката $f(x)=0$ е поголем од $t$.
- $af(t)>0$. Ако $a>0$, тогаш $f(t)>0$ т.е. $t\notin[x_1,x_2]$ и ако $t<\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, тогаш и двата корени на равенката $f(x)=0$ се поголеми од $t$. Ако $a<0$, тогаш $f(t)<0$, $t\notin[x_1,x_2]$ и ако $t<\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, тогаш и двата корени на равенката се поголеми од $t$. Значи, ако $af(t)>0$ и $t<-\frac{b}{2a}$, тогаш и двата корени на равенката $f(x)=0$ се поголеми од $t$.

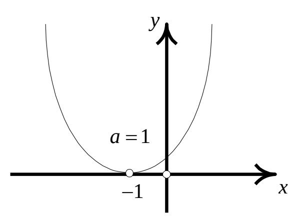
Од претходно изнесеното имаме:

- ако $0>4(m^2-1)f(\frac{m}{2})=4(m^2-1)(m^2+4)$, т.е $m\in(-1,1)$, тогаш еден корен на равенката (1) е поголем од $\frac{m}{2}$ и тој е решение на почетната равенка. Бараниот корен е $x=\frac{-m-2+m^2}{2(m^2-1)}$ (проверете!)
- ако $0<4(m^2-1)f(\frac{m}{2})=4(m^2-1)(m^2+4)$ и $\frac{m}{2}<-\frac{4m}{2\cdot 4(m^2-1)}$, т.е. $m^2-1>0$ и $\frac{m^3}{m^2-1}<0$, тогаш и двата корени на равенката (1) се поголеми од $\frac{m}{2}$. Според тоа, ако $m\in(-\infty,-1)$, тогаш почетната равенка има две решенија и тие се $x_{1/2}=\frac{-m\pm|2-m^2|}{2(m^2-1)}$.

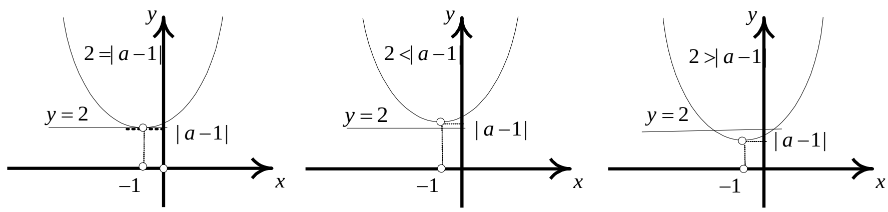
**28.** Да се определат вредностите на параметарот $a$ за кои што равенката

$$|x^2+2x+a|=2,$$

има четири различни решенија.

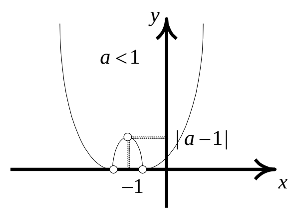



**Решение.** Доволно е за различни вредности на параметарот $a$ да го скицираме графикот на функцијата $y=|x^2+2x+a|$.Потоа доволно е да ги најдеме пресечните точки на графикот со правата $y=2$. Бидејќи $x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$,јасно е дека треба да

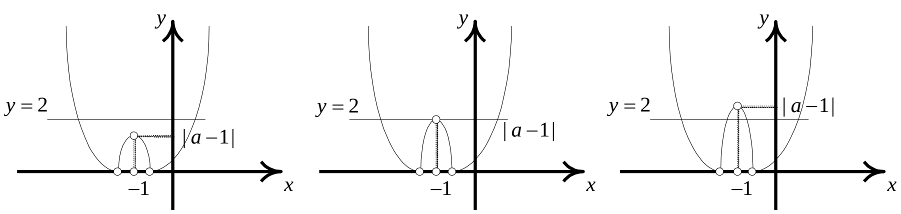



разгледуваме три случаи, и тоа $a-1=0, a-1<0$ и $a-1>0$. Во првиот случај, односно кога $a=1$, функцијата го добива обликот $y=(x+1)^2$. Тоа е парабола чие теме се наоѓа на $x$-оската (види цртеж ). Во овој случај очигледно е дека равенката има две решенија.

Ако $a>1$, односно $a-1>0$, тогаш $x^2+2x+a>0$ и $y=x^2+2x+a$. Очигледно е (види цртеж), дека во овој случај равенката има две, едно или ниту едно решение. За $a-1=2$ има едно решение, за $a-1>2$ нема решение, а за $a-1<2$ има две решенија.




Ако $a$–1<0, тогаш графикот на функцијата $y=|x^2+2x+a|$ е скициран на цртеж. Јасно е дека во тој случај равенката може да има две, три или четири решенија. При тоа за $|a-1|<2$ има две решенија, за $|a-1|=2$ има три решенија, а за $|a-1|>2$ има четири решенија (види цртеж ).




**29.** Определи ги вредностите на параметарот $m$ така да функцијата

$$f(x)=|x^2-6x|-m$$

има точно три нули. Дали за определената вредност на $m$ графикот на $f$ има оска на симетрија.

**Решение.**За да ги определиме реалните нули на функцијата $f$ доволно е да ги определиме решенијата на равнката $f(x)=0$, односно

$$|x^2-6x|-m=0. \qquad (1)$$

Бидејќи

$$|x^2-6x|=\begin{cases} x^2-6x, & x\le 0 \\ -(x^2-6x), & 0<x<6 \\ x^2-6x, & 6\le x \end{cases}.$$

равенката (1) ќе ја разгледаме на секој од интервалите $(-\infty,0]$, $(0,6)$, $[6,+\infty)$.

I. На интервалот $(-\infty,0]$ и интервалот $[6,+\infty)$ равенката го добива обликот

$$x^2-6x-m=0,$$

и нејзини решенија се $x_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{36+4m}}{2}=3\pm\sqrt{9+m}$.

Ако $m>0$, тогаш решението

$$x_1=3+\sqrt{9+m}\in[6,+\infty) \text{ и } x_2=3-\sqrt{9+m}\in(-\infty,0].$$

Ако $m<0$, тогаш $x_{1/2}\in(0,6)$ и не се решенија на равенката (1). Значи, за да функцијата има три нули потребно е $m>0$.
За $m=0$ функцијата има две нули.

II. На интервалот $(0,6)$ равенката го добива обликот

$$x^2-6x+m=0. \qquad (2)$$

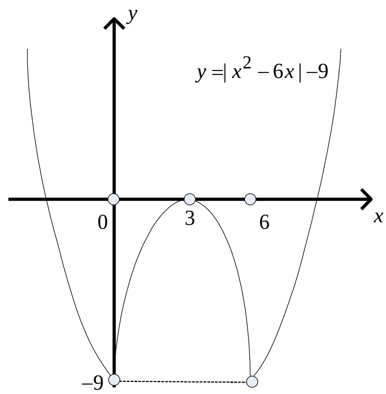
За да равенката (1) има точно три решенија потребно е равенката да има точно едно решение. Според тоа $D=0$, каде $D$ е дискриминанта на (2). Значи,

$$D=36-4m=0,$$

односно $m=9$.

Значи, графикот на $f$ има три нули ако и само ако $m=9$ (види цртеж).

Оска на симетрија е правата $x=3$.




**30.** Определи ги најголемата и најмалата вредност на функцијата

$$f(x)=x^2-2x-1,$$

за оние реални броеви $x$ кои го задоволуваат условот $x^4+36\le 13x^2$. Одговорот да се образложи.

**Решение.** Прво ги наоѓаме оние $x$ за кои важи $x^4-13x^2+36\le 0$. Решенија на биквадратната равенка $x^4-13x^2+36=0$ се: $-3,-2,2,3$. Неравенството е точно за $x\in[-3,-2]$ и $x\in[2,3]$.

Параболата $f(x)=x^2-2x-1$ има минимум во точката $x=1$. Значи, таа опаѓа на интервалот $[-3,-2]$, па $14=f(-3)\ge f(x)\ge f(-2)=7$ за $x\in[-3,-2]$, а расте на интервалот $[2,3]$, па $-1=f(2)\le f(x)\le f(3)=2$ за $x\in[2,3]$.

Според тоа, најмала вредност на $f(x)$ за оние $x$ за кои важи $x^4+36\le 13x^2$, е $-1$, а најголема вредност е 14.

**31.** За полиномот $P(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x$ да се определи најмалата негова вредност и точките во кои таа се достигнува.

**Решение.** Алгебарскиот израз $x^4+6x^3+11x^2+6x$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}x^4+6x^3+11x^2+6x &= x(x^3+6x^2+11x+6)=x[(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)]\\ &= x[x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)]=x(x+1)(x^2+5x+6)\\ &= x(x+1)(x+2)(x+3)=[x(x+3)][(x+1)(x+2)]\\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1-1\\ &= (x^2+3x+1)^2-1.\end{aligned}$$

Значи, $P(x)=(x^2+3x+1)^2-1$. За било кој реален број $x$, $(x^2+3x+1)^2\geq 0$, па според тоа $(x^2+3x+1)^2-1\geq -1$. Значи, $P(x)\geq -1$ и равенство се достигнува само ако $x^2+3x+1=0$. Решења на последната квадратна равенка, во кои $P$ ја достигнува најмалата вредност се $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

**32.** Одреди ја најмалата вредност на функцијата

$$f(x)=\frac{7}{3-\sqrt{5x^2-8x+3,29}}, \text{ ако } \quad 0\leq x\leq 2.$$

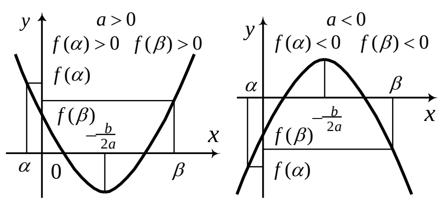
**Решение.** Прво да забележиме дека равенката $5x^2-8x+3,29=0$ нема реални решенија, па за секој реален број $x$ важи $5x^2-8x+3,29>0$. Параболата $g(x)=5x^2-8x+3,29$ има теме во $\frac{4}{5}$, па за $0\leq x\leq 2$ важи $5x^2-8x+3,29$ $<\max\{g(0),g(2)\}=g(2)=7,29$. Оттука следува дека $3-\sqrt{5x^2-8x+3,29}>0$, односно $f(x)>0$ за секој $x$. Натаму, $f(x)$ ќе биде најмало ако именителот е најголем, односно ако $5x^2-8x+3,29$ е најмало. Но тоа е случај во темето од параболата $g(x)=5x^2-8x+3,29$, односно за $x=\frac{4}{5}$. Вредноста на функцијата во $x=\frac{4}{5}$ изнесува $f(\frac{4}{5})=\frac{70}{27}$. Значи најмалата вредност на функцијата за $0\leq x\leq 2$ изнесува $\frac{70}{27}$ и се достигнува за $x=\frac{4}{5}$.

**33.** За кои вредносtи на реалниot параметар $m$ равенката

$$mx^2-(2m-3)x+7-3m=0$$

а) има точно едно решение;

б) има две решенија во инtервалot $(0,4)$?



цртеж 1

**Решение.** а) Потребен и доволен услов точно една нула на функцијата

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

т.е. едно решение на равенката

$$ax^2+bx+c=0\,)$$

да се наоѓа во интервалот $(\alpha,\beta)$ е $f(\alpha)f(\beta)<0$. Во нашиот случај имаме

$$f(0)=7-3m\,,\;\; f(4)=-4m+19\,,$$

па ја добиваме неравенката $(7-3m)(19+5m)<0$. Решавајќи ја оваа неравенка добиваме $m\in(-\infty,-\frac{19}{5})\cup(\frac{7}{3},\infty)$. Значи за тие вредности на $m$ точно едно решение на дадената равенка ќе се наоѓа во интервалот $(0,4)$.

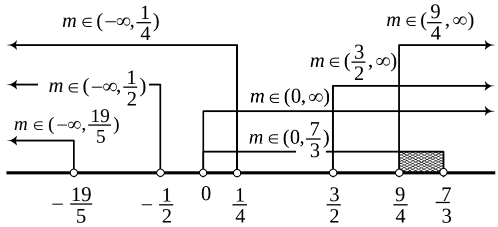
б) Прво да определиме за кои вредности на $m$ равенката име две решенија. Равенката има две решенија ако и само ако

$$D=(2m-3)^2-4m(7-3m)>0\,,$$

односно

$$16m^2-40m+9>0\,.$$

Решение на оваа неравенка е $m\in(-\infty,\frac{1}{4})\cup(\frac{9}{4},\infty)$. Двете нули



цртеж 2

на функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ се наоѓаат во интервалот $(\alpha,\beta)$ ако се исполнети следниве услови: $af(\alpha)>0, af(\beta)>0$ и ако апсцисата на темето на параболата $y=ax^2+bx+c$ се наоѓа во интертвалот $(\alpha,\beta)$ (цртеж.1). Во нашиов случај $a=m,\;\alpha=0,\,\beta=4,\,b=2m-3,\,c=7-3m$, па имаме:

- од $mf(0)>0$ ја добиваме неравенката $m(7-3m)>0$ чие решение е $m\in(0,\frac{7}{3})$,
- од $mf(4)>0$ имаме $m(5m+19)>0$, па следува $m\in\left(-\infty,-\frac{19}{5}\right)\cup\left(0,\infty\right)$,
- $0<-\frac{b}{2a}<4$, т.е. $0<\frac{2m-3}{2m}<4$. Решението на $0<\frac{2m-3}{2m}$ е $m\in(-\infty,0)\cup(\frac{3}{2},\infty)$, а

на неравенката $\frac{2m-3}{2m}<4$, $m\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,\infty)$. Според тоа, $0<\frac{2m-3}{2m}<4$ ако и само ако $m\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},\infty)$. Сите услови се исполнети за $m\in(\frac{9}{4},\frac{7}{3})$ (цртеж 2).

## 4. КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА

**1.** Одреди ја најмалата вредност на изразот

$$A=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1999\,.$$

За која вредност на $x$ таа се достигнува?

**Решение.** Го трансформираме изразот на следниот начин:

$$\begin{aligned}A&=(x+1)(x+4)(x+3)(x+2)+1999\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1999=\\&=((x^2+5x+5)-1)((x^2+5x+5)+1)+1999\\&=(x^2+5x+5)^2+1998.\end{aligned}$$

Оттука заклучуваме дека најмалата вредност на изразот $A$ е 1998, а се добива кога $x^2+5x+5=0$, т.е. за $x_{1|2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.

**2.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$\sqrt{x^2-x-12}>7x.$$

**Решение.** Дефиниционата област на дадената неравенка е определена со $x^2-x-12\geq 0$, т.е. со $(x-4)(x+3)\geq 0$, од каде добиваме $x\in(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$.

Ако $x<0$, тогаш $\sqrt{x^2-x-12}>7x$ за секој $x$ од дефиниционата област, што значи дека интервалот $(-\infty,-3]$ е решение на почетната неравенката.

Ако $x\geq 0$, тогаш $\sqrt{x^2-x-12}>7x$ за секој $x$ од дефиниционата област, па затоа $x^2-x-12>49x^2$, т.е. $48x^2+x+12<0$. Но, последната неравенка нема решение, што значи дека за $x\geq 0$ и почетната неравенка нема решение.

Конечно, решенија на почетната неравенката е множеството $(-\infty,-3]$.

**3.** Дадена е неравенката $x^2+ax-1<0$. Определи ги вредностите на параметарот $a$, така што множеството нејзините решенија е интервал со должина $5$.

**Решение.** Дискриминантата на неравенката е $D=a^2+4\geq 0$, па според тоа таа има реални решенија. Од условот множеството решенија на неравенката да е интервал со должина $5$ и од Виетовите формули добиваме:

$$5=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+4}.$$

Решенија на равенката $\sqrt{a^2+4}=5$ се $a=\pm\sqrt{21}$.

**4.** Одреди ги вредностите на параметарот $m$ така што за решенијата $x_1$ и $x_2$ на равенката $x^2+(m+3)x+m+21=0$ е исполнето: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<1$.

**Решение.** Ако неравенката ја трансформираме и ги искористиме Виетовите формули, добиваме

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_2x_1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2+x_2^2-x_2x_1}{x_2x_1}<0 \Leftrightarrow \frac{(x_2+x_1)^2-3x_2x_1}{x_2x_1}<0 \Leftrightarrow \frac{(m+3)^2-3(m+21)}{m+21}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2+3m-54}{m+21}<0 \Leftrightarrow \frac{(m+9)(m-6)}{m+21}<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m+9)(m-6)>0\\ m+21<0\end{cases} \vee \begin{cases}(m+9)(m-6)<0\\ m+21>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow m\in(-\infty,-21)\cup(-9,-6)$$

**5.** Реши ја неравенката:

а) $ax^2-2x+1>0$, каде $a$ е реален параметар;

б) $by^2+y+1<0$, каде $b$ е реален параметар.

**Решение.** а) Во зависност од вредностите на параметарот $a$ можни се три случаи.

<u>*Прв случај*</u>. $a=0$. Дадената неравенка го добива видот $-2x+1>0$ и нејзино решение е $x<\frac{1}{2}$.

<u>*Втор случај*</u>. $a>0$. Решенијата на неравенката зависат од дискриминантата $D_1=1-a$, при што:

1) ако $D_1=0$, т.е. ако $a=1$, тогаш неравенката има вид $x^2-2x+1>0$, т.е. $(x-1)^2>0$, што е исполнето за секој $x\neq 1$;
2) ако $D_1>0$, т.е. ако $0<a<1$, тогаш решенијата се $x\in(-\infty;x_2)\cup(x_1;\infty)$, каде $x_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-a})$, $x_1>x_2$;
3) ако $D_1<0$, т.е. ако $a>1$, тогаш решенијата се $x\in(x_2;x_1)$.

<u>*Трет случај*</u>. $a<0$. Тогаш $D_1>0$ и решенијата се $x\in(x_2;x_1)$.

б) Во зависност од вредностите на параметарот $a$ можни се три случаи.

<u>*Прв случај*</u>. $b=0$. Дадената неравенка го добива видот $y+1<0$ и решенијата се $y<-1$.

<u>*Втор случај*</u>. $b>0$. Дискриминантата е $D_2=1-4b$, за која:

1) $D_2=0$, т.е. $b=\frac{1}{4}$ и неравенката го прима видот $\frac{1}{4}y^2+y+1<0$, т.е. $(\frac{y}{2}+1)^2<0$, која нема решение;
2) $D_2>0$, т.е. $0<b<\frac{1}{4}$ и решенијата са $y\in(-\infty;y_2)\cup(y_1;\infty)$, каде $y_{1,2}=\frac{1}{2b}(-1\pm\sqrt{1-4b})$, $y_1>y_2$;
3) $D_2<0$, т.е. $b>\frac{1}{4}$ и во овој случај нема решение, бидејќи $by^2+y+1>0$ за секој $y$.

<u>*Трет случај*</u>. $b<0$. Тогаш $D_2>0$ и решенијата се $y\in(-\infty;y_2)\cup(y_1;\infty)$.

**6.** Реши ја неравенката $(c^2-1)z^2-(c^2+4c-1)z+2(c+1)\geq 0$, каде $c$ е реален параметар.

**Решение.** <u>*Прв случај*</u>. $c^2-1=0$, т.е. $(c+1)(c-1)=0$.

1) $c+1=0$, т.е. $c=-1$. Неравенката е $4z\geq 0$ со решенија $z\geq 0$.
2) $c-1=0$, т.е. $c=1$. Неравенката е $-4z+4\geq 0$ со решенија $z\leq 1$.

<u>*Втор случај*</u>. $c^2-1\neq 0$, т.е. $c\neq\pm 1$ и ја разгледуваме дискриминантата

$$D=(c^2+4c-1)^2-4(c^2-1)(2c+2)=c^4+6c^2+9=(c^2+3)^2>0.$$

Имаме $z_1=\frac{c^2+4c-1+c^2+3}{2(c^2-1)}=\frac{(c+1)^2}{(c-1)(c+1)}=\frac{c+1}{c-1}$ и $z_2=\frac{4(c-1)}{2(c-1)(c+1)}=\frac{2}{c+1}$. За споредување на корените ја формираме разликата $z_1-z_2=\frac{c+1}{c-1}-\frac{2}{c+1}=\frac{c^2+3}{(c+1)(c-1)}$. Бидејќи $z_1>z_2$ кога $c>1$ или $c<-1$ и $z_1<z_2$ кога $-1<c<1$, имаме две можности:

1) ако $c>1$ или $c<-1$ решенијата се $z<\frac{2}{c+1}$ или $z>\frac{c+1}{c-1}$;

2) ако $-1<c<1$ решенијата се $\frac{c+1}{c-1}<z<\frac{2}{c+1}$.

**7.** Определи ги ведностите на реалниот параметър $m$, за кои неравенството:

а) $(m+5)x^2-2(m+1)x+2(m-2)>0$;

б) $(m-3)x^2-2mx+3(m-2)<0$

е исполнето за секој реален број $x$.

**Решение.** а) Ако $m+5=0$, т.е. ако $m=-5$ даденото неравенство има вид $8x-14>0$, од каде $x>\frac{7}{4}$ и следствено неравенството не е исполнето за секој $x$.

Ако $m+5\neq 0$, тогаш квадратното неравенство е исполнето за секој реален $x$, ако $m+5>0$ и дискриминантата е негативна, односно

$$D_1=(m+1)^2-2(m+5)(m-2)=-m^2-4m+21=-(m-3)(m+7)<0,$$

т.е. $m>3$ или $m<-7$. Конечно, од претходните разгледувања следува дека решение на задачата е $m>3$.

б) Ако $m-3=0$, т.е. ако $m=3$ даденото неравенство има вид $-6x+3<0$, од каде $x>\frac{1}{2}$ и следствено неравенството не е исполнето за секој $x$.

Ако $m-3\neq 0$ квадратното неравенство е исполнето за секој реален $x$, ако $m-3<0$ и дискриминантата е негативна. Односно

$$D_2=m^2-3(m-3)(m-2)=-2m^2+15m-18=-(m-6)(2m-3)<0,$$

т.е. $m>6$ или $m<\frac{3}{2}$. Конечно, од претходните разгледувања следува дека решение на задачата е $m<\frac{3}{2}$.

**8.** Определи ги вредностите на реалниот параметар $d$, за кој изразот $\sqrt{(d^2+d-2)t^2-(d-1)t+1}$ е определен за секој реален број $t$.

**Решение.** Дадениот ирационален израз е определен за секој реален број $t$ за вредностите на параметарот $d$, за кои неравенството $(d^2+d-2)t^2-(d-1)t+1\geq 0$ е исполнето за секој реален број $t$. Можните случаи се:

<u>*Прв случај*</u>. $d^2+d-2=0$, т.е. $(d-1)(d+2)=0$.

1) $d-1=0$, т.е. $d=1$ и неравенството го добива видот $1\geq 0$, т.е. тоа важи за секој реален број $t$.
2) $d+2=0$, т.е. $d=-2$ и неравенството го добива видот $3t+1\geq 0$, од каде $t\geq -\frac{1}{3}$ и ова не е решение.

<u>*Втор случај*</u>. $d^2+d-2\neq 0$, т.е. $d\neq 1$, $d\neq -2$. Тогаш треба да се исполнети неравенствата $d^2+d-2=(d-1)(d+2)>0$ и

$$D=(d-1)^2-4(d^2+d-2)=-3d^2-6d+9=-3(d-1)(d+3)\leq 0.$$

Решенијата на овие две неравенства се $d\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ и $d\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$.

Конечно, наоѓаме $d\in(-\infty;-3)\cup[1;\infty)$.

**9.** Определи го реалниот параметар $k$ така што неравенството

$$ku^2+(2-k)u+3-2k\leq 0$$

е точно за една реална вредност на $u$.

**Решение.** Во зависност од параметарот $k$ можни се следниве случаи:

*Прв случа*. $k=0$ и даденото неравенство го прима видот $2u+3<0$, кое е точно за секој $u<-\frac{3}{2}$.

*Втор случај*. $k>0$. Сега ја разгледуваме дискриминантата

$$D=(2-k)^2-4k(3-2k)=9k^2-16k+4.$$

Имаме три можности:

1) $D=0$, од каде наоѓаме $k_{1,2}=\frac{1}{9}(8\pm 2\sqrt{7})$ и $u_1=u_2=\frac{k-2}{2k}$. Даденото неравенство го добива видот $k(u-\frac{k-2}{2k})^2\leq 0$ и е исполнето само за $u=\frac{k-2}{2k}$;

2) $D>0$ и решенија на даденото неравенство са бесконечно многу реални броеви од интервалот $[u_2;u_1]$, каде $u_{1,2}=\frac{k-2\pm\sqrt{D}}{2k}$;

3) $D<0$. Сега неравенството нема решение.

*Трета случа*. $k<0$.

1) $D\geq 0$. Решенијата на даденото неравенство се броевите од интервалите $(-\infty;u_2]$ и $[u_1;\infty)$;

2) $D<0$. Сега секој реален број го задоволува неравенството.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека решение на задачата е $k_{1,2}=\frac{1}{9}(8\pm 2\sqrt{7})$.

**10.** Определи ги вредностите на реалниот параметар $d$, за кои броевите од интервалот:

а) $[0;1]$ се решенија на неравенката $x^2-x+d\leq 0$;

б) $(0;1)$ се решенија на неравенката $x^2-dx+1<0$.

**Решение.** а) Ќе го користиме тврдењето: Броевите од интервалот $[p;q]$ се решенија на неравенката $f(x)=ax^2+bx+c\leq 0$, за $a>0$ ако и само ако $f(p)\leq 0$ и $f(q)\leq 0$. За $p=0$, $q=1$ и $f(x)=x^2-x+d$ имаме $f(0)=f(1)=d\leq 0$.

б) Ќе го користиме тврдењето: Броевите од интервалот $(p;q)$ се решенија на неравенката $f(x)=ax^2+bx+c<0$, за $a>0$ ако и само ако $f(p)\leq 0$ и $f(q)\leq 0$. За $p=1$, $q=2$ и $f(x)=x^2-dx+1$ имаме $f(1)=2-d\leq 0$ и $f(2)=5-2d\leq 0$, па затоа $d\geq 2$ и $d\geq\frac{5}{2}$. Следствено бараните вредности се $d\geq\frac{5}{2}$.

**11.** Определи ги целобројните вредности на параметарот $k$, за кои неравенството $2x^2+(2k+9)x+2k^2+3k<0$ важи за секој број од интервалот $[-2;-1]$.

**Решение.** Како во задача 9, точно е тврдењето: Секој број од интервалот $[p;q]$ е решение на неравенката $f(x)=ax^2+bx+c<0$, за $a>0$ ако и само ако $f(p)<0$ и $f(q)<0$. За $p=-2$, $q=-1$ имаме

$$f(-2)=8-2(2k+9)+2k^2+3k=2k^2-k-10<0 \quad \text{и}$$

$$f(-1)=2-(2k+9)+2k^2+3k=2k^2+k-7<0.$$

Соодветните решенија се $-2<k<\frac{5}{2}$ и $\frac{1}{4}(-1-\sqrt{57})<k<\frac{1}{4}(-1+\sqrt{57})$. Бидејќи $7<\sqrt{57}<8$, важи $-2,25<\frac{1}{4}(-1-\sqrt{57})<-2$ и $1,5<\frac{1}{4}(-1+\sqrt{57})<2$. Оттука го добиваме општото решение $-2<k<\frac{1}{4}(-1+\sqrt{57})$ и затоа бараните вредности на $k$ са $-1$, 0 и 1.

**12.** Определи ги целобројните врености на параметарот $n$, за кои абсолутната вредност на секое решение на неравенството $nx^2+(1-n^2)x-n\geq 0$ е помала или еднаква на 2.

**Решение.** За $n=0$ даденото неравенство го добива видот $x\geq 0$ и не е исполнет условот на задачата.

За $n\neq 0$ неравенството го добива видот $n(x-n)(x+\frac{1}{n})\geq 0$. Ако $n>0$, тогаш решение на последното неравенство е унија на два бесконечни интервали и не е исполнет условот $|x|\leq 2$. За $n<0$ даденото неравенство е еквивалентно на $(x-n)(x+\frac{1}{n})\leq 0$, и бидејќи $n<-\frac{1}{n}$ тоа има решение $n\leq x\leq -\frac{1}{n}$. Следствено $n\geq -2$ и $-\frac{1}{n}\leq 2$, од каде добиваме $-2\leq n\leq -\frac{1}{2}$, а бараните целобројни вредности се $-2$ и $-1$.

**13.** Определи ги вредностите на реалниот параметар $m$, за кои секое решение на неравенката $x^2-3x+2<0$ е решение и на неравенката

$$mx^2-(3m+1)x+3>0.$$

**Решение.** Решенијата на неравенката $x^2-3x+2<0$ се $1<x<2$.

За $m=0$ втората неравенка има вида $x<3$ и го содржи интервалот $(1;2)$ што значи дека е исполнет условот на задачата.

За $m\neq 0$ втората неравенка има вид $m(x-3)(x-\frac{1}{m})>0$. За $m<0$ таа е $(x-3)(x-\frac{1}{m})<0$, па затоа $\frac{1}{m}<0<3$. Решенијата се $\frac{1}{m}<x<3$ и го содржат интервалот $(1;2)$. За $m>0$ имаме $(x-3)(x-\frac{1}{m})>0$ и за нејзините решенија можни се следниве случаи:

1) $\frac{1}{m}=3$, т.е. $m=\frac{1}{3}$. Тогаш $(x-3)^2>0$ важи за секој $x\neq 3$, па и за $1<x<2$;
2) $\frac{1}{m}>3$, т.е. $m<\frac{1}{3}$. Тогаш решенијата се $x<3$ или $x>\frac{1}{m}$ и ги содржат броевите од интервалот $(1;2)$;

3) $\frac{1}{m} < 3$, т.е. $m > \frac{1}{3}$. Тогаш решенијата се $x < \frac{1}{m}$ или $x > 3$ и го содржат $(1;2)$ само ако $\frac{1}{m} \geq 2$, т.е. $m \leq \frac{1}{2}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека решение на задачата е $m \leq \frac{1}{2}$.

**14.** Определи ги вредностите на реалниот параметар $m$, за кои секое решение на неравенката $2x^2 + (m+7)x + 5m + 1 < 0$ е решение и на неравенката

$$x^2 + 4x + 3 < 0.$$

**Решение.** Решенија на неравенката $x^2 + 4x + 3 < 0$ се $-3 < x < -1$. Решенијата на првата неравенка зависат од дискриминантата $D$ на квадратниот трином $f(x) = 2x^2 + (m+7)x + 5m + 1$. Ако $D \leq 0$, тогаш $f(x) \geq 0$ за секој $x$, а $f(x) < 0$ има решенија ако $D = (m+7)^2 - 8(5m+1) > 0$, т.е. $m^2 - 26m + 41 > 0$, од каде $m < 13 - \sqrt{128}$ или $m > 13 + \sqrt{128}$. Тогаш решенијата на $f(x) < 0$ се $x_2 < x < x_1$, каде $x_{1,2} = \frac{-(m+7) \pm \sqrt{D}}{4}$ и следува, дека условот на задачата е исполнет кога $x_1 \leq -1$ и $x_2 \geq -3$, т.е. $\frac{-(m+7)+\sqrt{D}}{4} \leq -1$ и $\frac{-(m+7)-\sqrt{D}}{4} \geq -3$. Овие две неравенки се еквивалентни на $\sqrt{D} \leq m + 3$ и $\sqrt{D} \leq 5 - m$, соодветно. Бидејќи $\sqrt{D} > 0$, треба $m + 3 > 0$ и $5 - m > 0$, т.е. $-3 < m < 5$ и ги добиваме неравенките $D \leq (m+3)^2$ и $D \leq (5-m)^2$, односно

$$m^2 - 26m + 41 \leq m^2 + 6m + 9 \text{ и } m^2 - 26m + 41 \leq 25 - 10m + m^2,$$

кои имаат заедничко решение $m \geq 1$. Според тоа,

$$1 \leq m < 13 - 8\sqrt{2}.$$

**15.** Определи ги целобројните вредности на параметарот $k$, за кои секое решение на неравенката $x - 4k - 1 > 0$ е решение и на неравенката $x^2 - 4kx - 15k + 4 > 0$

**Решение.** Дадените неравенки се еквивалентни на неравенските $x - 2k > 2k + 1$ и $(x-2k)^2 > (k+4)(4k-1)$. Ставаме $x - 2k = y$ и добиваме $y > 2k + 1$ и $y^2 > (k+4)(4k-1)$. За $(k+4)(4k-1) < 0$, т.е. $k \leq -4$ или $k \geq \frac{1}{4}$ решенијата на втората неравенка се $y < -\sqrt{(k+4)(4k-1)}$ или $y > \sqrt{(k+4)(4k-1)}$. За да се содржат во решенијата на $y > 2k + 1$, треба $2k + 1 \geq \sqrt{(k+4)(4k-1)}$. За $k \leq -4$ тоа не е можно, бидејќи $2k + 1 < 0$. При $k \geq \frac{1}{4}$ имаме $2k + 1 > 0$ и после квадрирањето добиваме $(2k+1)^2 \geq 4k^2 + 15k - 4$ или $11k \leq 5$, т.е. $k \leq \frac{5}{11}$.

Од претходните разгледувања наоѓаме $-4 < k \leq \frac{5}{11}$ и бараните целобројни вредности за $k$ се: $-3$, $-2$, $-1$ и 0.

**16.** Определи ги вредностите на реалниот параметар $a$, за кои множеството решенија на неравенката:

а) $x^2+ax-2<0$ е интервал со должина 3;

б) $4x(a-x)-5(2a-5)>0$ е интервал со должина 2.

**Решение.** а) Дискриминантата на квадратниот трином $x^2+ax-2$ е $D=a^2+8$ и $D>0$ за секој реален $a$, па затоа равенката $x^2+ax-2=0$ има два различни корена $x_1>x_2$. Множеството решенија на дадената неравенка е интервалот $(x_2;x_1)$, чија должина според условот е $x_1-x_2=3$. Бидејќи $x_1-x_2=\sqrt{D}$, имаме $\sqrt{D}=3$ или $a^2+8=9$, од каде наоѓаме $a=\pm 1$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $(2x-5)(2x+5-2a)<0$. Множеството решенита е отворениот интервал со крајни точки $\frac{5}{2}$ и $a-\frac{5}{2}$, чија должина според условот е $|a-5|=2$.

Оттука $a-5=2$ или $a-5=-2$ и следствено $a=7$ или $a=3$.

**17.** Определи ги вредностите на реалниот параметар $b$, за кој неравенката $bx^2-3x+2<0$ има решенија и множеството решенија е интервал со должина помала од 1.

**Решение.** За $b=0$ неравенката е $-3x+2<0$, т.е. $x>\frac{2}{3}$ и условот на задачата не е исполнет. За $b\neq 0$ дискриминантата на квадратниот трином $bx^2-3x+2$ е $D=9-8b$. Ако $D\leq 0$, т.е. $b\geq\frac{9}{8}$, дадената неравенка нема решение. За $b<\frac{9}{8}$ имаме $D>0$ и равенката $bx^2-3x+2=0$ има две различни решенија $x_1>x_2$. За $b<0$ множеството решенија на неравенката е унија на два бесконечни интервала и пак не е исполнет условот на задачата. За $0<b<\frac{9}{8}$ решенијата формираат интервал $(x_2;x_1)$ и по услов $x_1-x_2<1$ или $\sqrt{D}<1$, т.е. $D=9-8b<1$, од каде следува $b>1$. Конечно, од претходните разгледувања следува дека решение на задачата е $1<b<\frac{9}{8}$.

**18.** Определи ги сите вредности на реалниот параметар $c$, за кои множеството решенија на неравенката $cz^2-(2c+1)z-1\leq 0$ содржи точно три цели броеви.

**Решение.** За $c\leq 0$ дадената неравенка има бесконечно многу целобројни решенија. Разгледуваме $g(z)=cz^2-(2c+1)z-1$ за $c>0$ и дискриминантата $D=(2c+1)^2+4c>0$. Тогаш равенката $g(z)=0$ има две различни решенија $z_1>z_2$ и множеството решенија на неравенката $g(z)\leq 0$ е интервалот $[z_2;z_1]$. Бидејќи $g(0)=-1<0$, добиваме дека нулата е решение на $g(z)<0$, а од $g(-1)=3c>0$, следува, дека $-1$ не е решение на дадената неравенка. Тоа покажува, дека множеството решенија не содржи негативни цели броеви. Но $g(1)=-c-2<0$ и $g(2)=-3<0$, од каде следува, дека целите броеви 0, 1 и 2 го задоволуваат условот на задачата. За да нема други целобројни решенија, треба да важи $z_1 < 3$ или $g(3) = 3c - 4 > 0$, т.е $c > \frac{4}{3}$ и тоа е решението на задачата.

**19.** Најди чист периодичен број, кој е поголем од $\frac{1}{4}$, а помал од $\frac{1}{3}$, така што збирот на цифрите во периодата е за12 поголем од квадратот на бројот на цифрите.

**Решение.** Ако бараниот број е $x = 0,(a_1a_2a_3....a_n)$, тогаш $0,25 < x < 0,333...$. Тоа значи дека $a_1 = 2$ или $a_1 = 3$ и притоа, важи условот

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 + 12. \qquad (1)$$

Ако $a_1 = 3$, тогаш $a_2 \in \{1,2,3\}$, па збирот на цифрите ќе биде најмногу $3+3+9(n-2)$. Според тоа, ќе имаме

$$n^2 + 12 \le 6 + 9(n-2), \text{ т.е. } n^2 - 9n + 19 \le 0.$$

Во множеството природни броеви решенија на оваа неравенка се $n_1 = 4$ и $n_2 = 5$.

$1^\circ$ За $n = 4$ имаме $n^2 + 12 = 28$, па

$$2 + a_2 + a_3 + a_4 = 28, \text{ т.е. } a_2 + a_3 + a_4 = 26 = 9 + 9 + 8.$$

Следствено, $x = 0,(2abc)$, каде што $abc$ е било која пермутација од броевите $9,9,8$, т.е. вкупно три решенија:

$$x_1 = 0,(2998), \quad x_2 = 0,(2989), \quad x_3 = 0,(2899).$$

$2^\circ$ За $n = 5$ имаме $n^2 + 12 = 37$, па

$$2 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 37, \text{ т.е. } a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 35 = 9 + 9 + 9 + 8.$$

Следствено, $x = 0,(2abcd)$, каде што $abcd$ е било која пермутација од броевите $9,9,9,8$, т.е. вкупно четири решенија:

$$x_4 = 0,(29998), \quad x_5 = 0,(29899), \quad x_6 = 0,(28999), \quad x_7 = 0,(29989).$$

**20.** Да се определат вредностите на параметарот $m$, така што системот равенки

$$\begin{cases} (m+1)x - my = 4 \\ 3x - 5y = m \end{cases},$$

да има решенија $(x, y)$ кои го задоволуваат условот $x - y < 2$.

**Решение.** Детерминантата на системот е

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & -m \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2m - 5,$$

а детерминантите на променливите се

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & m \\ m & -5 \end{vmatrix} = -20 - m^2, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} m+1 & 4 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 12.$$

За $m = -\frac{5}{2}$, $\Delta = 0$, а $\Delta_x = -(\frac{25}{4} + 20) = -\frac{105}{4} \ne 0$, па сиситемот нема решение. За $m \ne -\frac{5}{2}$, решение на системот е $x = \frac{m^2+20}{2m+5}$, $y = -\frac{m^2+m-12}{2m+5}$. Според тоа

$$x-y=\frac{m^2+20}{2m+5}+\frac{m^2+m-12}{2m+5}=\frac{2m^2+m+8}{2m+5},$$

Па условот $x-y<2$ го добива обликот $\frac{2m^2+m+8}{2m+5}<2$, односно

$$\frac{2m^2-3m-2}{2m+5}<0. \qquad (1)$$

Решението на (1) се бараните вредности за $m$. Од неравенката (1) ги добиваме системите

$$\begin{cases}2m^2-3m-2>0\\ 2m+5<0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}2m^2-3m-2<0\\ 2m+5>0\end{cases}$$

Решение на првиот систем е $(-\infty,-\frac{5}{2})$, а решение на вториот систем е $(-\frac{1}{2},2)$. Значи, решение на (1) е $(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(-\frac{1}{2},2)$.

**21.** Определи ги сите вредности на реалниот параметар $m$, за кои неравенката $mx^2+8(m-1)x+7m-16\le 0$ има најмногу шест решенија, кои се цели броеви и едното од нив е 2.

**Решение.** За $m=0$ дадената неравенка е $-8x-16\le 0$, т.е. $x\ge -2$ и има бесконечно многу целобројни решенија.

За $m\ne 0$ го разгледуваме квадратниот трином $f(x)=mx^2+8(m-1)x+7m-16$ и неговата дискриминанта $D=16(m-1)^2-m(7m-16)=9m^2-16m+16>0$. Равенката $f(x)=0$ има два различни корена $x_1>x_2$ и при $m<0$ множеството решенија на неравенката $f(x)\le 0$ е унија на бесконечните интервали $(-\infty;x_2]$ и $[x_1;\infty)$, кои содржат бесконечно многу цели броеви. За $m>0$ решенијата на $f(x)\le 0$ формираат интервал $[x_2;x_1]$, кој по услов го содржи бројот 2. Значи, $f(2)\le 0$, т.е. $4m+16(m-1)+7m-16=27m-32\le 0$, т.е. $m\le\frac{32}{27}$. Но

$$f(-1)=m-8(m-1)+7m-16=-8<0,$$

што значи, дека бројот $-1$ е решение на $f(x)<0$. Од

$$f(-2)=4m-16(m-1)+7m-16=-5m<0$$

за $m>0$ следува, дека и бројот $-2$ е решение на $f(x)<0$. Освен тоа, за $0<m\le\frac{32}{27}$ имаме

$$f(0)=7m-16\le 7\cdot\frac{32}{27}-16=-\frac{208}{27}<0 \text{ и}$$

$$f(1)=m+8(m-1)+7m-16=16m-24\le 16\cdot\frac{32}{27}-24=-\frac{136}{27}<0.$$

Значи, броевите 0 и 1 се решения на $f(x)<0$. Заклучуваме, дека за $0<m\le\frac{32}{27}$ неравенката $f(x)\le 0$ има барем пет целобројни решенија. Тоа се броевите 2, 1, 0, $-1$ и $-2$. Бидејќи

$$f(3)=9m+24(m-1)+7m-16=40(m-1) \text{ и}$$

$$f(-3)=9m-24(m-1)+7m-16=-8(m-1),$$

ги разгледуваме следните случаи:

*<u>Прв случај</u>*. $m=1$. Имаме $f(3)=f(-3)=0$ и неравенката $f(x)\le 0$ има седум целоброни решенија.

*<u>Втор случај</u>*. $0<m<1$. Имаме $f(3)<0$, $f(-3)>0$ и

$$f(-4)=16m-32(m-1)+7m-16=16-9m>0.$$

За да нема повеќе од шест целобројни решенија треба

$$f(4)=16m+32(m-1)+7m-16=55m-48>0.$$

Оттука следува, дека за $\frac{48}{55}<m<1$ дадената неравенка има шест целобројни решенија: 3, 2, 1, 0, $-1$ и $-2$ .

*<u>Трет случај</u>*. $1<m\le\frac{32}{27}$. Имаме $f(3)>0$, $f(-3)<0$, $f(-4)>0$ и $f(4)>0$. Целобројните решенија на дадената неравенка се шесте броеви: 2, 1, 0, $-1$, $-2$ и $-3$.

**22.** Нека $a$ и $b$ се релани броеви такви што $0<a<b$. Реши ја неравенката

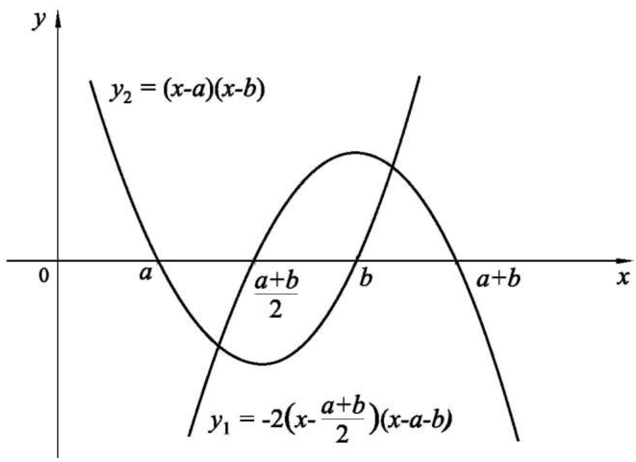
$$\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}\le 2.$$

**Решение.** Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$\frac{-2x^2+(3a+3b)x-(a+b)^2}{(x-a)(x-b)}\le 0.$$

Бидејќи нулите на броителот се $a+b$ и $\frac{a+b}{2}$, а на именителот се $a$ и $b$ и бидејќи важи

$$a<\frac{a+b}{2}<b<a+b$$




можеме да ги скицираме графиците на функциите

$$y_1=(x-a)(x-b) \text{ и } y_2=-2x^2+(3a+3b)x-(a+b)^2.$$

Сега, бидејќи изразот мора да биде помал или еднаков на нула, добиваме дека решенијата на разгледуваната равенка се интервалите на кои графиците на функциитесе на различни страни од $x-$оската, при што $x\ne a$ и $x\ne b$. Според тоа, $x\in(-\infty,a)\cup[\frac{a+b}{2},b)\cup[a+b,+\infty)$.

**23.** За кои вредности на параметарот $m$ сите решенија на равенката

$$mx^4 - mx^2 + m + 1 = 0,$$

се наоѓаат во интервалот $(-1,1)$.

**Решение.** Со смената $y = x^2$, равенката го добива обликот

$$my^2 - my + m + 1 = 0. \qquad (*)$$

Ако $x$ е решение на почетната равенка што се наоѓа меѓу реалните броеви $-1$ и $1$, тогаш $y$ е решение на (*) што се наоѓа меѓу реалните броеви $0$ и $1$. Равенката (*) од друга страна не може да има само едно решение меѓу $0$ и $1$. Во тој случај би било исполнето $f(0)\cdot f(1) < 0$, каде $f(y) = my^2 - my + m + 1$, односно $(m+1)^2 < 0$ што не е можно.

Да забележиме дека (*) има две решенија кои се меѓу $0$ и $1$ ако се исполнети следните услови

а) $D \geq 0$, т.е. $m^2 - 4m(m+1) \geq 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in [-\frac{4}{3}, \infty)$.

б) $mf(0) > 0$, т.е. $m(m+1) > 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

в) $mf(1) > 0$, т.е. $m(m+1) > 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

г) $f'(1)f'(0) < 0$, т.е. $-m^2 < 0$. Последната неравенка е исполнета $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Сите четири услови се исполнети за $m \in [-\frac{4}{3}, -1)$. За вака определените вредности на $m$ имаме $0 < y_1 < y_2 < 0$, односно

$$-1 < -\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < 0 < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2} < 1,$$

што требаше да се докаже.

**24.** Одреди ги сите парови цели броеви $x$ и $y$, кои го задоволуваат системот неравенки

$$y - |x^2 - 2x| + \tfrac{1}{2} > 0; \qquad y + |x-1| < 2.$$

**Решение.** Од условите $y > |x^2 - 2x| - \frac{1}{2}$ и $y < 2 - |x-1|$ следува

$$|x^2 - 2x| - \tfrac{1}{2} < 2 - |x-1|. \qquad (*)$$

Броевите 0, 1 и 2 го разбиваат множеството на реалните броеви на четири дисјунктни интервали $(-\infty, 0)$, $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,+\infty)$. Бараме целобројни решенија на неравенката (*) во секој од овие интервали.

$i$) Ако $x \in (-\infty, 0)$, тогаш неравенката го добива видот $x^2 - 2x - \frac{1}{2} < 2 + x - 1$, т.е. $2x^2 - 6x + 3 < 0$, чие множество решенија, интервалот $(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2})$, нема заеднички елементи со интервалот $(-\infty, 0)$. Значи, во овој интервал неравенката нема решение.

$ii$) Ако $x \in [0,1)$, тогаш неравенката го добива видот $-x^2+2x-\frac{1}{2}<2+x-1$, т.е. $2x^2-2x+3>0$, и таа е задоволена за секој реален број. Значи, $x=0$; тогаш од $y>-\frac{1}{2}$ и $y<1$ следува $y=0$. Следствено, парот $(0,0)$ ги задоволува двете неравенки од системот.

$iii$) Ако $x \in [1,2)$, тогаш неравенката го добива видот $-x^2+2x-\frac{1}{2}<2-x+1$, т.е. $2x^2-6x+7>0$, и таа задоволена за секој реален број. Значи, $x=1$; тогаш од $y>\frac{1}{2}$ и $y<2$, следува $y=1$. Следствено, парот $(1,1)$ е целобројно решение на системот неравенки.

$iv$) Ако $x \in [2,+\infty)$, тогаш неравенката го добива видот $x^2-2x-\frac{1}{2}<2-x+1$, т.е. $2x^2-2x-7<0$ и таа е задоволена за секој $x$ од интервалот $(\frac{1-\sqrt{15}}{2},\frac{1+\sqrt{15}}{2})$, т.е. $-1,4<x<2,4$. Значи, $x=2$; тогаш $y=0$, па следува дека парот $(2,0)$ е решение на системот неравенки.

Конечно, заклучуваме дека само паровите $(0,0)$, $(1,1)$ и $(2,0)$ ги исполнуваат условите на задачата.

**25.** Ако реалните броеви $x, y$ и $z$ ги исполнуваат условите $x+y+z=7$ и $xy+yz+zx=16$, тогаш секој од нив лежи во интервалот $[\frac{5}{3},3]$. Докажи!

**Решение.** Ако од равенките ја елиминираме непознатата $z$ добиваме :

$$y(7-x-y)+(y-x-y)x+xy=16$$

$$y^2+(x-7)y+x^2-7x+16=0.$$

Корените на оваа равенка се реални, ако дискриминантата е ненегативна, т.е.

$$(x-7)^2-4(x^2-7x+16)\ge 0$$

$$3x^2-14x+15\ge 0.$$

Решението на последната неравенка е интервалот $[\frac{5}{3},3]$; значи $x\in[\frac{5}{3},3]$. Бидејќи равенките се симетрични, заклучуваме дека $y\in[\frac{5}{3},3]$ и $z\in[\frac{5}{3},3]$.

**26.** Одреди го множеството на реални броеви $x$, за кои што $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}$ е цел број.

**Решение.** Нека $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=k$, $k\in\mathbb{Z}$. Со кубирање и средување добиваме $3k\cdot\sqrt[3]{1-x^2}=k^3-2$, т.е. $1-x^2=(\frac{k^3-2}{3k})^3$. Оттука,

$$x_{1/2}=\pm\sqrt{1-(\frac{k^3-2}{3k})^3}\,. \qquad (1)$$

За $x$ да биде реален број, треба

$$1-(\frac{k^3-2}{3k})^3\ge 0,\ \text{т.е.}\ \frac{k^3-3k-2}{3k}\le 0.$$

Бидејќи

$$k^3-3k-2=(k+1)^2(k-2)$$

решение на неравенката $\frac{(k+1)^2(k-2)}{3k}\leq 0$ е интервалот $(0,2]$. Бидејќи $k$ е цел број следува дека $k\in\{1,2\}$. За $k=1$ од (1) добиваме $x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{28}{27}}$,
а за $k=2$ наоѓаме дека $x_3=0$.

Следствено, бараното множество на реални броеви $x$ е множеството

$$\{-\sqrt{\tfrac{28}{27}},0,\sqrt{\tfrac{28}{27}}\}.$$

**27.** Одреди го интервалот во кој се наоѓа параметарот $a$, така што вредноста на дропката $\frac{x^2+2x-1}{x^2+4x+a}$ може да биде кој било реален број.

**Решение.** Треба да го одредиме параметарот $a$, така што $\frac{x^2+2x-1}{x^2+4x+a}=y$, $y\in\mathbb{R}$.
Имаме

$$x^2+2x-1=yx^2+4xy+ay$$

$$(y-1)x^2+2(2y-1)x+ay+1=0$$

Го одредуваме $a$, за равенката да има реални решенија за секој $y\in\mathbb{R}$. Од условот $D\geq 0$ добиваме

$$(2y-1)^2-(y-1)(ay+1)\geq 0$$

$$4y^2-4y+1+ay+1-ay^2-y\geq 0$$

$$(4-a)y^2+(a-5)y+2\geq 0.$$

Оваа неравенка е исполнета, ако $4-a>0$ и $D_1<0$. Значи, $a<4$ и

$$(a-5)^2-8(4-a)<0$$

$$a^2-10a+25-32+8a<0$$

$$a^2-2a-7<0$$

$$a_{1/2}=1\pm\sqrt{8},$$

па затоа $a\in(1-\sqrt{8},1+\sqrt{8})$.

## 5. СИСТЕМИ РАВЕНКИ

**1.** Во равенките $x^2-ax+b-4=0$ и $4x^2-4bx+4a-1=0$, определи ги реалните параметри $a$ и $b$, така што корените на едната равенка се реципрочни вредности на корените на другата равенка.

**Решение.** Нека $x_1,x_2$ се корени на равенката $x^2-ax+b-4=0$, а $x_1',x_2'$ се корени на равенката $4x^2-4bx+4a-1=0$. Според тоа $x_1'=\frac{1}{x_1}$ и $x_2'=\frac{1}{x_2}$, и од

Виетовите формули имаме $x_1+x_2=a$, $x_1x_2=b-4$ и $x_1^{'}+x_2^{'}=b$, $x_1^{'}x_2^{'}=\frac{4a-1}{4}$. Од условот на задачата имаме

$$b=x_1^{'}+x_2^{'}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{a}{b-4}$$

$$\frac{4a-1}{4}=x_1^{'}x_2^{'}=\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}=\frac{1}{b-4}.$$

Според тоа, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} b=\frac{a}{b-4} \\ \frac{4a-1}{4}=\frac{1}{b-4} \end{cases}.$$

Негови решенија се $a_1=0,b_1=0;a_2=-\frac{7}{4},b_2=\frac{7}{2};a_3=\frac{9}{4},b_3=\frac{9}{2}$. Значи, парови $(a,b)$, кои го исполнуваат условот на задачата се $(0,0),(-\frac{7}{4},\frac{7}{2}),(\frac{9}{2},-\frac{9}{4})$. Соодветните парови равенки се

$x^2-4=0, 4x^2-1=0$; $x^2-\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}=0, 4x^2-7x-15=0$ и

$x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}=0, 4x^2-18x+8=0$.

**2.** Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+xy+y=7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$$

**Решение.** *Прв начин.* Втората равенка, имајќи предвид дека $x+y=7-xy$, ја трансформираме во видот

$$(x+y)^2=13+xy,\quad (7-xy)^2=13+xy$$

$$49-14xy+x^2y^2=13+xy$$

$$(xy)^2-15xy+36=0$$

од каде што добиваме $xy=3$ или $xy=12$. Ги решаваме сега системите:

$$\begin{cases} x+y=7-3 \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=7-12 \\ xy=12 \end{cases}$$

Решенијата на првиот систем се подредените двојки $(1,3)$ и $(3,1)$, а вториот систем нема реални решенија.

*Втор начин.* Со собирање на двете равенки добиваме

$$x^2+2xy+y^2+x+y=20$$

$$(x+y)^2+(x+y)-20=0,$$

од каде што наоѓаме $x+y=4$ или $x+y=-5$. Ги решаваме системите

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=7-4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=7+5 \end{cases}$$

Решенија на првиот систем се $(1,3)$ и $(3,1)$ а вториот систем нема реални решенија.

**3.** Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x^2y-3x^2y+5xy=0 \\ 3xy+2y^2-12y=0 \end{cases}.$$

**Решение.** Ги разложуваме левите страни на равенките на множители

$$\begin{cases} xy(2x-3y+5)=0 \\ y(3x+2y-12)=0 \end{cases}$$

Постојат следниве можности:

$i$) Ако $y=0$, тогаш $x\in\mathbb{R}$

$ii$) Ако $y\neq 0$, $x=0$, тогаш втората равенка на системот го добива видот $y(2y-12)=0$, од каде што $y=6$.

$iii$) Ако $y\neq 0$, $x\neq 0$, тогаш

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$$

од каде што наоѓаме $x=2$, $y=3$.

Следствено, условот на задачата го задоволуваат сите точки од апсцисната оска и точките $(0,6)$ и $(2,3)$.

**4.** Нека $a,b,c$ се реални боеви за кои важат: $ab-a=b+119$, $bc-b=c+59$, $ca-c=a+71$. Пресметај ги сите можни вредности на $a+b+c$.

**Решение.** Од првата равенка имаме $(a-1)(b-1)=120$. Слично, втората е еквивалентна со $(b-1)(c-1)=60$ и третата со $(c-1)(a-1)=72$. Оттука, $\frac{a-1}{c-1}=2$, $a-1=2(c-1)$ и заменето во третата добиваме $2(c-1)^2=72$. Добиваме, $c_1=7$, $c_2=-5$ и оттука $a_1=13, a_2=-11$ и $b_1=11, b_2=-9$, соодветно. Затоа, можните вредности за $a+b+c$ се: $13+11+7=31$ и $-11-9-5=-25$.

**5.** Во множеството реални броеви реши го системот:

$$\begin{cases} a+b+c=63 \\ ab+bc+ca=2010. \end{cases}$$

**Решение.** Нека $a$, $b$, $c$ се реални броеви кои што го задоволуваат системот. Од идентитетот

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

и од дадените равенки добиваме

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=63^2-2\cdot 2010=3969-4020=-51<0,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува дека дадениот систем нема решенија во множеството рреални броеви.

**6.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{3},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{5},\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{7}.$$

**Решение.** Јасно $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Со сведување под најмал заеднички содржател од дадениот систем го добиваме системот

$$xy + xz = 3(x + y + z)$$
$$yz + yx = 5(x + y + z)$$
$$zx + yz = 7(x + y + z).$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и потоа ја одземеме третата равенка, добиваме $2xy = x + y + z$. На сличен начин добиваме

$$2yz = 9(x + y + z) \text{ и } 2zx = 5(x + y + z).$$

Затоа важи $x + y + z = 2xy = \frac{2}{9}yz = \frac{2}{5}zx$ и бидејќи $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ заклучуваме дека $9x = 5y = z$. Сега лесно се добива дека $x = \frac{59}{18}, y = \frac{59}{10}, z = \frac{59}{2}$.

**7.** Нека $a, b, c$ се реални броеви за кои што $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$. Да се определат $x, y, z$ така што $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ax = by = cz$.

**Решение.** Нека $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ax = by = cz = \lambda$. Јасно, $\lambda \neq 0$. Бидејќи $x = \frac{\lambda}{a}, y = \frac{\lambda}{b}, z = \frac{\lambda}{c}$, ако замениме во $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \lambda$, добиваме $\frac{1}{\frac{\lambda}{a}} + \frac{1}{\frac{\lambda}{b}} + \frac{1}{\frac{\lambda}{c}} = \lambda$, од каде наоѓаме $\lambda^2 = a + b + c$.

Според тоа, системот има решение ако и само ако $a + b + c > 0$. Според тоа $\lambda = \pm\sqrt{a + b + c}$, од каде што добиваме дека решенија на системот се

$$\left(\frac{\sqrt{a+b+c}}{a}, \frac{\sqrt{a+b+c}}{b}, \frac{\sqrt{a+b+c}}{c}\right) \text{ и } \left(-\frac{\sqrt{a+b+c}}{a}, -\frac{\sqrt{a+b+c}}{b}, -\frac{\sqrt{a+b+c}}{c}\right)$$

**8.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} 1 + x + y = xy \\ 2 + y + z = yz \\ 3 + z + x = zx \end{cases}$$

**Решение.** Од првата и третата равенка имаме $y = \frac{x+1}{x-1}$, $z = \frac{3+x}{x-1}$. Ако замениме во втората равенка, добиваме $2 + \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+3}{x-1} = \frac{(x+1)(3+x)}{(x-1)^2}$, од каде по средувањето ја добиваме равенката $3x^2 - 6x - 5 = 0$, чии решенија се $x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$. Сега $y = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$ и $z = 1 \pm \sqrt{6}$, па решенија на системот се

$$\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{3}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}, 1+\sqrt{6}\right) \text{ и } \left(\frac{3-2\sqrt{6}}{3}, \frac{2-\sqrt{6}}{2}, 1-\sqrt{6}\right).$$

**9.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 19^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\ x - y + z = 11 \end{cases}.$$

**Решение.** Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=19^2\\ xy+yz+za=0\\ x-y+z=11\end{cases}$$

од каде што добиваме

$$\begin{cases}(x+y+z)^2=19^2\\ x-y+z=11\end{cases}.$$

Последниов систем е еквивалетен со следниве два система

$$\begin{cases}x+z=15\\ y=4\end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases}x+z=-4\\ y=-15\end{cases} \qquad (2)$$

Од системот (1) и која било од равенките на дадениот систем ги добивме следниве две решенија: $(\frac{15+\sqrt{465}}{2},4,\frac{15-\sqrt{465}}{2})$ и $(\frac{15-\sqrt{465}}{2},4,\frac{15+\sqrt{465}}{2})$.

Од системот (2) и било која од дадените равенки на дадениот систем се добиваат следниве две решенија: $(6,-15,-10)$ и $(-10,-15,6)$.

**10.** Во ммножеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}x(\frac{1}{2}+y-2x^2)=0\\ y(\frac{5}{2}+x-y)=0\end{cases}.$$

**Решение.** Бидејќи производ на два броја е еднаков на нула, само ако еден од множителите е еднаков на нула од дадениот систем ги добиваме системите

$$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=0\\ \frac{5}{2}+x-y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{1}{2}+y-2x^2=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{1}{2}+y-2x^2=0\\ \frac{5}{2}+x-y=0\end{cases}$$

Од првиот систем го добиваме решението $(0,0)$.

Од вториот систем имаме $x=0$ и $y=\frac{5}{2}$, т.е. го добиваме решението $(0,\frac{5}{2})$.

Од третот систем имаме $y=0$ и $2x^2=\frac{1}{2}$, од каде добиваме $x=\pm\frac{1}{2}$, т.е. ги добиваме решенијата $(-\frac{1}{2},0)$ и $(\frac{1}{2},0)$.

Од втората равенка на четвртиот систем имаме $y=\frac{5}{2}+x$ и со замена во првата равенка ја добиваме квадратната равенка $2x^2-x-3=0$, чии што решенија се $-1$ и $\frac{3}{2}$. Решенија на системот се $(-1,\frac{3}{2})$ и $(\frac{3}{2},4)$.

Конечно, множеството решенија на почетниот систем е

$$\{(0,0),(0,\frac{5}{2}),(-\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},0),(-1,\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},4)\}.$$

**11.** Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7(x-y) \\ x^3 + y^3 = 2(x+y) \end{cases}.$$

**Решение.** Дадениот систем го запишуваме во обликот

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-7) = 0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-3) = 0 \end{cases}$$

Па затоа тој е еквивалентен со вкупноста од четири системи:

1) $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$, чие решение е $(0,0)$.

2) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$, со решенија $(\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3})$.

3) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x+y=0 \end{cases}$, со решенија $(\pm\sqrt{7},\pm\sqrt{7})$,

4) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$, со решенија $(\pm1,\pm2)$ и $(\pm2,\pm1)$.

Значи, системот има девет решенија:

$$(0,0), (\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3}), (\pm\sqrt{7},\pm\sqrt{7}), (\pm1,\pm2), (\pm2,\pm1).$$

**12.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} (1+4x^2)y = 4z^2 \\ (1+4y^2)z = 4x^2 \\ (1+4z^2)x = 4y^2. \end{cases}$$

**Решение.** Ако некој $x, y$ или $z$ е еднаков на нула, тогаш $x=y=z=0$. Во спротивно мора да важи $x>0, y>0, z>0$. Ако ги помножиме дадените равенки, тогаш $xyz(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) = 64z^2x^2y^2$ и како $xyz \neq 0$ добиваме

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) = 64xyz.$$

Понатаму, за позитивни реални броеви $x, y$ и $z$ важи $1+4x^2 \geq 4x, 1+4y^2 \geq 4y,$ $1+4z^2 \geq 4z$, добиваме

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) \geq 64xyz$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Конечно, единствени решенија на системот се $x=y=z=0$ и $x=y=z=\frac{1}{2}$.

**13.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} a^2-ab+b^2=7 \\ a^4+a^2b^2+b^4=91 \end{cases}.$$

**Решение.** Ако првата равенка ја квадрираме, потоа замениме од првата равенка, последователно добиваме

$$a^4+a^2b^2+b^4+2a^2b^2-2a^3b-2ab^3=49,$$
$$91-2ab(a^2-ab+b^2)=49,$$
$$-2ab\cdot 7=-42,\ ab=3,\ b=\tfrac{3}{a}.$$

Ако замениме во првата равенка, ја добиваме равенката

$$a^2-\tfrac{3}{a}a+\tfrac{9}{a^2}=7,\text{ т.е. } (a^2)^2-10a^2+9=0.$$

Воведуваме смена $a^2=t$, и ја добиваме равенката $t^2-10t+9=0$, која има решенија $t_1=9$ и $t_2=1$. За решението $t_1=9$ добиваме $a^2=9$, односно $a_1=3$ или $a_2=-3$, па затоа $b_1=1$ или $b_2=-1$ соодветно. За решението $t_2=1$ добиваме $a^2=1$, односно $a_3=1$ или $a_4=-1$, па затоа $b_3=3$ или $b_4=-3$, соодветно.

Конечно, не е тешко да се провери дека решенија на системот се

$$(a,b)\in\{(3,1),(-3,-1),(1,3),(-1,-3)\}.$$

**14.** Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x(y+z)=35\\ y(z+x)=32\\ z(x+y)=27\end{cases}.$$

**Решение.** Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} xy+xz=35,\\ yz+yx=32,\\ zx+zy=27.\end{cases}$$

Ги воведуваме смените $a=xy,b=xz,c=yz$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} a+b=35 & (1)\\ c+a=32 & (2)\\ b+c=27 & (3)\end{cases}$$

Ако прво ги собереме (1) и (2), па ја одземеме (3), потоа ги собереме (2) и (3), па ја одземеме (1), а на крајот ги собереме (1) и (3) и ја одзмемеме (2), после скратувањето на секоја од равенките со 2, го добиваме еквивалелнтниот систем

$$\begin{cases} a=20\\ b=15\\ c=12.\end{cases}$$

Значи, почетниот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} xy=20\\ xz=15\\ yz=12,\end{cases}$$

и притоа $x,y,z\neq 0$. Ако ги помножиме равенките на последниот систем добиваме $(xyz)^2=3600$, од каде наоѓаме $xyz=\pm 60$. Конечно, од

$$x=\frac{xyz}{yz},\ y=\frac{xyz}{xz},\ z=\frac{xyz}{xy}$$

добиваме дека решенијата на дадениот систем се

$$(x,y,z)\in\{(5,4,3),(-5,-4,-3)\}.$$

**15.** Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x(y+z)=a^2 \\ y(z+x)=b^2 \\ z(x+y)=c^2 \end{cases}.$$

**Решение.** Постапувајќи аналогно како во претходната задача добиваме

$$\begin{cases} xy=\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ yz=\frac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ zx=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}. \end{cases}$$

Ако втората равенка од последниот систем ја поделиме со првата равенка, втората равенка ја поделиме со третата добиваме:

$$\frac{z}{x}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2},\ \frac{y}{x}=\frac{b^2+c^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}.$$

Од последните две равенки добиваме

$$z=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}x \text{ и } y=\frac{b^2+c^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}x. \qquad (1)$$

Ако во третата равенка замениме $z=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}x$, добиваме

$$x^2\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}, \text{ т.е. } x=\pm\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(b^2+c^2-a^2)}}.$$

Ако за добиената вредност на $x$ замениме во равенките (1) добиваме:

$$y=\pm\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(a^2+c^2-b^2)}},\ z=\pm\sqrt{\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2(a^2+b^2-c^2)}}.$$

Тројките реални броеви формирани од добиените вредности за $x,y$ и $z$ избрани со ист знак се решенија на системот. Според тоа решенија на системот се

$$\left(\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(b^2+c^2-a^2)}},\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(a^2+c^2-b^2)}},\sqrt{\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2(a^2+b^2-c^2)}}\right) \text{ и}$$

$$\left(-\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(b^2+c^2-a^2)}},-\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(a^2+c^2-b^2)}},-\sqrt{\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2(a^2+b^2-c^2)}}\right).$$

**16.** Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=a^2 \\ y^2-(z-x)^2=b^2 \\ z^2-(x-y)^2=c^2 \end{cases}. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако за левите страни на равенките од системот го искористиме идентитетот $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, системот ќе го добие обликот:

$$\begin{cases}(x-y+z)(x+y-z)=a^2\\(y-z+x)(y+z-x)=b^2\\(z-x+y)(z+x-y)=c^2\end{cases}. \qquad (2)$$

Ќе воведеме смени $-x+y+z=u$, $x-y+z=v$, $x+y-z=w$, и системот ќе го добие обликот:

$$\begin{cases}vw=a^2\\wu=b^2\\uv=c^2\end{cases}. \qquad (3)$$

Од последниот систем имаме $u^2v^2w^2=a^2b^2c^2$, од каде добиваме $uvw=\pm abc$. Според тоа, системот (3) има две решенија:

$(i)$ $u_1=\frac{bc}{a},v_1=\frac{ac}{b},w_1=\frac{ab}{c}$ $\qquad$ $(ii)$ $u_2=-\frac{bc}{a},v_2=-\frac{ac}{b},w_2=-\frac{ab}{c}$.

За решението $(i)$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}-x+y+z=\frac{bc}{a}\\x-y+z=\frac{ac}{b}\\x+y-z=\frac{ab}{c}\end{cases},$$

и негово решение е

$$x_1=\frac{ab^2+ac^2}{2bc},\ y_1=\frac{ba^2+bc^2}{2ac},\ z_1=\frac{ca^2+cb^2}{2ab}. \qquad (4)$$

За решението $(ii)$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}-x+y+z=-\frac{bc}{a}\\x-y+z=-\frac{ac}{b}\\x+y-z=-\frac{ab}{c}\end{cases},$$

и негово решение е

$$x_2=-\frac{ab^2+ac^2}{2bc},\ y_2=-\frac{ba^2+bc^2}{2ac},\ z_2=-\frac{ca^2+cb^2}{2ab}. \qquad (5)$$

Не е тешко да се провери дека (4) и (5) се решенија на (1).

**17.** Во множеството реални броеви да се реши системот равенки

$$\begin{cases}x^2-y=z^2\\y^2-z=x^2\\z^2-x=y^2\end{cases}.$$

**Решение.** Равенките ги собираме и добиваме

$$x+y+z=0.$$

Според тоа, $z=-x-y$ и ако замениме во првата равенка на системот добиваме

$$x^2-y=x^2+2xy+y^2,$$
$$y(y+2x+1)=0.$$

Сега, можни се два случаи.

*Случај* 1. $y=0$. Тогаш $z=-x$, па од втората равенка на системот добиваме дека $x(x-1)=0$. Нејзини решенија се $x=0$ и $x=1$. Ако $x=0$, тогаш $z=0$, па решение на почетниот систем е $x=y=z=0$. Ако $x=1$, тогаш $z=-1$, па решение на системот е $x=1, y=0, z=-1$.

*Случај* 2. $y=-2x-1$. Тогаш $z=x+1$. Ако замениме во третата равенка на почетниот систем, добиваме $x(x+1)=0$. Решенија на последната равенка се $x=0$ и $x=-1$. За $x=0$, добиваме $y=-1$, $z=1$ и решение на системот е $(x,y,z)=(0,-1,1)$. За $x=-1$, добиваме $y=1$ и $z=0$, па во овој случја решение на системот е $(x,y,z)=(-1,1,0)$.

Конечно, множество на решенија на системот е

$$\{(0,0,0),(1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1)\}.$$

**18.** Во множеството реални броеви еши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z \\ x^3+y^3=z \end{cases}.$$

**Решение.** Бидејќи $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, ако замениме во третата равенка на системот, а потоа замениме од првата и втората равенка, ја добиваме равенката $z=z^3-3xyz$. Понатаму, $xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=\frac{1}{2}(z^2-z)$, па со замена во последната равенка последователно добиваме

$$z=z^3-\tfrac{3}{2}z(z^2-z)$$
$$z^3-3z^2+2z=0 \quad .$$
$$z(z-1)(z-2)=0.$$

Според тоа, $z\in\{0,1,2\}$. За секоја од добиените вредности на $z$ го решаваме системот равенки

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z. \end{cases} \qquad (1)$$

Ако $z=0$, тогаш решение на системот (1) е $x=y=0$. Ако $z=1$, тогаш решенија на системот (1) се $x=0, y=1$ и $x=1, y=0$. Ако $z=2$, тогаш решение на системот (1) е $x=y=1$.

Конечно, решенија на почетниот систем се подредените тројки

$$(x,y,z)\in\{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,2)\}.$$

**19.** Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} xyz = x+y+z \\ yzt = y+z+t \\ ztu = z+t+u \\ tux = t+u+x \end{cases}$$

**Решение.** Од првата равенка ја одземаме втората и добиваме $yz(x-t)=x-t$, односно $(yz-1)(x-t)=0$. Можни случаи се $yz-1=0$ или $x-t=0$. Ако $yz-1=0$ со замена во првата равенка добиваме $0=y+z$. Тогаш, од $yz-1=0$ и $y+z=0$ следува дека $y^2=-1$, па во овој случај системот нема реални решенија. Затоа, важи $x-t=0$, т.е. $x=t$. Ако се повтори постапката со втората и третата равенка, како и со третата и четвртата добиваме $x=t=y=z$. Тогаш, $x^3=3x$, $x(x^2-3)=0$ и оттука следува дека множеството решенија на системот е

$$\{(0,0,0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})\}.$$

**20.** Во множеството реални броеви реши го системот:

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3-2y \\ z^2+4y^2 = 8y \\ (2z-x)(x+3) = 5x+16 \end{cases}$$

за кои важи $z \geq 0$.

**Решение.** Ако ја разгледаме втората равенка од системот како квадратна во однос на $y$, нејзината дискриминанта е $D=64-16z^2$. Од $64-16z^2 \geq 0$, добиваме дека $|z| \leq 2$. Од условот $z \geq 0$ имаме $0 \leq z \leq 2$. Да ја претставиме третата равенка на системот како квадратна во однос на $x$: $x^2-2(z-4)x-6z+16=0$. За нејзината дискриминанта $D$ имаме $\frac{1}{4}D=(z-4)^2+6z-16 \geq 0$. Оттука, имајќи предвид дека $z \geq 0$, добиваме $z \in \{0\} \cup [2,\infty)$. Но $0 \leq z \leq 2$, па $z=0$ и $z=2$. Решенијата се $(-4,2,0)$ и $(-2,1,2)$.

**21.** Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x+\sqrt{y} = 1 \\ y+\sqrt{z} = 1. \\ z+\sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

**Решение.** Од условот на задачата следува $x,y,z \geq 0$. Нека $x \leq y$. Тогаш $0 \geq x-y=\sqrt{z}-\sqrt{y}$, односно $z \leq y$. Оттука, $y-z=\sqrt{x}-\sqrt{z} \geq 0$, односно $x \geq z$. Од $x-z=\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq 0$ следува дека $x \leq z$. Според тоа, $x=y=z$. Од $x+\sqrt{x}=1$ добиваме дека $\sqrt{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи $\sqrt{x} \geq 0$, $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, односно

$$x = y = z = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ако $x > y$, тогаш со аналогни размислувања како погоре се добива противречност.

Конечно, единствено решение на системот е $x = y = z = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

**22.** Определи ги сите парови реални броеви $(u,v)$ за кои

$$(\sqrt{u}+1)(\sqrt{v}+1) = 4\sqrt[4]{u}\sqrt[4]{v}.$$

**Решение.** Јасно е дека $u,v \geq 0$. Ќе воведеме смена $u = x^8$, $v = y^8$. Со воведената смена, равенството последователно го добива обликот

$$(x^4+1)(y^4+1) = 4x^2y^2,$$

$$x^4y^4 + x^4 + y^4 + 1 = 4x^2y^2,$$

$$(x^2y^2)^2 - 2x^2y^2 + 1 + x^4 - 2x^2y^2 + x^4 = 0,$$

$$(x^2y^2-1)^2 + (x^2-y^2)^2 = 0.$$

Збир на два два квадрати е нула, ако и само ако секој собирок е еднаков на нула. Според тоа,

$$x^2y^2 - 1 = 0 \text{ и } x^2 - y^2 = 0.$$

Од последните две равенки добиваме $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$. Но тогаш $u = (\pm 1)^8 = 1$, $v = (\pm 1)^8 = 1$. Значи, единствено решение е парот броеви $(u,v) = (1,1)$.

**23.** Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} xy + \frac{3x-y}{x^2+y^2}y = 3y \\ xy - x\frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Оттука добиваме $2xy + \frac{3xy-y^2-x^2-3xy}{x^2+y^2} = 3y$, односно $2xy = 1+3y$. Бидејќи $y \neq 0$ од последната равенка добиваме $x = \frac{1+3y}{2y}$. Заменуваме во втората равенка на системот и ја добиваме равенката $y - \frac{\frac{1+3y}{2y}+3y}{(\frac{1+3y}{2y})^2+y^2} = 0$, т.е. равенката $4y^4 - 3y^2 - 1 = 0$.

Единственои реални решенија на последната равенка се $y = \pm 1$, па затоа единствени реални решенија на почетниот систем се паровите: $(2,1)$ и $(1,-1)$.

**24.** Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases}(x+y)^2=z\\(z+x)^2=y\\(y+z)^2=x\end{cases}.$$

**Решение.** Јасно, $z,y,x\geq 0$. Ако од првата ја одземеме втората равенка, добиваме после средувањето го добиваме системот

$$\begin{cases}(y-z)(2x+y+z)=z-y\\(z+x)^2=y\\(y+z)^2=x\end{cases}$$

од каде го добиваме системите

$$\begin{cases}y=z\\(z+x)^2=y\\(y+z)^2=x\end{cases} \text{ и } \begin{cases}2x+y+z=-1\\(z+x)^2=y\\(y+z)^2=x\end{cases}.$$

Бидејќи $z,y,x\geq 0$, вториот систем нема решение. Ако од втората равенка на првиот систем ја одземеме третата, тогаш аналогно како претходно ги добиваме системите

$$\begin{cases}y=z\\z=x\\(y+z)^2=x\end{cases} \text{ и } \begin{cases}y=z\\x+y+2z=-1\\(y+z)^2=x\end{cases}..$$

Јасно, вториот од последните два системи нема решение, заради равенствата $x=y=z$, од првиот систем добиваме $(x+x)^2=x$, т.е. $4x^2=x$. Решенија на последната равенка се $x=0$ и $x=\frac{1}{4}$.

Конечно, решенијата $(x,y,z)$ на почетниот систем се $(0,0,0)$ и $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

**25.** Во множеството $\mathbb{R}$ реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\end{cases}.$$

**Решение.** Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}\frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)=12\\\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{3}\end{cases},$$

од каде што добиваме $x^2-xy+y^2=36$, т.е. $(x+y)^2-3xy=36$. Нека $z=x+y$. Тогаш, $xy=3z$ односно последната равенка е еквивалентна со равенката $z^2-9z-36=0$. Нејзини решенија се $z_1=12$ и $z_2=-3$. Значи ги добиваме системите:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ xy=36 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-9 \end{cases}$$

шт значи дека $x$ и $y$ се решенија на квадратните равенки $t^2-12t+36=0$ и $t^2+3t-9=0$, соодветно. Значи множеството решенија на дадениот систем е

$$M=\{(6,6),)\tfrac{-3+3\sqrt{3}}{2},\tfrac{-3-3\sqrt{3}}{2}),(\tfrac{-3-3\sqrt{3}}{2},\tfrac{-3+3\sqrt{3}}{2})\}.$$

**26.** Реши го во множеството на реалните броеви, системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y^2+z=2 \\ x+y^2+z^2=2 \\ x^2+y+z^2=2 \end{cases}$$

**Решение.** Ако од првата ја одземеме втората равенка добиваме

$$x^2-x-z^2+z=0, \text{ т.е. } (x-z)(x+z-1)=0.$$

Оттука $x=z$ или $x=1-z$. Слично, ако од првата ја одземиме третата равенка добиваме

$$y^2-y-z^2+z=0, \text{ т.е. } (y-z)(y+z-1)=0.$$

Оттука $y=z$ или $y=1-z$. Можни се четири случаи:

$(i)$ $x=z$, $y=z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2+z-1=0$, чии решенија се $z_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$. Решенијата на системот се $(\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4},\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4},\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4})$.

$(ii)$ $x=z$, $y=1-z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2-z-1=0$, чии решенија се $z_1=1$ и $z_2=-\frac{1}{2}$. . Решенија на системот во овој случај се $(1,0,1)$ и $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

$(iii)$ $x=1-z$, $y=z$. Заменувајќи во првата равенка на системот добиваме $2z^2-z-1=0$, чии решенија се $z_1=1$ и $z_2=-\frac{1}{2}$. Решенијата на системот во овој случај се $(0,1,1)$ и $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

$(iv)$ $x=1-z$, $y=1-z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2-3z=0$, чии решенија се $z_1=0$ и $z_2=\frac{3}{2}$ . Решенијата на системот во овој случај се $(1,1,0)$ и $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

**27.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2-2ab+b^2=a \\ 4a^2-5ab+2b^2=b. \end{cases}$$

**Решение.** Ако првата равенка ја помножиме со $b$, а втората со $a$, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2b-2ab^2+b^3=ab \\ 4a^3-5a^2b+2b^2a=ab \end{cases}$$

Ако во последниот систем ги одземеме равенките добиваме

$$b^3-4b^2a+7a^2b-4a^3=0.$$

Ако $a=0$, тогаш $b=0$, па затоа $(a,b)=(0,0)$ е едно решение на системот.

За $a\neq 0$ ја воведуваме замената $z=\frac{b}{a}$ и ја добиваме равенката

$$z^3-4z^2+7z-4=0$$

која е еквивалентна со равенката

$$(z-1)(z^2-3z+4)=0.$$

За $z=1$ важи $a=b$, а потоа со замена во почетниот систем лесно се добива дека $(a,b)=(1,1)$. Понатаму, дискриминантата на равенката $z^2-3z+4=0$ е еднаква на $-7$, па затоа таа нема реални решенија, што значи дека почетниот систем нема други реални решенија.

**28.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}.$$

**Решение.** Очигледно $x\neq 0$, бидејќи во спротивно од втората рабека добиваме $y^2=-3$ што во множеството реални броеви не е можно. Воведуваме смена $y=tx$ со која системот го добива обликот

$$\begin{cases} x^2(2-3t+t^2)=3 \\ x^2(1+2t-2t^2)=6 \end{cases} \qquad (1)$$

Ако првата равенка на системот ја поделиме со втората, ја добиваме равенката $\frac{2-3t+t^2}{1+2t-2t^2}=\frac{1}{2}$, која е определена за $t\neq\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Последната равенка ја запишуваме во обликот $4t^2-8t+3=0$ и нејзини решенија се $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=\frac{3}{2}$.

*Случај* 1. $t_1=\frac{1}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2=4$, па според тоа $x_1=2$ и $x_2=-2$, па затоа $y_1=1$ и $y_2=-1$, соодветно. Лесно се проверува дека паровите $(x_1,y_1)=(2,1)$ и $(x_2,y_2)=(-2,-1)$ се решенија на системот.

*Случај* 2. $t_2=\frac{3}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2=-12$, па затоа, во овој случај системот нема реални решение.

Конечно, единствени решенија на системот се

$$(x_1,y_1)=(2,1) \text{ и } (x_2,y_2)=(-2,-1).$$

**29.** Определи ги сите реални решенија на системот равенки

$$\begin{cases} (\frac{x}{y})^3+(\frac{x}{y})^2=12 \\ (xy)^2+xy=6 \end{cases}.$$

**Решение.** Воведеме смена $\frac{x}{y}=u$ и $xy=v$ и го добиваме систем

$$\begin{cases} u^3+u^2=12 \\ v^2+v=6 \end{cases}.$$

Првата равенка е еквивалентна на равенката $(u-2)(u^2+3u+6)=0$ и таа има единствено реално решение $u=2$, а реални решенија на втората равенка од последниот систем се $v_1=2$ и $v_2=-3$.

За $u=2$, $v=2$ добиваме систем

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=2 \\ xy=2 \end{cases}$$

и негови решенија се $x_1=2, y_1=1$ и $x_2=-2, y_2=-1$. За решенијата $u=2$, $v=-3$ добиваме систем

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=2 \\ xy=-3 \end{cases}$$

кој нема релани решенија, бидејќи количникот и производот на два реални броја не може да се со различни знаци.

Според тоа, почетниот систем има две решенија

$$x_1=2, y_1=1 \text{ и } x_2=-2, y_2=-1.$$

**30.** Определи ги решенијата на системот

$$\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=a \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{a}. \end{cases}$$

**Решение.** Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, добиваме

$$-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a-\frac{1}{a}.$$

Воведуваме смена $\dfrac{y}{x}=t$, при што ја добиваме равенката $t-\frac{1}{t}=a-\frac{1}{a}$. Решенија на квадратната равенка $t^2-t(a-\frac{1}{a})-1=0$ се

$$t_{1/2}=\frac{a-\frac{1}{a}\pm\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}}{2}=\frac{a-\frac{1}{a}\pm(a+\frac{1}{a})}{2},$$

т.е. $t_1=a$ и $t_2=-\frac{1}{a}$.

За $t_1=a$, добиваме $(ax)x-\frac{x}{ax}=a$. Оваа квадратна равенка има решенија $x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}$. Непосредно се проверува дека подредените парови

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}, a\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}\right) \text{ и } \left(-\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}, -a\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}\right)$$

се решенија на системот.

За $t_2=-\frac{1}{a}$, ја добиваме квадратната равенка $-\frac{1}{a}x^2=0$, која има решение $x=0$. Значи, во овој случај системот нема решение.

**31.** Најди ги сите вредности на параметарот $m$, за кои системот равенки

$$\begin{cases} 4y=4m+3-x^2+2x \\ 2x=x^2+y^2 \end{cases}$$

има две реални корени.

**Решение.** Ако ги собереме равенките добиваме

$$y^2-4y+4m+3=0$$

$$y_{1/2}=2\pm\sqrt{1-4m}\,,\quad m\le\tfrac{1}{4}\,.$$

Втората равенка ја запишуваме во видот $(x-1)^2+y^2=1$, од каде што следува $-1\le y\le 1$, па затоа:

$$-1\le 2\pm\sqrt{1-4m}\le 1$$

$$-3\le\pm\sqrt{1-4m}\le -1$$

Бидејќи $\sqrt{1-4m}\ge 0$, следува

$$-3\le-\sqrt{1-4m}\le -1,\quad \text{т.е.}$$

$$1\le\sqrt{1-4m}\le 3$$

$$1\le 1-4m\le 9$$

од каде добиваме $m\in(-2,0)$.

**32.** Определи ги сите реални вредности на параметарот $a$ за кои системот равенки

$$\begin{cases} x-y=a(1+xy) \\ x+y+xy+2=0 \end{cases}$$

има единствено решение.

**Решение.** Системот ќе го запишеме во облик

$$\begin{cases} x-y=a(1+xy) \\ x+y=-xy-2 \end{cases}$$

Ако ги квадрираме двете равенки, а потоа од втората ја одземеме првата равенка ја добиваме равенката

$$(x+y)^2-(x-y)^2=(2+xy)^2-a^2(1+xy)^2$$

која е еквивалентна на равенката

$$(1-a^2)(xy)^2-2a^2(xy)+4-a^2=0\,.$$

Воведуваме смена $xy=t$ и ја добиваме квадратната равенка

$$(1-a^2)t^2-2a^2t+4-a^2=0\,. \tag{1}$$

Системот има едно единствено решение, ако и само ако квадратната равенка (1) има единствено решение. Квадратната равенка (1) има единствено решение ако и само ако

а) $1-a^2=0$, т.е. $a=1$ или $a=-1$.

б) $D=a^4-(1-a^2)(4-a^2)=0$, т.е. $5a^2=4$

Значи, системот има единствено решение ако и само ако $a=-1, a=1, a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

**33.** Определи ги сите комплексни броеви $(w,z),\ w\neq z$ такви што

$$w^5+w=z^5+z$$
$$w^5+w^2=z^5+z^2.$$

**Решение.** Со одземање на дадените равенки добиваме $w-w^2=z-z^2$, односно $(w-z)(w+z-1)=0$. Понатаму, бидејќи $w\neq z$ добиваме $w+z=1$. Последното равенство го квадрираме и добиваме $w^2+z^2=1-2wz$, од што со повторно квадрирање добиваме $w^4+z^4=1-4wz+2(wz)^2$.

Првата равенка на системот последователно е еквивалентна со равенките

$$\frac{w^5-z^5}{w-z}=-1$$
$$\frac{(w-z)(w^4+w^3z+w^2z^2+wz^3+z^4)}{w-z}=-1$$
$$w^4+w^3z+w^2z^2+wz^3+z^4+1=0$$
$$w^4+z^4+wz(w^2+wz+z^2)+1=0.$$

Ако во последната равенка замениме за $w^4+z^4$ и $w^2+z^2$, после средувањето добиваме

$$(wz)^2-3wz+2=0,$$

од каде наоѓаме $wz=1$ или $wz=2$. Ако во $w+z=1$ замениме $z=\frac{1}{w}$ и $z=\frac{2}{w}$ ги добиваме равенките $w^2-w+1=0$ и $w^2-w+2=0$, соодветно. Конечно, од последните равенки ги добиваме решенијата

$$(w,z)=\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2},\frac{1\mp i\sqrt{7}}{2}\right).$$

**34.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=24.$$

**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на системот

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=24. \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $x^2+y^2=1-2xy$, а од втората равенка следува $x^2+y^2=24x^2y^2$. Затоа $24(xy)^2+2xy-1=0$, односно $xy=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 24}}{2\cdot 24}=\frac{-1\pm 5}{24}$. Ако $xy=\frac{-1-5}{24}=-\frac{1}{4}$, од $x+y=1$ следува дека $x$ и $y$ се решенија на равенката $x^2-x-\frac{1}{4}=0$, па затоа $x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Аналогно, ако $xy=\frac{-1+5}{24}=\frac{1}{6}$, од

$x+y=1$ следува дека $x$ и $y$ се решенија на равенката $x^2-x+\frac{1}{6}=0$, па затоа $x_3=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $x_4=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Непосредно се проверува дека најдените решенија се решенија на почетната равенка.

**35.** За кои вредности на реалниот параметар $a$, системот

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3a-1} \\ x^2+y^2+z^2=a \\ xy=z^2 \end{cases}$$

има различни реални решенија?

**Решение.** За системот да има решение треба $3a-1\geq 0$ и $a\geq 0$, односно $a\geq\frac{1}{3}$. Втората равенка од системот е еквивалентна со равенката $(x+y)^2-2xy+z^2=a$. Тогаш, со смена на $x+y$ и $xy$ од првата и третата равенка ја добиваме равенката $(\sqrt{3a-1}-z)^2-2z^2+z^2=a$, која е еквивалентна со равенката $2\sqrt{3a-1}\,z=2a-1$. Последната равенка има решение во реалните броеви ако $a\neq\frac{1}{3}$, па затоа $a>\frac{1}{3}$. Тогаш $z=\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$. Со замена на $z=\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$ во првата и втората равенка на системот, го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y=\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}} \\ xy=(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}})^2 \end{cases}.$$

Тогаш $x$ и $y$ се решенија на квадратната равенка

$$t^2-\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}}t+(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}})^2=0.$$

Бидејќи системот треба да има различни реални решенија, треба

$$(\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}})^2-4(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}})^2>0.$$

Последната неравенка е еквивалентна со неравенката $\frac{8a-3}{4(3a-1)}>0$, а бидејќи именителот е позитивен следува дека $8a-3>0$. Оттука следува дека $a>\frac{3}{8}$.

Конечно, за $a>\frac{3}{8}$ системот има различни реални решенија.

**36.** За кои вредности на реалниот параметар $a$, системот равенки

$$\begin{cases} (x-y)^2=6a-14 \\ x^2+y^2=3a+6 \end{cases}$$

има точно две решенија?

**Решение.** Ја запишуваме првата равенка во видот $x^2+y^2-2xy=6a-14$, па имајќи ја предвид втората равенка, добиваме:

$$3a-6-3xy=6a-14$$
$$2xy=20-3a$$
$$y=\frac{20-3a}{2x}.$$

Заменувајќи го овој израз за $y$ во втората равенка, по средувањето, добиваме

$$4x^4-4(3a+6)x^2+(20-3a)^2=0.$$

Добиената биквадратна равенка ќе има точно две решенија, ако нејзината дискриминанта е еднаква на нула, т.е.

$$4(3a+6)^2-4(20-3a)^2=0$$
$$(3a+6-20)(3a+6+20-3a)=0$$
$$(6a-14)\cdot 26=0$$

од каде што $a=\frac{7}{3}$.

Следствено, за $a=\frac{7}{3}$ дадениот систем има точно две решенија и тоа се паровите $(\frac{\sqrt{26}}{2},\frac{\sqrt{26}}{2})$ и $(-\frac{\sqrt{26}}{2},-\frac{\sqrt{26}}{2})$.

**37.** Да се најдат сите решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x_1|x_1|-(x_1-a)|x_1-a|=x_2|x_2| \\ x_2|x_2|-(x_2-a)|x_2-a|=x_3|x_3| \\ x_3|x_3|-(x_3-a)|x_3-a|=x_1|x_1| \end{cases},$$

каде што $a$ е реален параметар.

**Решение.** Да забележиме дека ако $(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ)$ е решение на системот со параметар $a$, тогаш $(-x_1^\circ,-x_2^\circ,-x_3^\circ)$ ќе биде решение на системот со параметар $-a$. Затоа, доволно е да се разгледа само случајот кога $a\ge 0$.

Нека $(x_1,x_2,x_3)$ е решение за кое $x_1\le a, x_2\le a, x_3\le a$; тогаш $|x_i-a|=-(x_i-a)$ и ако ги собереме равенките добиваме

$$(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+(x_3-a)^2=0,$$

од каде следува дека $x_1=x_2=x_3=a$ е единствено решение.

Нека $(x_1,x_2,x_3)$ е решение за кое $x_i\ge a$ за некој $i$. Тогаш од $i$-тата равенка добиваме

$$x_{i+1}|x_{i+1}|=x_i^2-(x_i-a)^2=a(2x_i-a)\ge a^2.$$

Значи, $x_i\ge a$. За $i=3$ да замениме $i+1$ со 1; тогаш добиваме $x_1\ge a, x_2\ge a, x_3\ge a$, па собирајќи ги равенките добиваме $x_1=x_2=x_3=a$, па според тоа, единствено решение е $x_1=x_2=x_3=a$.

**38.** Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$$

**Решение.**Ќе воведеме смени $\sqrt[3]{x}=u$ и $\sqrt[3]{y}=v$ од каде што добиваме $x=u^3$ и $y=v^3$. Со тоа добиваме

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^2-uv+v^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases}$$

Значи, $u$ и $v$ се корени на квадратната равенка $t^2-3t+2=0$ чии решенија се $t_1=1$, $t_2=2$. Значи, $u_1=1, v_1=2$ или $u_2=2, v_2=1$.

Сега, решенија на системот се $x_1=1$, $y_1=8$ и $x_2=8$, $y_1=1$.

**39.** Во множеството реални броеви реши ја равенката $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{1-x}=1$.

**Решение.** Воведувајќи смени $y=\sqrt[3]{2-x}$ и $z=\sqrt{x-1}$, го добиваме системот равенки $y^3+x=2$, $z^2+1=x$, $y+z=1$. Од првата и втората равенка, со елиминација на $x$, добиваме $y^3+z^2=1$. Заменувајќи $z=1-y$, добиваме

$$y^3+y^2-2y+1=1, \text{ т.е } y(y^2+y-2)=0 .$$

Решенија на $y^3+y^2-2y=0$ се

$$y_1=0 \text{ и } y_{2/3}=\tfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}, \text{ т.е. } y_1=0,\ y_2=1,\ y_3=-2 .$$

Од $x=2-y^3$, се добиваат бараните решенија $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=10$.

**40.** Во множеството реални броеви реши ја равенката $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

**Решение.** Воведуваме нови непознати $\sqrt[3]{2-x}=y$, $\sqrt{x-1}=z$, и го добиваме системот равенки $2-x=y^3$, $x-1=z^2$, $y+z=1$. Бидејќи $y^3+z^2=2-x+x-1=1$, системот равенки се сведува на следниот $y^3+z^2=1$, $z=1-y$, од каде што добиваме $y^3+(1-y)^2=1$, т.е. $y^3+y^2-2y=0$, односно $y(y^2+y-2)=0$. Оттука: $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=-2$, па од $x=2-y^3$ добиваме конечно: $x_1=2, x_2=1, x_3=10$.

Следствено, решенија на равенката се броевите 1, 2 и 10.

**41.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3} .$$

**Решение.** Дефиниционата област на равенката е

$$D=\{x \mid x^2+x\geq 0, x\neq 0, x\geq -3\}=[-3,-1]\cup(0,+\infty) .$$

Со кадрирање на равенката добиваме:

$$x^2+x+1+\tfrac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)(1+\tfrac{1}{x^2})}=x+3 ,$$

и оттука имаме

$$x^2-2+\tfrac{1}{x^2}+2\sqrt{(x+1)(x+\tfrac{1}{x})}=0 ,$$

односно

$$(x-\tfrac{1}{x})^2+2\sqrt{(x+1)(x+\tfrac{1}{x})}=0\,.$$

Последната равенка е еквивалентна со севкупноста

$$\begin{cases}(x-\frac{1}{x})^2=0\\ \sqrt{(x+1)(x+\frac{1}{x})}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ (x+1)(x+\frac{1}{x})=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ 2x(x+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ x_1=0, x_2=-1\end{cases}.$$

Бидејќи $x=-1\in D$ и е решение на равенката $x-\frac{1}{x}=0$, заклучуваме дека $x=-1$ е единствено решение на почетната равенка.

**42.** Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{6z}=1:(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6})\\ x+y^2+z^3=14.\end{cases}$$

**Решение.** Ја трасформираме првата равенка:

$$(\tfrac{1}{2x}+\tfrac{1}{3y}+\tfrac{1}{6z})(\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{3}+\tfrac{z}{6})=1 \quad /\cdot 6$$

$$(\tfrac{3}{x}+\tfrac{2}{y}+\tfrac{1}{z})(\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{3}+\tfrac{z}{6})=6$$

$$\tfrac{3}{2}+\tfrac{y}{x}+\tfrac{z}{2x}+\tfrac{x}{y}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{z}{3y}+\tfrac{x}{2z}+\tfrac{y}{3z}+\tfrac{1}{6}=6$$

$$\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{x}+\tfrac{1}{2}(\tfrac{x}{z}+\tfrac{z}{x})+\tfrac{1}{3}(\tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{y})=\tfrac{22}{6}$$

$$6(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{x})+3(\tfrac{x}{z}+\tfrac{z}{x})+2(\tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{y})=22\,.$$

Бидејќи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,$ за $a,b>0,$ следува дека левата страна на последната равенка е: $6\cdot 2+3\cdot 2+2\cdot 2\geq 12+6+4=22,$ од каде заклучуваме дека равенката е можна само ако $x=y=z.$ Тогаш од втората равенка добиваме:

$$x^3+x^2+x-14=0.$$

Со проверка утврдуваме дека еден корен на оваа равенка е бројот 2, тогаш:

$$x^3+x^2+x-14=(x-2)(x^2+3x+7).$$

Бидејќи триномот $x^2+3x+7=0$ нема реални нули, заклучуваме дека решение на појдовниот систем е подредената тројка $(2,2,2)$

**43.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}x^3=y^2\\ x+y+\sqrt[5]{xy}=819\end{cases}$$

**Решение.** Очигледно, $x>0$ и $y>0$. Нека $x=z^2$, $(z>0)$, тогаш $y=z^3$, па од втората равенка добиваме $z^2+z^3+z-819=0$. Но, $819=9^3+9^2+9$, па затоа :

$$z^3-9^3+z^2-9^2+z-9=0$$
$$(z-9)(z^2+9z+81)+(z-9)(z+9)+(z-9)=0$$
$$(z-9)(z^2+10z+91)=0$$

Оттука $z=9$ и како $z^2+10z+91>0$, добиваме $x=81$, $y=729$.

## 6. ПРИМЕНА НА КВАДРАТНИТЕ РАВЕНКИ , НЕРАВЕНКИ И КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

**1.** При множење на два позитивни броеви од кои едниот е за 9 поголем од другиот, ученикот направил грешка ставајќи на местото на десетките број, за три помал од точниот. При делењето на тој број со помалиот множител ученикот добил количник 42 и остаток 4. Кои броеви ги множел ученикот?

**Решение.** Нека помалиот множител е $x$, а бројот што го добил ученикот е $y$. Тогаш од условот на задачата следува системот

$$\begin{cases} x(x+9)=y+30 \\ y=42x+4 \end{cases}$$

Решавајќи го системот по $x$ се добива $x_1=34$ и $x_2=-1$. Значи, броевите се 34 и 43.

**2.** Најди ги сите природни броеви $x$, за кои производот на нивните цифри е еднаков на

$$x^2-12x-10.$$

**Решение.** Производот на цифрите на секој природен број е ненегативен број, а изразот $x^2-12x-10$ е позитивен за $x\geq 13$ (решение на неравенката $x^2-12x-10\geq 0$ е $(-\infty,6-\sqrt{46}]\cup[6+\sqrt{46},+\infty)$; притоа $6+\sqrt{46}\approx 12,78$). Исто така, најголемиот производ на цифрите на двоцифрен број е 81, а триномот $x^2-12x-10$ е поголем од 81 за $x>18$. Значи, ако постојат природни броеви чиј производ е еднаков на $x^2-12x-10$, тие припаѓаат на втората десетка, т.е. се од видот: $\overline{1x}=10+x$, $3\leq x\leq 8$. Тогаш:

$$1\cdot x=(10+x)^2-12(10+x)-10$$
$$x=100+20x+x^2-120-12x-10$$
$$x^2-7x-30=0.$$

Оттука: $x_1=-10$, $x_2=3$; задоволува само вториот корен, следствено, бараниот број е 13.

**3.** Во тетратките на Петар и Киро се запишани по два броја: на почетокот 1 и 2 кај Петар, и 3 и 4 кај Киро. Во секоја минута Петар формира квадратен трином

$f(x)$ чии корени се броевите запишани во неговата тетратка, а Киро квадратен трином $g(x)$ чии корени се запишани во неговата тетратка. Ако равенката $f(x)=g(x)$ има два различни реални корени, тогаш едно од момчињата го заменува својот пар броеви со тие корени (во спротивно ништо не се случува). Ако во некој момент се појави бројот 5 во тетратката на Петар, кој е другиот број?

**Решение.** Во секоја тетратка ќе го допишеме квадратниот трином чии корени се соодветните броеви. Нека во некој момент во тетратките се запишани триномите $p(x)$ и $q(x)$. Тогаш равенката која се решава е од видот $\alpha p(x)=\beta q(x)$, каде $\alpha$ и $\beta$ се ненулти реални корени. Значи, добиените броеви се решенија на равенката $\alpha p(x)-\beta q(x)=0$. Ако некое од момчињата ги замени броевите, тогаш можеме да сметаме дека заедно со нив го запишал полиномот $\alpha p(x)-\beta q(x)$.

Нека $p_0(x)=(x-1)(x-2)$ и $q_0(x)=(x-3)(x-4)$. Од претходно изнесеното следува дека во секој чекор во секоја од тетртаките е запишан трином од видот $\alpha p_0(x)+\beta q_0(x)$.

Според тоа, ако бројот 5 се појави во некоја од тетратките, тогаш во неа е запишан и триномот $a(x-5)(x-x_2)=\alpha(x-1)(x-2)+\beta(x-3)(x-4)$. За $x=5$ добиваме $12\alpha+2\beta=0$, од каде наоѓаме

$$\alpha(x-1)(x-2)+\beta(x-3)(x-4)=\alpha(-5x^2+39x-70)=-\alpha(x-5)(5x-14).$$

Според тоа, вториот број е $x_2=\frac{14}{5}$.

**4.** Изразот $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ разложи го на два рационални множители чиј збир е едаков на $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Колку такви разложувања постојат?

**Решение.** Изразот $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ можеме да го запишеме во облик

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{(a-b)(a+b)}{ab}=\frac{a-b}{b}\frac{a+b}{b}=(\frac{a}{b}-1)(\frac{b}{a}+1).$$

Изразите $\frac{a}{b}-1$ и $\frac{b}{a}+1$ се рационални и нивниот збир е еднаков на $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Ќе докажеме дека постои само една вакво разложување. Нека претпоставиме дека $u$ и $v$ се рационални изрази за кои што важи

$$\begin{cases} u+v=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \\ uv=\frac{a}{b}-\frac{b}{a} \end{cases}.$$

Тогаш од Виетовите формули следува дека $u$ и $v$ се корени на квадратната равенка

$$x^2-(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})x+\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=0.$$

Дискриминантата $D$ на оваа квадратна равенка е

$$D=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^2-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{a^2}{b^2}-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})=\frac{a^2}{b^2}-2+\frac{a^2}{b^2}-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})+4$$
$$=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})^2-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})+4=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2)^2.$$

Значи, $D$ е точен квадрат, па решенијата на квадратната равенка се рационални

$$x_1 = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2)}{2} = \frac{a}{b}-1, \quad x_2 = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2)}{2} = \frac{b}{a}+1.$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека бараното разложување е единствено.

**5.** Две цевки полнат еден базен. Втората цевка, сама, ќе го наполни базенот за 5 часа подолго отколку првата цевка. Ако се пуштат истовремено двете цевки базенот ќе се наполни за 6 часа. Пресметај за кое време втората цевка може сама да го наполни базенот.

**Решение.** Нека првата цевка сама го полни базенот за $t$ часа. Тогаш за 6 часа ќе наполни $\frac{6}{t}$ делови од базенот. Според условот на задачата втората цевка го полни базенот за $t+5$ часа. За еден час полни $\frac{1}{t+5}$ делови од базенот, а за 6 часа $\frac{6}{t+5}$ делови од базенот. Бидејќи за 6 часа со истовремена работа на двете цевки базенот ќе се наполни, добиваме $\frac{6}{t}+\frac{6}{t+5}=1$, од каде наоѓаме $t^2-7t-30=0$, за $t \neq 0; t \neq -5$. Реенија на последната равенка се $t_1=10; t_2=-3$. Но, времето не може да биде негативно, па затоа единствено решение е $t=10$. Значи, времето потребно втората цевка да го наполни базенот е $t+5=15$ часа.

**6.** Двајца работници, работејќи истовремено, извршуваат одредена работа за еден ден. Кога би работеле еден по друг, секој по толкав дел од денот колку што изнесува делот од работата што ја извршил за еден ден, тогаш би бил завршен $k$ - ти дел од работата. Колку време му е потребно на секој работник сам да ја заврши работата?

**Решение.** Нека првиот работник ја завршува работата за време од $x$ единици; тогаш вториот работник ќе ја заврши работата за време $\frac{x}{x-1}$. Според условот на задачата, ќе имаме $\frac{1}{x^2}+\frac{(x-1)^2}{x^2}=\frac{1}{k}$, од каде што добиваме

$$(k-1)x^2-2kx+2k=0. \tag{1}$$

Решенијата на ова равенка се $x_{1/2}=\frac{k\pm\sqrt{2k-k^2}}{k-1}$. Равенката (1) треба да има реални решенија, па, значи $2k-k^2 \geq 0$, т.е. $k \in [0,2]$, а бидејќи $k$ е природен број, добиваме дека $k=1$ или $k=2$.

За $k=1$, од (1) добиваме $x=1$, т.е. првиот работник би ја завршил целата работа, а вториот работник не би имал што да работи, што не е можно при заедничка работа. За $k=2$ имаме $x=y=2$, т.е. и двајцата работници ќе ја завршат работата за исто време.

**7.** Во правоаголникот $ABCD$, $P$ и $Q$ се точки од $AB$ и $BC$ соодветно, така што триаголниците $APD$, $PBQ$ и $QCD$ имаат иста површина. Да се најде $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

**Решение.** Воведуваме ознаки

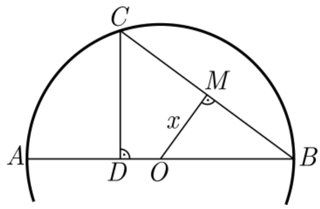
$$\overline{AP}=p_1, \ \overline{PB}=p_2, \ \overline{QB}=q_2, \ \overline{QC}=q_1.$$

Од равенствата $\frac{1}{2}(p_1+p_2)q_1=\frac{1}{2}(q_1+q_2)p_1=\frac{1}{2}q_2p_2$ добиваме $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}$ па според тоа

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_1+q_2}=\frac{1}{\frac{q_1}{q_2}+1}=\frac{1}{\frac{p_1}{p_2}+1}$$

Од последните равенства, ја добиваме квадратната равенка $(\frac{p_1}{p_2})^2+\frac{p_1}{p_2}-1=0$ од каде добиваме $\frac{p_1}{p_2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**8.** Дадена е кружница со центар $O$ и дијаметар $AB$. Точката $C$ е избрана на кружницата така што $\overline{DB}=3\overline{OM}$, каде што $D$ е проекција на $C$ врз дијаметарот $AB$, а $M$ е проекција на $O$ врз $BC$. Определи го $\measuredangle ABC$.




**Решение.** Нека $\overline{OM}=x$ и $\overline{OB}=r$. Според условот $\overline{DB}=3\overline{OM}=3x$, па $\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{DB}=2r-3x$. Од тоа што $OM$ е средна линија во $\triangle ABC$ имаме $\overline{AC}=2\overline{OM}=2x$.

Триаголниците $OBM$ и $ACD$ се слични, па затоа важи $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OM}}$, т.е. $\frac{2x}{2r-3x}=\frac{r}{x}$, од каде што $2x^2+3rx-2r^2=0$. Решенија на оваа квадратна равенка се: $x_{1/2}=\pm\frac{r}{2}$, од каде $r=2x$. Значи, $\overline{AC}=\overline{AO}=\overline{OC}$, па е $\measuredangle CAB=60^\circ$. Следува бараниот агол е $30^\circ$.

**9.** Од сите триаголници со периметар $2s$ и страна $c$, определи го триаголникот кој има максимална плоштина.

**Решение.** Нека $x$ и $y$ се должините на другите две страни на триаголникот. Имаме $x+y+c=2s$, па затоа $y=2s-c-x$. Значи, $s-y=x+c-s$, па од Хероновата формула добиваме

$$P=\sqrt{s(s-c)(s-x)(x+c-s)},$$

каде $s$ и $s-c$ се константи. Максималната вредност на $P$ се достигнува кога $(s-x)(x+c-s)$ ќе ја достигне максималната вредност. Затоа ќе ја разгледаме квадратната функција

$$f(x)=(s-x)(x+c-s)=-x^2+(2s-c)x+s(c-s)=\frac{c^2}{4}-(x-s+\frac{c}{2})^2.$$

Нејзиниот максимум е $\frac{c^2}{4}$ и тој се добива за $x=\frac{2s-c}{2}=s-\frac{c}{2}$. Сега, $y=s-\frac{c}{2}$, што значи дека плоштината е максимална кога триаголникот е рамнокрак со страни $c, s-\frac{c}{2}, s-\frac{c}{2}$.

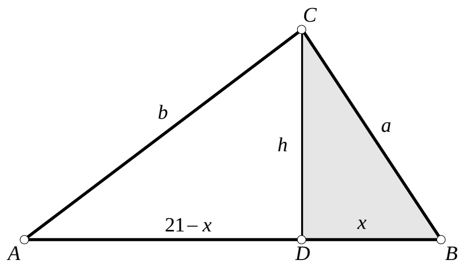
**10.** Должините на страните на еден триаголник и неговата плоштина се природни броеви. Едната страна е 21, а периметарот 48 мерни единици. Одреди ја најмалата страна на тој триаголник.

**Решение.** Ако $c=21$ и ако $a$ е најмалата страна на триаголникот, тогаш $a+b=27$, $b=27-a$ и $a\le 13$. Ако $s$ е полупериметарот на триаголникот, тогаш

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{24\cdot(24-a)\cdot(a-3)\cdot 3}=6\sqrt{2(a-3)(24-a)}.$$

Бидејќи $P$ е природен број следува дека $2(a-3)(24-a)=k^2$, $k\in\mathbb{N}$; т.е.

$$2a^2-54a+144+k^2=0$$




Последната равенка ќе има целобројни решенија по $a$ само ако нејзината дискриминанта е точен квадрат, т.е. $D=27^2-2(114+k^2)=441-2k^2=m^2$, $m\in\mathbb{N}$. Од

$$2k^2+m^2=441=9\cdot 7\cdot 7=(8+1)\cdot 7\cdot 7=8\cdot 7\cdot 7+7\cdot 7=2\cdot 14^2+7^2,$$

заклучуваме дека $k=14$, па тогаш $2a^2-54a+340=0$, добиваме $a_1=10$ и $a_2=17$. Значи најмалата страна на триаголникот е 10 мерни единици.

**11.** Периметарот на еден правоаголен триаголник е $2p$ ($p>0$) а неговата висина спуштена кон хипотенузата има должина $h$. Определи ги неговите страни.

**Решение.** Од условот на задачата имаме $a+b+c=2p$, каде $a$ и $b$ се должините на катетите а $c$ е должина на хипотенузата. Според тоа

$$a+b=2p-c \qquad (1)$$

$$(a+b)^2=(2p-c)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$$

$$c^2+2ab=(2p-c)^2$$

$$ab=2p^2-2pc. \qquad (2)$$

Бидејќи $ab=ch$, ако замениме во (2) добиваме $ch+2pc=2p^2$ односно $c=\frac{2p^2}{h+2p}$.

Ако добиеното $c$ го замениме во (1) и (2) добиваме

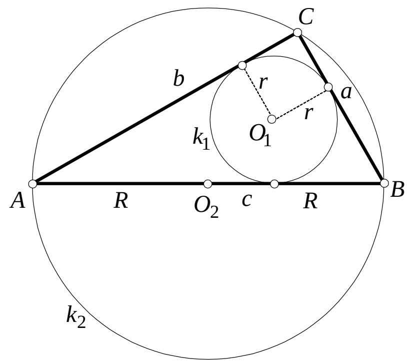
$$\begin{cases} a+b=\frac{2p(h+p)}{h+2p} \\ ab=\frac{2p^2h}{h+2p} \end{cases}.$$

Според тоа, $a$ и $b$ се корени на квадратната равенка $x^2-\frac{2p(h+p)}{h+2p}x+\frac{2p^2h}{h+2p}=0$.

Значи,

$$a=\frac{p}{h+2p}[h+p+\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\,],\, b=\frac{p}{h+2p}[h+p-\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\,],\; c=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

**12.** Во правоаголен триаголник, односот на радиусите на впишаната и опишаната кружница е $2:5$. Определи го односот на катетите.




**Решение.** Нека $ABC$ е правоаголен триаголник со теме на правиот агол во темето $C$. Нека $b$ е должината на поголемата катета $AC$ и $a$ е должината на помалата катета $BC$.

Нека $r$ е радиус на впишаната кружница $k_1$ а $R$ е радиус на опишаната кружница $k_2$ (види цртеж).

Тогаш $R=\frac{c}{2}$ и $r\frac{a+b-c}{2}$, па од условот на задачата, имаме

$$\frac{\frac{a+b-c}{2}}{\frac{c}{2}}=\frac{2}{5}.$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{7}{5}. \qquad (1)$$

Од Питагорина теорема имаме

$$(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) го добиваме системот

$$\begin{cases}\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{7}{5}\\ (\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1.\end{cases}.$$

Ако воведеме смени $\frac{a}{c}=x, \frac{b}{c}=y$, го добиваме системот

$$\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$$

кој е еквивалентен со ситемот

$$\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ xy=\frac{12}{25}.\end{cases}$$

Според тоа, $x$ и $y$ се решенија на квадратната равенка $t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0$. Решенија на квадратната равенка се $t_1=\frac{4}{5}$ и $t_2=\frac{3}{5}$. Сега имаме, $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$.

**13.** За $\triangle ABC$ познати се страната $a$ и плоштината $P$. Пресметај ги страните $b$ и $c$, ако $b=3c$.

**Решение.** Во Хероновата формула $P^2=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}$ ставаме $b=3c$, и по средување на изразот ја добиваме равенката

$$64c^4-20a^2c^2+a^4+16P^2=0. \qquad (1)$$

Страните на триаголникот мора да ги задоволуваат условот $b-c<a<b+c$ и како $b=3c$ добиваме $2c<a<4c$, односно $4c^2<a^2<16c^2$, од што следува $\frac{a^2}{16}<c^2<\frac{a^2}{4}$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(t)=64t^2-20a^2t+a^4+16P^2 .$$

Задачата има едно решение ако $f(\frac{a^2}{16})f(\frac{a^2}{4})<0$, што не е можно бидејќи

$$f(\frac{a^2}{16})=f(\frac{a^2}{4})=16P^2 .$$

Сега, бидејќи $64f(\frac{a^2}{16})>0$ и $64f(\frac{a^2}{4})>0$ задачата има две решенија ако

$$D=16(9a^4-256P^2)\geq 0 \text{ и}$$

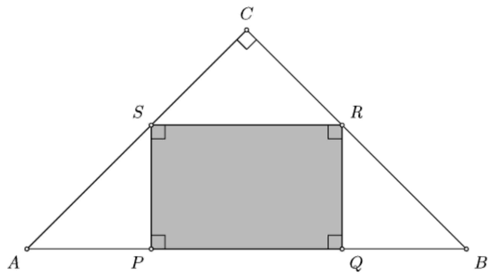
$$\frac{a^2}{16}<\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{20a^2}{256}<\frac{a^2}{4} .$$

Бидејќи вториот услов е секогаш исполнет заклучуваме дека задачата има две решенија ако $P\leq\frac{3a^2}{16}$. Конечно, за да ги определиме страните $b$ и $c$ останува да ја решиме биквадратната равенка (1).

**14.** Даден е рамнокрак правоаголен триаголник чии катети се со должина 10. Определи ја најголемата можна плоштина на правоаголникот чија една страна лежи на хипотенузата, а темињата на спротивната страна припаѓаат на катетите.

**Решение.** Нека правоаголникот $PQRS$ е впишан во $\triangle ABC$ на зададениот начин (види цртеж). Од Питагоровата теорема следува дека $\overline{AB}=10\sqrt{2}$. Да означиме

$$\overline{QR}=x \text{ и } \overline{PQ}=y .$$



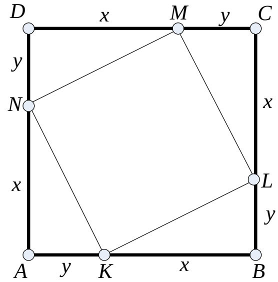

Триаголниците $BRQ$ и $APS$ се рамнокраки, па затоа $\overline{AP}=x$ и $\overline{BQ}=x$. Од овде следува дека $2x+y=10\sqrt{2}$ и за плоштината на правоаголникот добиваме

$$P(x)=xy=x(10\sqrt{2}-2x)=2x(5\sqrt{2}-x) .$$

Функцијата $P(x)$ е квадратна, а нејзиниот максимум се достигнува во апсциса со теме $x=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Според тоа, најголемата можна плоштина е еднаква на $P(\frac{5}{2}\sqrt{2})=25$.

**15.** Темињата на еден квадрат лежат на страните на друг квадрат (на една страна едно теме). Да се најде односот на кој се разделени страните на вториот квадрат со темињата на првиот квадрат, ако односот на нивните плоштини е еднаков на $p$, ($\frac{1}{2}<p<1$).




**Решение.** Нека $ABCD$ и $KLMN$ се дадените квадрати, така што $K,L,M$ и $N$ припаѓаат на страните $AB,BC,CD$ и $DA$ соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{BL}=y$, $\overline{KB}=x$, $\overline{KL}=b$ и $\overline{AB}=a$, при што можеме да претпоставиме $x>y$. Тогаш

$$P_1 = P_{ABCD} = a^2 = (x+y)^2,$$

а според Питагорината теорема $b^2 = x^2 + y^2$, па затоа

$$P_2 = P_{KLMN} = b^2 = x^2 + y^2.$$

Од условот на задачата $\frac{P_2}{P_1} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = p$, каде $0 < p < 1$. Равенството $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = p$ можеме да го запишеме во облик

$$(1-p)x^2 - 2pxy + (1-p)y^2 = 0 \qquad /:y^2$$

$$(1-p)(\tfrac{x}{y})^2 - 2p\tfrac{x}{y} + (1-p) = 0.$$

Ако воведеме ознака $\frac{x}{y} = t$ добиваме

$$(1-p)t^2 - 2pt + (1-p) = 0. \qquad (1)$$

Решенија на равенката (1) се $t_1 = \frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$, $t_1 = \frac{p-\sqrt{2p-1}}{1-p}$. Јасно е дека $\frac{x}{y} = \frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$ е бараното решение.

**16.** Определи ја плоштината на кругот опишан околу правоаголниот триаголник, ако должините на неговите катети се корени на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$.

**Решение.** Радиусот на кружницата опишана околу правоаголниот триаголник е еднаков на половина од должината на хипотенузата. Ако $u$ и $v$ се должини на катетите на триаголникот, добиваме $uv = \frac{c}{a}$, $u + v = -\frac{b}{a}$. Ако $w$ е должината на хипотенузата, тогаш

$$w^2 = u^2 + v^2$$

$$w^2 = u^2 + 2uv + v^2 - 2uv = (u+v)^2 - 2uv$$

$$w^2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2},$$

$$(\tfrac{1}{2}w)^2 = \frac{b^2-2ac}{4a^2}.$$

Бидејќи $R = \frac{1}{2}w$, имаме

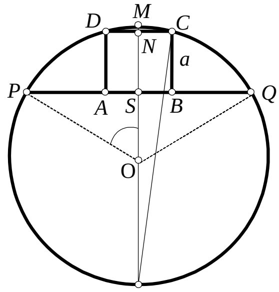
$$P = \pi R^2 = \pi(\tfrac{1}{2}w)^2 = \pi\frac{b^2-2ac}{4a^2}.$$

**17.** Во кружен отсечок со централен агол од $120^\circ$ е вписан квадрат со страна $3\ cm$. Најди го радиусот на кружницата.

**Решение.** Нека квадратот $ABCD$, со страна $a = 3\ cm$ е вписан во отсечокот $PMQ$, со радиус $r$ (види цртеж) и нека $S$ е средина на $PQ$. Според условот на задачата $\overline{OS} = \overline{SM} = \frac{r}{2}$, а оттука:

$$\overline{MN} = \frac{r}{2} - a, \quad \overline{LN} = \frac{3r}{2} + a.$$

Тогаш, од правоаголниот $\triangle LMC$ добиваме




$$\overline{MN}\cdot\overline{LN}=\overline{NC}^2$$
$$(\tfrac{r}{2}-a)(\tfrac{3r}{2}+a)=\tfrac{a^2}{4}$$
$$3r^2-4ar-5a^2=0$$
$$r_{1/2}=\tfrac{a}{3}(2\pm\sqrt{19})\,.$$

Заменувајќи за $a=3$, добиваме $r=2+\sqrt{19}$.

**18.** Две темиња од еден квадрат се точки од кружница со радиус $R$, а друите две се точки од тангента повлечена кон истата кружница. Да се најде страната на квадратот.

**Решение.** Нека темињата $A$ и $B$ од квадратот $ABCD$ припаѓаат на кружницата $k(O,R)$, а темињата $C$ и $D$ лежат на правата $t$ која ја допира $k$ во точката $Q$. Според тоа, $t \parallel AB$ и бидејќи $OQ\perp CD$, добиваме $QT\parallel AD\parallel BC$ каде $T=QO\cap AB$. Но $O\in QT$ и $QT\perp AB$, па според тоа $OT\perp AB$. Значи, триаголникот $BOA$ е рамнокрак со основа $AB$ и $OT$ е негова висина.

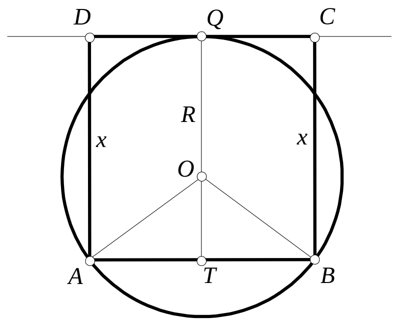
Ако страната на квадратот е $x$ ( $\overline{AB}=x$ ), тогаш $\overline{AT}=\frac{x}{2}$, и од правоаголниот триаголник $ATO$ имаме

$$\overline{OT}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AT}^2}=\sqrt{R^2-(\tfrac{x}{2})^2}=\sqrt{R^2-\tfrac{x^2}{4}}\,.$$

Сега, од

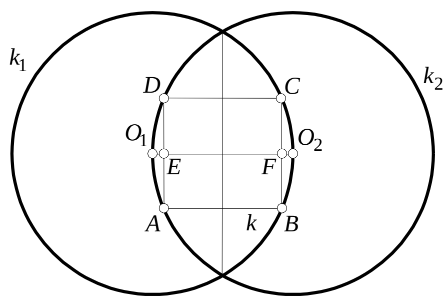
$$\overline{TQ}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{TO}+\overline{OQ}=\sqrt{R^2-\tfrac{x^2}{4}}+R\,,$$

Добиваме $x-R=\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}$. Решение на последната равенка е $x=\frac{8}{5}R=1,6R$.




**19.** Растојанието меѓу центрите на две кружници со радиуси $r$ е еднакво на $r$. Во пресекот на круговите е вписан квадрат. Колку е должината на страната на квадратот?

**Решение.** Нека дадените кружници се $k_1(O_1,r)$ и $k_2(O_2,r)$, при што $\overline{O_1O_2}=r$. Нека $ABCD$ е квадрат што е впишан во нивниот пресек, $A,D\in k_2$ и $B,C\in k_1$ (види цртеж). Ако $x$ е должина на страната на квадратот, тогаш јасно е дека $0<x<r$. Нека $O_1O_2\cap AD=E$ и $O_1O_2\cap BC=F$. При тоа $\overline{CF}=\overline{FB}=\frac{1}{2}x$
,
од каде добиваме




$$\overline{O_1E}=\overline{O_2F}=\tfrac{1}{2}(r-x)$$

$$\overline{O_1E} = \overline{O_1E} + \overline{EF} = \tfrac{1}{2}(r-x) + r = \tfrac{1}{2}(r+x).$$

Сега, од правоаголниот триаголник $O_1FC$ имаме

$$\overline{O_1F}^2 + \overline{FC}^2 = \overline{O_1C}^2$$

$$\tfrac{1}{4}(r+x)^2 + \tfrac{1}{4}x^2 = r^2$$

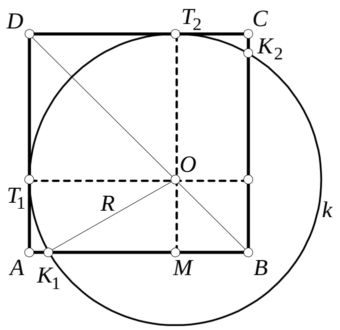
$$2x^2 + 2rx - 3r^2 = 0.$$

Бидејќи $x > 0$, имаме $x = \frac{\sqrt{7}-1}{2}r$.

**21.** Една кружница допира две соседни страни на квадрат, а другите две ги дели на два дела со должини $a$ и $b$ ($a < b$). Определи го радиусот на кружницата.

**Решение.** Нека кружницата $k(O,r)$ ги допира страните $AD$ и $DC$ од квадратот $ABCD$ во точките $T_1$ и $T_2$, а страните $AB$ и $BC$ ги сече во точките $K_1$ и $K_2$ соодветно, при што $\overline{BK_1} = \overline{BK_2} = b$ и $\overline{AK_1} = \overline{CK_2} = a$. Од условот на задачата имаме $\overline{AB} = a+b$. Точката $O$ е внатрешна точка за $ABCD$, при што

$$\tfrac{1}{2}(a+b) < r < a+b.$$




Нека $OT_2 \cap AB = M$. Во правоаголниот триаголник $OMK_1$ катети се

$$\overline{OM} = \overline{MT_2} - \overline{OT_2} = a+b-r$$

$$\overline{MK_1} = \overline{AM} - \overline{AK_1} = \overline{OT_1} - \overline{AK_1} = r-a,$$

а хипотенузата е $\overline{OK_1} = r$. Тогаш

$$r^2 = (r-a)^2 + (a+b-r)^2$$

$$r^2 - 2(2a+b)r + 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0$$

Корени на последната равенка се

$$r_{1/2} = 2a+b \pm \sqrt{2a^2+2ab},$$

при што

$$r_1 = 2a+b+\sqrt{2a^2+2ab} > a+b,$$

па според тоа бараната вредност за $r$ е

$$r = r_2 = 2a+b-\sqrt{2a^2+2ab}$$

(не е тешко да се провери дека $\frac{1}{2}(a+b) < 2a+b-\sqrt{2a^2+2ab} < a+b$).

**22.** Две висини во остроаголен триаголник се со должини $3\,cm$ и $2\sqrt{2}\,cm$, а нивната пресечна точка ја дели третата висина во однос $5:1$, сметано од темето на триаголникот. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

**Решение.** Нека $H$ е ортоцентарот на $\triangle ABC$ (види цртеж) и нека

$$\overline{AA_1} = 3,\ \overline{BB_1} = 2\sqrt{2},\ \overline{CH} : \overline{HC_1} = 5:1.$$

Од сличноста на триаголниците $AHB_1$ и $BHA_1$, имајќи ги предвид ознаките на цртежот, добиваме:

$$x(3-x)=y(2\sqrt{2}-y). \qquad (1)$$

Нека $P$ е плоштината на $\Delta ABC$, тогаш:

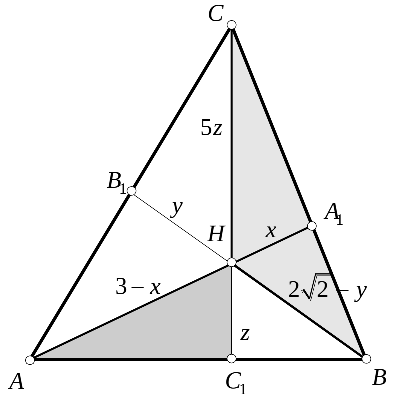
$$P=\frac{1}{2}a\cdot 3 \Rightarrow a=\frac{2P}{3},$$

$$P_{BCH}=\frac{1}{2}a\cdot x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{3}x=\frac{x}{3}P.$$

Аналогно наоѓаме:

$$P_{ACH}=\frac{y}{2\sqrt{2}}P \text{ и } P_{ABH}=\frac{1}{6}P,$$

т.е. $P=\frac{x}{3}P+\frac{y}{2\sqrt{2}}P+\frac{1}{6}P$, па затоа




$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{6}=1. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} x(3-x)=y(2\sqrt{2}-y) \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Од втората равенка добиваме:

$$x=\frac{10-3y\sqrt{2}}{4} \text{ и } 3-x=\frac{2+3y\sqrt{2}}{4},$$

па со замена во првата равенка имаме:

$$20+24y\sqrt{2}-18y^2=32y\sqrt{2}-16y^2 \text{ или } y^2+4y\sqrt{2}-10=0.$$

Позитивниот корен на оваа равенка е $y=\sqrt{2}$ ($y=-5\sqrt{2}$ не задоволува), а соодветната вредност за $x$ е $x=1$.

Од сличноста на триаголниците $AHC_1$ и $CHA_1$ добиваме $z\cdot 5z=x(3-x)$, т.е. $z^2=\frac{2}{5}$. Од правоаголните триаголници $BHA_1$ и $CHA$ добиваме:

$$\overline{BA_1}^2=(2\sqrt{2}-y)^2-x^2=2-1=1,\ \overline{BA_1}=1,$$

$$\overline{CA_1}^2=(5z)^2-x^2=10-1=9,\ \overline{CA_1}=3.$$

Понатаму $\overline{BC}=\overline{BA_1}+\overline{A_1C}=1+3=4$, па плоштината на $\triangle ABC$ е:

$$P=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AA_1}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6.$$

Значи, бараната плоштина е еднаква на $6cm^2$.

**23.** Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако $\overline{AB}=12\,cm$, $\overline{BC}=17\,cm$, $\overline{CD}=4\,cm$ и $\overline{DA}=5\,cm$ и ако страните $AB$ и $CD$ се заемно нормални.

**Решение.** *Прв начин.* Разгледуваме три случаи:

$1^\circ$ Четириаголникот $ABCD$ го има видот како на цртеж 1.

Нека $\overline{AM} = x$, $\overline{DM} = y$, тогаш од правоаголните триаголници $ADM$ и $BCM$ имаме:

$$x^2 + y^2 = 25,\ (12 - x)^2 + (4 + y)^2 = 289.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, по средувањето, добиваме

$$y = 3x + 13. \qquad (1)$$

Со замена на (1) во првата равенка ја добиваме квадратната равенка

$$5x^2 + 39x + 72 = 0,$$

чии корени $x = -3$ и $x = -4{,}8$ не ги задоволуваат условитена задачата.

$2^\circ$ Четириаголникот $ABCD$ го има видот како на цртеж 2. Тогаш, според ознаките на цртежот имаме:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ и } (12 + x)^2 + (4 - y)^2 = 289,$$

од каде што наоѓаме

$$y = 3x - 13. \qquad (2)$$

Со замена на (2) во првата равенка од системот ја добиваме квадратната равенка

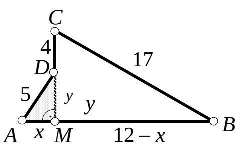
$$5x^2 - 39x + 72 = 0,$$

чии корени се: $x_1 = 3$ и $x_2 = 4{,}8$. Соодветните вредности за $y$ се:

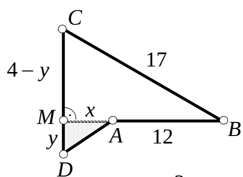
$$y_1 = 3 \cdot 3 - 13 = -4 \text{ и } y_2 = 1{,}4.$$

Значи, овој четириаголник постои само за $x = 4{,}8cm$ и $y = 1{,}4cm$. Неговата плоштина е збир на плоштините на триаголниците $ADM$ и $BCM$, па имаме:

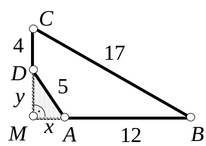
$$P = \tfrac{1}{2}\left[x \cdot y + (12 + x)(4 - y)\right] = \tfrac{1}{2}(4{,}8 \cdot 1{,}4 + 16{,}8 \cdot 2{,}6), \text{ т.е. } P = 25{,}2\ cm^2.$$



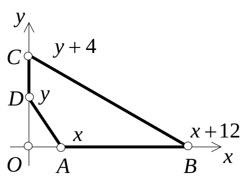
цртеж 1



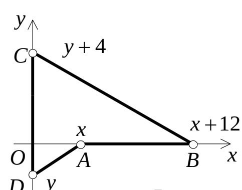
цртеж 2



цртеж 3



цртеж 4



цртеж 5

$3^\circ$ Четириаголникот $ABCD$ го има видот како на како на цртеж 3. Во овој случај го добиваме системот

$$x^2 + y^2 = 25, \quad (12 + x)^2 + (4 + y)^2 = 289,$$

од каде што наоѓаме

$$y = 13 - 3x. \qquad (3)$$

Со замена на (3) во првата равенка од системот ја добиваме квадратната равенка

$$5x^2 - 39x + 72 = 0,$$

чии корени се: $x_1 = 3$ и $x_2 = 4,8$. Соодветните вредности за $y$ се:

$$y_1 = 4 \text{ и } y_2 = -1,4.$$

Значи, овој четириаголник постои за $x = 3cm$ и $y = 4cm$, па неговата плоштина е:

$$P = \tfrac{1}{2}\left[xy + (12+y)(4+y)\right] = \tfrac{1}{2}(4\cdot 3 + 15\cdot 8),\ \text{т.е. } P = 54cm^2.$$

Следствено, постојат два четириаголника што ги исполнуваат условите на задачата и нивните плоштини се $25,20cm^2$ и $54cm^2$.

*Втор начин.* Четириаголникот $ABCD$ го поставуваме во правоаголен координатен систем $xOy$. Ако неговите темиња $A$ и $D$ ги имаат координатите $A(x, 0)$ и $D(0, y)$, тогаш темињата $B$ и $C$ ги имаат координатите $B(x+12, 0)$ и $C(0, y+4)$.Користејќи ги формулите за растојание меѓу две точки и условите $\overline{AD} = 5$ и $\overline{BC} = 17$, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x+12)^2 + (y+4)^2 = 289 \end{cases}$$

од каде што наоѓаме $x = 3;\ y = 4$ и $x = 4,8;\ y = -1,4$.

Во првиот случај имаме $P = P_1 - P_2$, каде што $P_1$ и $P_2$ се плоштини на триаголниците $OBC$ и $OAD$, соодветно (цртеж 4), а во вториот случај имаме $P = P_1 + P_2$ (цртеж 5). По пресметување на $P_1$ и $P_2$ во секој одделен случај имаме $P = 54cm^2$ или $P = 25,2cm^2$.

**24.** За страните $a, b$ и $c$ на $\triangle ABC$ важи $2a = b + c$. Најди ги страните, ако се познати симетралата на аголот $s_a$ и тежишната линија $t_a$ повлечени од темето $A$.

**Решение.** Ќе ги користиме познатите формули

$$t_a^2 = \tfrac{b^2+a^2}{2} - \tfrac{a^2}{4} \text{ и } s_a{}^2 = bc\,\tfrac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}.$$

Бидејќи, по услов, $b + c = 2a$, имаме $s_a^2 = bc\frac{(2a)^2-a^2}{(2a)^2} = \frac{3}{4}bc$, т.е.

$$bc = \tfrac{4}{3}S_a^2. \tag{1}$$

Понатаму,

$$t_a^2 = \tfrac{b^2+c^2}{2} - \tfrac{a^2}{4} = \tfrac{(b+c)^2-2bc}{2} - \tfrac{a^2}{4} = \tfrac{4a^2-2bc}{2} - \tfrac{a^2}{4} = \tfrac{7}{4}a^2 - bc = \tfrac{7}{4}a^2 - \tfrac{4}{3}S_a^2,$$

т.е. $a^2 = \frac{4}{7}(t_a^2 + \frac{4}{3}S_a^2)$. Оттука бидејќи $a > 0$, добиваме $a = \frac{2}{\sqrt{21}}\sqrt{3t_a^2 + 4S_a^2}$. Сега имаме:

$$b + c = 2a = \tfrac{4}{\sqrt{21}}\sqrt{3t_a^2 + 4S_a^2}. \tag{2}$$

Според (1) и (2) следува дека $b$ і $c$ се корени на квадратната равенка

$$x^2 - \tfrac{4x}{\sqrt{21}}\sqrt{3t_a^2 + 4S_a^2} + \tfrac{4}{3}S_a^2 = 0.$$

Корените на оваа квадратна равенка ќе бидат реални броеви, ако нејзината дискриминанта е ненегативна, т.е.

$$\tfrac{16}{21}(3t_a^2+4S_a^2)-\tfrac{16}{3}S_a^2\ge 0$$
$$3t_a^2+4S_a^2-7S_a^2\ge 0$$
$$3(t_a^2+S_a^2)\ge 0;\quad t_a\ge S_a.$$

Меѓутоа, ваков триаголник постои, ако и само ако $(b-c)^2<a^2<(b+c)^2$. Неравенството $(b+c)^2>a^2=(\frac{b+c}{2})^2$ е очигледно исполнето. Од $(b-c)^2<a^2$ добиваме

$$a^2=(\tfrac{b+c}{2})^2>(b-c)^2=(b+c)^2-4bc,$$
$$4bc>\tfrac{3}{4}(b+c)^2$$
$$4\cdot\tfrac{4}{3}S_a^2>\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{16}{21}(3t_a^2+4S_a^2)$$
$$16S_a^2>9t_a^2,$$
$$4S_a>3t_a.$$

Следствено, $S_a\le t_a<\frac{4}{3}S_a$. При овие услови, имаме $x^2-2ax+\frac{4}{3}S_a^2=0$, односно $x_{1/2}=a\pm\sqrt{a^2-\frac{4}{3}S_a^2}$. Бидејќи $a^2-\frac{4}{3}S_a^2=\frac{4}{7}(t_a^2-S_a^2)$, имаме

$$x_{1/2}=\tfrac{2}{\sqrt{7}}(\sqrt{t_a^2+\tfrac{4}{3}S_a^2}\pm\sqrt{t_a^2-\tfrac{4}{3}S_a^2}).$$

Конечно, страните на триаголникот се: $a, b=x_1, c=x_2$ или $a, b=x_2, c=x_1$. .

**25.** Два брода тргнале истовремено еден кон друг, првиот од пристаништето $A$ кон пристаништет $B$, а вториот во обратна насока. Тие се сретнале по три часа. Првиот брод стигнал во пристаништето $B$ за 2 часа и 30 минути покасно отколку што вториот брод стигнал во пристаништето $A$. За колку часа секој од бродовите го минувал растојанието меѓу двете пристаништа.

**Решение.** Нека $v_1$ е брзината на првиот брод, а $v_2$ е брзината на вториот брод. Ако $x$ е растојанието меѓу пристаништата, тогаш

$$3v_1+3v_2=x. \tag{1}$$

Ако вториот брод патувал $y$ часа, тогаш првиот брод патувал $y+2,5$ часа. Според тоа,

$$v_1(y+2,5)=x$$
$$v_2y=x,$$

од каде добиваме $v_1=\frac{x}{y+2,5}$, $v_1=\frac{x}{y}$. Сега, ако замениме во (1) добиваме

$$\frac{3x}{y+2,5}+\frac{3x}{y}=x,$$
$$\frac{3}{y+2,5}+\frac{3}{y}=1,$$
$$2y^2-7y-15=0.$$

Позитивно решение на последната равенка е $y=5$. Вториот брод пристигнал за 5 часа, а првиот брод пристигнал за 7,5 часа.

**26.** Од местото $A$ кон местото $B$ истовремено тргнуваат две групи туристи. Првата група тргнала со автобус движејќи се со просечна брзина од $20\ km/s$ и стигнала до местото $C$ што е на половина пат меѓу $A$ и $B$, а потоа тргнале пешки. Втората група тргнала пешки, а по 1 час се качила на автобус, кој се движел со просечна од $30\ km/h$. Во местото $C$, првата група стигнала 35 минути порано од втората, а во местото $B$ за 1 час и 25 минути подоцна. Колку се оддалечени местата $A$ и $B$ и колкава е просечната брзина групите, кога одат пешки, ако просечната брзина на првата група е за $1\ km/h$ поголема од просечната брзина на втората група?

**Решение.** Со $x$ да ја означиме просечната брзина на првата група(кога одат пешки); тогаш просечната брзина на втората група (кога одат пешки) ќе биде $y = x-1$. Ако со $s$ го означиме растојанието меѓу местата $A$ и $B$, тогаш, од условите на задачата, добиваме:

$$\begin{cases} \frac{\frac{s}{2}}{20} + \frac{7}{12} = 1 + \frac{\frac{s}{2}(x-1)}{30} \\ \frac{\frac{s}{2}}{x} = \frac{\frac{s}{2}}{30} + 2 \end{cases}$$

од каде што добиваме $x_1 = 6$, $x_2 = 67$, $s_1 = 30$, $s_2 = -215$.

Значи, просечната брзина на првата група (кога одат пешки) е $6\ km/h$, на втората $5\ km/h$, а местата $A$ и $B$ се оддалечени $30\ km$.

**27.** Именителот на една нескратлива дропка е за 2 поголем од броителот. Ако на реципрочната дропка се намали броителот за 3, а потоа се одземе првата дропка се добива $\frac{1}{15}$. Која е почетната дропка?

**Решение.** Нека почетната дропка е $\frac{x}{x+2}$, при што $x$ е непарен број (во спротивно дропката би била скратлива!). Тогаш од условот на задачата имаме

$$\frac{x+2-3}{x} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{15},$$

од каде ја добиваме равенката

$$x^2 - 13x + 30 = 0,$$

чии корени се $x_1 = 3$ и $x_2 = 10$. Од нив условот на задачата го задоволува само првиот, па бараната дропка е $\frac{3}{5}$.

**28.** Да се определат 11 реални броја така што секој од нив да е еднаков на квадратот на сумата на преостанатите 10.

**Решение.** Нека бараните броеви се $x_1, x_2, ..., x_{11}$ и нека важи:

$$x_1 \le x_2 \le ... \le x_{11}. \tag{1}$$

Нека вкупната сума на броевите е $s$. Според условите на задачата, имаме:

$$x_i = (s - x_i)^2,\ i = 1,2,3,...,11, \tag{2}$$

од каде според (1), добиваме:

$$(s-x_1)^2 \le (s-x_2)^2 \le .... \le (s-x_{11})^2. \tag{3}$$

Бидејќи бараните броеви се квадрати, истите се ненегативни, па од (1) следува дека $s-x_1 \leq s-x_2 \leq .... \leq s-x_{11}$, односно

$$(s-x_1)^2 \geq (s-x_2)^2 \geq .... \geq (s-x_{11})^2 . \tag{4}$$

Од (3) и (4) добиваме дека $(s-x_1)^2 = (s-x_2)^2 = .... = (s-x_{11})^2$, од каде поради ненегативноста, имаме $x_1 = x_2 = ... = x_{11}$. Тогаш за секој од нив важи $x = (10x)^2$, од каде добиваме дека сите барани броеви се 0 или сите се еднакви на $\frac{1}{100}$.

# III НЕРАВЕНСТВА

## 1. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

**1.** Докажи, дека за произволни реални броеви $x, y, z$ важи

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geq 1.$$

**Решение.** Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x})(1+xy+xz)\geq(1+y+z)^2.$$

Следствено

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}\geq\frac{x}{x+y+z}.$$

Конечно, ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенства, добиваме

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geq\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1.$$

**2.** Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се произволни реални броеви. Докажи, дека важи неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{\frac{2}{3}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{\frac{4}{3}}}$$

**Решение.** Со примена прво на тривијалното неравенство $a\leq|a|$, а потоа на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, се добива:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i|=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{\frac{1}{3}}|a_i|^{\frac{2}{3}}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{\frac{2}{3}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{\frac{4}{3}}}.$$

**3.** Нека $x, y, z$ се позитивни реални броеви такви што $xy+yz+zx=x+y+z$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq 1.$$

Кога во претходното неравенство важи знак за равенство?

**Решение.** Со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц за тројките $(x,\sqrt{y},1)$ и $(1,\sqrt{y},z)$ добиваме

$$\frac{1}{x^2+y+1}\leq\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}.$$

Аналогно важи

$$\frac{1}{y^2+z+1}\leq\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2} \text{ и } \frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}.$$

Со собирање на овие неравенства добиваме

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}=S.$$

Останува да докажеме дека $S \le 1$, а тоа според условот на задачата е еквивалентно со

$$3+x+y+z \le 2(xy+yz+zx) = 2(x+y+z)\text{, т.е. со } x+y+z \ge 3.$$

Последното неравенство следува од $x+y+z = xy+yz+zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3}$.

**4.** Нека $x, y$ и $z$ се ненегативни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{x-y}{xy+2y+1} + \frac{y-z}{yz+2z+1} + \frac{z-x}{zx+2x+1} \ge 0 .$$

**Решение.** Воведуваме смени

$$a = \frac{x-y}{xy+2y+1}, b = \frac{y-z}{yz+2z+1} \text{ и } c = \frac{z-x}{zx+2x+1} .$$

Тогаш $a + \frac{1}{a} = \frac{xy+x+y+1}{x-y}$ и оттука $\frac{a}{a+1} = \frac{x-y}{xy+x+y+1} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{x+1}$. Аналогно важи

$$\frac{b}{b+1} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{y+1} \text{ и } \frac{c}{c+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{z+1} .$$

Понатаму, од $0 < \frac{1}{x+1}, \frac{1}{y+1}, \frac{1}{z+1} < 1$ следува дека $\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1} < 1$, па затоа $a+1, b+1$ и $c+1$ се позитивни. Освен тоа, важи

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 0\text{, т.е. } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 3 .$$

Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+1)+(b+1)+(c+1) \ge 3\text{, т.е. } a+b+c \ge 0 .$$

**5.** Нека $x, y, z$ се позитивни реални броеви такви што $xyz = 1$. Докажи дека

$$(x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) \ge (\frac{x^2}{y}+1)(\frac{y^2}{z}+1)(\frac{z^2}{x}+1) \quad .$$

**Решение.** Користејќи го неравенството на Коши-Шварц имаме

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\tfrac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(y^2)^2 + (\tfrac{x}{z})^2} \ge x^2y^2 + \frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z} = x^2(y^2 + \frac{1}{xy})$$

$$\sqrt{(y^2)^2 + (\tfrac{x}{z})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\tfrac{y}{x})^2} \ge y^2z^2 + \frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x} = y^2(z^2 + \frac{1}{yz})$$

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\tfrac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\tfrac{y}{x})^2} \ge x^2z^2 + \frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x} = z^2(x^2 + \frac{1}{xz}) .$$

Множејќи ги последните три неравенства добиваме,

$$(x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) \ge x^2y^2z^2(y^2 + \frac{1}{xy})(z^2 + \frac{1}{yz})(x^2 + \frac{1}{xz})$$

$$= (xyz)^3(\frac{x^2}{y}+1)(\frac{y^2}{z}+1)(\frac{z^2}{x}+1)$$

$$= (\frac{x^2}{y}+1)(\frac{y^2}{z}+1)(\frac{z^2}{x}+1),$$

што и требаше да се докаже.

**6.** Нека $a, b, c$ се позитивни реални броеви. Докажи:

$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \ge \frac{6}{a+b+c} .$$

**Решение.** За позитивните реални броеви $a,b,c$, според неравенството на Коши Буњаковски имаме

$$ab+bc+ca\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}=a^2+b^2+c^2$$
$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

Според тоа

$$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$$
$$\frac{ab+bc+ca}{3}\leq\frac{(a+b+c)^2}{9}$$
$$\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$$
$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq1+\frac{9}{(a+b+c)^2}=(1-\frac{3}{a+b+c})^2+\frac{6}{a+b+c}\geq\frac{6}{a+b+c}.$$

**7.** Нека $a,b,c$ се позитивни реални броеви за кои важи $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. Да се докаже неравенството

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c}.$$

**Решение.** Да забележиме дека именителите во левиот израз се позитивни. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}=\frac{a^2}{a^3-abc+a}+\frac{b^2}{b^3-cab+b}+\frac{c^2}{c^3-abc+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a+b+c-3abc}$$

Понатаму бидејќи

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-\tfrac{1}{3})$$

следува дека

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a+b+c-3abc}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+1-\frac{1}{3})}=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\frac{1}{a+b+c}$$

што и требаше да се докаже.

**8.** Ако $a,b,c$ се позитивни реални броеви докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Бидејќи

$$\frac{a^2}{b}=2a-b+\frac{(a-b)^2}{b},\ \frac{b^2}{c}=2b-c+\frac{(b-c)^2}{c},\ \frac{c^2}{a}=2c-a+\frac{(c-a)^2}{a},$$

даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{|a-b|^2}{b}+\frac{|b-c|^2}{c}+\frac{|c-a|^2}{a}\geq\frac{4|a-b|^2}{a+b+c}$$

Последното неравенство непосредно следува од неравенството на Коши-Буњаковски- Шварц, т.е.

$$(a+b+c)(\frac{|a-b|^2}{b}+\frac{|b-c|^2}{c}+\frac{|c-a|^2}{a})\geq(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2\geq(2|a-b|)^2$$

бидејќи $|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$. Знак за равенство важи ако и само ако $|a-b|=kb$, $|b-c|=kc$, $|c-a|=ka$, за некој $k$ и $|a-b|=|a-c|+|c-b|$. Ако $k\neq 0$, од овие релации следува $b=c+a$, па затоа $a=kc=k^2b$ и $|\frac{1}{k}-1|a=|c-a|=ka$ и лесно се добива дека $k=\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ако $k=0$, тогаш $a=b=c$. Според тоа, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$ или $a:b:c=\phi^2:1:\phi$.

**9.** Нека $a,b,c$ се позитивни реални броеви такви, што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1.$$

**Решение.** Бидејќи $x^2+2\geq 2x+1$, доволно е да докажеме дека

$$L=\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\leq 1.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3-2L=\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\geq 1. \qquad (1)$$

Воведуваме замена $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ со што (1) се сведува на

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\geq 1. \qquad (2)$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува неравенството

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2&=(\sqrt{\tfrac{y}{2x+y}}\cdot\sqrt{y(2x+y)}+\sqrt{\tfrac{z}{2y+z}}\cdot\sqrt{z(2y+z)}+\sqrt{\tfrac{x}{2z+x}}\cdot\sqrt{x(2z+x)})\\&\leq(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x})(y(2x+y)+z(2y+z)+x(2x+z))\\&=(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x})(x+y+z)^2\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

**10.** Нека $x,y,z$ се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1.$$

**Решение.** Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(yx+x^2+x^2)(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z^2}{x^2})\geq(y+\sqrt{zx}+z)^2,$$

од каде добиваме $\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}\geq\frac{x^2}{xy+xz+z^2}$. Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}\geq\frac{y^2}{yz+yx+x^2},\quad \frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq\frac{z^2}{zx+zy+y^2}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$M=\frac{x^2}{xy+xz+z^2}+\frac{y^2}{yz+yx+x^2}+\frac{z^2}{zx+zy+y^2}\geq 1.$$

Повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$M((xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2)) \geq (x+y+z)^2$$

и како

$$(xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2)=(x+y+z)^2$$

добиваме дека $M \geq 1$.

**11.** Определи го најмалиот реален број $k$ за кој неравенството

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(d^2+1)}+\\&+\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}+\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}\geq\\&\geq 2(ab+bc+cd+ac+bd+ad)-k\end{aligned}$$

важи за произволни реални броеви $a,b,c$ и $d$.

**Решение.** Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}=\sqrt{[(a+b)^2+(ab-1)^2](c^2+1)} \geq (a+b)c+ab-1$$

Ако последното неравенство го собереме со трите аналогни неравенства, го добиваме саканото неравенство со константа $k=4$. Знак за равенство важи за $a=b=c=d=\sqrt{3}$, па затоа бараната најмала вредност е $k=4$.

**12.** Определи ја најголемата вредност на изразот $A=\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3}$, ако $x,y,z$ се реални броеви такви што $x+y+z=\frac{1989}{3}$.

**Решение.** Изразот $A$ ќе го запишеме во облик

$$A=1\cdot\sqrt{x+3}+1\cdot\sqrt{y+3}+1\cdot\sqrt{z+3}.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}A&=1\cdot\sqrt{x+3}+1\cdot\sqrt{y+3}+1\cdot\sqrt{z+3}\\&\leq\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{x+3})^2+(\sqrt{y+3})^2+(\sqrt{z+3})^2}\\&=\sqrt{3}\sqrt{x+y+z+9}=\sqrt{\tfrac{2016}{3}}\sqrt{3}=\sqrt{2016}.\end{aligned}$$

Во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{\sqrt{x+3}}{1}=\frac{\sqrt{y+3}}{1}=\frac{\sqrt{z+3}}{1}, \text{ т.е. } \sqrt{x+3}=\sqrt{y+3}=\sqrt{z+3}.$$

Од последните равенства и условот на задачата следува $x=y=z$. Бидејќи $x+y+z=\frac{1989}{3}$, добиваме $x=y=z=221$.

Конечно, $A$ добива најголема вредност $\sqrt{2016}$ за $x=y=z=221$.

**13.** Дадени се позитивни реални броеви $a,b$ и $c$ такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}} \leq \frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}.$$

**Решение.** Ќе докажеме дека изразот на левата страна на неравенството е помал или еднаков на 1, додека изразот на десната страна е поголем или еднаков на 1.

Ако искористиме дека $abc=1$, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4ab^2c+4abc^2}}\geq\frac{a^2}{\sqrt{a^4+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+b^4)+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+c^4)}}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}\geq\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ и } \frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}\geq\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ги собираме последните три неравенства и добиваме дека

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}\geq 1.$$

Останува да докажеме дека изразот на левата страна е помал или еднаков на 1. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}\leq\frac{1}{\sqrt{3ab^2+6}}=\sqrt{\frac{abc}{3ab^2+6abc}}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{b+2c}}$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{c}{b+2c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{b}{b+2c}\right).$$

Аналогно ги добиваме неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{c}{c+2a}\right) \text{ и } \frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{a}{a+2b}\right).$$

Од последните три неравенства и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}}\leq\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}+\frac{a}{a+2b}\right)$$
$$\leq\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{b(b+2c)+a(c+2a)+a(a+2b)}=1.$$

**14.** Ако $a,b,c$ се ненегативни цели броеви такви, што $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.$$

**Решение.** Нека

$$x_1=\sqrt{a^2(b^2+1)},\ x_2=\sqrt{b^2(c^2+1)},\ x_3=\sqrt{c^2(a^2+1)},$$
$$y_1=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}},\ y_2=\sqrt{\frac{b}{c^2+1}},\ y_3=\sqrt{\frac{c}{a^2+1}}.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$[a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)]\left(\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\right)\geq(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.$$

Според тоа, за да го докажеме бараното неравенство, треба да докажеме дека

$$a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)\leq\frac{4}{3}.$$

Од условот $a^2+b^2+c^2=1$ следува

$$a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)=a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$=1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3}$$
$$\leq 1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^4+b^4+c^4}{3}=1+\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Последното неравенство следува од неравенството

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\ge 0\,.$$

Со тоа е докажано бараното неравенство и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Во овој случај важи знак за равенство во неравенството (1) и важи знак за равенство последното неравенство.

**15.** Нека $x,y,z$ се позитивни реални броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека $A\ge B^2$, каде

$$A=\frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \text{ и } B=\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}}+\frac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}}+\frac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}\,.$$

**Решение.** Од $x+y+z=1$ наоѓаме

$$\begin{aligned}1+xy+yz+zx&=(x+y+z)^2+xy+yz+zx\\&=(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\end{aligned}$$

и ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за десната страна на даденото неравенство добиваме

$$A=\tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{1}{1-y}+\tfrac{1}{1-z})((x+3x^2)+(y+3y^2)+(z+3z^2))\ge(\sqrt{\tfrac{3x^3+x}{9(1-x)}}+\sqrt{\tfrac{3y^3+y}{9(1-y)}}+\sqrt{\tfrac{3z^3+z}{9(1-z)}})^2.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека за секој реален број $s\in(0,1)$ е исполнето неравенството

$$\sqrt{\frac{3s^3+s}{9(1-s)}}\ge\frac{s\sqrt{s+1}}{\sqrt[4]{3+9s^2}}\,.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $3(9s^2-1)^2\ge 0$, кое очигледно е точно. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**16.** Нека $x,y,z$ се пзотивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи, дека

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\ge\frac{9}{4}\,.$$

**Решение.** Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\tfrac{x}{y^2+z}+\tfrac{y}{z^2+x}+\tfrac{z}{x^2+y})(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y))\ge(x+y+z)^2\,.$$

Затоа доволно е да се докаже неравенството

$$9(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y))\le 4(x+y+z)^2$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$4(x^2+y^2+z^2)\ge xy+yz+zx+9(xy^2+yz^2+zx^2)\,.$$

Но, $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, па затоа доволно е да се докаже дека

$$x^2+y^2+z^2\ge 3(xy^2+yz^2+zx^2)\,.$$

Имаме $x^2\cdot 1=x^2(x+y+z)=x^3+x^2y+x^2z$ и слично за $y$ и $z$. Ако ги собереме неравенствата

$$x(x^2+z^2)\geq 2x^2z,\quad y(x^2+y^2)\geq 2xy^2,\quad z(z^2+y^2)\geq 2z^2y$$

се добива бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, па бидејќи $x+y+z=1$, добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**17.** Нека $a_1,a_2,...,a_{2008}$ се реални броеви такви што

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2008}=0 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2008}^2=502 \end{cases} \qquad (1)$$

Одреди ја максималната вредност за $a_{2008}$. Најди барем една низа од вредности $a_1,a_2,...,a_{2007}$ во која таа се достигнува.

**Решение.** Според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за реалните броеви $a_1,a_2,...,a_{2007}$ имаме

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+...+a_{2007})^2 &= (1\cdot a_1+1\cdot a_2+...+1\cdot a_{2007})^2\\ &\leq (\underbrace{1^2+1^2+....+1^2}_{2007-\text{пати}})(a_1^2+a_2^2+...+a_{2007}^2) \qquad (2)\\ &= 2007(a_1^2+a_2^2+...+a_{2007}^2)\,.\end{aligned}$$

Равенство се достигнува ако и само ако

$$\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{1}=\frac{a_3}{1}=...=\frac{a_{2007}}{1},\ \text{т.е. } a_1=a_2=...=a_{2007}\,.$$

Равенствата (1) ќе ги запишеме во вид

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2007}=-a_{2008} \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2007}^2=502-a_{2008}^2 \end{cases}$$

и ако замениме во (2) добиваме

$$(-a_{2008})^2\leq 2007(502-a_{2008}^2)\,.$$

Значи, $a_{2008}^2\leq\frac{2007\cdot 502}{2008}=\frac{2007}{4}$, од каде добиваме $|a_{2008}|\leq\frac{\sqrt{2007}}{2}$.

За било која низа реални броеви $a_1,a_2,...,a_{2007}$, за која $a_1=a_2=...=a_{2007}$ е исполнето $|a_{2008}|\leq\frac{\sqrt{2007}}{2}$. Според тоа, $(a_{2008})_{\max}=\frac{\sqrt{2007}}{2}$.

**18.** Определи ги сите реални броеви $x,y$ и $z$, поголеми или еднакви на 1, кои го задоволуваат условот

$$\min\{\sqrt{x+xyz},\sqrt{y+xyz},\sqrt{z+xyz}\}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека $a,b$ и $c$ се ненегативни реални броеви такви што $x=1+a^2$, $y=1+b^2$ и $z=1+c^2$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c=\min\{a,b,c\}$, па така условот на (1) можеме да го запишеме во обликот

$$(1+c^2)(1+(1+a^2)(1+b^2))=(a+b+c)^2\,. \qquad (2)$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+b+c)^2 \le (1+(a+b)^2)(1+c^2),$$

па затоа $(1+a^2)(1+b)^2 \le (a+b)^2$, т.е. $(ab-1)^2 \le 0$. Според тоа, $ab=1$ и претходно треба да важи знак за равенство, т.е. $c(a+b)=1$. Обратно, ако се исполнети равенствата $ab=1$ и $c(a+b)=1$, тогаш условот (2) е исполнет. Конечно, решение на задачата се сите тројки $(x,y,z)=(1+a^2, 1+\frac{1}{a^2}, 1+\frac{a^2}{(a^2+1)^2})$, каде $a>0$ и нивните пермутации.

**19.** Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се произволни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2}<\sqrt{n}$$

**Решение.** Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме:

$$a_1+a_2+...+a_n \le \sqrt{n}\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$$

за секои реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Земајќи

$$a_k=\frac{x_k}{1+x_1^2+...+x_k^2} \text{ за } k=1,2,...,n,$$

доволно е да докажеме дека важи

$$(\frac{x_1}{1+x_1^2})^2+(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2})^2+...+(\frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2})^2<1.$$

Да забележиме дека за $k \ge 2$,

$$(\frac{x_k}{1+x_1^2+...+x_k^2})^2=\frac{x_k^2}{(1+x_1^2+...+x_k^2)^2} \le \frac{x_k^2}{(1+x_1^2+...+x_{k-1}^2)(1+x_1^2+...+x_k^2)}=\frac{1}{1+x_1^2+...+x_{k-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+...+x_k^2}$$

За $k=1$, на сличен начин се добива неравенството $(\frac{x_1}{1+x_1^2})^2 \le 1-\frac{1}{1+x_1^2}$. Сумирајќи ги овие неравенства, се добива

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{x_k}{1+x_1^2+...+x_k^2})^2 \le 1-\frac{1}{1+x_1^2+...+x_k^2}<1.$$

**20.** Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни броеви, за кои што $x_1+x_2+...+x_n \ge \sqrt{n}$, $n \ge 1$. Да се докаже дека $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})$, $n \ge 1$.

**Решение.** Воведуваме ознаки $s_n=x_1+x_2+...+x_n$, $y_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ и $t_n=\sqrt{n}$. Според условот на задачата добиваме дека

$$s_n \ge t_n. \tag{1}$$

Понатаму, $\sum_{i=1}^{n} y_i=t_n$ и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=\sum_{i=1}^{n} x_i[y_{n+1}+\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})]=\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})+\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j+1})\sum_{i=1}^{j} x_i+\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1}=\sum_{j=1}^{n} s_j(y_j-y_{j+1})+y_{n+1}s_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i[y_{n+1} + \sum_{k=i}^{n} (y_k - y_{k+1})] = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{k=i}^{n} (y_k - y_{k+1}) + \sum_{i=1}^{n} y_i y_{n+1}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j+1}) \sum_{i=1}^{j} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} t_j (y_j - y_{j+1}) + y_{n+1} s_n$$

Од неравенството (1) и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц јасно е дека

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{, т.е. } \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Сега

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{1}{i}})^2} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{1}{(1+\sqrt{1})^2} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} .$$

## 2. ЕНГЕЛОВ ПРИНЦИП НА МИИМУМ

**1.** Нека за позитивните броеви $x$, $y$ и $z$ важи $xyz = 1$. Докажи, дека

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2} .$$

**Решение.** Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} .$$

Ако пак го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и го користиме условот $xyz = 1$, добиваме $\frac{x+y+z}{2} \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$. Конечно, од последните две неравенства следува бараното неравенство

**2.** Нека $a,b$ и $c$ се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2} .$$

**Решение.** Од Енгеловиот принцип на минимум следува:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{(\frac{1}{a})^2}{a(b+c)} + \frac{(\frac{1}{b})^2}{b(a+c)} + \frac{(\frac{1}{c})^2}{c(a+b)} \ge \frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2}\frac{ab+bc+ca}{abc} .$$

Од неравенството меѓу артиметичка и геометриска средина следува:

$$\frac{1}{2}\frac{ab+bc+ca}{abc} \ge \frac{1}{2}\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{abc} = \frac{3}{2} .$$

Од претходните две неравенства се добива точноста на почетното неравенство.

**3.** За произволни позитивни реални броеви $a,b$ и $c$ е исполнето неравенството

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \ge 1 .$$

Докажи!

**Решение.** Да забележиме дека

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+2ba}+\frac{c^2}{ca+2cb}\,. \qquad (1)$$

Но според Енгеловиот принцип на минимум имаме

$$\frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+2ba}+\frac{c^2}{ca+2cb}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Од

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\tfrac{1}{2}[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca]\\&=\tfrac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+c^2)\,,\\&=\tfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0\end{aligned}$$

следува

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geq 1\,. \qquad (2)$$

па затоа

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}&=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{3(ab+bc+ca)}\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}+\frac{2(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)}\geq\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\end{aligned} \qquad (3)$$

Конечно, од (1),(2) и (3) следува точноста на бараното неравенство.

**4.** Нека $x$ и $y$ се позитивни броеви. Докажи, дека

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}\,.$$

**Решение.** Од Енгеловиот принцип на минимум следува $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$. Понатаму од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина наоѓаме

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leq 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2}}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \text{ и } \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 2\sqrt{\frac{x+y}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+y}\,,$$

па затоа $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leq 2^{\frac{1}{2}}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{x+y}=2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}$, т.е. . $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\geq\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}$. Конечно,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}=\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}\,.$$

**5.** Нека $a$, $b$, $c$ и $d$ се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2\,.$$

**Решение.** Ќе направиме трансформација со цел да добиеме квадрати во броителите, а потоа ќе го примениме Енгеловиот принцип на минимум:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{2ac+2bd+ab+bc+cd+da}$$

От друга страна $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ па значи

$$(a+b+c+d)^2-2(2ac+2bd+ab+bc+cd+da)=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$$
$$=(a-c)^2+(b-d)^2\geq 0$$
од каде следува бараното неравенство.

**6.** Докажи, дека ако за позитивните броеви $a$, $b$ и $c$ важи $a+b+c=1$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

**Решение.** Прво да забележиме дека од условот следува

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Сега од Енгеловиот принцип на миниму следува $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{a+2b+c}=\frac{4}{1+b}$. Аналогно $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{1+c}$ и $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{1+a}$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме дека

$$2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{4}{1+a}+\frac{4}{1+b}+\frac{4}{1+c},$$

од каде непосредно следува бараното неравенство.

**7.** Докажи, дека ако $a$, $b$ и $c$ са ненегативни броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.$$

**Решение.** Имаме

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}=\frac{a^3}{a^2b^2+a^2}+\frac{b^3}{b^2c^2+b^2}+\frac{c^3}{c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a})^2}{a^2b^2+a^2}+\frac{(b\sqrt{b})^2}{b^2c^2+b^2}+\frac{(c\sqrt{c})^2}{c^2a^2+c^2}.$$

Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+a^2+b^2c^2+b^2+c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}.$$

Сега од неравенството $1=(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ следува, дека $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1\leq\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$, односно $\frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}\geq\frac{3}{4}$. Конечно,

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.$$

**8.** Нека $x,y,z$ се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Докажи, дека

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geq 0.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geq 3.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$|z|=\max\{|x|,|y|,|z|\}.$$

Тогаш, од Енгеловиот принцип на минимум следува дека

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}\geq\frac{2(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1}=\frac{2(1-z)^2}{x^2+y^2+1}\geq\frac{2(1-z)^2}{2z^2+1}=3-\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geq 3,$$

што и требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=0$ или $(x,y,z)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$ и сите пермутации на $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$.

**9.** Нека $a,b$ и $c$ се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

**Решение.** Со смените $abc=k^3,\ a=\frac{ky}{x},\ b=\frac{kz}{y},\ c=\frac{kx}{z}$, за $k,x,y,z>0$ неравенството го добива видот $\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y}\geq\frac{3}{k^3+1}$. Сега Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x(ky+k^2z)+y(kz+k^2x)+z(kx+k^2y)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(k^2+k)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{k^2+k}\geq\frac{3}{k^3+1},$$

бидејќи $(x+y+z)^3\geq 3(xy+yz+zx)$ и $k^2+k\leq k^3+1$. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ и $k=1$, т.е. $a=b=c=1$.

**10.** Нека $a,b,c,d$ се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=8$. Докажи, дека

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8+b-d}}+\frac{b}{\sqrt[3]{8+c-a}}+\frac{c}{\sqrt[3]{8+d-b}}+\frac{d}{\sqrt[3]{8+a-c}}\geq 4.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Даденото неравенство го делиме со 4 и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+b-d)}}+\frac{b}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+c-a)}}+\frac{c}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+d-b)}}+\frac{d}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+a-c)}}\geq 1. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+b-d)}}+\frac{b}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+c-a)}}+\frac{c}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+d-b)}}+\frac{d}{\sqrt[3]{8\cdot8(8+a-c)}}\geq\frac{3a}{24+b-d}+\frac{3b}{24+c-a}+\frac{3c}{24+d-b}+\frac{3d}{24+a-c}. \qquad (2)$$

Ќе докажеме дека

$$\frac{3a}{24+b-d}+\frac{3b}{24+c-a}+\frac{3c}{24+d-b}+\frac{3d}{24+a-c}\geq 1. \qquad (3)$$

Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{3a}{24+b-d}+\frac{3b}{24+c-a}+\frac{3c}{24+d-b}+\frac{3d}{24+a-c}=\frac{3a^2}{a(24+b-d)}+\frac{3b^2}{b(24+c-a)}+\frac{3c^2}{c(24+d-b)}+\frac{3d^2}{d(24+a-c)}$$

$$\geq\frac{3(a+b+c+d)^2}{a(24+b-d)+b(24c-a)+c(24+d-b)+d(24+a-c)}$$

$$=\frac{3\cdot8^2}{24(a+b+c+d)}=\frac{3\cdot64}{24\cdot8}=1.$$

Конечно од неравенствата (2) и (3) следува неравенството (1), т.е. даденото неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=c,b=d$.

**11.** Нека $a,b$ и $c$ се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}}\le\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}.$$

**Решение.** Ќе докажеме дека изразот на левата страна на неравенството е помал или еднаков на 1, додека изразот на десната страна е поголем или еднаков на 1. Ако искористиме дека $abc=1$, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4ab^2c+4abc^2}}\ge\frac{a^2}{\sqrt{a^4+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+b^4)+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+c^4)}}$$
$$=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}\ge\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\text{ и }\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}\ge\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ги собираме последните три неравенства и добиваме дека

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}\ge 1.$$

Останува да докажеме дека изразот на левата страна е помал или еднаков на 1. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}\le\frac{1}{\sqrt{3ab^2+6}}=\sqrt{\frac{abc}{3ab^2+6abc}}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{b+2c}}$$
$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{c}{b+2c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{b}{b+2c}\right).$$

Аналогно ги добиваме неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{c}{c+2a}\right)\text{ и }\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{a}{a+2b}\right).$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства, тогаш од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}}\le\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}+\frac{a}{a+2b}\right)$$
$$\le\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{b(b+2c)+c(c+2a)+a(a+2b)}=1.$$

**12.** Дали постои низа позитивни броеви $a_1,a_2,...$ кои ги задоволуваат условите

1) $\sum_{i=1}^{n}a_i\le n^2$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и

2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\le 2008$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека таква низа постои. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{1}{a_{n+1}}+...+\frac{1}{a_{2n}}\ge\frac{n^2}{a_{n+1}+...+a_{2n}}\ge\frac{n^2}{a_1+...+a_{2n}}\ge\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4},$$

за секој $n\in\mathbb{N}$. Меѓутоа, од тука следува

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{a_i} \geq \frac{k}{4}, \text{ за } k = 1, 2, \dots,$$

што противречи на условот 2). Значи, не постои низа со бараните својства.

**13.** Нека $a, b$ и $c$ се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}. \tag{1}$$

**Решение.** *Прв начин.* Ако на двете страни на неравенството (1) го додадеме изразот $\frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} \geq \frac{3a+2b-c}{4} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4}$$

$$\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4}\right) \geq a + b.$$

Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина бидејќи

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = a \text{ и } \frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = b,$$

што значи дека е точно неравенството (1).

*Втор начин.* Од Енгеловиот принцип на минимум, кој гласи:

*Ако x и y се позитивни броеви и u и v се реални броеви, тогаш*

$$\frac{u^2}{x} + \frac{v^2}{y} \geq \frac{(u+v)^2}{x+y}$$

при $u = a, v = b, x = a + b$ и $y = b + c$ добиваме

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{(a+b)^2}{a+2b+c} = a + b - \frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}. \tag{2}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a+2b+c}{2} = \frac{(a+b)+(b+c)}{2} \geq \sqrt{(a+b)(b+c)},$$

па затоа $(a + 2b + c)^2 \geq 4(a + b)(b + c)$, т.е.

$$-\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \geq -\frac{a+2b+c}{4}.$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (2) следува

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq = a + b - \frac{a+2b+c}{4} = \frac{3a+2b-c}{4},$$

т.е. точно е неравенството (1).

*Трет начин.* За позитивните реални броеви $a$ и $b$ последователно се точни еквивалентните неравенства:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$4a^2 \geq 3a^2 + 3ab - b^2 - ab$$

$$4a^2 \geq (a+b)(3a-b)$$

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$$

и аналогно $\frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3b-c}{4}$. Конечно, ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството (1).

*Четврт начин*. Неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$4a^2(b+c)+4b^2(a+b) \geq (a+b)(b+c)(3a+2b-c)$$

$$a^2b-ab^2+a^2c+ac^2-b^2c+bc^2+2b^3-4abc \geq 0$$

$$b(a-c)^2+(a+c-2b)(ac-b^2) \geq 0. \qquad (3)$$

Ако $(a+c-2b)(ac-b^2) \geq 0$, тогаш точно е неравенството (3), што значи дека е точно и неравенството (1). Ќе докажеме дека неравенството (3) е точно и кога $(a+c-2b)(ac-b^2) < 0$. Можни се два случаја:

*Прв случај*. Ако $a+c-2b > 0$ и $ac-b^2 < 0$, тогаш $b < \sqrt{ac}$ и $\frac{a+c}{2} > b$, т.е. $G = \sqrt{ac} < b < \frac{a+c}{2} = A$. Бидејќи $a+c = 2A$ и $ac = G^2$, неравенството (3) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2A^2b-Ab^2+AG^2-3bG^2+b^3 \geq 0$$

$$Ab(A-b)+b(A^2-G^2)+G^2(A-b)+b(b^2-G^2) \geq 0.$$

Јасно, од $G < b < A$ следува точноста на последното неравенство, што значи дека е точно неравенството (3), т.е. точно е неравенството (1).

*Втор случај*. Ако $a+c-2b < 0$ и $ac-b^2 > 0$, тогаш $\frac{a+c}{2} < b < \sqrt{ac}$, што противречи на неравенствгото меѓу аритметичката и геометриската средина, па затоа овој случај не е е можен.

## 3. НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

**1.** Нека $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ и $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}} = 3$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2 \geq a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}. \qquad (1)$$

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \leq b \leq c$. Тогаш $a^{\frac{2}{3}} \leq b^{\frac{2}{3}} \leq c^{\frac{2}{3}}$ и $a^{\frac{4}{3}} \leq b^{\frac{4}{3}} \leq c^{\frac{4}{3}}$, па од неравенството на Чебишев и условот на задачата следува неравенството

$$\begin{aligned} 3(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}) &= (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}) \\ &\leq 3(a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}}) \end{aligned},$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

**2.** а) Нека $x_1 \geq x_2 \geq x_3 > 0$ и $0 < y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Докажи дека

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3} \geq 3\frac{x_1+x_2+x_3}{y_1+y_2+y_3}. \qquad (1)$$

б) Нека $\alpha,\beta,\gamma > 0$ и $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Докажи дека

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq\frac{9}{\pi}.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** а) Ако ставиме $a_i = x_i, b_i = \frac{1}{y_i}, i = 1,2,3$, тогаш од неравенството на Чебишев добиваме

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}\geq\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}). \tag{2}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за позитивните реални броеви $0 < y_1 \leq y_2 \leq y_3$ добиваме

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}\geq\frac{9}{y_1+y_2+y_3}. \tag{3}$$

Конечно, неравенството (1) следува од неравенствата (2) и (3).

б) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Ако во неравенството (1) ставиме

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1,\ y_1 = \alpha, y_2 = \beta,\ \ y_3 = \gamma$$

и земеме предвид дека $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, добиваме

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 3\frac{1+1+1}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{9}{\pi}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само во (1) важи знак за равенство, што значи ако и само ако во неравенствата (2) и (3) важи знак за равенство. Но, во (3) важи зна за равенство ако и само ако $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{\pi}{3}$.

**3.** Нека $a,b,c$ се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи, дека

$$\frac{9}{10}\leq\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}<1.$$

**Решение.** За десната страна на неравенството доволно е да забележиме дека именителите на дропките се поголеми од 1 и затоа $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}<a+b+c=1$.

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a\leq b\leq c$. Тогаш $\frac{1}{1+bc}\leq\frac{1}{1+ca}\leq\frac{1}{1+ab}$. Сега ако последователно ги примениме неравенството на Чебишев, неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и неравенството

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

добиваме дека

$$\begin{aligned}3(\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}) &\geq (a+b+c)(\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab})\\ &=\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab}\\ &\geq\frac{9}{3+ab+bc+ca}\\ &\geq\frac{9}{3+\frac{(a+b+c)^2}{3}}=\frac{27}{10}.\end{aligned}$$

**4.** Нека $a,b$ и $c$ се позитивни реални броеви такви, што $ab+bc+ca=1$. Докажи го неравенството

$$\sqrt{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \le \frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме, дека $a \ge b \ge c$. Тогаш $\frac{a}{bc} \ge \frac{b}{ca} \ge \frac{c}{ab}$ и од неравенството на Чебишев следува

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}),$$

а заради добро познатото неравенство $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$ имаме

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3abc}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека $(a+b+c)^2 \ge 9\sqrt{3}abc$. Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, т.е. имаме

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)^2 \cdot \sqrt{ab+bc+ca} \ge (3\sqrt[3]{abc})^2 \cdot \sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = 9\sqrt{3}abc.$$

**5.** Ако $a,b,c$ се ненегативни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{1}{2} \le \frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4} \le \frac{9\sqrt{3}}{10}. \tag{1}$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Левата страна на неравенството е очигледна. Имено,

$$\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4} \ge \frac{a+b+c}{2} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Знак за равенство важи за подредените тројки $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

За да го докажеме десното неравенство во (1), прво ќе го примениме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, потоа неравенството на Чебишев, повторно неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и ќе го искористиме условот $a^2+b^2+c^2=1$. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{10}{3}\left(\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}\right) &= \left(3+\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}\right)\left(\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}\right)\\ &\le (3+a^4+b^4+c^4)\left(\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}\right)\\ &= ((1+a^4)+(1+b^4)+(1+c^4))\left(\frac{a}{1+a^4}+\frac{b}{1+b^4}+\frac{c}{1+c^4}\right)\\ &\le (1+a^4)\frac{a}{1+a^4}+(1+b^4)\frac{b}{1+b^4}+(1+c^4)\frac{c}{1+c^4})\\ &= 3(a+b+c) \le 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

што значи дека е исполнето десното неравенство во (1).

Пред да го примениме неравенството на Чебишев треба да провериме дали од $x \le y$ и $x^2+y^2 \le 1$ следува $\frac{x}{1+x^4} \le \frac{y}{1+y^4}$, т.е. $(y-x)[xy(x^2+xy+y^2)-1] \le 0$. Последното неравенство следува од $0 \le y-x$ и од неравенството

$$xy(x^2+xy+y^2) \le \left(\frac{xy+x^2+xy+y^2}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^4}{4} = 4\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \le 4\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \le 4\cdot\frac{1}{4} = 1,$$

при чие докажување последователно ги применивме неравенствата меѓу аритметичката и геометриската средина и неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина.

**6.** Нека $a,b,c>0$ и $n\geq 1$. Докажи дека

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{3(a^n+b^n+c^n)}{2(a+b+c)}\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\leq b\leq c$. Тогаш $\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+b}$ и $a^n\leq b^n\leq c^n$, па од неравенството на Чебишев добиваме

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right). \qquad (2)$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ и $b+c,c+a,a+b$ добиваме

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9\,,$$

т.е.

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}\,. \qquad (3)$$

Конечно од неравенствата (2) и (3) следува неравенството (1).

**7.** Ако $a,b,c$ се позитивни реални броеви за кои важи $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$, докажи дека

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3}\geq 3\,.$$

**Решение.** *Прв начин.* Од неравенството меѓу средини од ред 5 и ред 3 за броевите $a,b,c$ имаме

$$\sqrt[5]{\frac{a^5+b^5+c^5}{3}}\geq\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\,.$$

па затоа

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3}\geq\left(\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\right)^2.$$

Сега, од неравенството меѓу средини од ред 3 и ред 2 добиваме дека важи $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$. Од неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина и од условот на задачата следува $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=3$.

Со тоа неравенството е докажано.

*Втор начин.* Без губење на општоста земаме $a\leq b\leq c$. Јасно, $a^2\leq b^2\leq c^2$ и $a^3\leq b^3\leq c^3$. Ако искористеме неравенство на Чебишев добиваме

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\leq\frac{a^5+b^5+c^5}{3}\,.$$

Значи,

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\,.$$

О првиот начин на решавање имаме $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 3$, што заедно со претходното неравенство годава бараното неравенство.

*Трет начин.* Од неравенство на Коши – Буњаковски – Шварц добиваме

$$a^{\frac{5}{2}}a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{5}{2}}c^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{a^5+b^5+c^5}\sqrt{a+b+c}$$

т.е.

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}.$$

Сега, од неравенството на Чебишев добиваме

$$\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3},$$

од каде следува дека

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = 3.$$

*Четврт начин.* Ќе докажеме дека

$$a^5+b^5+c^5 \geq a^3+b^3+c^3+2(a^3+b^3+c^3)$$

т.е.

$$a^5-a^3+b^5-b^3+c^5-c^3 \geq 2(a^3+b^3+c^3)$$

$$a^5(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})+b^5(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2})+c^5(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}) \geq 2(a^3+b^3+c^3)$$

односно

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{a^2}+\frac{a^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{b^2} \geq 2(a^3+b^3+c^3).$$

Доволно е да го докажеме неравенството $\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{a^2} \geq a^3+b^3$. Аналогно ќе важат и неравенствата $\frac{a^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2} \geq a^3+c^3$ и $\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{b^2} \geq b^3+c^3$. Бидејќи

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{a^2} \geq a^3+b^3 \Leftrightarrow a^7+b^7 \geq a^2b^2(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

следува дека доволно е да го докажеме последното неравенство. Имаме

$$\begin{aligned}
a^7+b^7 &= (a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)\\
&= (a+b)[a^5(a-b)+a^2b^2(a^2-ab+b^2)-b^5(a-b)]\\
&= (a+b)(a-b)(a^5-b^5)+(a+b)a^2b^2(a^2-ab+b^2)\\
&= (a+b)(a-b)^2(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)+(a+b)a^2b^2(a^2-ab+b^2)
\end{aligned}$$

Бидејќи $(a-b)^2 \geq 0$ го добиваме бараното неравенство.

**8.** Нека $a,b,c$ се позитивни реални броеви такви да $abc \geq 1$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3 \geq ab+bc+ca.$$

**Решение.** Од неравенството на Чебишев, неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, условот $abc \geq 1$ и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3} \geq \sqrt[3]{abc}(a^2+b^2+c^2) \geq ab+bc+ca.$$

**9.** Најди ги сите позитивни реални броеви $a,b,c$ такви да

$$4(ab+bc+ca)-1\ge a^2+b^2+c^2\ge 3(a^3+b^3+c^3)\,.$$

**Решение.** Од неравенството на Чебишев следува

$$3(a^3+b^3+c^3)\ge(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\,,$$

и како $a^2+b^2+c^2\ge 3(a^3+b^3+c^3)$ добиваме дека $a+b+c\le 1$. Од друга страна

$$4(ab+bc+ca)-1\ge a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\,,$$

па затоа

$$1\le 3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 1\,,$$

што значи дека $a+b+c=1$. Конечно, од $a+b+c=1$ и $3(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$ следува $a=b=c=\frac{1}{3}$.

**10.** Нека $a,b,c$ се реални броеви за кои $a+b+c=4$ и $a,b,c>1.$ Докажи дека

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}\ge 8\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

**Решение.** Бидејќи важи

$$\frac{1}{a-1}-\frac{8}{b+c}=\frac{1}{a-1}-\frac{8}{4-a}=\frac{12-9a}{(a-1)(4-a)}=\frac{3(4-3a)}{(a-1)(4-a)}$$

даденото неравенство е еквивалентно со

$$3\left(\frac{4-3a}{(a-1)(4-a)}+\frac{4-3b}{(b-1)(4-b)}+\frac{4-3c}{(c-1)(4-c)}\right)\ge 0.$$

Без губење на општоста нека претпоставиме дека $a\ge b\ge c.$ Тогаш јасно е дека важи

$$4-3a\le 4-3b\le 4-3c.$$

Од $1<a,b,c<4$ следува дека $\frac{1}{(a-1)(4-a)},\frac{1}{(b-1)(4-b)},\frac{1}{(c-1)(4-c)}$ се позитивни реални броеви. Ќе докажеме дека

$$(a-1)(4-a)\ge(b-1)(4-b).$$

Имаме

$$(a-1)(4-a)\ge(b-1)(4-b)\quad\Leftrightarrow\quad 5a-a^2\ge 5b-b^2\quad\Leftrightarrow\quad(a-b)(5-a-b)\ge 0$$

Аналогно

$$(b-1)(4-b)\ge(c-1)(4-c)\,.$$

Оттука следува дека

$$\frac{1}{(a-1)(4-a)}\le\frac{1}{(b-1)(4-b)}\le\frac{1}{(c-1)(4-c)}.$$

Бидејќи $4-3a\le 4-3b\le 4-3c$ можеме да го искористиме неравенство на Чебишев и добиваме:

$$\begin{aligned}&\frac{4-3a}{(a-1)(4-a)}+\frac{4-3b}{(b-1)(4-b)}+\frac{4-3c}{(c-1)(4-c)}\ge\\&\qquad\ge\frac{4-3a+4-3b+4-3c}{3}\cdot\left(\frac{1}{(a-1)(4-a)}+\frac{1}{(b-1)(4-b)}+\frac{1}{(c-1)(4-c)}\right)\\&\qquad=0.\end{aligned}$$

Равенство важи за $4-3a=4-3b=4-3c$, т.е. $a=b=c=\frac{4}{3}$.

**11.** Нека $a,b,c$ се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажете го неравенството

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2}\geq\frac{15}{4}.$$

**Решение.** Од $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$ имаме $a<1, b<1, c<1$, па затоа $0<a<1$, $0<b<1$ и $0<c<1$. Понатаму, даденото неравенство е симетрично во однос на $a,b$ и $c$, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $0<a\leq b\leq c$. Имаме $a^2\leq b^2\leq c^2<1$, т.е.

$$1+a^2\leq 1+b^2\leq 1+c^2 \text{ и } -a^2\geq -b^2\geq -c^2>-1$$

што значи

$$1-a^2\geq 1-b^2\geq 1-c^2>0,$$

т.е.

$$\frac{1}{1-a^2}\leq\frac{1}{1-b^2}\leq\frac{1}{1-c^2}.$$

Сега од неравенството на Чебишев за $n=3$ и од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2}&=(1+a^2)\frac{1}{1-a^2}+(1+b^2)\frac{1}{1-b^2}+(1+c^2)\frac{1}{1-c^2}\\&\geq\frac{1}{3}(1+a^2+1+b^2+1+c^2)(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\&=\frac{1}{3}(3+a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\&\geq\frac{1}{3}[3+\frac{1}{3}(a+b+c)^2](\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\&=\frac{1}{3}[3+\frac{1}{3}\cdot 1^2](\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\&=\frac{10}{9}(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}),\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2}\geq\frac{10}{9}(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}). \qquad (1)$$

Сега ќе докажеме дека

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}\geq\frac{27}{8}, \qquad (2)$$

за $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$. Повторно од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\cdot 1^2=\frac{1}{3},$$

па затоа $-(a^2+b^2+c^2)\leq-\frac{1}{3}$, т.е.

$$3-(a^2+b^2+c^2)\leq 3-\frac{1}{3}$$

односно

$$1-a^2+1-b^2+1-c^2\leq\frac{8}{3},$$

што значи

$$\frac{1}{1-a^2+1-b^2+1-c^2}\geq\frac{3}{8}. \qquad (3)$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}, \text{ т.е. } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z},$$

при $x=1-a^2$, $y=1-b^2$, $z=1-c^2$ и неравенството (3) имаме:

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2} \geq \frac{9}{1-a^2+1-b^2+1-c^2} \geq 9\cdot\frac{3}{8}=\frac{27}{8},$$

т.е. точно е неравенството (2).

Конечно, од неравенствата (1) и (2) следува

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2} \geq \frac{10}{9}\left(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}\right) \geq \frac{10}{9}\cdot\frac{27}{8}=\frac{15}{4},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$. Последното следува како од неравенството на Чебишев и фактот дека во неравенствата меѓу средините знак за равенство важи ако и само ако броевите се еднакви.

**12.** Нека $k$ е природен број и $x,y,z$ се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи, дека

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geq \frac{1}{7}.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \geq y \geq z$. Тогаш

$$x^{k+1}+y^k+z^k \leq y^{k+1}+z^k+x^k \leq z^{k+1}+x^k+y^k.$$

Навистина, доволно е да го докажеме првото неравенство, т.е. дека

$$x^{k+1}+y^k \leq y^{k+1}+x^k.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $(\frac{y}{x})^k \leq \frac{1-x}{1-y}$. Бидејќи $y \leq x$, доволно е да го докажеме неравенството $\frac{y}{x} \leq \frac{1-x}{1-y}$, кое е еквивалентно со точното неравенство

$$0 \leq x-x^2-y+y^2=(x-y)(1-x-y)=(x-y)z.$$

Од неравенството на Чебишев на тројките

$$(x^{k+2},y^{k+2},z^{k+2}) \text{ и } \left(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k},\frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k},\frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}\right),$$

добиваме

$$\sum_{cyc}\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k} \geq \frac{1}{3}\sum_{cyc}x^{k+2}\sum_{cyc}\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}=L.$$

Сега за $L$ повторно го применуваме неравенството на Чебишев, но на тројките $(x,y,z)$ и $(x^{k+1},y^{k+1},z^{k+1})$, па добиваме

$$L \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sum_{cyc}x\sum_{cyc}x^{k+1}\sum_{cyc}\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}=\frac{1}{9}\sum_{cyc}x^{k+1}\sum_{cyc}\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{cyc}(x^{k+1}+y^k+z^k)\sum_{cyc}\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} \geq 9,$$

па затоа

$$L' \geq \frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$3(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}) \geq x^k+y^k+z^k.$$

Последното неравенство следува од неравенството на Чебишев применето на тројките $(x,y,z)$ и $(x^k, y^k, z^k)$.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во сите применети неравенства важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

## 5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

**1.** Докажи дека $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0$ за секој реален број $x$.

**Решение.** Изразот $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x$ можеме да го запишеме во облик $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x = x[x^4(x-1)+x^2(x-1)+(x-1)] = x(x-1)(x^4+x^2+1)$.

Јасно е дека $x^4+x^2+1 \geq 1$, бидејќи $x^4, x^2 \geq 0$.

Ќе разгледаме два случаи.

а) $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Во овој случај $x^4+x^2+1 \geq 1$ и $x^2-x \geq 0$, па според тоа

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4} = (x^2-x)(x^4+x^2+1)+\frac{3}{4} \geq 0 \cdot 1+\frac{3}{4} > 0.$$

б) $x \in (0,1)$. Во овој случај $1 < x^4+x^2+1 < 3$ и

$$x^2-x = x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

и минимумот се достигнува за $x=\frac{1}{2} \in (0,1)$. Сега

$$(x^2-x)(x^4+x^2+1) > -\frac{1}{4}\cdot 3 = -\frac{3}{4},$$

од каде се добива неравенството во овој случај.

**2.** Да се докаже дека за кои било $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ од $[0,1]$ е точно неравенството

$$(x_1+x_2+x_3+...+x_n)^2 \geq 4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2)$$

**Решение.** Од $x \in [0,1]$ следува дека $x_i^2 \leq x_i$. Нека $S=\sum_{i=1}^{n} x_i$. Од $(S-1)^2 \geq 0$, имаме $(S+1)^2 \geq 4S$, односно

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i+1)^2 \geq 4\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

**3.** Нека $x$ и $y$ се ненегативни реални броеви такви што $x+y=3$. Да се докаже дека $xy^2<4$.

**Решение.** Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме

$$3=x+y=x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}>3\cdot\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}}\ ,$$

од каде што следува неравенството $xy^2<4$. Равенството се достигнува за $x=1$ и $y=2$.

**4.** Да се покаже дека за секои $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ важи:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx})\ .$$

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $\frac{x^2+yz}{2}\geq\sqrt{x^2yz}$ , па според тоа

$$\frac{1}{x^2+yz}\leq\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2yz}}=\frac{\sqrt{yz}}{2xyz}\leq\frac{1}{2xyz}\frac{y+z}{2}\ .$$

Аналогно добиваме $\frac{1}{y^2+zx}\leq\frac{1}{2xyz}\frac{z+x}{2}$ и $\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2xyz}\frac{x+y}{2}$. Со собирање на овие три неравенства го добиваме неравенството кое требаше да се покаже. Равенство се постигнува само во случај да $x=y=z$.

**5.** Определи ја најмалата вредност на изразот $\frac{1+x^2}{1+x}$, за $x\geq 0$.

**Решение.** Имаме

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x}=\frac{2+x^2-1}{1+x}=(x-1)+\frac{2}{x+1}=[\frac{2}{x+1}+(x+1)]-2\geq 2\sqrt{\frac{2}{x+1}(x+1)}-2=2\sqrt{2}-2\ .$$

Во последното неравенство знак за равенство важи ако и само ако $\frac{2}{x+1}=x+1$, т.е. ако и само ако $x=\sqrt{2}-1$. Според тоа, најмалата вредност на $\frac{1+x^2}{1+x}$, за $x\geq 0$ е еднаква на $2(\sqrt{2}-1)$ и истата се достигнува за $x=\sqrt{2}-1$.

**5.** Докажі дека за кои било позитивни реални броеви $a$ и $b$ важи неравенството

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{ab}\ .$$

**Решение.**Од неравенството меѓу аритгметичка и геометриска средина за пет позитивни реал ни броеви имаме:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}}=5\sqrt[5]{ab}\ .$$

**6.** Определи го најголемиот реален број $k$, за кој неравенството

$$(k+\frac{a}{b})(k+\frac{b}{c})(k+\frac{c}{a})\leq(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})$$

е исполнето за произволни позитивни реални броеви.

**Решение.** За $a=b=c$ добиваме $k\leq\sqrt[3]{9}-1$. Ќе докажеме, дека $k=\sqrt[3]{9}-1$ е бараниот број.

За $A=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $B=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $A\geq 3$ и $B\geq 3$. Понатаму, за секој реален број $k\geq 0$ точни се неравенствата

$$9(k^3+1)\leq (k^3+1)AB,\ 9k^2A\leq 3k^2AB,\ 9kB\leq 3kAB.$$

Ако ги собереме горните неравенства добуваме

$$9(k^3+k^2A+kB+1)\leq (k+1)^3AB \qquad \Leftrightarrow$$

$$9(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\leq (k+1)^3AB,$$

кое за $k=\sqrt[3]{9}-1$ е еквивалентно на даденото неравенство.

**7.** Определи го најмалиот реален број $M$ таков што неравенството

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\leq M(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (1)$$

важи за секои реални броеви $a,b$ и $c$.

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\geq b\geq c$. Да означиме $a-b=m, b-c=n, a+b+c=s$. Левата страна на неравенството (1) се разложува како

$$L=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)=mn(m+n)s,$$

а додека

$$a^2+b^2+c^2=\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{3}.$$

Бидејќи $(m+n)^2\leq \frac{2}{3}(m^2+n^2+(m+n)^2)$, од неравенството меѓу средните следува

$$2L^2\leq \frac{(m+n)^6s^2}{8}\leq s^2(\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3})^3\leq (\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{4})^4=\frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{4^4},$$

т.е.

$$L\leq \frac{9}{16\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $m=n$ и $s^2=\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}$, од каде лесно следува дека $a>b>c=(1+\frac{3}{\sqrt{2}}):1:(1-\frac{3}{\sqrt{2}})$. Значи, $M=\frac{9}{16\sqrt{2}}$.

**8.** Докажи, дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

за секои позитивни реални броеви $a,b,c$.

**Решение.** Ќе определиме константа $k>0$ така што

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k},\ \text{за секои } a,b,c>0. \qquad (1)$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2\geq a^{2k-2}(a^2+8bc),$$

т.е. со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2-a^{2k}\geq 8a^{2k-2}bc.$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a^k+b^k+c^k)^2-a^{2k}=(a^{2k}+b^k+c^k)(b^k+c^k)\ge 8a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{3k}{4}}c^{\frac{3k}{4}}.$$

Според тоа, неравенството (1) е исполнето за $k=\frac{4}{3}$. Сега, ако (1) го собереме со соодветните неравенства за $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ и $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ го добиваме бараното неравенство.

**9.** Нека $a, b$ и $c$ се позитивни реални броеви. Да се најде најголемиот природен број $n$ таков што

$$\frac{1}{ax+b+c}+\frac{1}{a+bx+c}+\frac{1}{a+b+cx}\ge\frac{n}{a+b+c},\text{ за секој } x\in[0,1].$$

**Решение.** Ако $x=1$, тогаш неравенството го добива обликот $\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{n}{a+b+c}$, и бидејќи $a+b+c>0$, добиваме $n\le 3$. Ќе покажеме дека $n=3$ е најголемиот природен број со бараното својство. Доволно е да докажеме дека

$$E(x)=\frac{1}{ax+b+c}+\frac{1}{a+bx+c}+\frac{1}{a+b+cx}\ge\frac{3}{a+b+c}$$

за секој $x\in[0,1]$.

За позитивните броеви $ax+b+c, a+bx+c, a+b+cx$ според неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина имаме

$$\frac{(ax+b+c)+(a+bx+c)+(a+b+cx)}{3}\ge\frac{3}{\frac{1}{ax+b+c}+\frac{1}{a+bx+c}+\frac{1}{a+b+cx}}$$

т.е.

$$E(x)=\frac{1}{ax+b+c}+\frac{1}{a+bx+c}+\frac{1}{a+b+cx}\ge\frac{9}{(a+b+c)(x+2)}=\frac{3}{a+b+c}\frac{3}{x+2}.$$

Но, за $x\in[0,1]$, имаме $x+2\le 3$, т.е. $\frac{3}{x+2}\ge 1$. Сега е јасно дека

$$E(x)\ge\frac{3}{a+b+c}\frac{3}{x+2}\ge\frac{3}{a+b+c}\cdot 1=\frac{3}{a+b+c}.$$

**10.** Нека $a$ и $b$ се позитивни реални броеви такви што $a<b$. Докажи, дека

$$2\sqrt{ab}\le\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}\le a+b,$$

за $x,y,z\in[a,b]$.

**Решение.** Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}\ge\sqrt[3]{xyz}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}\ge 2\sqrt{\sqrt[3]{xyz}\cdot\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}}=2\sqrt{ab}.$$

Од неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина следува

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}\le\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{3}[f(x)+f(y)+f(z)],$$

каде $f(t)=t+\frac{ab}{t}$, за $t\in(0,+\infty)$. Да забележиме дека

$$t(a+b-f(t))=t(a+b)-t^2-ab=(b-t)(t-a)\ge 0,\text{ за } t\in[a,b],$$

па според тоа $f(t)\le a+b$. Тогаш $f(x)+f(y)+f(z)\le 3(a+b)$, односно

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}\leq\frac{1}{3}[f(x)+f(y)+f(z)]\leq\frac{1}{3}3(a+b)=a+b,$$

што требаше да се докаже.

**11.** а) Докажи, дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1 \qquad (1)$$

за секои реални броеви $x,y,z$ такви шту ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

б) Докажи, дека знак за равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви $x,y,z$ такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

**Решение.** а) Воведуваме смена $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$ и условот на задачата го добива обликот $a+b+c=ab+bc+ca+1$, а неравенството (1) го добива обликот

$$a^2+b^2+c^2\geq 1. \qquad (2)$$

Понатаму, имаме

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+2\\&=(a+b+c-1)^2+1\geq 1,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (2), при што знак за равенство важи ако и само ако $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$.

б) Треба да докажеме, дека постојат бесконечно многу тројки $a,b,c\in\mathbb{Q}$ такви што $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$. Ако во второто равенство земниме $c=1-a-b$ добиваме $a^2+ab+b^2-a-b=0$. Во последното равенство земаме $b=ta$ и истото го добива обликот $(t^2+t+1)a^2=(t+1)a$, од каде наоѓаме $a=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ и $b=\frac{t^2+t}{t^2+t+1}$. Сега, $c=1-a-b=\frac{-t}{t^2+t+1}$. Според тоа, за $(a,b,c)=(\frac{t+1}{t^2+t+1},\frac{t^2+t}{t^2+t+1},\frac{-t}{t^2+t+1})$ важи знак за равенство за секој $t\in\mathbb{Q}$.

**12.** Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се реални броеви. За секој $i\in\{1,2,...,n\}$ нека

$$d_i=\max\{a_j\mid 1\leq j\leq i\}-\min\{a_j\mid i\leq j\leq n\}$$

и нека

$$d=\max\{d_i\mid 1\leq i\leq n\}.$$

а) Докажи, дека за произволни реални броеви $x_1\leq x_2\leq...\leq x_n$ важи

$$\max\{|x_i-a_i|\mid 1\leq i\leq n\}\geq\frac{d}{2}. \qquad (1)$$

б) Докажи дека, постојат реални броеви $x_1\leq x_2\leq...\leq x_n$ такви што во (1) важи знак за равенство.

**Решение.** а) Од условот на задачаа следува дека $d=a_k-a_l$ за некои $k\leq l$. Бидејќи

$$(x_l-a_l)-(x_k-a_k)=(a_k-a_l)+(x_l-x_k)\geq a_k-a_l=d \text{ и } d\geq 0$$

следува

$$2\max\{|x_k-a_k|,|x_l-a_l|\}\geq|x_l-a_l|+|x_k-a_k|=|(a_k-x_k)-(a_l-x_l)|\geq d\ ,$$

односно $\max\{|x_k-a_k|,|x_l-a_l|\}\geq\frac{d}{2}$, од каде следува а).

Јасно, низата која го задоволува б) зависи од изразите $M_i=\max\{a_j\,|\,1\leq j\leq i\}$ и $m_i=\min\{a_j\,|\,i\leq j\leq n\}$. Со цел да се минимизира изразот на левата страна во (1), природно е да земеме $x_i=\frac{M_i+m_i}{2}$, за $i=1,2,...,n$. Оваа низа го задоволува б), бидејќи

1) По конструкција низите $\{m_i\}_{i=1}^n$ и $\{M_i\}_{i=1}^n$ не опаѓаат, па затоа не опаѓа и $\{x_i\}_{i=1}^n$.
2) Ако $d_i=M_i-m_i$, тогаш

$$-\frac{d_i}{2}=\frac{m_i-M_i}{2}=x_i-M_i\leq x_i-a_i\leq x_i-m_i=\frac{M_i-m_i}{2}=\frac{d_i}{2}\ ,$$

т.е. $|x_i-a_i|\leq\frac{d_i}{2}\leq\frac{d}{2}$, па како важи а) добиваме дека во (1) важи знак за равенство.

**13.** Нека $n\geq3$ е природен број и нека се $x_i\geq0$, $i=1,2,...,n$ реални броеви за кои важи $x_1+x_2+...+x_n=1$. Да означиме

$$F_n=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2-2(x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1)\ .$$

Докажи дека

а) $\min F_3=-\frac{1}{3}$, б) $\min F_4=-\frac{1}{4}$, в) $\min F_5=-\frac{1}{5}$.

**Решение.** а) Од неравенството межу аритметичката и квадратната средина следува

$$\begin{aligned}F_3&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\\&=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2\\&\geq\tfrac{2}{3}(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1+x_2+x_3)^2=-\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}$.

б) Од нераваеснтвото меѓу аритметичката и квадратната средина и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}F_3&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2(x_1+x_3)(x_2+x_4)\\&\geq\tfrac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-3\tfrac{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}{4}=-\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$.

в) Нека

$$A=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1 \text{ и } B=x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_1+x_5x_2\ .$$

Тогаш неравенството

$$F_n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) \geq -\tfrac{1}{5}$$

последователно е еквивалентно со неравенствата

$$1 - 4A - 2B \geq -\tfrac{1}{5}$$

$$2A + B \leq \tfrac{3}{5}$$

$$2A + B \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2A + 2B - \tfrac{2}{5}$$

$$\tfrac{2}{5} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + B.$$

Последното неравенство следува од

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_1 + x_5x_2 = \\ & = \tfrac{1}{2}[(x_1+x_3)^2 + (x_2+x_4)^2 + (x_3+x_5)^2 + (x_4+x_1)^2 + (x_5+x_2)^2] \\ & \geq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{5}(x_1 + x_3 + x_2 + x_4 + x_3 + x_5 + x_4 + x_1 + x_5 + x_2)^2 = \tfrac{2}{5}. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{5}$.

**14.** Дадени се позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_{2015}$ такви што $a_1a_2...a_{2015} = 1$. Докажи, дека ако $\alpha > \beta > 0$ се рационални броеви, тогаш

$$\sum_{i=1}^{2015} a_i^{\alpha} \geq \sum_{i=1}^{2015} a_i^{\beta}.$$

**Решение.** Нека $\alpha = \frac{n}{q}, \beta = \frac{m}{q}$, каде $q, n, m \in \mathbb{N}$ и $n > m$. Ако ставиме $b_i = a_i^{\frac{1}{q}}$, тогаш $b_1b_2...b_{2015} = 1$ и затоа доволно е да докажеме дека ако $b_1b_2...b_{2015} = 1$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{2015} b_i^n \geq \sum_{i=1}^{2015} b_i^{n-1}. \qquad (1)$$

За секој $i = 1, 2, ..., 2015$ имаме

$$1 + \underbrace{b_i^n + b_i^n + ... + b_i^n}_{n-1} \geq n\sqrt[n]{1 \cdot b_i^n ... b_i^n} = nb_i^{n-1}.$$

Ако ги собереме последните неравенства добиваме

$$2015 + (n-1)\sum_{i=1}^{2015} b_i^n \geq n\sum_{i=1}^{2015} b_i^{n-1}.$$

Освен тоа,

$$\sum_{i=1}^{2015} b_i^{n-1} \geq 2015\sqrt[2015]{b_1^{n-1}b_2^{n-1}...b_n^{n-1}} = 2015.$$

Конечно, ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството (1).

# IV ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

## 1. ФУНКЦИИТЕ $\tau(n)$ И $\sigma(n)$

**1.** Колку делители има бројот 1200?

**Решение.** Го разложуваме бројот 1200 на прости множители, т.е. го запишуваме во каноничен вид:

$$1200 = 12 \cdot 10 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2 .$$

Сега за бројот на неговите делители добиваме

$$\tau(1200) = (4+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30 .$$

Значи, бројот 1200 има вкупно 30 делители.

**2.** Докажи дека $\tau(n)$ е непарен број ако и само ако $n$ е точен квадрат.

**Решение.** На секој делител $d$ на бројот $n$ кој е помал од $\sqrt{n}$ му соодветствува делител $\frac{n}{d}$ кој е поголем од $\sqrt{n}$ и обратно. Значи, за секој број $n$, бројот на неговите делители кои се различни од $\sqrt{n}$ е парен број. Според тоа, ако бројот на делителите на $n$ е непарен број, тогаш $\sqrt{n}$ е делител и обратно, ако $\sqrt{n}$ е делител, тогаш бројот на делителите на $n$ е непарен број.

**3.** Определи го бројот на подредените парови природни броеви $(m,k)$ за кои важи $20m = k(m-15k)$ .

**Решение.** Од условот на задачата имаме $m = \frac{15k^2}{k-20}$ . Според тоа, $m$ е природен број ако и само ако $k > 20$ и $k-20$ е делител на $15k^2$ . Бидејќи

$$\frac{15k^2}{k-20} = \frac{15k^2-20^2\cdot 15+20^2\cdot 15}{k-20} = \frac{15(k-20)(k+20)+20^2\cdot 15}{k-20} = 15(k+20) + \frac{6000}{k-20} ,$$

добиваме дека $m$ е природен број ако и само ако $k > 20$ и $k-20$ е делител на 6000. Понатаму, од $6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$, секој позитивен делител на бројот 6000 е од облик $2^a 3^b 5^c$ каде $a \in \{0,1,2,3,4\}$, $b \in \{0,1\}$ и $c \in \{0,1,2,3\}$ . Затоа бројот на позитивните делители на 6000 е еднаков на $5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$ , што значи дека бројот подредените парови кои го задоволуваат условот на задачата е днаков на 40.

**4.** Определи ги сите природни броеви $n$ кои имаат точно 12 делители $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{12} = n$ такви што делителот со индекс $d_4$ (т.е. $d_{d_4-1}$ е еднаков на $(d_1 + d_2 + d_4)d_8$ .

**Решение.** Јасно, постои $i \in \{1,2,...,12\}$ таков што $d_i = d_1 + d_2 + d_4$ . Од $d_i > d_4$ следува $i \geq 5$ . Исто така, бидејќи $d_j d_{13-j} = n$ и $d_i d_8 = d_{d_4-1} \leq n$ добиваме $i \leq 5$ , што значи дека $i = 5$ и $d_1 + d_2 + d_4 = d_5$ . Сега, $d_{d_4-1} = d_5 d_8 = n = d_{12}$ , па затоа $d_4 - 1 = 12$ , т.е. $d_4 = 13$ и $d_5 = 14 + d_2$ . Јасно, $d_2$ е најмалиот прост делител на $n$ и бидејќи $d_4 = 13$ можно е само $d_2 \in \{2,3,5,7,11\}$ . Понатаму, бидејќи $n$ има 12 делители, тој може да има најмногу 3 прости делители (зошто?). Ако $d_2 = 2$, тогаш $d_5 = 16$ и тогаш 4 и 8 се делители на $n$, помали од $d_4 = 13$, што не е можно. Со аналогни размислувања се докажува дека $d_2 = 3$ и $d_5 = 17$. Бидејќи $n$ има 12 делители и простите броеви 3, 13 и 17 се негови делители, заклучуваме дека можни решенија се $3^2 \cdot 13 \cdot 17, 3 \cdot 13^2 \cdot 17$ и $3 \cdot 13 \cdot 17^2$. Со непосредна проверка се добива дека само бројот $3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 1989$ е решение на задачата.

**5.** Определи ги сите решенија на равенката $\tau(n) = 60$.

**Решение.** Фактори на бројот 60 се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 и 60. За секој прост број $p_i$ имаме:

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} \neq 1, 2, 5, 10.$$

Од друга страна

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 3, \text{ за } p_i = 2,$$

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 4, \text{ за } p_i = 3,$$

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 6, \text{ за } p_i = 5,$$

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 12 \text{ за } p_i = 11,$$

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 15, \text{ за } p_i = 2,$$

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 20, \text{ за } p_i = 19,$$

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 30, \text{ за } p_i = 29,$$

$$1 + p_i + p_i^2 + ... + p_i^{a_i} = 60, \text{ за } p_i = 59.$$

Од $60 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 1 \cdot 60$ следува дека

$$\tau(n) = 60 = (1+2) \cdot (1+19) = (1+3) \cdot (1+2+2^2+2^3) = 1+59,$$

што значи дека решенијата на дадената равенка се

$$n = 2 \cdot 19 = 38, \ n = 3 \cdot 2^3 = 24 \text{ и } n = 59.$$

**6.** Докажи, дека броевите $\tau(m^n)$ и $n$ се заемно прости.

**Решение.** Нека $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$. Тогаш $m^n = p_1^{n\alpha_1} p_2^{n\alpha_2} ... p_k^{n\alpha_k}$ и

$$\tau(m^n) = (n\alpha_1 + 1)(n\alpha_2 + 1)...(n\alpha_k + 1),$$

па затоа $\text{NZD}(n\alpha_i + 1, n) = 1, i = 1, 2, ..., k$, од што следува дека $\tau(m^n)$ и $n$ се заемно прости.

**7.** Најди природен број кој е делив со 12 и има 14 делители.

**Решение.** Бројот $n$ е делив со 12, па значи е делив со 2 и со 3. Од друга страна $\tau(n) = 14 = 2 \cdot 7 = (1+1)(6+1)$, па затоа $n = 2^{a_1} 3^{a_2}$, при што $a_1 \geq 2$ и $a_2 \geq 1$. Според тоа, $a_1 = 6$ и $a_2 = 1$, па е $n = 2^6 \cdot 3 = 192$.

**8.** Природниот број $n$ има два прости делители, а бројот $n^2$ има вкупно 15 делители. Колку делители има бројот $n^3$ ?

**Решение.** Од условот на задачата имаме $n = p^a q^b$, каде $p$ и $q$ се прости броеви, $n^2 = p^{2a} q^{2b}$ и $(2a+1)(2b+1) = 15$. Од последната равенка добиваме $2a+1=3$, $2b+1=5$, т.е. $a=1, b=2$. Конечно, бројот $n^3 = p^{3a} q^{3b}$ има $(3a+1)(3b+1) = 4\cdot 7 = 28$ делители.

**9.** Нека $n$ е природен број. Докажи, дека ако $n^5 + n^4 + 1$ има точно 6 различни природни делители, тогаш $n^3 - n + 1$ е точен квадрат на природен број.

**Решение.** Еден природен број има точно шест природни делители ако и само ако нагoвиот каноничен запис е $p^5$ или $pq^2$, каде $p$ и $q$ се прости броеви.

Имаме

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) .$$

Понатаму, од

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$$

следува дека $n^2 + n + 1$ не е точен квадрат. Нека со $d$ го означиме најголемиот заеднички делител на $n^2 + n + 1$ и $n^3 - n + 1$. Тогаш последователно добиваме

$$d \mid n(n^2 + n + 1) - (n^3 - n + 1) = n^2 + 2n - 1$$

$$d \mid n^2 + 2n - 1 - (n^2 + n + 1) = n - 2$$

$$d \mid n^2 + n + 1 - n(n-2) = 3n + 1$$

$$d \mid 3n + 1 - 3(n-2) = 7.$$

Според тоа, $d = 1$ или $d = 7$.

*Прв случај*. Ако $d = 1$, тогаш $(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = pq^2$ и единствена можност е

$$n^3 - n + 1 = q^2 \text{ и } n^2 + n + 1 = p ,$$

При што првото од овие две равенства е тврдењето на задачата. Еден пример се добива за $n = 3$.

*Втор случај*. Ако $d = 7$ и

$$(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = pq^2 \text{ или } p^5 ,$$

тогаш еден од множителите од лево е еднаков на 7. Лесно се гледа дека во овој случај немаме решение.

**10.** Природниот број $n$ има само три прости делители: 2, 3 и 5. Определи го бројот $n$ ако

$$\tau(\tfrac{n}{2}) = \tau(n) - 30 ,\ \tau(\tfrac{n}{3}) = \tau(n) - 35 \text{ и } \tau(\tfrac{n}{5}) = \tau(n) - 42 .$$

**Решение.** Нека $n = 2^a 3^b 5^c$. Тогаш

$$\tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\tau(\tfrac{n}{2}) = a(b+1)(c+1)$$
$$\tau(\tfrac{n}{3}) = (a+1)b(c+1)$$
$$\tau(\tfrac{n}{5}) = (a+1)(b+1)c$$

па од условот на задачата следува дека

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)(c+1) &= a(b+1)(c+1)+30\\ &= (a+1)b(c+1)+35\\ &= (a+1)(b+1)c+42,\end{aligned}$$

од каде го добиваме системот

$$\begin{aligned}(b+1)(c+1) &= 30\\ (a+1)(c+1) &= 35\\ (a+1)(b+1) &= 42.\end{aligned}$$

Решение на последниот систем е $a=6, b=5, c=4$, па затоа бараниот број е $n = 2^6 3^5 5^4 = 9720000$.

**11.** Определи ги сите природни броеви кои имаат точно шест делитили, чиј збир е еднаков на 3500.

**Решение.** Ако $n$ е природен број кој има точно шест делители, тогаш $n = p^5$, каде $p$ е прост број или $n = p^2 q$, каде $p$ и $q$ се различни прости броеви. Во првиот случај имаме $1+p+p^2+...+p^5 = 3500$, т.е.

$$p(1+p+...+p^4) = 3449 . \tag{1}$$

Бројот 3449 не е делив со 2, 3, 5 и 7, па затоа $p \geq 11$. Но, тогаш левата страна на (1) е поголема од 3449, што значи дека равенката (1) нема решение во множеството природни броеви.

Во вториот случај имаме $1+p+q+pq+p^2+p^2q = 3500$, т.е.

$$(1+p+p^2)(1+q) = 5^3 \cdot 7 \cdot 4 . \tag{2}$$

Јасно, бројот

$$1+p+p^2 = 1+p(p+1)$$

е непарен и не се дели со 5, па затоа од $1+p+p^2 > 1$ следува $1+p+p^2 = 7$, т.е. $p=2$. Според тоа, $q=499$. Броевите 2 и 499 се прости и бараниот број е $2^2 \cdot 499 = 1996$.

**12.** Определи ги сите природни броеви $n$ такви што $8\tau(n^2) = 27\tau(n)$.

**Решение.** Очигледно $n \neq 1$ и нека $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ е каноничното разложување на $n$. Тогаш даденото равенство можеме да го запишеме во видот

$$\frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} \cdot ... \cdot \frac{2a_r+1}{a_r+1} = (\tfrac{3}{2})^3 . \tag{1}$$

Понатаму, $\frac{3}{2} \le \frac{2a_i+1}{a_i+1} < 2$ за секој $a_i$ при што знак за равенство на левата страна важи само кога $a_i = 1$. Тогаш од (1) следува дека $2^r > (\frac{3}{2})^3 \ge (\frac{3}{2})^r$, од каде заклучуваме дека $2 \le r \le 3$.

За $r = 3$ имаме $a_i = 1, i = 1,2,3$, од што го добиваме решението $n = p_1 p_2 p_3$ каде $p_1, p_2$ и $p_3$ се различни прости броеви.

Нека $r = 2$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 \ge a_2$, од каде следува $\frac{2a_1+1}{a_1+1} \ge \frac{2a_2+1}{a_2+1}$. Тогаш од (1) добиваме

$$\frac{2(2a_2+1)}{a_2+1} > \frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} = (\frac{3}{2})^3 = \frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} \ge (\frac{2a_2+1}{a_2+1})^2 .$$

Од последните неравенства лесно следува дека $3 \le a_2 \le 5$. Во секој од случаите $a_2 = 3,4,5$ добиваме линеарна равенка по $a_1$ при што ги добиваме решенијата $(a_1, a_2) = (13,3)$ и $(7,4)$, т.е. $n = p_1^{13} p_2^3$ и $n = p_1^7 p_2^4$, каде $p_1$ и $p_2$ се различни прости броеви.

**13.** Докажи, дека ако $n$ е сложен природен број, тогаш

$$\sigma(n) \ge n + \sqrt{n} + 1.$$

**Решение.** Природниот број $n$ има делител $d$ таков што $d \ne 1$ и $d \le \sqrt{n}$. Но, $\frac{n}{d}$ исто така е делител на $n$ за кој важи $\frac{n}{d} \ge \sqrt{n}$. Затоа

$$\sigma(n) = \sum_{k|n} k \ge 1 + n + \frac{n}{d} \ge n + \sqrt{n} + 1 .$$

**14.** Докажи дека:

а) $\sum_{d|n} d^k = \sum_{d|n} (\frac{n}{d})^k$ , б) $\tau(n) < 2\sqrt{n}$ , и

в) $\sqrt{n} \le \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$, $n > 1$.

**Решение.** а) Равенството следува од фактот дека, ако $d$ е делител на бројот $n$, тогаш и $\frac{n}{d}$ е делител на бројот $n$, и обратно.

б) Ако $n$ не е полн квадрат, тогаш неговите делители ги групираме во парови од видот $(d, \frac{n}{d})$, $d < \frac{n}{d}$, кои ги има помалку од $\sqrt{n}$. Ако $n$ е полн квадрат, тогаш $\tau(n) \le 2(\sqrt{n} - 1) + 1 < 2\sqrt{n}$.

в) Од

$$\sigma(p^a) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} = 1 + p + p^2 + ... + p^a \ge (a+1) p^{\frac{a}{2}} = \tau(p^a) p^{\frac{a}{2}}$$

добиваме $\frac{\sigma(p^a)}{\tau(p^a)} \ge \sqrt{p^a}$ и ако ја искористиме мултипликативноста на функциите $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ добиваме $\sqrt{n} \le \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$.

**15.** Нека $p$ и $q$ се различни прости броеви. Докажи, дека постојат природни броеви $a$ и $b$ такви што аритметичката средина од сите делители на бројот $n=p^a q^b$ е природен број.

**Решение.** Според теорема 4.7 имаме $\sigma(n)=\frac{(p^{a+1}-1)(q^{b+1}-1)}{(p-1)(q-1)}$, $\tau(n)=(a+1)(b+1)$, па затоа аритметичката средина од сите делители на бројот $n=p^a q^b$ е

$$M=\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}=\frac{(p^{a+1}-1)(q^{b+1}-1)}{(p-1)(q-1)(a+1)(b+1)}.$$

Ако $p$ и $q$ се непарни прости броеви, тогаш $p^2-1\,|\,p^{p+1}-1$ и $q^2-1\,|\,q^{q+1}-1$, па затоа доволно е да земеме $a=p$ и $b=q$. Ако $p=2$ и $q$ е непарен, тогаш за $b=q$ и $a=q^{q-1}+q^{q-3}+...+q^2$ имаме

$$(p-1)(q-1)(a+1)(b+1)=(q-1)(q+1)(q^{q-1}+q^{q-3}+...+q^2+1)=q^{q+1}-1=q^{b+1}-1,$$

па затоа $M=p^{a+1}-1=2^{a+1}-1$ е природен број. Аналогно, ако $p$ е непарен и $q=2$, тогаш за $a=p$ и $b=p^{p-1}+p^{p-3}+...+p^2$ имаме $M=q^{b+1}-1=2^{b+1}-1$, т.е. е природен број, со што задачата е решена.

**16.** Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви $n$ такви да $\sigma(n)=2n-1$.

**Решение.** За секој природен број $k$ важи $\sigma(2^k)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}=2^{k+1}-1=2\cdot 2^k-1$, што значи дека броевите $2^k$, $k=1,2,3,...$ го имаат бараното својство.

**17.** Определи го најмалиот број од облик $2^a p_1 p_2$, каде $p_1$ и $p_2$ се непарни прости броеви, чиј збир на делители е трипати поголем од самиот број.

**Решение.** Равенката $\sigma(m)=3m$ при $m=2^a p_1 p_2$ го добива обликот

$$(2^{a+1}-1)(1+p_1)(1+p_2)=3\cdot 2^a p_1 p_2$$

За $a=0$ имаме $(1+p_1)(1+p_2)=3p_1p_2$ или $1+p_1+p_2=2p_1p_2$ што не е можно бидејќи левата страна е непарен, а десната парен број. Значи, $a\neq 0$.

За $a=1$ имаме $(1+p_1)(1+p_2)=2p_1p_2$ што не е можно бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 4, а десната страна не е делива со 4. Значи $a>1$.

За $a=2$ имаме $7(1+p_1)(1+p_2)=12p_1p_2$ или $7+7(p_1+p_2)=5p_1p_2$. Оттука $p_1=7$, $p_2=2$, што не е можно.

За $a=3$ имаме $5(1+p_1)(1+p_2)=8p_1p_2$ или $5+5(p_1+p_2)=3p_1p_2$. Одтука $p_1=5$, $p_2=3$. Според тоа, најмалиот природен број со бараното својство е $m=2^3\cdot 3\cdot 5=120$.

**18.** Определи ги сите природни броеви $n$ за кои $8\tau(n^2)=27\tau(n)$.

**Решение.** Очигледно $n \neq 1$ и нека $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ е каноничното разложување на $n$. Тогаш даденото равенство можеме да го запишеме во видот

$$\frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} \cdot ... \cdot \frac{2a_r+1}{a_r+1} = (\tfrac{3}{2})^3 . \qquad (1)$$

Понатаму, $\frac{3}{2} \leq \frac{2a_i+1}{a_i+1} < 2$ за секој $a_i$ при што знак за равенство на левата страна важи само кога $a_i = 1$. Тогаш од (1) следува дека

$$2^r > (\tfrac{3}{2})^3 \geq (\tfrac{3}{2})^r ,$$

од каде заклучуваме дека $2 \leq r \leq 3$.

За $r = 3$ имаме $a_i = 1, i = 1,2,3$, од што го добиваме решението $n = p_1 p_2 p_3$ каде $p_1, p_2$ и $p_3$ се различни прости броеви.

Нека $r = 2$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 \geq a_2$, од каде следува $\frac{2a_1+1}{a_1+1} \geq \frac{2a_2+1}{a_2+1}$. Тогаш од (1) добиваме

$$\frac{2(2a_2+1)}{a_2+1} > \frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} = (\tfrac{3}{2})^3 = \frac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \frac{2a_2+1}{a_2+1} \geq (\frac{2a_2+1}{a_2+1})^2 .$$

Од последните неравенства лесно следува дека $3 \leq a_2 \leq 5$. Во секој од случаите $a_2 = 3,4,5$ добиваме линеарна равенка по $a_1$ при што ги добиваме решенијата $(a_1, a_2) = (13,3)$ и $(7,4)$, т.е. $n = p_1^{13} p_2^3$ и $n = p_1^7 p_2^4$, каде $p_1$ и $p_2$ се различни прости броеви.

**19.** Низата природни броеви $a_1, a_2, ...$ го задоволува равенството

$$a_{n+1} = a_n + 2\tau(n) \text{, за секој } n \geq 1.$$

Дали е можно два последователни членови на оваа низа да се точни квадрати?

**Решение.** Не! Очигледно низата $a_1, a_2, ...$ строго расте. Нека претпоставиме дека $a_n = x^2$ и $a_{n+1} = y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$. Тогаш од равенството $a_{n+1} = a_n + 2\tau(n)$ следува дека $x$ и $y$ се со еднаква парност и важи

$$2\tau(n) = a_{n+1} - a_n = y^2 - x^2 \geq (x+2)^2 - x^2 = 4x + 4 \text{, т.е. } \tau(n) \geq 2x + 2 .$$

Но, $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$, па затоа $\sqrt{n} \geq x + 1 > x = \sqrt{a_n}$, т.е. $n > a_n$, што очигледно не е можно, бидејќи $a_1$ е природен број и низата $a_1, a_2, ...$ строго расте.

**20.** За секој $n \in \mathbb{N}$ нека $f(n)$ е бројот на природните броеви $m, m \leq n$ за кои $\sigma(m)$ е непарен број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви $n$ такви што $f(n) \mid n$.

**Решение.** Ако $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ е факторизацијата на бројот $n$ на прости множители, тогаш $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + ... + p_i^{r_i})$. Бројот $\sigma(n)$ е непарен ако и само ако сите множители $1 + p_i + ... + p_i^{r_i}$ се непарни, што е еквивалентно со $p_i = 2$ или

$2 | r_i$. Според тоа, $\sigma(n)$ е непарен ако и само ако $n$ или $\frac{n}{2}$ е квадрат на природен број, од што следува $f(n) = [\sqrt{n}] + [\sqrt{\frac{n}{2}}]$.

Важи $f(n) \le f(n+1)$ за секој $n$. Исто така, количникот $\frac{n}{f(n)}$ не е ограничен, па затоа за секој $k \in \mathbb{N}$ постои најмал $n = n_k$ за кој $\frac{n}{f(n)} \ge k$. За $k > 1$ важи $n_k > 1$ и $\frac{n_k - 1}{f(n_k - 1)} < k$, од каде следува $n_k \ge kf(n_k) \ge kf(n_k - 1) > n_k - 1$. Ова е можно само ако првите две неравенства всушност се равенства, т.е. $f(n_k) | n_k = kf(n_k)$. Сите броеви $n_k$ се различни, со што тврдењето е докажано.

**21.** Нека $p, q$ се различни прости броеви. Докажи дека постојат природни броеви $a, b$ така што аритметичката средина на сите природни делители на бројот $n = p^a q^b$ е природен број.

**Решение.** Збирот на сите делители на бројот $n$ е
$\sigma(n) = (1 + p + p^2 + .... + p^a)(1 + q + q^2 + ... + q^b)$.
Бројот $n$ има $(a+1)(b+1)$ природни делители па затоа нивната аритметичка средина е

$$s = \frac{(1+p+p^2+....+p^a)(1+q+q^2+...+q^b)}{(a+1)(b+1)}.$$

Ако $p$ и $q$ се непарни броеви избираме $p = a,\ q = b$ и лесно се гледа дека $s$ е природен број. Ако $p = 2$ и $q$ е непарен број, тогаш избираме

$$b = q,\ a + 1 = 1 + q^2 + ... + q^{q-1}.$$

Во овој случај $s = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^a$. Аналогно се избира ако $p$ е непарен и $q = 2$ .

## 2. ФУНКЦИИТЕ $[x]$ И $\{x\}$

**1.** Нека $a, b, c, d$ се позитивни реални броеви такви што $cd = 1$. Докажи дека постои природен број $n$, таков што

$$ab \le n^2 \le (a+c)(b+d).$$

**Решение.** Од својствата на функцијата $[x]$ имаме

$$\sqrt{ab} \le [\sqrt{ab}] + 1 = [\sqrt{ab} + 1] \le \sqrt{ab} + 1.$$

Доволно е да докажеме дека

$$\sqrt{ab} + 1 \le \sqrt{(a+c)(b+d)}.$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, имаме

$$\frac{ad+bc}{2} \ge \sqrt{abcd} = \sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} \le ad + bc.$$

Сега

$$(a+c)(b+d)=ab+ad+bc+cd=ab+ad+bc+1$$
$$\geq ab+2\sqrt{ab}+1=(\sqrt{ab}+1)^2$$
$$\sqrt{ab}+1\leq\sqrt{(a+c)(b+d)}\,.$$

Значи, доволно е да земеме $n=[\sqrt{ab}]+1$.

**2.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$4x^2-20[x]+9=0\,.$$

**Решение.** Важи

$$4x^2-20[x]+9\geq 4x^2-20x+9=(2x-9)(2x-1)$$

па затоа

$$(2x-9)(2x-1)\leq 0\,,\text{ т.е. } \tfrac{1}{2}\leq x\leq\tfrac{9}{2}\,.$$

Затоа $0\leq[x]\leq 4$ и важи $x=\frac{1}{2}\sqrt{20[x]-9}$. Ако замениме $[x]=0,1,2,3,4$ добиваме дека за $[x]=0$ равенката нема решение, а во останатите четири случаи добиваме по една вредност која ја задоволува почетната равенка:

$$x=\tfrac{\sqrt{11}}{2},\; x=\tfrac{\sqrt{31}}{2},\; x=\tfrac{\sqrt{51}}{2},\; x=\tfrac{\sqrt{71}}{2}\,.$$

**3.** а) Ако $\text{NZD}(a,4)=1$, тогаш

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=\tfrac{3a-3}{2}\,.$$

Докажи!

б) Докажи дека

$$[\tfrac{4}{p}]+[\tfrac{6}{p}]+\ldots+[\tfrac{2(p-1)}{p}]=[\tfrac{p+1}{4}]\,,$$

каде $p$ е непарен прост број.

**Решение**. а) Од условот во задачата имаме $a=4q+1$ или $a=4q+3$. Во првиот случај

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=q+2q+3q=6q=\tfrac{3a-3}{2}\,.$$

Во вториот случај

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=q+(2q+1)+(3q+2)=6q+3=\tfrac{3a-3}{2}\,.$$

б) За $p=3$ тврдењето е очигледно точно. Ако $p>3$, тогаш $p=4n+1$ или $p=4n+3$. Бидејќи $[\frac{4}{p}]=0$ и $[\frac{2(p-1)}{p}]=[1+\frac{p-2}{p}]=1$, добиваме дека во збирот од левата страна имаме само нули и единици, при што собираме $\frac{p-1}{2}$ броеви.

За да го определиме бројот на нулите од левата страна доволно е во собирокот од облик $[\frac{2\cdot 2x}{p}]=[\frac{4x}{p}]$ да ставиме $4x<p$ или $x<\frac{p}{4}$. Значи, $x=[\frac{p}{4}]$. Според тоа, бројот на собраните единици е $\frac{p-1}{2}-[\frac{p}{4}]$, т.е. $n$ ако $p=4n+1$ или $n+1$ ако $p=4n+3$. Но, $[\frac{p+1}{4}]$ е еднаков на $n$ ако $p=4n+1$ или $n+1$ за $p=4n+3$.

**4.** Во множеството $\mathbb{R}$ реши ја равенката

$$[x[x]]=1\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Од на функцијата цел дел имаме $1\le[x[x]]<2$. Можни се следниве случаи:

а) Ако $x\in(-\infty,-1)$, тогаш $[x]\le-2$ и $[x[x]]>2$, т.е. $x$ не е решение на (1).

б) Ако $x=-1$, тогаш $[x]=-1$ и $[x[x]]=1$, т.е. $x=-1$ е решение на (1).

в) Ако $x\in(-1,0)$, тогаш $[x]=-1$ и $x[x]=-x<1$, т.е. $x$ не е решение на (1).

г) Ако $x\in[0,1)$, тогаш $[x]=0$ и $x[x]=0<1$, т.е. $x$ не е решение на (1).

д) Ако $x\in[1,2)$, тогаш $[x]=1$ и $[x[x]]=[x]=1$, т.е. $x$ е решение на (1).

е) Ако $x\ge2$, тогаш $[x]\ge2$ и $[x[x]]>2$, т.е. $x$ не е решение на (1).

Конечно, $x\in\{-1\}\cup[1,2)$.

**5.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$[\tfrac{2x-1}{3}]+[\tfrac{4x+1}{6}]=\tfrac{5x-4}{3}\,.$$

**Решение.** За секој реален број $r$ важи $r-1<[r]\le r$, па затоа

$$\tfrac{2x-1}{3}-1<[\tfrac{2x-1}{3}]\le\tfrac{2x-1}{3}$$
$$\tfrac{4x+1}{6}-1<[\tfrac{4x+1}{6}]\le\tfrac{4x+1}{6}.$$

Според тоа,

$$\tfrac{2x-1}{3}-1+\tfrac{4x+1}{6}-1<[\tfrac{2x-1}{3}]+[\tfrac{4x+1}{6}]\le\tfrac{2x-1}{3}+\tfrac{4x+1}{6}$$
$$\tfrac{2x-1}{3}-1+\tfrac{4x+1}{6}-1<\tfrac{5x-4}{3}\le\tfrac{2x-1}{3}+\tfrac{4x+1}{6}$$
$$-\tfrac{5}{2}<x\le\tfrac{7}{2}.$$

Левата страна на почетната равенка е цел број, па затоа мора да биде и десната. Затоа постои $k\in\mathbb{Z}$ таков што $\frac{5x-4}{3}=k$, т.е. $x=\frac{3k+4}{5}$. Сега, бидејќи $-\frac{5}{2}<x\le\frac{7}{2}$ добиваме дека единствени можни вредности за $x$ се

$$-\tfrac{11}{5},-\tfrac{8}{5},-1,-\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{5},\tfrac{4}{5},\tfrac{7}{5},2,\tfrac{13}{5},\tfrac{16}{5}\,.$$

Со замена во почетната равенка се добива дека нејзини решенија се

$$x\{-\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{5},\tfrac{4}{5},\tfrac{7}{5},2\}\,.$$

**6.** Докажи дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$[x+\tfrac{1}{2}]=[2x]-[x]\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Секој реален број $x$ може да се запише во облик $x=k+\alpha$ или $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$ каде што $k\in\mathbb{Z}$ и $0\le\alpha<\frac{1}{2}$.

Ако $x=k+\alpha$, тогаш

$$[k+\alpha+\tfrac{1}{2}]=k\,;\ [2k+2\alpha]=2k\,;\ [k+\alpha]=k\,,$$

па затоа точно е равенството (1).

Ако $x=k+\alpha+\frac{1}{2}$, тогаш

$$[k+\alpha+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}]=k+1;\ [2k+2\alpha+1]=2k+1;\ [k+\alpha+\tfrac{1}{2}]=k\,,$$
па затоа точно е равенството (1).

**7.** Реши ја равенката $[\frac{25x-2}{4}]=\frac{13x+4}{3}$.

**Решение.** Нека $\frac{13x+4}{3}=y$. Оттука $x=\frac{3y-4}{13}$. Ако замениме во равенката, добиваме $[\frac{25\cdot\frac{3y-4}{13}-2}{4}]=y$, односно $[\frac{75y-126}{52}]=y$. Следува $y\le\frac{75y-126}{52}<y+1$, од каде $126\le 23y\le 178$ или $\frac{126}{23}\le y<\frac{178}{23}$. Бидејќи $y$ е цел број следува дека $y_1=6$ или $y_2=7$. Оттука $x_1=\frac{14}{13}$ или $x_2=\frac{17}{13}$, и тоа се решенијата на дадената равенка.

**8.** Нека $n\in\mathbb{N}$. Пресметај го збирот
$$[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+...+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]+....$$
**Решение.** Од задача 6 следува
$$\begin{aligned}[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+...+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]+... &=[\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}]+[\tfrac{n}{4}+\tfrac{1}{2}]+...+[\tfrac{n}{2^{k+1}}+\tfrac{1}{2}]+...\\ &=[n]-[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{2}]-[\tfrac{n}{4}]+...+[\tfrac{n}{2^k}]-[\tfrac{n}{2^{k+1}}]+...\\ &=n,\end{aligned}$$
бидејќи почнувајќи од $k=[\log_2 n]+1$ сите собироци во разгледуваниот збир се еднакви на 0.

**9.** Најди го целиот дел на збирот
$$S_n=\sqrt{2}+\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}+\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}}+...+\sqrt[n+1]{\tfrac{n+1}{n}}.$$

**Решение.** Бидејќи $1<\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}<2$ следува дека $S_n>n$. Ќе докажеме дека $S_n<n+1$, од каде што ќе следува дека $[S_n]=n$.

Применувајќи го неравенството на Коши меѓу аритметичка и геометриска средина за $k+1$ броеви од видот $1+\frac{1}{k},\underbrace{1,1,1,1,\dots 1}_{k}$ го добиваме неравенството

$$\sqrt[k+1]{(1+\tfrac{1}{k})\cdot 1\cdots 1}<\frac{1+\frac{1}{k}+1+1+\ldots+1}{k+1}.$$
$$\sqrt[k+1]{1+\frac{1}{k}}<\frac{1+\frac{1}{k}+k}{k+1}=1+\frac{1}{k(k+1)}.$$
Ставајќи за $k$ вредности од 1 до $n$ добиваме
$$\sqrt{2}<1+\tfrac{1}{1\cdot 2},\quad \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}<1+\tfrac{1}{2\cdot 3},\ldots,\sqrt[n+1]{\tfrac{n+1}{n}}<1+\tfrac{1}{n(n+1)}.$$
Ако ги собереме овие неравенства добиваме
$$S_n<n+\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\tfrac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n < n+\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}$$
$$S_n < n+1-\tfrac{1}{n+1} < n+1.$$

Значи, $S_n < n+1$, па тогаш $[S_n]=n$.

**10.** На колку нули завршува бројот $1993!$?

**Решение.** Ако $N$ е бараниот број нули, тогаш е $1993!=10^N M$, $M$ е природен број кој не е делив со 10. Бидејќи $10=2\cdot 5$ добиваме $N=\min\{N_1,N_2\}$, каде

$$N_1=[\tfrac{1993}{5}]+[\tfrac{1993}{5^2}]+[\tfrac{1993}{5^5}]+[\tfrac{1993}{5^4}]+[\tfrac{1993}{5^5}]+\ldots=495$$

и

$$N_1=[\tfrac{1993}{2}]+[\tfrac{1993}{2^2}]+[\tfrac{1993}{2^3}]+\ldots+[\tfrac{1993}{2^{10}}]+[\tfrac{1993}{2^{11}}]+\ldots=1986\,.$$

Значи, $N=495$, т.е. бројот $1993!$ завршува на 495 нули.

**11.** Најди ја тринаесеттата цифра од десно на производот на сите броеви од 1 до 50.

**Решение.** *Прв начин.* Да го разложиме бројот $50!$ на прости множители; имаме

$$50!=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot 11^e\cdot 13^f\cdot 17^2\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 43\cdot 47.$$

За одредување на показателите $a, b,\ldots$ ќе го користиме тврдењето: Ако $p$ е прост број, $n$ е природен број и $\alpha$ е најголемиот природен број за кој $p^\alpha$ е делител на $n!$, тогаш

$$\alpha=[\tfrac{n}{p}]+[\tfrac{n}{p^2}]+[\tfrac{n}{p^3}]+\cdots$$

Според тоа имаме

$$a=[\tfrac{50}{2}]+[\tfrac{50}{2^2}]+[\tfrac{50}{2^3}]+[\tfrac{50}{2^4}]+[\tfrac{50}{2^5}]=25+12+6+3+1=47.$$

Значи, најголемиот број $a$, за кој $2^a\,|\,50!$ е $47$, т.е. $2^{47}\,|\,50!$.

$$b=[\tfrac{50}{3}]+[\tfrac{50}{9}]+[\tfrac{50}{27}]=16+5+1=22\,,$$

$c=12$, $d=8$, $e=4$, $f=3$, па имаме

$$50\,!=2^{47}\cdot 3^{22}\cdot 5^{12}\cdot 7^8\cdot 11^4\cdot 13^3\cdot 17^2\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 43\cdot 47=10^{12}m.$$

Следствено, бројот $50!$ завршува на $12$ нули, а неговата тринаесетта цифра од десно е, всушност, последната цифра на бројот

$$m=2^{35}\cdot 3^{22}\cdot 7^8\cdot 11^4\cdot 13^3\cdot 17^2\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 43\cdot 47.$$

Доволно е да ја одредиме последната цифра на секој од множителите на бројот $m$. Бројот:

$2^{35}=(2^4)^8\cdot 2^3=(16)^8\cdot 8$ завршува на $8$,

$3^{22}=(3^4)^5\cdot 3^2=(81)^5\cdot 9$ завршува на $9$,

$7^8=(7^2)^4=(49)^4$ завршува на $1$, и.т.н.

Следствено, последната цифра на бројот $m$ се совпаѓа со последната цифра на производот:

$$8\cdot 9\cdot 1\cdot 1\cdot 7\cdot 9\cdot 1\cdot 9\cdot 9\cdot 1\cdot 7\cdot 1\cdot 3\cdot 7$$

а тоа е цифрата $2$.

Значи, тринаесеттата цифра од десно на бројот $50!$ е $2$.

*Втор начин.* Ако го издвоиме производот

$$5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot25\cdot30\cdot35\cdot40\cdot45\cdot50\cdot2^{\ 5}=2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot9\cdot10^{12}$$

заклучуваме дека тој завршува со $12$ нули. Затоа производот на преостанатите броеви и бројот $1134=2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot9$ ќе ја даде последната цифра, која ќе биде тринаесетта цифра на бројот $50!$. Последната цифра ја добиваме како последна цифра од производот на единиците на овие броеви. Нив ги групираме во пет групи и заклучуваме дека бројот

$$(1\cdot(3\cdot4)\cdot(6\cdot7)\cdot(8\cdot9))^5$$

завршува на иста цифра како и бројот $2^3$, т.е. на $8$. Конечно, последната цифра ја одредуваме од производот $1134\cdot8\cdot(1\cdot6\cdot11\cdot16\cdot21)$, а тоа е цифрата $2$.

**12.** Да се најде најмалиот природен број $n$ таков што $n!$ во својот декаден запис има точно 100 нули.

**Решение.** Бројот $n!$ има онолку нули колку што бројот пет се јавува како множител (бидејќи секоја петка помножена со 2 дава множител 10, т.е. во факториелот би се појавила нула). Значи, го бараме најмалиот природен број $n$, т.ш.

$$[\tfrac{n}{5}]+[\tfrac{n}{5^2}]+[\tfrac{n}{5^3}]+...=100\,.$$

Бидејќи $[\frac{n}{5}]\le100$, т.е. $n\le504$ следува дека првите четири собироци се позитивни, додека останатите ќе бидат нули, т.е.

$$[\tfrac{n}{5}]+[\tfrac{n}{5^2}]+[\tfrac{n}{5^3}]+[\tfrac{n}{5^4}]=100\,.$$

Од последната равенка добиваме:

$$\tfrac{n}{5}+\tfrac{n}{5^2}+\tfrac{n}{5^3}+\tfrac{n}{5^4}\ge100,\quad \text{т.е.}\quad 156n\ge62500,$$

од каде $n\ge401$. Со проверка добиваме дека најмалиот природен број е $n=405$, бидејќи

$$[\tfrac{405}{5}]+[\tfrac{405}{5^2}]+[\tfrac{405}{5^3}]+[\tfrac{405}{5^4}]=81+16+3+0=100\,,$$

додека

$$[\tfrac{404}{5}]+[\tfrac{404}{5^2}]+[\tfrac{404}{5^3}]+[\tfrac{404}{5^4}]=80+16+3+0=99\,.$$

**13.** а) Докажи, дека ако $m,n\in\mathbb{N}$, тогаш количникот при делењето на $m$ со $n$ е еднаков на $[\frac{m}{n}]$.

б) Докажи, дека ако $a,b,c\in\mathbb{N}$, тогаш

$$[\frac{[\frac{c}{a}]}{b}]=[\tfrac{c}{ab}]\,.$$

**Решение.** а) Нека $m=nq+r,\ 0\le r<n$. Имаме

$$[\tfrac{m}{n}]=[q+\tfrac{r}{n}]=q+[\tfrac{r}{n}]=q\,,$$

бидејќи $0\le\frac{r}{n}<1$.

б) Нека $[\frac{c}{a}]=q$ и $[\frac{q}{b}]=q_1$. Тогаш $c=qa+r,\ q=q_1b+r_1$, каде $0\le r<a$ и $0\le r_1<b$. Според тоа, $c=q_1ab+(r+r_1a)$, каде $0\le r+r_1a<ab$, бидејќи важи $a\le r+r_1a\le a-1+(b-1)a=ab-1<ab$. Конечно,

$$[\tfrac{c}{ab}]=q_1=[\tfrac{q}{b}]=[\tfrac{[\frac{c}{a}]}{b}].$$

**14.** Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви $n$ такви што $\sqrt{n}$ не е цел број, и $n$ е делив со $[\sqrt{n}]$.

**Решение.** Нека $m$ е произволен природен број. Тогаш за броевите $m^2+m$ и $m^2+2m$ имаме $m^2<m^2+m<m^2+2m<(m+1)^2$. Според тоа,

$$m<\sqrt{m^2+m}<\sqrt{m^2+2m}<m+1.$$

Значи

$$[\sqrt{m^2+m}]=[\sqrt{m^2+2m}]=m,$$

па затоа ако избереме $n=m^2+m$ или $n=m^2+2m$, добиваме дека

$$[\sqrt{n}]=m\,|\,m^2+m=n \text{ или } [\sqrt{n}]=m\,|\,m^2+2m=n,$$

од што следува трвдењето на задачата.

**15.** Докажи дека $x+[\frac{n}{x}]\ge 2[\sqrt{n}]$, за секои $x,n\in\mathbb{N}$.

**Решение**. Од очигледното неравенство $x+\frac{n}{x}\ge 2\sqrt{n}$ следува

$$x+[\tfrac{n}{x}]=[x+\tfrac{n}{x}]\ge[2\sqrt{n}]\ge 2[\sqrt{n}].$$

**16.** Определи ги сите позитивни реални броеви $a$ такви, што за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$[a[(a+1)n]]=n-1. \tag{1}$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $n=1$ добиваме дека треба да најдеме реален број $a>0$ таков, што

$$0<a\le a[a+1]<1. \tag{2}$$

Понатаму, од (1) и (2) следува, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$n-1\le a[(a+1)n]<n$$

$$\tfrac{n-1}{a}\le[(a+1)n]<\tfrac{n}{a}$$

$$\tfrac{n-1}{a}\le(a+1)n<\tfrac{n}{a}+1$$

$$1-\tfrac{1}{n}\le a(a+1)<1+\tfrac{1}{n},$$

од каде заклчуваме дека $a(a+1)=1$. Но, $a>0$, па од последното равенство следува дека $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Јасно, за $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$a[(a+1)n]<a(a+1)n=n \text{ и } a[(a+1)n]>a((a+1)n-1)=n-a>n-1,$$

па затоа за секој $n\in\mathbb{N}$ е исполнето равенството (1).

**17.** Докажи, дека за секој реален број $a$ и за секој природен број $n$ важи

$$n[a] \le [na] \le n[a] + n - 1. \qquad (1)$$

**Решение.** Имаме $[a] \le a < [a]+1$. Бидејќи $n$ е природен број добиваме

$$n[a] \le na < n[a] + n,$$

т.е.

$$[n[a]] \le [na] < [n[a] + n]. \qquad (2)$$

Но, $[n[a]] = n[a]$ и $[n[a]+n] = n[a]+n$, па затоа од (2) следува

$$n[a] \le [na] < n[a] + n,$$

што значи дека важи (1).

**18.** Докажи, дека за секој позитивен број $x$ важи

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}].$$

**Решение**. Од $[\sqrt{x}] \le \sqrt{x}$ добиваме $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] \le [\sqrt{\sqrt{x}}]$. Нека за некој $x > 0$ важи $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] < [\sqrt{\sqrt{x}}]$, т.е. постои природен број $n$ таков што

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = n \text{ и } [\sqrt{\sqrt{x}}] = n+1.$$

Тогаш $n \le \sqrt{[\sqrt{x}]} < n+1 \le \sqrt{\sqrt{x}}$, т.е. $[\sqrt{x}] < (n+1)^2 \le \sqrt{x}$, што не е можно бидејќи од $(n+1)^2 \le \sqrt{x}$ следува $(n+1)^2 \le [\sqrt{x}]$, што е противречност.

**19.** Реши ги равенките (по $x$ односно по $x$ и $y$).

а) $[x] = |x|$; б) $[x] \cdot [a] = 0$; в) $[x][y] = 1$.

**Решение.** а) Од $[x] = |x|$ следува дека $|x|$ е цел број, а оттука и $x$ е цел број. Бидејќи $|x| \ge 0$ ќе следува дека и $[x] \ge 0$, т.е. $x \ge 0$. Обратно, ако $x \ge 0$ е цел број, тогаш важи равенството $[x] = x = |x|$. Следствено решение на дадената равенка е секој ненегативен цел број.

б) Ако $[a] = 0$, т.е. $0 \le a < 1$, тогаш $[x]$ е произволен број, па решение на равенката е секој реален број.

Ако $[a] \ne 0$, тогаш $[x] = 0$, а оттука $0 \le x < 1$, т.е. решение на равенката е интервалот $[0,1)$.

в) Бидејќи $[x]$ и $[y]$ се цели броеви, тогаш $[x] = 1, [y] = 1$ или $[x] = -1$, $[y] = -1$. Оттука, $x \in [1, 2), y \in [1, 2)$ или $x \in [-1, 0), y \in [-1, 0)$.

**20.** Реши ја равенката

$$\{x\} - \{2013x\} = x.$$

**Решение.** Равенката е еквивалентана со $-\{2013x\} = x - \{x\}$, односно

$$[x] = -\{2013x\}.$$

Бидејќи $\{2013x\} \in [0,1)$, следува $[x] \in (-1,0]$ односно $[x] = 0$. Следува $x \in [0,1)$. Имајќи предвид дека $\{2013x\} = 0$, следува дека решенијата се

$$x = \tfrac{k}{2013}, \ k \in \{0,1,...,2012\}.$$

**21.** а) Дади пример на број $a$ таков што $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=1$.

а) Докажи, дека таков број $a$ не може да биде рационален.

**Решение.** а) Да го разгледаме бројот $a=2+\sqrt{3}$. Имаме, $\frac{1}{a}=2-\sqrt{3}$, па затоа

$$\{a\}+\{\tfrac{1}{a}\}=\{2+\sqrt{3}\}+\{2-\sqrt{3}\}=\sqrt{3}-1+(2-\sqrt{3})=1,$$

и тоа е бараниот пример.

б) Да претпоставиме дека бројот $a$ е рационален и истиот да го претставиме како дропка $a=\frac{m}{n}$. Ако $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=1$, тогаш очигледно $a+\frac{1}{a}$ е цел број, да го означиме со $k$. Според тоа $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=k$, па затоа $m^2+n^2=kmn$. Оттука следува дека $n\,|\,m^2$ и $m\,|\,n^2$ и како $m$ и $n$ се заемно прости тоа е можно ако и само ако $|m|=|n|=1$, т.е. ако и само ако $a=\pm 1$. Но во овој случај $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=0$, што е противречност, па затоа бројот $a$ не може да е рационален.

**22.** За позитивниот реален број $a$ важи $\{\frac{1}{a}\}=\{a^2\}$ и $2<a^2<3$. Определи ја вредноста на изразот $a^{12}-\frac{144}{a}$.

**Решение.** Од условот на задачата следува дека $a>1$, а оттука следува дека $0<\frac{1}{a}<1$, што значи дека $\{\frac{1}{a}\}=\frac{1}{a}$. Понатаму, од $2<a^2<3$ добиваме дека $\{a^2\}=a^2-2$, па затоа бројот $a$ е позитивен корен на равенката $\frac{1}{a}=a^2-2$, т.е. на равенката

$$(a+1)(a^2-a-1)=0. \tag{1}$$

Единствен позитивен корен на равенката е $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Сега, користејќи го фактот дека $a^2=a+1$ имаме

$$a^3=a^2+a=2a+1$$

$$a^6=(2a+1)^2=4a^2+4a+1=4(a+1)+4a+1=8a+5$$

$$a^{12}=(8a+5)^2=64a^2+80a+25=64(a+1)+80a+25=144a+89$$

$$a^{13}=a(144a+89)=144a^2+89a=144(a+1)+89a=233a+144.$$

Од последното равенство следува

$$a^{12}-\frac{144}{a}=\frac{a^{13}-144}{a}=233.$$

**23.** Докажи, дека не постои рационален број $x$ таков што $\{x^2\}+\{x\}=1$. Определи барем еден реален број $x$ кој е решение на оваа равенка.

**Решение.** Нека $x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z},\ \mathrm{NZD}(p,q)=1$. Тогаш

$$\{x^2\}+\{x\}=\{\tfrac{p^2}{q^2}\}+\{\tfrac{p}{q}\}=\frac{m}{q^2}+\frac{n}{q}=\frac{m+nq}{q^2}, \tag{1}$$

за некои $m,n\in\mathbb{N}$, каде $m<q^2, n<q$ и $\text{NZD}(m,q)=\text{NZD}(n,q)=1$, што значи дека десната страна на (1) е нескратлива дропка. Нејзината вредност може да биде еднаква на 1 ако и само ако $q=1$, но тогаш $x=p\in\mathbb{Z}$, па затоа $\{x^2\}+\{x\}=0$, што значи дека дадената равенка нема решение во множеството рационални броеви.

Ќе определиме $x\in(0,1)$ таков што $\{x^2\}+\{x\}=1$. Имаме $x^2+x=1$, па затоа $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ е еден реален број кој е решение на дадената равенка.

**24.** Пресметај го збирот

$$S_{1997}=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+[\sqrt{4}]+...+[\sqrt{1997}].$$

**Решение.** Во збирот $S_{1997}$:

- собирокот $1$ се јавува $2^2-1^2=3$ пати
- собирокот $2$ се јавува $3^2-2^2=5$ пати

……………………………………………..

- собирокот $43$ се јавува $44^2-43^2=87$ пати, и
- собирокот $44$ се јавува $1998-43^2=62$ пати.

Според тоа, имаме

$$\begin{aligned}S_{1997}&=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+...+44\cdot62\\&=1\cdot(1+2\cdot1)+2\cdot(1+2\cdot2)+3\cdot(1+2\cdot3)+...+43\cdot(1+2\cdot43)+44\cdot62\\&=\tfrac{43\cdot44}{2}+\tfrac{43\cdot44\cdot87}{2}+44\cdot62=58542.\end{aligned}$$

**25.** Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\sum_{k=1}^{n}k[\tfrac{n}{k}], \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}[\tfrac{n}{k}]([\tfrac{n}{k}]+1). \tag{2}$$

**Решение.** Бројот $k$ е делител во $[\frac{n}{k}]$ случаи и нивниот збир е $k[\frac{n}{k}]$, па затоа важи (1).

Броевите кои се помали или еднакви на $n$ и се деливи со $k$ се: $k,2k,...,k[\frac{n}{k}]$. Сега равенството (2) се добива ако се искористи равенството $\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}$.

**26.** (*Ермит*). Докажи, дека

$$\sum_{k=0}^{n-1}[x+\tfrac{k}{n}]=[nx],\text{ за секој } n\in\mathbb{N} \text{ и за секој } x\in\mathbb{R}.$$

**Решение.** Бидејќи $0\le\{x\}<1$, постои природен број $j$, $0\le j\le n$ таков што $\frac{j-1}{n}\le\{x\}<\frac{j}{n}$. Тогаш,

$$[x]=[x+\frac{1}{n}]=...=[x+\frac{n-j}{n}]$$

и

$$[x+\frac{n-j+1}{n}]=[x+\frac{n-j+2}{n}]=...=[x+\frac{n-1}{n}]=[x]+1.$$

Според тоа,

$$\sum_{k=0}^{n-1}[x+\frac{k}{n}]=n[x]+j-1=[nx].$$

**27.** Докажи, дека, за секој природен број $n\geq 2$ е исполнето равенството

$$\tau(n)=\sum_{k=1}^{n}([\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}]).$$

**Решение.** Имаме

$$[\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}]=\begin{cases}1, & \text{ако } k\mid n\\ 0, & \text{ако } k\nmid n,\end{cases}$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}([\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}])=\sum_{k|n}1=\tau(n).$$

**Забелешка.** Бидејќи $n$ е прост број ако и само ако $\tau(n)=2$, од претходната задача следува дека $n$ е прост број ако и само ако

$$\sum_{k=1}^{n}([\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}])=2.$$

**28.** Нека $n$ е природен број и $x$ е позитивен реален број, таков што ниту еден од броевите $x,2x,...,nx$ и ниту еден од броевите $\frac{1}{x},\frac{2}{x},...,\frac{[nx]}{x}$ не е цел број.

Докажи, дека е точно равенството

$$[x]+[2x]+...+[nx]+[\frac{1}{x}]+[\frac{2}{x}]+...[\frac{[nx]}{x}]=n[nx]. \quad (1)$$

**Решение.** Бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на нула е еднаков на бројот $k$, за кој важи $kx<1<(k+1)x$, а тоа е бројот $[\frac{1}{x}]$. Бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на 1 е еднаков на бројот на целите броеви $k$ за кои важи $1<kx<2$, а тој број е еднаков на $[\frac{2}{x}]-[\frac{1}{x}]$. Воопшто, за секој $1<r<[nx]$ бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на $r$ е еднаков на $[\frac{r+1}{x}]-[\frac{r}{x}]$. На крајот, ако $[nx]=L$, тогаш бројот на собироците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на $L$ е еднаков на $n-[\frac{L}{x}]=n-[\frac{[nx]}{x}]$. Затоа е точно равенството

$$\begin{aligned}[x]+[2x]+...+[nx]&=0\cdot[\frac{1}{x}]+1\cdot([\frac{2}{x}]-[\frac{1}{x}])+2\cdot([\frac{3}{x}]-[\frac{2}{x}])+...+[nx]\cdot(n-[\frac{[nx]}{x}])\\&=-[\frac{1}{x}]-[\frac{2}{x}]-...-[\frac{[nx]}{x}]+n[nx],\end{aligned}$$

кое е еквивалентно на равенството (1).

**29.** Докажи, дека за секој природен број $k \geq 2$ постои реален број $x \neq 0$ таков што $k = \frac{[x]\{x\}}{x}$.

**Решение.** Јасно е дека $x < 0$, бидејќи ако претпоставиме дека $x > 0$ од неравенствата $\{x\}[x] < [x] \leq x$ следува $k = \frac{[x]\{x\}}{x} < 1$, што противречи на $k \geq 2$.

Нека $[x] = -p$, $p > 0$. Тогаш бараме $p$ таков што $0 \leq \{x\} = \frac{kp}{k+p} < 1$. Првото неравенство е точно за секој $p$, а второто е точно за $p < \frac{k}{k-1}$. Но, $p$ е природен број и затоа $p = 1$, т.е. $[x] = -1$. Тогаш $\{x\} = \frac{k}{k+1}$ или $x = -\frac{1}{k+1}$.

**30.** Докажи, дека меѓу произволни 20 последователни природни броеви постои број $d$ таков што неравенството

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2}$$

важи за секој природен број $n$.

**Решение.** Бидејќи за $m = [n\sqrt{d}]$ важи

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} = n\sqrt{d}\,(n\sqrt{d} - m) = n\sqrt{d}\,\frac{dn^2-m^2}{n\sqrt{d}+m} > n\sqrt{d}\,\frac{dn^2-m^2}{2n\sqrt{d}} = \frac{dn^2-m^2}{2},$$

доволно е да се избере $d$ таков што за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи $dn^2 - m^2 \notin \{1,2,3,4\}$. Последното може да се постигне ако земеме $d = 20k + 15 = 4(4k+3)$, за $k \in \mathbb{N}_0$. Навистина, тогаш $m^2 + 2$ и $m \;+3$ не се деливи со 5, додека $m^2 + 1$ и $m^2 + 4$ немаат делители од облик $4k + 3$, па затоа ниту еден од броевите $m^2 + 1$, $m^2 + 2$, $m^2 + 3$ и $m^2 + 4$ не може да е делив со $d$.

**31.** Дадени се равенките

$$[x]^3 + x^2 = x^3 + [x]^2 \text{ и } [x^3] + x^2 = x^3 + [x^2].$$

Докажи, дека

а) целите броеви се единствени решенија на првата равенка,

б) за втората равенка постои решение кое не е цел број.

**Решение.** а) Нека $x$ ја задоволува равенката $[x]^3 + x^2 = x^3 + [x]^2$. Тогаш за $t = [x]$ и $\alpha = x - t$ имаме

$$t^3 + t^2 = (t+\alpha)^3 + (t+\alpha)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(\alpha^2 + (3t-1)\alpha + 3t^2 - 2t) = 0 .$$

Затоа $\alpha = 0$ или $\alpha$ е корен на квадратниот полином во заградата. Во вториот случај дискриминантата $(3t+1)(t-1)$ треба да е ненегативна и бидејќи $t$ е цел број имаме $t = 0$ или $t = 1$. Тогаш $\alpha = 0, \alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Но, $\alpha \in [0,1)$, па затоа $\alpha = 0$, т.е. $x$ е цел број.

б) Степенот на полиномот $y^3 - y^2 - 1$ е непарен, па затоа тој има барем едн реален корен $\alpha$, кој очигледно не е цел број (всушност реалниот корен е единствен и припаѓа на интервалот $(1,2)$). Тогаш $[\alpha^3] = [\alpha^2 + 1] = [\alpha^2] + 1$, па затоа $[\alpha^3] - [\alpha^2] = 1 = \alpha^3 - \alpha^2$.

**32.** Определи ги сите реални броеви $a$ такви што $4[an]=n+[a[an]]$, за секој природен број $n$.

**Решение.** Од условот следува дека

$$4(an-1)<a+a(an) \text{ и } 4an>n+a(an-1)-1$$

т.е.

$$1+a^2-\frac{a+1}{n}<4a<1+a^2+\frac{4}{n}.$$

Но, $n$ е произволен природен број, па од последните неравенства следува $1+a^2=4a$, од каде добиваме $a=2-\sqrt{3}$ или $a=2+\sqrt{3}$. Ако во условот замениме $n=1$ добиваме дека првиот случај не е можен. Во вториот случај ставаме $b=[\frac{n}{a}]$ и $c=\frac{n}{a}-b$. Бидејќи $a=4-\frac{1}{a}$, важи

$$\begin{aligned} n+[a[an]] &= [n+a[4n-\tfrac{n}{a}]]=[n+a(4n-b-1)] \\ &= [a(4n-1+c)]=[(4-\tfrac{1}{a})(4n-1+c)] \\ &= [4(4n-1)-4(\tfrac{n}{a}-c)+\tfrac{1-c}{a}]=4(4n-1-b) \\ &= 4[4n-\tfrac{n}{a}]=4[an]. \end{aligned}$$

Според тоа, единствено решение на задачата е $a=2+\sqrt{3}$.

**33.** Определи ги сите природни броеви $n$ такви што $[\frac{n}{k}+k]=[2\sqrt{n}]+1$, каде $k=[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}]$.

**Решение.** Ќе докажеме дека бараните броеви се од видот $n=l(l-1)$, каде $l\geq 2$ е природен број.

За $n=l(l-1)$ имаме $k=[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}]=l$, па затоа $[\frac{n}{k}+k]=2l-1$, а бидејќи

$$(2l-2)^2<4l(l-1)<(2l-1)^2$$

имаме $[2\sqrt{n}]=2l-2$, т.е. равенството од условот е исполнето.

Ќе докажеме дека за $n\neq l(l-1)$ е исполнето равенството $[\frac{n}{k}+k]=[2\sqrt{n}]$. Во тој случај $k$ е најголемиот природен број за кој $k(k-1)<n$.

Ако претпоставиме дека за некој природен број $l$ е исполнето неравенството $\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\geq l>\frac{\sqrt{4n}+1}{2}$, тогаш $1+4n\geq(2l-1)^2>4n$, па затоа $1+4n=(2l-1)^2$, т.е. $n=l(l-1)$, што е противречност. Според тоа,

$$k=[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}]=k=[\frac{\sqrt{4n}+1}{2}]=[\sqrt{n}+\frac{1}{2}],$$

т.е. $k=[\sqrt{n}]$ или $k=[\sqrt{n}]+1$.

Имаме $k(k-1)<n<k(k+1)$. Ќе разгледаме три случаи.

1) Ако $k(k+1)>n>k^2$, тогаш $[\frac{n}{k}]=k$ и $\sqrt{n}>k$, па затоа $\{\sqrt{n}\}<\frac{1}{2}$. Оттука $2[\sqrt{n}]=[2\sqrt{n}]$ и затоа $[\frac{n}{k}]+k=2k=2[\sqrt{n}]=[2\sqrt{n}]$.

2) Ако $k^2 > n > k(k-1)$, тогаш $[\frac{n}{k}] = k-1$ и $k > \sqrt{n}$, па затоа $k = [\sqrt{n}]+1$. Оттука $\{\sqrt{n}\} > \frac{1}{2}$, т.е. $2[\sqrt{n}] = [2\sqrt{n}]-1$. Значи,

$$[\tfrac{n}{k}] + k = 2k-1 = 2([\sqrt{n}]+1)-1 = 2[\sqrt{n}]+1 = [2\sqrt{n}].$$

3) Ако $n = k$ , тогаш повторно $[\frac{n}{k}] + k = 2k = [2\sqrt{n}]$.

Според тоа, во сите случаи важи $[\frac{n}{k}] + k = [2\sqrt{n}]$.

**34.** Определи ги сите прости броеви $p$, за кои

$$[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}]$$

е прост број.

**Решение.** За $p=2$ имаме

$$[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}] = [\tfrac{5}{2}]+[\tfrac{6}{3}]+[\tfrac{11}{8}]+[\tfrac{22}{24}] = 2+2+1+0 = 5,$$

кој е прост број. Следствено $p=2$ е решение на задачата.

За $p=3$ имаме

$$[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}] = [\tfrac{10}{2}]+[\tfrac{11}{3}]+[\tfrac{16}{8}]+[\tfrac{27}{24}] = 5+3+2+1 = 11,$$

кој исто така е прост број. Следствено и $p=3$ е решение на задачата.

Нека $p \ge 5$ е прост број. Тогаш $p^2-1 = (p-1)(p+1)$, кој е производ на два последователни парни броја и следствено се дели со 8. Освен тоа разгледуваниот производ се дели и со 3, бидејќи еден од броевите $p-1$ или $p+1$ се дели со 3. Заклучуваме, дека $p^2-1$ се дели со 24 и следствено $p^2 = 24k+1$ ($k$ е природен број). Оттук получаваме

$$\begin{aligned}[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}] &= [\tfrac{24k+2}{2}]+[\tfrac{24k+3}{3}]+[\tfrac{24k+8}{8}]+[\tfrac{24k+19}{24}] \\ &= 12k+1+8k+1+2k+1+k \qquad . \\ &= 3(8k+1).\end{aligned}$$

Добиениот број не може да е прост, бидејќи се дели со 3 и е поголем од 3. Така, $p=2$ и $p=3$ се единствените решенија на задачата.

**35.** Докажи, дека $\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{1}{6}(n-1)n(4n+1)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

**Решение.** Прво да забележиме, дека ако $k$ е природен број, тогаш

$$[\sqrt{k^2}] = [\sqrt{k^2+1}] = \ldots = [\sqrt{k^2+2k}] = k$$

и освен тоа низата $k^2, k^2+1, \ldots, k^2+2k$ содржи $2k+1$ членови. Значи,

$$[\sqrt{k^2}] + [\sqrt{k^2+1}] + \ldots + [\sqrt{k^2+2k}] = k(2k+1).$$

Од тука следува дека

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}] = \sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{2n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$
$$= \frac{1}{6}(n-1)n(4n+1).$$

**36.** Нека $m,n,s \in \mathbb{N}$, $m \le n$. Тогаш низата

$$\frac{m}{n}, \frac{2m}{n}, ..., \frac{sm}{n}$$

содржи точно $[\frac{s \cdot \mathrm{NZD}(m,n)}{n}]$ цели броеви.

**Решение.** Нека $d = \mathrm{NZD}(m,n)$. Тогаш $m = ad, n = bd$, каде $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$ и низата е $\frac{a}{b}, \frac{2a}{b}, ..., \frac{sa}{b}$. Но, $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$, па затоа последната низа содржи точно $[\frac{s}{b}]$ цели броеви. Понатаму, $b = \frac{n}{d}$ што значи дека низата содржи точно

$$[\tfrac{s}{b}] = [\tfrac{sd}{n}] = [\tfrac{s \cdot \mathrm{NZD}(m,n)}{n}]$$

цели броеви.

**37.** Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x - y = 2015 \\ [x]+[y] = 2017. \end{cases} \qquad (1)$$

**Решение.** За било кој реален број $x$ е исполнето равенството $x = [x]+\{x\}$ (со $[x]$ е означен целиот дел од $x$ а со $\{x\}$ е означен децималниот дел од $x$). Сега системот го добива обликот

$$\begin{cases} [x]+\{x\}-[y]-\{y\} = 2015 \\ [x]+[y] = 2017 \end{cases}.$$

Од првата равенка на системот имаме $\{x\}-\{y\} = 2015-[x]+[y] \in \mathbb{Z}$. Но, од друга страна $0 \le \{x\},\{y\} < 1$, т.е. $0 \le \{x\} < 1$, $-1 < -\{y\} \le 0$, па затоа $-1 < \{x\}-\{y\} < 1$. Според тоа $\{x\}-\{y\} = 0$, т.е. $\{x\} = \{y\}$. Сега системот го добива обликот

$$\begin{cases} [x]-[y] = 2015 \\ [x]+[y] = 2017 \end{cases},$$

и неговите решенија ги бараме во множеството $\mathbb{Z}$. Не е тешко да се види дека негово решение е $[x] = 2016, [y] = 1$. Сега за решение на почетниот систем имаме $x = 2016+\omega, y = 1+\omega$, $\omega \in [0,1)$, т.е. системот (1) има бесконечно многу решенија.

**38.** Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3[x]-\{y\}+[z] = 20,3 \\ 3[y]+5[z]-\{x\} = 15,1 \\ \{y\}+\{z\} = 0,9. \end{cases}$$

**Решение.** Ги собираме првата и третата равенка и добиваме $3[x]+2\{z\} = 21,2$. Можни се два случаја $\{z\} = 0,1$ или $\{z\} = 0,6$. Меѓутоа, за $\{z\} = 0,6$ добиваме $3[x] = 20$, т.е. $[x]$ не е цел број, што е противречност. Значи, $\{z\} = 0,1$ и притоа

$[x]=7$. Од третата равенка добиваме $\{y\}=0,8$, а од втората равенка следува дека мора да важи $\{x\}=0,9$. Исто така важи $3[y]+5[z]=16$. Бидејќи $y$ и $z$ се позитивни броеви, единствена можност е $[y]=2$ и $[z]=2$.

Конечно, системот има единствено решение $x=7,9,\ y=2,8,\ z=2,1$.

**39.** Определи го бројот на различните членови на конечната низа со општ член $[\frac{k^2}{1998}]$, каде $k=1,2,...,1997$.

**Решение.** Бидејќи разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1}^{999}$ е помала од 1, заклучуваме дека секои два соседни членови на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1}^{999}$ се еднакви или се разликуваат за 1. Бидејќи првиот член на таа низа е еднаков на 1, а последниот на 499, заклучуваме дека бројот на нејзините различни членови е 500. Од друга страна, разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1000}^{1997}$ е поголема од 1 и затоа членовите на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1000}^{1997}$ се различни. Конечно, дадената низа има $500+998=1498$ различни членови.

## 3. ТЕОРЕМА НА ЧЕБИШЕВ

**1.** Ако $k>3$, тогаш $p_{k+2}<2p_k$, каде $p_k$ е $k-$тиот прост број. Докажи!

**Решение.** Бидејќи $k>3$ имаме $p_k>p_3=5$. Сега од теоремата на Чебишев следува дека постојат барем два прости броја $q$ и $r$ такви, да $p_k<q<r<2p_k$. Но, $p_{k+1}\le q$ и $p_{k+2}\le r$, па затоа $p_{k+2}<2p_k$.

**2 (Постулат на Бертран).** Ако $n>3$, тогаш меѓу броевите $n$ и $2n-2$ постои најмалку еден прост број. Докажи!

**Решение.** Навистина, ако $n=4$, тогаш 5 е меѓу 4 и 6, а ако $n=5$, тогаш 7 е меѓу 5 и 8.

Ако $n>5$, тогаш од теоремата на Чебишев следува дека меѓу $n$ и $2n$ има најмалку два прости броја. Ако поголемиот од овие прости броеви е $2n-1$, тогаш бидејќи $2n-2=2(n-1)$ е сложен број, вториот прост број ќе биде помал или еднаков на $2n-3$, што значи дека меѓу $n$ и $2n-2$ постои најмалку еден прост број.

**3.** Ако $n>1$, тогаш во каноничното разложување на $n!$ има најмалку еден прост број со степен еден. Докажи!

**Решение.** За $n\le 7$ тврдењето на задачата е очигледно.

Ако $n=2k$, $k\ge 4$, тогаш согласно постулатот на Бертран постои барем еден прост број $p$ таков што $k<p<2k-2<n$. Но, тогаш $2p>2k=n$, што значи дека $p<n<2p$, од што следува дека простиот број $p$ во каноничното разложување на $n!$ е со степен еден.

Ако $n = 2k+1, k \geq 4$, тогаш повторно од постулатот на Бертран следува дека постои прост број $p$ таков што $k < p < 2k-2 < n$. И во овој случај $2k < 2p$, па значи и $2k+1 < 2p$, т.е. $p < n < 2p$, од што следува дека простиот број $p$ во каноничното разложување на $n!$ е со степен еден.

**4.** Нека $n > 10$ е природен број. Докажи, дека во каноничното разложување на $n!$ учествуваат барем два прости броја со степен 1.

**Решение.** Во каноничното разложување на 11! простите броеви 7 и 11 учествуваат со степен 1. Затоа ќе претпоставиме дека $n > 11$. Сега, ако $n = 2k + r$, $r = 0$ или 1, тогаш $k > 5$ и согласно теоремата на Чебишев постојат барем два прости броја $p$ и $q$ такви да $k < p < q < 2k$. Имаме

$$k+1 \leq p < q < n \text{ и } n < 2p < 2q,$$

па затоа во каноничното разложување на бројот $n!$ секој од броевите $p$ и $q$ е со степен 1.

**5.** Докажи, дека за секој природен број $n > 4$ меѓу броевите $n$ и $2n$ има најмалку еден број кој е производ на два различни прости броја.

**Решение.** Нека $n = 2k$, каде $k > 2$. Согласно теоремата на Чебишев (теорема 6.2) постои прост број $p$, за кој важи $k < p < 2k$. Но, $p > k > 2$, па затоа $p$ е непарен прост број. Тогаш

$$n = 2k < 2p < 4k = 2n,$$

па затоа бројот $2p$ го задоволува условот на задачата.

Нека $n = 2k+1, k \geq 2$. Повторно од теоремата на Чебишев следува дека постои прост број $p$, за кој важи $k < p < 2k$. Но, $p > k \geq 2$, па затоа $p$ е непарен прост број. Тогаш

$$n = 2k+1 < 2k+2 \leq 2p < 4k < 4k+2 = 2n,$$

па затоа бројот $2p$ го задоволува условот на задачата.

**6.** Ако $n > 1$ и $p_n$ е $n-$тиот прост број, тогаш $p_n < 2^n$. Докажи!

**Решение.** Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n$. Од $p_2 = 3 < 2^2$ следува дека тврдењето важи за $n = 2$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = k$, т.е. дека $p_k < 2^k$.

За $n = k+1$ имаме $p_k < p_{k+1}$. Ако $p_{k+1} < 2^k$, тогаш е јасно дека $p_{k+1} < 2^{k+1}$. Нека $2^k < p_{k+1}$ и да ги разгледаме броевите $m = 2^k$ и $2m = 2^{k+1}$. Од теоремата на Чебишев следува дека меѓу броевите $m = 2^k$ и $2m = 2^{k+1}$ има најмалку два прости броја $q$ и $r$. Но, $p_k < 2^k$ и $2^k < p_{k+1}$, па затоа $p_{k+1}$ и $p_{k+2}$ се меѓу $m$ и $2m$, т.е. $p_{k+1} < 2m = 2^{k+1}$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $p_n < 2^n$, за секој $n > 1$.

**7.** Докажи, дека за секои природни броеви $n$ и $s$, $n > p_1 p_2 ... p_s$, меѓу броевите $n$ и $2n$ постои најмалку еден природен број кој е производ на $s$ различни прости множители ( $p_k$ е $k-$тиот прост број).

**Решение.** Нека $n = kp_1 p_2 ... p_{s-1} + r$, каде $r$ е остатокот од делењето на $n$ со $p_1 p_2 ... p_{s-1}$. Од $n > p_1 p_2 ... p_s$, следува $k \geq p_s$ и $0 \leq r < p_1 p_2 ... p_{s-1}$. Сега, од теоремата на Чебишев следува дека постои прост број $p$ таков, да $k < p < 2k$. Точни се неравенствата

$$p > p_s,\ k+1 \leq p < 2k$$

и

$$n = kp_1 p_2 ... p_{s-1} + r < p_1 p_2 ... p_{s-1}(k+1) \leq p_1 p_2 ... p_{s-1} p < 2 p_1 p_2 ... p_{s-1} k \leq n$$

па затоа бројот $p_1 p_2 ... p_{s-1} p$ го задоволува условот на задачата.

## 4. ФЕРМАТОВИ И СОВРШЕНИ БРОЕВИ

**1.** За броевите $f_n = 2^{2^n} + 1$, каде $n$ е природен број велиме дека се Ферматови броеви. Ако $m \neq n$, тогаш Ферматовите броеви $f_m$ и $f_n$ се заемно прости. Докажи!

**Решение.** Нека се $f_n$ и $f_{n+k}$, $k > 0$, два различни Ферматови броја и нека претпоставиме дека $m$ е природен број, таков да $m \mid f_n$ и $m \mid f_{n+k}$. Земаме $x = 2^{2^n}$ и добиваме

$$\frac{f_{n+k}-2}{f_n} = \frac{2^{2^{n+k}}+1-2}{2^{2^n}+1} = \frac{2^{2^n 2^k}-1}{2^{2^n}+1} = \frac{(2^{2^n})^{2^k}-1}{2^{2^n}+1} = \frac{x^{2^k}-1}{x+1} = x^{2^k-1} - x^{2^k-2} + ... - 1,$$

што значи дека $f_n \mid (f_{n+k} - 2)$, па од $m \mid f_n$ следува дека $m \mid (f_{n+k} - 2)$. Но, од $m \mid f_{n+k}$ и $m \mid (f_{n+k} - 2)$ следува дека $m \mid 2$ и како Ферматовите броеви се непарни добиваме дека $m = 1$, што значи дека броевите $f_n$ и $f_{n+k}$, $k > 0$ се заемно прости.

**2.** Докажи, дека за Ферматовите броеви $f_n, n = 1, 2, ...$ важи $f_n \mid (2^{f_n} - 2)$.

**Решение.** Ако го искористиме познатото неравенство $2^n \geq n+1$, за секој $n \in \mathbf{N}$, добиваме дека $2^{n+1} \mid 2^{2^n}$, од што следува дека $(2^{2^{n+1}} - 1) \mid (2^{2^{2^n}} - 1)$. Но, $(2^{2^n} + 1) \mid (2^{2^{n+1}} - 1)$, па затоа $(2^{2^n} + 1) \mid (2^{2^{2^n}} - 1)$, што значи

$$(2^{2^n} + 1) \mid 2(2^{2^{2^n}} - 1) = 2^{2^{2^n}+1} - 2,\ \text{т.е.}\ f_n \mid (2^{f_n} - 2).$$

**3.** Докажи, дека ниту еден од Ферматовите броеви $f_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 2, 3, ...$ не може да се запише како збир на два прости броја.

**Решение.** Броевите $f_n, n=2,3,...$ се непарни. Затоа, ако бројот $f_n$ може да се запише како збир на два прости броја, тогаш едниот од нив мора да е парен, т.е. бројот 2, па другиот е бројот $f_n-2$. Но, ако $n>1$ тогаш

$$f_n-2=2^{2^n}-1=(2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)$$

не е прост број.

**4.** Докажи, дека Ферматовиот прост број $p=2^{2^n}+1,\ n\in\mathbb{N}$ не може да биде запишан како разлика на петти степени на два природни броја.

**Решение.** Нека

$$p=a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),\ a,b\in\mathbb{N}.$$

Бидејќи $p$ е прост број $a-b=1$, т.е. $a=b+1$, $b\in\mathbb{N}$. Сега

$$a^5-b^5=(b+1)^5-b^5=5b^5+10b^3+10b^2+5b+1,$$

па затоа $5b^5+10b^3+10b^2+5b=2^{2^n}$, што не е можно, бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 5,а десната не е делива со 5.

**5.** Нека $f_i, i=2,3,...,1985$ се Ферматови броеви. Најди ја цифрата на единиците во декадниот запис на бројот $\mathrm{NZS}(f_2,f_3,...,f_{1985})$.

**Решение.** Од задача 1 имаме $\mathrm{NZD}(f_m,f_n)=1$, за $m\neq n$, па затоа

$$\mathrm{NZS}(f_2,f_3,...,f_{1985})=f_2f_3\cdots f_{1985}.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}f_n&=2^{2^n}+1=(2^{2^n}-1)+2=[(2^4)^{2^{n-2}}-1]+2\\&=(2^4-1)a_n+2=(2^2+1)(2^2-1)a_n+2\\&=5q_n+2,\end{aligned}$$

за секој $n\geq 2$. Според тоа,

$$\begin{aligned}\mathrm{NZS}(f_2,f_3,...,f_{1985})&=f_2f_3\cdots f_{1985}=(5q_2+2)(5q_3+2)...(5q_{1985}+2)\\&=5b+2^{1984}=5b+4^{992}=5b+(5-1)^{992}=5m+1.\end{aligned}$$

Притоа, бидејќи секој од броевите $f_i, i=2,3,...,1985$ е непарен, добиваме дека $\mathrm{NZS}(f_2,f_3,...,f_{1985})$ е непарен број, што значи дека $m$ е парен број, т.е. $m=2p$. Конечно, од $\mathrm{NZS}(f_2,f_3,...,f_{1985})=10p+1$ следува дека цифрата на единиците на бројот $\mathrm{NZS}(f_2,f_3,...,f_{1985})$ е 1.

**6.** Докажи, дека за Ферматовите броеви $f_0,f_1,...,f_n,f_{n+1}$ важи

$$f_{n+1}=f_0f_1\cdots f_n+2.$$

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}f_0f_1\cdots f_n+2&=(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2\\&=(2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2\\&=(2^{2^1}-1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2\end{aligned}$$

$$=(2^{2^2}-1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2$$
$$.................................................................$$
$$=(2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2$$
$$=(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)+2$$
$$=2^{2^{n+1}}-1+2=2^{2^{n+1}}+1=f_{n+1},$$

што и требаше да се докаже.

**7.** Докажи, дека бројот $2^{2^n}-1$ има најмалку $n$ различни прости делители.

**Решение.** Според претходната задача имаме

$$2^{2^n}-1=f_n-2=f_0f_1f_2\cdots f_{n-1},$$

што значи дека тој се дели со првите $n$ Ферматови броеви. Но, секои два различни Ферматови броеви се заемно прости, што значи дека немаат заеднички прости делители, па затоа бројот $2^{2^n}-1$ има најмалку $n$ различни прости делители.

**8.** Докажи, дека Ферматов број не може да биде точен квадрат на природен број.

**Решение.** Имаме $f_0=3$ и $f_1=5$ и тоа не се потполни квадрати. Понатаму, за $n\geq 2$ Ферматовиот број $f_n$ има цифра на единици 7, па тој не може да биде точен квадрат бидејќи цифрата на единиците на секој точен квадрат е 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

**9.** За природниот број $n$ ќе велиме дека е *совршен*, ако важи $\sigma(n)=2n$. Ако $2^n-1$ е прост број, тогаш $2^{n-1}(2^n-1)$ е совршен број. Докажи!

**Решение.** Нека $m=2^{n-1}(2^n-1)$ и $2^n-1=p$. Тогаш

$$\sigma(m)=\sigma(2^{n-1}p)=(2^n-1)(p+1)=(2^n-1)2^n=2m,$$

т.е. $m$ е совршен број.

**10.** За бројот $M_p=2^p-1$, каде $p$ е прост број велиме дека е *Мерсенов број*. Докажи, дека парен природен број е совршен ако и само ако има облик $2^{p-1}(2^p-1)$, каде $2^p-1$ е Мерсенов прост број.

**Решение.** Според задача 9 треба да докажеме дека секој парен совршен број има облик $2^{p-1}(2^p-1)$, каде $2^p-1$ е Мерсенов прост број. Нека $m=2^{p-1}q$, каде $q$ е непарен број, $p>1$ и $\sigma(m)=2m$. Добиваме $(2^p-1)\sigma(q)=2^pq$, од каде следува дека $\sigma(q)=2^pk$ и $q=(2^p-1)k$, каде $k\in\mathbb{N}$. Бидејќи броевите $k$ и $(2^p-1)k$ се делители на бројот $q$ и нивниот збир е еднаков на $2^pk=\sigma(q)$, добиваме дека $q$ нема други делители. Значи, $q=(2^p-1)k$ е прост број, па затоа $k=1$, т.е. $2^p-1$ е прост број.

**11.** Докажи дека цифра на единиците на парен совршен број секогаш е 6 или 8.

**Решение.** Според претходната задача парен совршен број има облик $2^{p-1}(2^p-1)$ каде $p$ и $2^{\boldsymbol{p}}-1$ се прости броеви. За $p=2$ тоа е бројот 6. Ако $p>2$, тогаш $p$ е прост број од облик $4k+1$ или $4k+3$.

Ако $p=4k+1$, тогаш $2^{p-1}=2^{4k}=16^k$ и цифрата на единиците на овој број е 6, а цифрата на единиците на бројот $2^p-1=2^{4k+1}-1=2\cdot 16^k-1$ е 1. Значи, за $p=4k+1$ цифрата на единиците на бројот $2^{p-1}(2^p-1)$ е 6.

Ако $p=4k+3$, тогаш $2^{p-1}=2^{4k+2}=4\cdot 16^k$ и цифрата на единиците на овој број е 4. Цифрата на единиците на бројот $2^p$ е 8, па затоа цифрата на единиците на бројот $2^p-1$ 3 7. Конено, ако $p=4k+3$, тогаш цифрата на единиците на бројот $2^{p-1}(2^p-1)$ е 8.

**12.** Ако $n$ е совршен број, тогаш збирот на реципрочните вредности на неговите делители е еднаков на 2. Докажи!

**Решение.** Нека $n$ е совршен број. Имаме

$$2n=\sigma(n)=\sum_{d|n} d=\sum_{d|n}\tfrac{n}{d}=n\sum_{d|n}\tfrac{1}{d}$$

и последното равенство го поделиме со $n$ добиваме $\sum_{d|n}\frac{1}{d}=2$, што и требаше да се докаже.

**13.** Докажи, дека степен на прост број не може да биде совршен број.

**Решение.** Нека $p$ е прост број и $\sigma(p^a)=2p^a$. Имаме $2p^a=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}$, од каде добиваме $2p^a=p^{a+1}+1$, т.е. $p^a(2-p)=1$, од каде следува $2-p=p^a=1$, што е противречност. Значи, за секој прост број $p$ $\sigma(p^a)\neq 2p^a$, што значи дека степен на прост број не може да биде совршен број.

# 5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

## 5.1. ДЕЛИВОСТ

**1.** Нека $x$ и $y$ се цели броеви. Докажи дека $2x+3y$ се дели со 17 ако и само ако $9x+5y$ се дели со 17.

**Решение.** Последователно добиваме:

$$17\,|\,(2x+3y) \quad\Leftrightarrow\quad 17\,|\,13(2x+3y) \quad\Leftrightarrow\quad 17\,|\,(26x+39y) \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 17\,|\,(17x+34y)+(9x+5y) \quad\Leftrightarrow\quad 17\,|\,(9x+5y).$$

**2.** Докажи дека бројот $3^{4^5}+4^{5^6}$ е производ на два природни броја поголеми од $10^{2002}$.

**Решение.** Нека $a=3^{4^4}$ и $b=4^{\frac{5^6+1}{4}}$. Тогаш

$$3^{4^5}=3^{4^4\cdot 4}=a^4 \text{ и } 4^{5^6}=\tfrac{1}{4}(4^{\frac{5^6}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{4}})^4=\frac{b^4}{4}.$$

Затоа

$$3^{4^5}+4^{5^6}=a^4+\tfrac{b^4}{4}=(a^2)^2+(\tfrac{b^2}{2})^2=(a^2+\tfrac{b^2}{2})^2-(ab)^2=(a^2+\tfrac{b^2}{2}-ab)(a^2+\tfrac{b^2}{2}+ab).$$

Важи

$$a^2+\tfrac{b^2}{2}-ab=(a-\tfrac{b}{2})^2+\tfrac{b^2}{4}>\tfrac{b^2}{4}=\frac{4^{\frac{5^6+1}{2}}}{4}=\frac{2^{5^6+1}}{2^2}=2^{5^6-1}>2^{10008}>(2^4)^{2002}>10^{2002}.$$

**3.** Најди ги сите парови од природни броеви $(m,n)$ за кои $(m+n)^2$ е делител на $4(mn+1)$.

**Решение.** Од $(m-n)^2\geq 0$ следува дека $(m+n)^2\geq 4mn$. Понатаму, од условот на задачата следува $(m+n)^2\leq 4mn+4$. Според тоа, $(m+n)^2=4mn$ или $(m+n)^2=4mn+4$. Во првиот случај добиваме $m=n$, т.е. $4m^2\mid 4m^2+4$, па затоа $m=n=1$. Во вториот случај добиваме $(m-n)^2=4$, т.е. $|m-n|=2$

Конечно, решение на задачата се подредените парови $(1,1)$ и $(m,n), |m-n|=2$.

**4.** Да се најдат сите четирицифрени броеви $m$ за кои се знае дека:
1) $m$ е квадрат од природен број;
2) првата и втората цифра на $m$ се еднакви; и
3) третата и четвртата цифра на $m$ се еднакви.

**Решение.** Нека $x$ е првата, а $y$ е третата цифра на $m$ и нека $m=k^2$. Тогаш

$$k^2=1000x+100x+10y+y=11(100x+y),$$

од каде што следува дека $11|k$, т.е. $k=11n$. Од $11\cdot 11n^2=11(100x+y)$ следува дека 11 е делител на $x+y$. Бидејќи $1\leq x\leq 9$ и $0\leq y\leq 9$, добиваме дека $1\leq x+y\leq 18$, што значи дека $x+y=11$. Тогаш $n^2=9x+1$, што е можно само за $x=7$. Според тоа, бараниот број $m$ е $7744=88^2$.

**5.** Докажи, дека ако $n>1$ е произволен природен број, тогаш $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ не е природен број.

**Решение.** Нека $a$ е производот на сите непарни броеви коишто се помали или еднакви со $n$, а $k$ е најголемиот природен број за кој $2^k\leq n$. Тогаш $2^{k-1}\cdot a\cdot s$ не е природен број, бидејќи сите негови собирци, освен $2^{k-1}\cdot a\cdot\frac{1}{2^k}$, се природни броеви. Оттука, следува дека и $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ не е природен број.

**6.** Најди ги сите природни броеви $n$ така што $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}$ е природен број.

**Решение**. Бидејќи

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}=\frac{n!+n(n-1)\cdot...\cdot3+....+n(n-1)+n+1}{n!}=\frac{(n-1)S+n+1}{n!},$$

добиваме $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}=\frac{(n-1)S+(n+1)}{(n-1)!}$. За $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}$ да е цел број треба $(n-1)!\,|\,(n-1)S+n+1$. Но, $(n-1)\,|\,(n-1)!$ и $n-1\,|\,(n-1)S$ па затоа $n-1\,|\,n+1$. Јасно, $n-1\,|\,n-1+2$ па оттука добиваме дека $n-1\,|\,2$. Значи, $n=2$ и $n=3$.

Непосредно се проверува дека најдените броеви се решенија на задачата.

**7.** Нека $k$ е парен број. Дали е можно бројот 1 да се запише како збир на реципрочните вредности на $k$ непарни цели броеви?

**Решение.** Нека претпоставиме дека постојат непарни цели броеви $n_1,n_2,...,n_k$ така што

$$1=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+...+\frac{1}{n_k}.$$

Добиваме дека $n_1n_2\cdots n_k=m_1+m_2+...+m_k$, каде $m_i=n_1n_2...n_{i-1}n_{i+1}...n_k$, за $i\in\{1,2,...,k\}$. Бројот $n_1n_2...n_k$ е непарен бидејќи е производ на непарни броеви, додека бројот $m_1+m_2+...+m_k$ е парен, бидејќи е збир на $k$ (парен број) непарни броеви, што е противречност. Од добиената противречност следува дека бараното запишување не е можно.

Може да се докаже дека ако $k$ е непарен број, тогаш такво запишување е можно. Обиди се ова тврдење самостојно да го докажеш.

**8.** Определи три последователни непарни природни броеви $a,b$ и $c$ такви што $a^2+b^2+c^2$ е четирицифрен број кој е запишан со исти цифри.

**Решение.** Нека $a=2n-1$, $b=2n+1$ и $c=2n+3$ се три последователни непарни природни броеви. Збирот на нивните квадрати е

$$a^2+b^2+c^2=(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2=12n(n+1)+11.$$

Значи, $12n(n+1)+11$ треба да биде четирицифрен број запишан со исти цифри, т.е. треба да биде некој од броевите 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888 или 9999. Разликата на тие броеви и бројот 11 треба да е број кој е делив со 12. Од броевите 1100, 2211, 3322, 4433, 5544, 6655, 7766, 8877 и 9988 само бројот 5544 е делив со 12 и за овој број важи

$$5555=(2\cdot21-1)^2+(2\cdot21+1)^2+(2\cdot21+3)^2=41^2+43^2+45^2.$$

Според тоа, бараните последователни непарни броеви се 41, 43, 45.

**9.** Докажи, дека за секој природен број $n$ важи $6\,|\,n^3+11n$.

**Решение.** За $n=1$ имаме $6\,|\,12=1^3+11\cdot1$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. $6\,|\,k^3+11k$.

За $n=k+1$ имаме

$$(k+1)^3+11(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+11k+11=k^3+11k+3k(k+1)+12$$

и бидејќи $6\,|\,3k(k+1)+12$, од индуктивната претпоставка и својствата за деливост следува дека $6\,|\,(k+1)^3+11(k+1)$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $6\,|\,n^3+11n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

**10.** Докажи, дека за секој природен број $n$ важи $23\,|\,5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$.

**Решение.** За $n=1$ добиваме $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}=5^3+2^5+2^2=161=7\cdot 23$, т.е. тврдењето од задачата е точно.

Нека тврдењето на задачата е точно за $n=k$, т.е. $5^{2k+1}+2^{k+4}+2^{k+1}=23M$, за некој $M\in\mathbb{N}$. За $n=k+1$ добиваме

$$\begin{aligned}5^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+4}+2^{(k+1)+1}&=25\cdot 5^{2k+1}+2\cdot 2^{k+4}+2\cdot 2^{k+1}\\&=23\cdot 5^{2k+1}+2(5^{2k+1}+2^{k+4}+2^{k+1})\\&=23(5^{2k+1}+2M),\end{aligned}$$

па затоа $23\,|\,5^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+4}+2^{(k+1)+1}$.

Конечно, од принципот за математичка индукција, следува дека

$$23\,|\,5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1},\ \text{за секој } n\in\mathbb{N}.$$

**11.** Докажи дека, за секој природен број $n$ бројот $a_n=3^{3n+3}-26n-27$ е делив со $26^2$.

**Решение.** За $n=1$ имаме $26^2\,|\,a_1=676=26^2$.

Нека претпоставиме дека $26^2\,|\,a_k$. Тогаш

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=3^{3k+3+3}-26(k+1)-27\\&=27\cdot 3^{3k+3}-27\cdot 26k-27^2+27\cdot 26k+27^2-26(k+1)-27\\&=27a_k+26^2(k+1)\end{aligned}$$

па од индуктивната претпоставка следува точноста на тврдењето за $n=k+1$.

Конечно, од принципот за математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број $n$.

**12.** Докажи, дека за секој природен број $n$ бројот $3(1^5+2^5+...+n^5)$ е делив со $1^3+2^3+...+n^3$.

**Упатство.** Искористи ги формулите

$$1^3+2^3+...+n^3=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \text{ и } 1^5+2^5+...+n^5=\tfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

**13.** Нека $a$, $b$, $c$ се цели броеви така да $a$ е парен, $b$ непарен. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}_0$, постои природен број $x$, таков што

$$2^n \mid ax^2 + bx + c\,.$$

**Решение.** Тврдењето на задачата ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n = 0$ и $x_0 \in \mathbb{N}$ имаме $2^0 \mid ax_0{}^2 + bx_0 + c$, т.е. тврдењето е точно.

За $k \geq 0$, нека $x_k \in \mathbb{N}$ е таков да $2^k \mid ax_k^2 + bx_k + c = P(x_k)$. Ќе избереме $x_{k+1} \in \mathbb{N}$ таков што $2^{k+1} \mid P(x_{k+1})$. Ако $2^{k+1} \mid P(x_k)$, тогаш $x_{k+1} = x_k$. Во спротивно $P(x_k) = 2^k d$, $d \in \mathbb{Z}$, каде $d$ е непарен број и земаме $x_{k+1} = x_k + 2^k h$, $h \in \mathbb{N}$ е непарен број. Тогаш

$$P(x_{k+1}) = P(x_k) + 2^k h(a(x_{k+1} + x_k) + b) = 2^k (d + h(a(x_{k+1} + x_k) + b))$$

и бидејќи $d + h(a(x_{k+1} + x_k) + b)$ е парен, од индуктивната претпоставка следува $2^{k+1} \mid P(x_{k+1})$.

Конечно, од принципот за математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број $n$.

**14.** Докажи дека, за секој природен број $n$ бројот $a_n = (n+1)(n+2)...(n+n)$ е делив со $2^n$ но не е делив со $2^{n+1}$.

**Решение.** За $n = 1$ имаме $a_1 = 2$, па $a_1$ е делив со $2^1$, а не е делив со $4 = 2^2$ Да претпоставиме дека $a_k = 2^k q$, каде што $q$ е непарен број. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+2)(k+3)...(k+k+2) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)...(k+1+k-1)(k+1+k)(k+k+2)}{(k+1)} \\ &= \frac{a_k \cdot (2k+1)2(k+1)}{(k+1)} = 2(2k+1)a_k = 2^{k+1}(2k+1)q \end{aligned}$$

па од индуктивната претпоставка следува дека $a_{k+1}$ е делив со $2^{k+1}$, а не е делив со $2^{k+2}$ .

Конечно, од принципот за математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број $n$.

**15.** Нека $a$ и $b$ се природни броеви. Докажи, дека ако $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ е цел број, тогаш тој е точен квадрат.

**Решение.** Нека $a, b \in N$ и $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = k \in \mathbb{Z}$. Од последното равенство следува дека

$$a^2 b + b^2 - a = kab\,, \tag{1}$$

од каде следува дека $b \mid a$. Нека $a = bq$, $q > 0$, $q \in \mathbb{Z}$. Со замена во (1) добиваме

$$b^3 q^2 + b^2 - bq = kb^2 q\,,$$

а по делење со $b$ ($b > 0$) добиваме

$$b^2 q^2 + b - q = kbq\,, \tag{2}$$

од каде следува дека $q \mid b$. Нека $b = qt$, $t > 0$, $t \in \mathbb{Z}$. Со замена во (2) добиваме

$$q^4t^2+qt-q=kq^2t,$$

а по делењето со $q$ ($q>0$), добиваме

$$q^3t^2+t-1=kqt, \qquad (3)$$

од каде следува дека $t\,|\,1$ и од $t>0$ добиваме дека $t=1$. Потоа, од $b=qt$ и $t=1$, добиваме дека $b=q$. Од $a=bq$ и $b=q$, добиваме дека $a=b^2$.

Конечно, од $k=a+\frac{b}{a}-\frac{1}{b}$ и $a=b^2$ добиваме дека $k=b^2+\frac{b}{b^2}-\frac{1}{b}=b^2$, што требаше и да се докаже.

**16.** Определи ги сите природни броеви $n$, такви што $5^{n-1}+3^{n-1}$ е делител на $5^n+3^n$.

**Решение.** За секој $n\in\mathbb{N}$, имаме

$$5(5^{n-1}+3^{n-1})=5^n+(3+2)3^{n-1}=5^n+3^n+2\cdot 3^{n-1}>5^n+3^n.$$

Според тоа, $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}<5$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Од друга страна, на сличен начин имаме $3(5^{n-1}+3^{n-1})=3\cdot 5^{n-1}+3^n<5^n+3^n$, па затоа $3<\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}$. Но, $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}\in\mathbb{N}$ и бидејќи $3<\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}<5$ добиваме $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}=4$. Последната равенка е еквивалентна со равенката $5^{n-1}=3^{n-1}$, од каде добиваме дека $n=1$.

**17.** Дадени се $n, n>3$ по парови заемно прости броеви. Познато е дека при делењето на производот на било кои $n-1$ од броевите со преостанатиот број се добива еден и ист остаток $r$. Докажи, дека $r\le n-2$.

**Решение.** Тврдењето е тривијално за $r=0$ и затоа нека $r>0$. Дадените броеви да ги означиме со $a_1,a_2,...,a_n$ и нека $P=a_1a_2...a_n$, $P_i=\frac{P}{a_i}$, за $i=1,2,...,n$. Јасно, при делењето на $P_i$ со $a_i$ се добива остаток $r$, па затоа $a_i>r$. Да го разгледаме бројот $S=P_1+P_2+...+P_n-r$. Имаме $a_1\,|\,S=(P_1-r)+(P_2+...+P_n)$, бидејќи и двата собирци се деливи со $a_1$. Аналогно $a_i\,|\,S$, за секој $i=1,2,...,n$. Оттука и од условот следува дека $P=a_1a_2...a_n\,|\,S$. Бидејќи $S>a_1-r>0$, добиваме $S\ge P$ и тогаш $P_1+P_2+...+P_n=S+r>P$. Според тоа, $\frac{P}{a_i}=P_i>\frac{P}{n}$, за некој $i$, од каде следува $a_i<n$, т.е. $a_i\le n-1$. Но, тогаш $r<a_i\le n-1$, т.е. $r\le n-2$.

**18.** Определи ги сите природни броеви $x$ и $y$ такви што

$$x+y+1\,|\,2xy \text{ и } x+y-1\,|\,x^2+y^2-1.$$

**Решение.** Имаме $x+y-1\,|\,(x+y-1)^2+2(x+y-1)$ односно

$$(x+y-1)\,|\,x^2+y^2-1+2xy.$$

Сега, од условот на задачата и признаците за деливост следува

$$(x+y-1)\,|\,x^2+y^2-1+2xy-(x^2+y^2-1)=2xy,$$

па затоа

$$\mathrm{NZD}(x+y-1, x+y+1) = \mathrm{NZD}(x+y-1, 2) \leq 2 .$$

Можни се два случаи.

*Случај* 1. $\mathrm{NZD}(x+y-1, x+y+1) = 2$. Од $x+y+1 \mid 2xy$ и $x+y-1 \mid 2xy$ следува $\frac{1}{2}(x+y-1)(x+y+1) \mid 2xy$, т.е. $(x+y-1)(x+y+1) \mid 4xy$. Според тоа,

$$4xy \geq (x+y+1)(x+y-1) = (x+y)^2 - 1, \text{ т.е. } 1 \geq (x-y)^2 .$$

*Случај* 2. $\mathrm{NZD}(x+y-1, x+y+1) = 1$. Од $x+y+1 \mid 2xy$ и $x+y-1 \mid 2xy$ следува $(x+y-1)(x+y+1) \mid 2xy$. Според тоа,

$$2xy \geq (x+y+1)(x+y-1) \geq (x+y)^2 - 1, \text{ т.е. } 1 \geq (x+y)^2 - 2xy \geq (x-y)^2 .$$

Значи, и во двата случаи важи $(x-y)^2 \leq 1$, од каде добиваме две можности.

а) $x = y$. Од $x+y+1 \mid 2xy$ добиваме $2x+1 \mid 2x^2$. Но, од $\mathrm{NZD}(x, 2x+1) = 1$ и $\mathrm{NZD}(2, 2x+1) = 1$ следува $\mathrm{NZD}(2x+1, 2x^2) = 1$. Според тоа $2x+1 = 1$, односно $x = 0$ што противречи на условот на задачата.

б) $x+1 = y$. Притоа $2(x+1) \mid 2x(x+1)$ и $2x \mid 2x(x+1)$ и ова важи за за секој $x \in \mathbb{N}$.

Конечно, $(x, y) \in \{(n, n+1), (n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**19.** Определи ги сите природни броеви $x$ и $y$ така, да $y \mid x^2+1$ и $x^2 \mid y^3+1$.

**Решение.** Ако $x = y$, тогаш $x = y = 1$. Ако $y = 1$, тогаш $x = 1$. Ако $y = 2$, тогаш $x = 1$ или $x = 3$. Значи, (1,1), (1,2) и (3,2) се решенија на задачата.

Нека $(x, y)$ е решение такво, што $x \neq y$ и $y > 2$. Тогаш броевите $\frac{x^2+1}{y}$ и $\frac{y^3+1}{x^2}$ се природни и нивниот производ $\frac{x^2+1}{y} \cdot \frac{y^3+1}{x^2}$ исто така е природен број. Понатаму, од

$$\frac{x^2+1}{y} \cdot \frac{y^3+1}{x^2} = y^2 + \frac{x^2+y^3+1}{x^2 y}$$

следува дека $\frac{x^2+y^3+1}{x^2 y}$ е природен број. Според тоа,

$$x^2 + y^3 + 1 \geq x^2 y \quad \Leftrightarrow \quad x^2(y-1) \leq y^3 + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \leq \frac{y^3+1}{y-1} = y^2 + y + 1 + \frac{2}{y-1} \leq y^2 + y + 1 + 1 < (y+1)^2$$

па затоа $x < y+1$ и како $x \neq y$ добиваме $x < y$. Со тоа го докажавме тврдењето:

*Ако* $(x, y)$ *е решение такво, што* $x \neq y$ *и* $y > 2$, *тогаш* $x < y$. (*)

Бидејќи $y \mid x^2+1$ добиваме $x^2 + 1 = yy_1$, $y_1 \in \mathbb{N}$. Јасно, $x > 1$. Ако $y_1 \geq x$, добиваме $yy_1 \geq (x+1)x = x^2 + x > x^2 + 1$, што не е можно. Затоа $y_1 < x$. Од равенството $x^2 + 1 = yy_1$ следува дека $y_1 \mid x^2 + 1$. Понатаму, важи

$$y=\frac{x^2+1}{y_1} \text{ и } y^3+1=\frac{(x^2+1)^3}{y_1^3}+1=\frac{(x^2+1)^3+y_1^3}{y_1^3}$$

па затоа $x^2$ е делител на $\frac{(x^2+1)^3+y_1^3}{y_1^3}$, т.е. $x^2\,|\,(x^2+1)^3+y_1^3$, од што следува дека $x^2\,|\,y_1^3+1$. Според тоа, $y_1\,|\,x^2+1$, $x^2\,|\,y_1^3+1$ и $y_1<x$. Тогаш од (*) следува дека $y_1\le 2$. Останува да ги разгледаме двата случаја.

1) Нека $y_1=1$. Тогаш $y=x^2+1$, па затоа $x^2=y-1$ и $(y-1)\,|\,(y^3+1)$. Но, $y^3+1=y^3-1+2=(y-1)(y^2+y+1)+2$, што значи $(y-1)\,|\,2$, од каде што следува $y=3$. Со непосредна проверка се уверуваме дека во овој случај задачата нема решение.

2) Нека $y_1=2$. Тогаш $2y=x^2+1$, па затоа $x^2=2y-1$ и $(2y-1)\,|\,(y^3+1)$, што значи $(2y-1)\,|\,(8y^3+8)$. Но, $8y^3+8=8y^3-1+9=(2y-1)(4y^2+2y+1)+9$, што значи $(2y-1)\,|\,9$. Од $y>2$ следува $2y-1>3$, од каде наоѓаме $y=5$. Со непосредна проверка се уверуваме дека во овој случај $x=3$.

Конечно, $(x,y)\in\{(1,1),(1,2),(3,2),(3,5)\}$.

**20.** Нека $x_1,x_2,...,x_n...$ и $y_1,y_2,...,y_n...$ се низи природни броеви определени со

$$x_1=1, x_2=1, x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}\;\;(n\ge 2)$$
$$y_1=1, y_2=7, x_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}\;\;(n\ge 2)$$

Докажи дека освен 1, овие низи немаат други заеднички членови.

**Решение.** Нека $x_k=8q_k+r_k$, $0\le r_k\le 7$, $y_k=8t_k+s_k$, $0\le s_k\le 7$. Со помош на математичка индукција лесно се докажува дека низите остатоците $r_k$ и $s_k$ се $1,1,3,5,3,5,3,5,...$ и $1,7,1,7,1,7,1,7,...$, соодветно. Оттука следува дека $x_n=y_m$ е можно само кога $n=m=1$, односно дека единствен заеднички елемент на разгледуваните низи е 1.

**21.** Определи ги сите природни броеви $n$ кои се деливи со секој природен природен број помал или еднаков на $\sqrt{n}$.

**Решение.** Нека $p_1,p_2,...,p_k$ се сите прости броеви кои се помали или еднакви на $\sqrt{n}$, а $m$ е најмалиот заеднички содржател на сите природни броеви кои не го надминуваат $\sqrt{n}$. Јасно, простите множители на $m$ можат да бидат само броевите $p_1,p_2,...,p_k$. Според тоа, $m$ е од облик $m=p_1^{l_1}p_2^{l_2}...p_k^{l_k}$, $l_i\ge 1, i=1,2,...,k$. Тогаш $p_i^{l_i}\le\sqrt{n}<p_i^{l_i+1}\le p_i^{2l_i}$, за $i=1,2,...,k$, а оттука $(\sqrt{n})^k<m^2$. Од друга страна, $p_i^{l_i}\le\sqrt{n}$ и $p_i^{l_i}\,|\,n$, односно $m\,|\,n$, па значи $m\le n$. Тогаш од $(\sqrt{n})^k<m^2$ и $m\le n$, следува $(\sqrt{n})^k<n^2$, па затоа $k<4$. Значи, $p_4=7>\sqrt{n}$, односно $n<49$ и со непосредна проверка добиваме дека $n=1,2,3,4,6,8,12,24$.

**22.** Докажи, дека ако $a,b$ и $c$ се цели броеви такви што бројот

$$\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$$

е точен квадрат на цел број, тогаш $a=b=c$.

**Решение.** Нека $\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}=d^2$, каде $d\in\mathbb{Z}$. Ако земеме $x=a-b,$ $y=b-c$ и $z=c-a$, тогаш

$$x+y+z=0,\quad x^2+y^2+z^2=4d^2\,. \tag{1}$$

Бидејќи квадрат на цел број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, од (1) следува дека $x,y$ и $z$ се парни броеви. Нека $x_1=\frac{x}{2}$, $y_1=\frac{y}{2}$ и $z_1=\frac{z}{2}$. Тогаш

$$x_1+y_1+z_1=0,\ \ x_1^2+y_1^2+z_1^2=d^2\,,$$

и како и претходно заклучуваме дека $x_1,y_1,z_1$ и $d$ се парни броеви. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека $x,y$ и $z$ се делат со $2^k$ за секој природен број $k$. Последното е можно ако и само ако $x=y=z=0$, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

**23.** Нека $\text{NZD}(a,b)=1$. Докажи дека $\text{NZD}(a+b,a^2+b^2)=1$ или 2.

**Решение.** Нека $\text{NZD}(a+b,a^2+b^2)=d$. Од $d\,|\,a+b$ и $d\,|\,(a+b)^2-2ab$ следува дека $d\,|\,2ab.$ Ако $d\,|\,a$ или $d\,|\,b$, тогаш од $d\,|\,a+b$ следува дека $d\,|\,a$ и $d\,|\,b,$ што не е можно бидејќи $a$ и $b$ се заемно прости броеви. Останува $d\,|\,2$ т.е. $d=1$ или $d=2$.

**24.** Определи ги сите тројки од природни броеви $(a,b,c)$ така што бројот $a^3+b^3+c^3$ е делив со броевите $a^2b,\ b^2c$ и $c^2a.$

**Решение.** Нека $d=\text{NZD}(a,b)$. Јасно, $d^3\,|\,a^2b$, па од условот на задачата следува дека $d^3\,|\,a^3+b^3+c^3$. Бидејќи $d^3\,|\,a^3$ и $d^3\,|\,b^3$ следува дека $d^3\,|\,c^3$ т.е. $d\,|\,c$. Оттука најголемиот заеднички делител на два од броевите $a,b$ и $c$ е најголемиот заеднички делител на $a,b$ и $c.$ Нека $(r,s,t)=(\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d})$. Тогаш тројката $(r,s,t)$ ги задоволува условите на задачата, и $r,s$ и $t$ се по парови заемно прости броеви. Јасно, $r^2\,|\,r^3+s^3+t^3,$ $s^2\,|\,r^3+s^3+t^3$ и $t^2\,|\,r^3+s^3+t^3$, и бидејќи $r,s$ и $t$ се по парови заемно прости следува дека $r^2s^2t^2\,|\,r^3+s^3+t^3$.

Ќе докажеме дека $(r,s,t)=(1,1,1)$ и пермутациите на тројката $(1,2,3)$ се сите решенија за $(r,s,t)$.

Без губење на општоста земаме дека $r\ge s\ge t.$ Важи $3r^3\ge r^3+s^3+t^3\ge r^2s^2t^2$ од каде следува дека $r\ge\frac{s^2t^2}{3}$. Јасно, $r^2\,|\,s^3+t^3$ од каде следува

$$2s^3\ge s^3+t^3\ge r^2\ge\frac{s^4t^4}{9}\,. \tag{1}.$$

Ако $t \geq 2$ тогаш $s \leq \frac{18}{t^4} \leq \frac{18}{16} < 2 \leq t$, што не е можно бидејќи $s \geq t$. Останува $t = 1$.

Ако $s = 1$ тогаш треба да биде исполнето $r^2 \mid r^3 + 2$, кое важи само за $r = 1$. Значи $(r, s, t) = (1,1,1)$.

Ако $s \geq 2$ тогаш $r > s$ бидејќи $r$ и $s$ се заемно прости броеви. Добиваме

$$2r^3 > r^3 + s^3 + 1 = r^3 + s^3 + t^3 \geq r^2 s^2 t^2 = r^2 s^2, \text{ т.е. } r > \frac{s^2}{2}$$

Од (1) имаме $s^3 + 1 = s^3 + t^3 \geq r^2 > \frac{s^4}{4}$ односно $s \leq 4$. Со проверка добиваме дека $(3, 2, 1)$ е тројка која ги задоволува условите на задачата. Значи

$$(d, d, d), (3d, 2d, d), (3d, d, 2d), (2d, 3d, d), (2d, d, 3d), (d, 2d, 3d) \text{ и } (d, 3d, 2d)$$

се сите тројки природни броеви кои го исполнуваат условот на задачата.

**25.** Нека $T_n = 2^{2^n} + 1$, за секој ненегативен цел број $n$. Докажи дека ако $m \neq n$ тогаш $T_m$ и $T_n$ се заемно прости броеви.

**Решение.** Имаме:

$$T_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = 2^{2^{n-1} \cdot 2} - 1 = (T_{n-1} - 1)^2 - 1 = T_{n-1}^2 - 2T_{n-1} = T_{n-1}(T_{n-1} - 2).$$

Според тоа за секој природен број $n$ важи

$$T_n - 2 = T_{n-1}(T_{n-1} - 2) = T_{n-1}T_{n-2}(T_{n-2} - 2) = ... = T_{n-1}T_{n-2}...T_0(T_0 - 2) = T_{n-1}T_{n-2}...T_0$$

Значи $T_n = T_{n-1}T_{n-2}...T_0 + 2$ и $T_m = T_{m-1}T_{m-2}...T_0 + 2$. Без губење на општоста нека $m > n$. Тогаш $T_n \mid T_{m-1}T_{m-2}...T_0$ т.е. $T_n \mid T_m - 2$ Ако $\text{NZD}(T_n, T_m) = d$ тогаш важи $d \mid T_n \mid T_m - 2$ и бидејќи $d \mid T_m$ следува дека $d \mid 2$. На крај добиваме $d = 1$, бидејќи $d$ е непарен број.

Значи броевите $T_m$ и $T_n$ се заемно прости.

**26.** Нека $N$ е природен број. Со $d_1, d_2, ..., d_n$ да ги означиме делителите на $N$ и нека $a_i$ е бројот на делителите на бројот $d_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Докажи, дека

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека $N = p$ е прост број. Тогаш делители на бројот $p$ се броевите 1 и $p$, па затоа $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$ и важи $(a_1 + a_2)^2 = 3^2 = 1^3 + 2^3 = a_1^3 + a_2^3$. Нека $N = p^m$. Тогаш делители на бројот $N$ се броевите $1, p, p^2, ..., p^m$, па така $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, ..., a_{m+1} = m + 1$ и важи

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{m+1})^2 = (1 + 2 + ... + (m+1))^2 = [\frac{(m+1)(m+2)}{2}]^2$$
$$= 1^3 + 2^3 + ... + m^3 + (m+1)^3 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{m+1}^3,$$

т.е. точно е равенството (1).

Нека сега тврдењето важи за некој $N$ и нека $A = Np^m$, $\text{NZD}(p, N) = 1$. Нека $d_1, ..., d_n$ се сите делители на бројот $N$ и $a_1, ..., a_n$ се броевите на нивните делители. Тогаш сите делители на бројот $A$ се

$$d_1, d_2, ..., d_n, d_1 p, d_2 p, ..., d_n p, ..., d_1 p^m, d_2 p^m, ..., d_n p^m,$$

а броевите на нивните делители се

$$a_1, a_2, ..., a_n, 2a_1, 2a_2, ..., 2a_n, ..., (m+1)a_1, (m+1)a_2, ..., (m+1)a_n.$$

Сега, од индуктивната претпоставка следува дека

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} a_i + 2\sum_{i=1}^{n} a_i + ...(m+1)\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 &= (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 (1+2+...+(m+1))^2 \\ &= (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 [\tfrac{(m+1)(m+2)}{2}]^2 \\ &= [\tfrac{(m+1)(m+2)}{2}]^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \\ &= (1^3 + 2^3 + ... + (m+1)^3) \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^3 + \sum_{i=1}^{n} (2a_i)^3 + ... + \sum_{i=1}^{n} ((m+1)a_i)^3,\end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи за бројот $A = Np^m$, $\text{NZD}(p, N) = 1$. Конечно, бидејќи секој природен број има канонично разложување $N = p_1^{e_1} ... p_m^{e_m}$, од принципот на математичка индукција следува тврдењето на задачата.

**27.** Нека $a$ и $b$ се цели броеви такви што $2ab \mid (a^2 + b^2 - a)$. Докажи, дека $a$ е точен квадрат на природен број.

**Решение.** Нека $a^2 + b^2 - a = 2abq$. Според тоа, $b^2 + 2abq - a^2 - a = 0$. Да ја разгледаме квадратната равенка $x^2 + 2aqx - a^2 - a = 0$. Оваа равенка има едно решение $b$. Според тоа, таа има решение во множеството цели броеви, па затоа нејзината дискриминанта е точен квадрат. Значи,

$$D = 4a^2q^2 - 4(a^2 - a) = 4(a^2q^2 - a^2 + a) = 4A^2,$$

каде $A$ е цел број. Оттука следува

$$a(a(q^2 - 1) + 1) = A^2. \qquad (1)$$

Понатаму, $d = \text{NZD}(a, a(q^2 - 1) + 1) = 1$, па затоа од равенството (1) следува дека $a = u^2$ и $a(q^2 - 1) + 1 = v^2$, што и требаше да се докаже.

**28.** Нека $A$ и $B$ се $n$-цифрени броеви, $n$-непарен, коишто при делењето со $k$ даваат ист остаток $r \neq 0$. Да се најде барем еден број $k$, што не зависи од $n$, така што бројот $C$, добиен со допишување на цифрите од $A$ и $B$, да е делив со $k$.

**Решение.** Нека $A = ka + r$, $B = kb + r$, $0 < r < k$; тогаш имаме:

$$C = 10^n A + B = 10^n (ka + r) + (kb + r) = k(10^n a + b) + (10^n + 1)r.$$

бројот $C$ е делив со $k$ ако и само ако бројот $10^n + 1$ е делив со $k$. Бидејќи $n = 2m + 1$, имаме

$$10^n+1=10^{2m+1}+1=(10+1)(10^{2m}-10^{m-1}+...+1)=11D,$$

што значи дека еден број $k$ што го задоволува условот на задачата е бројот 11.

**29.** Пресметај $\text{NZD}(a,b,c)$ ако $a,b$ и $c$ се природни броеви за кои важи $ab+bc+ca=2012$ и притоа $\text{NZD}(a,b,c)\neq 1$.

**Решение.** Нека $\text{NZD}(a,b,c)=d\neq 1$. Постојат природни броеви $a_1,b_1$ и $c_1$ за кои $a=a_1d, b=b_1d$ и $c=c_1d$. Од условот на задачата $ab+bc+ca=2012$ добиваме дека важи $2012=d^2(a_1b_1+b_1c_1+a_1c_1)=2^2\cdot 503$. Бидејќи 503 е прост број следува дека $d=2$.

**30.** Нека $m$ и $n$ се природни броеви такви што $2001m^2+m=2002n^2+n$. Докажи, дека $m-n$ е точен квадрат.

**Решение.** Нека $m$ и $n$ се природни броеви за кои е точно равенството $2001m^2+m=2002n^2+n$. Јасно, $m>n$, и постои природен број $k$ таков што $m=n+k$. Според тоа,

$$2001(n+k)^2+n+k=2002n^2+n$$
$$2001n^2+4002nk+2001k^2+k=2002n^2$$
$$n^2-4002nk-2001k^2-k=0.$$

Последното равенства е исполнето ако и само ако

$$D=(4002k)^2+4(2001k^2+k)=4[(2001^2+2001)k^2+k]=4[(2001^2+2001)k+1]k$$

е точен квадрат. Бидејќи $4=2^2$ и $\text{NZD}((2001^2+2001)k+1,k)=\text{NZD}(1,k)=1$, $D$ е точен квадрат ако и само ако $(2001^2+2001)k+1$ и $k$ се точни квадрати. Според тоа $k$ е полн квадрат, односно $m-n$ е точен квадрат, што и требаше да се докаже.

**31.** Нека $m\in\mathbb{N}_0$ и $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Ако $\text{NZD}(m+1,n)=1$, тогаш бројот

$$\prod_{i=2}^{n}(m+i)=(m+2)(m+3)...(m+n)$$

е делив со $n!$. Докажи!

**Решение.** За секој природен број $k$, производот на $k$ последователни цели броеви е делив со $k!$. Оттука добиваме дека $\frac{\prod_{i=1}^{n}(m+i)}{n!}\in\mathbb{Z}$ и $\frac{\prod_{i=2}^{n-1}(m+i)}{(n-1)!}\in\mathbb{Z}$, за секој цел број $m$. Од претпоставката $\text{NZD}(m+1,n)=1$ и претставувањето

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(m+i)}{n!}=\frac{(m+1)\frac{\prod_{i=2}^{n}(m+i)}{(n-1)!}}{n!}$$

следува $n\,|\,\frac{\prod_{i=2}^{m}(m+i)}{(n-1)!}$, а тоа е еквивалентно со тврдењето на задачата.

**32.** Нека $x$ е реален број таков што $x^2-x$ и $x^4-x$ се цели броеви. Докажи, дека $x$ е цел број.

**Решение.** Нека $A=x^2-x$ и $B=x^4-x$. Прво да забележиме дека $A=0$ само за $x=0$ или $x=1$, а тоа се цели броеви. Затоа можеме да земеме дека $A\neq 0$. Понатаму, $A^2=x^4-2x^3+x^2$, па затоа

$B-A^2=2x^3-x^2-x=2x^3-2x^2+x^2-x=2x^3-2x^2+A=2x(x^2-x)+A=2xA+A$,

т.е. $B-A^2-A=2xA$. Значи, $x=\frac{B}{2A}-\frac{A+1}{2}$, па затоа $x$ е рационален број. Нека $x=\frac{p}{q}$, $\text{NZD}(p,q)=1$. Тогаш $A=\frac{p^2}{q^2}-\frac{p}{q}=\frac{p(p-q)}{q^2}$. Ако $q>1$, од $\text{NZD}(p,q)=1$ следува дека бројот $A$ не може да биде цел број. Значи, $q=1$, што значи дека $x$ е цел број.

**33.** Нека $a,b$ се природни броеви такви што

$$\frac{\text{NZS}(a,b)}{\text{NZD}(a,b)}=a-b\,. \tag{1}$$

Докажи дека $\text{NZS}(a,b)=[\text{NZD}(a,b)]^2$.

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се природни броеви кои го исполуваат условот на задачата, и нека $\text{NZD}(a,b)=d$. Постојат единствени природни роеви $x$ и $y$ такви што $\text{NZD}(x,y)=1$ и $a=dx, b=dy$. Но тогаш

$$\text{NZS}(a,b)=\text{NZS}(dx,dy)=d\cdot\text{NZS}(x,y)=dxy\,.$$

Сега равенството (1) го добива обликот $\frac{dxy}{d}=dx-dy$, т.е.

$$xy=dx-dy\,. \tag{2}$$

Нека $\text{NZD}(d,y)=k$. Постојат единствени природни броеви $u$ и $v$ такви што $\text{NZD}(u,v)=1$ и $d=ku$, $y=kv$. Бидејќи $\text{NZD}(x,y)=1$ и $v\mid y$, добиваме дека $\text{NZD}(x,v)=1$ и $\text{NZD}(x,k)=1$. Но, сега (2) го добива обликот $xkv=kux-kukv$, т.е. обликот

$$v(x+ku)=ux$$

Од $\text{NZD}(v,u)=\text{NZD}(v,x)=1$ и $v\mid ux$, добиваме $v=1$ односно

$$\begin{aligned}&x+ku=ux\\&ux-x-ku+k=k\\&x(u-1)-k(u-1)=k\\&(x-k)(u-1)=k.\end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи $\text{NZD}(x,k)=1$, добиваме $x-k=1$ и $u-1=k$, т.е. $x=k+1$, $u=k+1$, $y=k$, $d=k(k+1)$, односно

$$a=k(k+1)^2, b=k^2(k+1) \text{ и}$$

$$\text{NZS}(a,b)=k^2(k+1)^2=[k(k+1)]^2=d^2=[\text{NZD}(a,b)]^2,$$

што требаше да се докаже.

**34.** а) Определи ги сите природни броеви $n$, за кои постојат природни броеви $x$ и $y$ такви што

$$\mathrm{NZS}(x,y)=n!;\ \mathrm{NZD}(x,y)=2009$$

б) Одреди го бројот на парови $(x,y)$ за кои важи

$$\mathrm{NZS}(x,y)=41!;\ \ \mathrm{NZD}(x,y)=2009;\ x\le y$$

**Решение.** а) Од $\mathrm{NZD}(x,y)=2009$ следува дека $x=2009a$ и $y=2009b$, каде што $a$ и $b$ се природни броеви така што $\mathrm{NZD}(a,b)=1$.

Од $\mathrm{NZS}(x,y)=n!$ следува $2009ab=n!$, односно $7^2\cdot 41ab=n!$. Од последново следува $n\ge 41$. Условот е и доволен бидејќи ако $n\ge 41$, за $x=2009$ и $y=n!$ важи $\mathrm{NZS}(x,y)=n!$ и $\mathrm{NZD}(x,y)=2009$.

б) Нека за броевите $x$ и $y$ важи $\mathrm{NZS}(x,y)=41!$; $\mathrm{NZD}(x,y)=2009$; $x\le y$. Тогаш $x=2009a$; $y=2009b$; $\mathrm{NZD}(a,b)=1$; $a\le b$ и $2009ab=41!$, т.е. $ab=\frac{40!}{7^2}$. Секој прост делител на $\frac{40!}{7^2}$ и е делител на $a$, не е делител на $b$ и обратно. Бројот $\frac{40!}{7^2}$ има точно 12 прости делители 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 и 37 и секој од нив е делител или на $a$ или на $b$. Бројот на ваквите парови $(a,b)$ е $2^{12}$, меѓутоа само половината го задоволуваат условот $a<b$. Значи, постојат точно $2^{11}=2048$ парови $(x,y)$ што го задоволуваат дадениот услов.

**35.** Определи ги сите природни броеви $n$, за кои постои природен број $k$ таков што

а) $k$ има најмалку $n$ различни прости делители;

б) постојат $n$ различни позитивни делители на $k$, $x_1=1,x_2,x_3,...,x_n$ чиј збир е еднаков на $k$.

**Решение.** Ако $n$ е решение на задачата, ќе покажеме дека и $n+1$ е решение на задачата.

Нека претпоставиме дека $n$ е решение на задачата. Значи постои природен број $k$ кој има најмалку $n$ различни прости делители и постојат $n$ различни делители на $k$, $x_1=1,x_2,x_3,...,x_n$ такви што

$$1+x_2+x_3+...+x_n=k\ .$$

За природниот број $n+1$ ќе го разгледаме природниот број $k(k+1)$. Бидејќи $k$ има $n$ различни прости делители и $\mathrm{NZD}(k,k+1)=1$, добиваме дека $k(k+1)$ има најмалку $n+1$ прост делител. Тоа се $n$-те делители на $k$ и еден делител на $k+1$ ако тој е сложен број или $k+1$ ако е прост број.

Од друга страна ќе ги разгледаме броевите

$$y_1=1,y_2=(k+1)x_2,y_3=(k+1)x_3,...,y_n=(k+1)x_n,y_{n+1}=k\ ,$$

за кои е јасно дека се делители на $k(k+1)$ кои не се еднакви меѓу себе, и уште важи

$$\begin{aligned}y_1+y_2+y_3+...+y_n+y_{n+1}&=1+(k+1)x_2+(k+1)x_3+...+(k+1)x_n+k\\&=(k+1)(1+x_2+x_3+...+x_n)=k(k+1).\end{aligned}$$

Не е тешко да се провери дека $n=6$ е најмалиот таков број. Доволно е да се земе $k=1806\cdot 1807$. Негови делители се $p_1=2, p_2=3, p_3=7, p_4=43, p_5=13, p_6=139$, а збирот на неговите делители

$$1,\ 14\cdot 13\cdot 1807,\ 21\cdot 43\cdot 1807,\ 6\cdot 43\cdot 1807,\ 42\cdot 1807, 1806$$

е еднаков на $1806\cdot 1807$.

**36.** Нека $a_1=1$, $a_2=1$ и $a_{n+1}=a_{n+1}+a_n$, за $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека за секои $n,k\in\mathbb{N}$ броевите $ka_{n+2}+a_n$ и $ka_{n+3}+a_{n+1}$ се заемно прости.

**Решение.** Воведуваме ознака $b_n=ka_{n+2}+a_n$, $n\in\mathbb{N}$. Од дефиницијата на $a_n$ и $b_n$ имаме

$$\begin{aligned} b_n+b_{n-1} &= (ka_{n+2}+a_n)+(ka_{n+1}+a_{n-1}) \\ &= k(a_{n+2}+a_{n+1})+a_n+a_{n-1} \\ &= ka_{n+3}+a_{n+1}=b_{n+1}. \end{aligned}$$

Од последното равенство имаме

$$b_{n+1}-b_n=b_{n-1}. \tag{1}$$

Ако $d=\text{NZD}(b_{n+1},b_n)$, тогаш од последното равенство добиваме $d\,|\,b_{n+1}$ и $d\,|\,b_n$, па според тоа од (1) имаме $d\,|\,b_{n-1}$. Од $d\,|\,b_n$ и $d\,|\,b_{n-1}$ добиваме дека $d\,|\,(b_n-b_{n-1})=b_{n-2}$. Повторувајќи ја оваа постапка конечен број пати, добиваме дека $d\,|\,b_i$, $i=1,2,...,n$.

Од друга страна имаме

$$b_2=ka_4+a_2=3k+1 \text{ и } b_1=ka_3+a_1=2k+1.$$

Бидејќи $d\,|\,b_2$, $d\,|\,b_1$ добиваме

$$\begin{aligned} 0<d &\le \text{NZD}(b_2,b_1)=\text{NZD}(3k+1,2k+1)=\text{NZD}(3k+1-2k-1,2k+1) \\ &= \text{NZD}(k,2k+1)=\text{NZD}(k,2k+1-2k)=\text{NZD}(k,1)=1. \end{aligned}$$

Според тоа, $d=1$ и $b_n$ и $b_{n+1}$ се заемно прости, што и требаше да се докаже.

**37.** Докажи, дека за секој природен број $n$ најмалиот заеднички содржател на броевите $1,2,...,2n-1,2n$ е еднаков со најмалиот заеднички содржател на броевите $n+1,n+2,...,2n$.

**Решение**. Јасно, тврдењето е точно за $n=1$, бидејќи $\text{NZS}(1,2)=2$. Ако $n=2$, тогаш $\text{NZS}(1,2,3,4)=12=\text{NZS}(3,4)$.

Воведуваме ознаки $\text{NZS}(1,2,...,2n)=s_n$ и $\text{NZS}(n+1,n+2,....,2n)=t_n$. Бидејќи $n+1,...,2n\,|\,s_n$ и $t_n=\text{NZS}(n+1,n+2,....,2n)$, добиваме дека $t_n\,|\,s_n$.

Со помош на математичка индукција ќе покажеме дека $s_n\,|\,t_n$ за секој природен број $n\in\mathbb{N}$.

Од првиот дел на задачата следува дека тврдењето е точно за $n=1$ и $n=2$, т.е. $s_1\,|\,t_1$ и $s_2\,|\,t_2$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број $n$, т.е. $s_n\,|\,t_n$. Ако $m$ е содржател на броевите $(n+1)+1$, $(n+1)+2$,…, $2(n+1)$, тогаш $2(n+1)\,|\,m$ од каде добиваме дека $(n+1)\,|\,m$. Според тоа $n+1,n+2,...,2n$ се делители на $m$, т.е. $t_n \mid m$. Според индуктивната претпоставка имаме дека $s_n \mid t_n$, па затоа $1,2,3,...,n \mid m$. Значи, $1,2,3,...,n,n+1,n+2,....,2n,2n+1,2n+2 \mid m$. Бидејќи $m$ е содржател на $n+1,n+2,...,2(n+1)$, добиваме дека

$$1,2,3,...,n,n+1,n+2,....,2n,2n+1,2n+2 \mid t_{n+1}.$$

Значи, $s_{n+1} \mid t_{n+1}$, т.е. е точно и за $n+1$. Од принципот на математичка индукција следува $s_n \mid t_n$ за секој природен број $n$.

Конечно, бидејќи $s_n \mid t_n$ и $t_n \mid s_n$ добиваме $s_n = t_n$, т.е.

$$\text{NZS}(1,2,...,n,n+1,...,2n) = \text{NZS}(n+1,n+2,....,2n).$$

**38.** Ако $p$ е прост број тогаш $\sqrt{p}$ е ирационален број.

**Решение.** Нека претпоставиме дека $\sqrt{p}$ е рационален број. Тогаш постојат заемно прости броеви $a$ и $b$ така што $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$. Оттука важи $a^2 = pb^2$, па според тоа $p \mid a^2$ и како $p$ е прост број, добиваме дека $p \mid a$. Според тоа, постои природен број $c$ таков што $a = cp.$ Имаме $c^2 p^2 = pb^2$, т.е. $c^2 p = b^2$. На ист начин како и претходно заклучуваме дека $p \mid b$. Според тоа, $p \mid \text{NZD}(a,b) = 1$ што е противречност. Од добиената противречност следува дека $\sqrt{p}$ е ирационален број.

**39.** Постојат бесконечен број на прости броеви од облик $4k+3.$ Докажи!

**Решение.** Нека претпоставуваме спротивно, т.е. постојат конечен многу, т.е. постојат $n$ прости броеви од облик $4k+3$: $p_1, p_2,..., p_n$. Бројот $p = 4p_1p_2...p_n - 1$ е непарен број од облик $4k+3$. Сите прости делители на $p$ се броеви од облик $4k+1$ и $4k+3$. Ако сите негови прости делители се од облик $4k+1$ тогаш и бројот $p$ е истиот облик, што е противречност. Значи постои најмалку еден прост делител на $p$ од облик $4k+3$, т.е. постои $i \in \{1,2,...,n\}$ така што $p_i \mid p$. Според тоа, $p_i \mid 4p_1p_2...p_n = p+1$. Значи, $p_i \mid p+1-p = 1$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $p$ има прост делител од облик $4k+1$ кој е различен од броевите $p_1, p_2,..., p_n$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од облик $4k+1$.

**40.** Најди ги сите природни броеви $a$ и $b$ за кои $a^4 + 4b^4$ е прост број.

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= (a^2)^2 + (2b^2)^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2). \end{aligned}$$

Ако $a \geq 2$ или $b \geq 2$, тогаш

$$a^2 + 2b^2 > 3ab > 2ab + 1 \text{ и } a^2 + 2ab + 2b^2 > a^2 - 2ab + 2b^2,$$

т.е. $a^4 + 4b^4$ може да се претстави како производ на два различни природни броеви поголеми од еден, што значи дека е сложен број.

Ако $a=b=1$, тогаш $a^4+4b^4=5$, кој е единствен прост број од ваков облик.

**41.** а) Докажи дека за $n>2$ постои прост број $p$ за кој важи $n<p<n!$.

б) Ако $n>1$, докажи дека секој прост делител на бројот $n!+1$ е непарен број поголем од $n$.

Решение. а) Го разгледуваме бројот $n!-1$ и нека $p$ е негов прост делител. Ако $n!-1$ е прост број, тогаш $p=n!-1$. Ако $n!-1$ е сложен број, тогаш секој негов делител е поголем од $n$.. Навистина ако $2\le d\le n$, тогаш $d\,|\,n!$, што значи дека $d\,|\,n!-(n!-1)=1$, што не е можно. Значи, кога $n!-1$ е сложен број избираме прост делител $p$ на $n!-1$ и за овој број важи $n<p<n!$.

б) Бидејќи $n>1$ следува дека $n!$ е парен број, па оттука $n!+1$ е непарен број. Значи сите прости делители на $n!+1$ се непарни. Нека $p\,|\,n!+1$, $p$ е прост број. Ако $2<p\le n$ тогаш $p\,|\,n!$. Од $p\,|\,n!+1$ и $p\,|\,n!$ следува дека $p\,|\,\mathrm{NZD}(n!,n!+1)=1$, што не е можно.

**42.** Определи ги сите прости броеви $p$ и $q$ и сите природни броеви $k>1$ за кои броевите $p^kq+1$ и $pq^k+1$ се точни квадрати.

**Решение.** Нека $p^kq+1=x^2$ и $pq^k+1=y^2$, каде $x,y\in\mathbb{N}$. Ако еден од броевите $p$ или $q$ е еднаков на 2, на пример $p=2$, а $q$ е непарен, тогаш равенството $2q^k+1=y^2$ доведува до противречност по модул 4. Ако $p=q=2$, тогаш од $2^{k+1}=(x-1)(x+1)$ следува дека $x-1$ и $x+1$ се степени на бројот 2, што е можно само за $x=3$ и соодветно $k=2$.

Нека $p$ и $q$ се непарни прости броеви. Тогаш $x$ и $y$ се парни броеви и

$$\mathrm{NZD}(x-1,x+1)=\mathrm{NZD}(y-1,y+1)=1,$$

па од равенствата $p^kq=(x-1)(x+1)$ и $pq^k=(y-1)(y+1)$ следува дека се можни четири случаи.

1) $p^k=x-1, q=x+1, q^k=y-1, p=y+1$, па затоа $q-p^k=p-q^k=2$, т.е. $p^k+p=q^k+q$. Според тоа, $p=q$, од каде добиваме $p=2$, што е противречност.

2) $p^k=x+1, q=x-1, q^k=y+1, p=y-1$, што на потполно ист начин како во 1) доведува до противречност.

3) $p^k=x-1, q=x+1, q^k=y+1, p=y-1$, од каде следува $q-p^k=q^k-p=2$, односно $p+q=p^k+q^k$, што не е можно.

4) $p^k=x+1, q=x-1, q^k=y-1, p=y+1$, што на потполно ист начин како во 3) доведува до противречност.

**43.** Определи ги сите парови природни броеви $(m,n)$, $m>n$ такви што

$$\text{NZS}(m^2+mn, mn-n^2)+\text{NZS}(m-n, mn)=2^{2005}. \qquad (1)$$

**Решение.** Левата страна на е делива со $m,n$ и $m-n$, па затоа $m=2^a$, $n=2^b$ и $m-n=2^c$. Очигледно $2^b(2^{a-b}-1)=2^c$, па затоа $a-b=1$. Со замена во (1) добиваме

$$\begin{aligned}2^{2005}&=\text{NZS}(2^{2a}+2^{2a-1}, 2^{2a-1}-2^{2a-2})+\text{NZS}(2^a-2^{a-1}, 2^{2a-1})\\&=2^{2a-1}+3\cdot 2^{2a-1}=2^{2a+1}.\end{aligned}$$

Според тоа, $a=1002, m=2^{1002}, n=2^{1001}$.

**44.** Определи ги сите прости броеви $p, q, r, s$ такви што нивниот збир е прост број и броевите $p^2+qr$ и $p^2+qs$ се квадрати на природни броеви.

**Решение.** Бидејќи $p+q+r+s$ е прост број, заклучуваме дека еден од броевите $p, q, r, s$ е парен. Нека $q=2$ .Тогаш $p^2+2r=a^2$ и $p^2+2s=b^2$, па затоа

$$2r=(a-p)(a+p) \text{ и } 2s=(b-p)(b+p).$$

Но, броевите $a, b, p$ се непарни, па затоа $(a-p)(a+p)$ и $(b-p)(b+p)$ се деливи со 4, што не е случај со $2r$ и $2s$, бидејќи $r$ и $s$ се прости броеви поголеми од 2.

Нека $r=2$. Тогаш $p^2+2q=a^2$, т.е. $2q=(a-p)(a+p)$, што не е можно бидејќи бројот $(a-p)(a+p)$ е делив со 4, а бројот $2q$ не е делив со 4, бидејќи $q$ е непарен прост број. Аналогно добиваме дека $s\neq 2$.

Значи, $p=2$. Сега $qr=a^2-4$ и $qs=b^2-4$, па затоа

$$qr=(a-2)(a+2) \text{ и } qs=(b-2)(b+2).$$

Ако $a-2=1$, тогаш $a=3$, па затоа $a+2=5$ и задачата нема решенние. Аналогно е и за $b-2=1$. Бидејќи $a\neq b$, имаме два случаи:

1) $q=a-2, r=a+2, q=b+2, s=b-s$. Сега имаме $a=q+2, b=q-2$, па затоа броевите $s=q-4, q, r=q+4$ се прости. Бидејќи еден од нив е делив со 3, заклучуваме дека тој мора да е еднаков на 3. Според тоа, $q=7, s=3, r=11$.
2) Ако $q=a+2, r=a-2, q=b-2, s=b+2$, тогаш размислувајќи на потполно иста начин добиваме $q=7, r=3, s=11$.

Значи, решенија се $(p,q,r,s)\in\{(2,7,3,11),(2,7,11,3)\}$.

**45.** Нека $x, y, z$ се агли на даден триаголник изразени во степени.

а) Докажи дека ако $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ се рационални броеви, тогаш $x, y, z$ се исто така рационални броеви.

б) Докажи дека ако точно еден од броевите $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ е рационален, тогаш $x, y, z$ се ирационални броеви.

**Решение.** Забележуваме дека важи

$$\frac{180}{x}=\frac{x+y+z}{x}=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}. \qquad (1)$$

а) Бидејќи $\frac{x}{y}$ е рационален број тогаш и бројот $\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}$ е рационален број. Сега од (1) следува дека $\frac{180}{x}$ е рационален. Последното значи дека $x$ е рационален број. На ист начин се докажува дека и $y$ и $z$ се рационални броеви.

б) Без губење на општоста претпоставуваме дека $\frac{x}{y}$ е рационален број и $\frac{y}{z},\frac{z}{x}$ се ирационални броеви. Значи, $\frac{y}{x}$ е рационален број, а $\frac{z}{y}$ и $\frac{x}{z}$ се ирационални броеви. Значи $\frac{180}{x}$ е збир од два рационални и еден ирационален број, па според тоа е ирационален број. Оттука $x$ е ирационален број. Бидејќи $\frac{x}{y}$ е рационален број следува дека $y$ е ирационален број. Сега нека претпоставиме дека $z$ е рационален број. Тогаш $x+y=180-z$ е рационален број. Значи, $\frac{x+y}{y}$ е количник на рационален и ирационален број, што значи дека тој е ирационален број. Од друга страна $\frac{x+y}{y}=1+\frac{x}{y}$ е рационален број, како збир од два рационални броеви, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $z$ е ирационален број.

**46.** Нека $k$ и $m$ се природни броеви такви што $\frac{1}{2}(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k})$ е цел број. Докажи дека $\sqrt{k}$ е рационален број.

**Решение.** Нека $\frac{1}{2}(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k})=c\in\mathbb{Z}$. Имаме $\sqrt{k+4\sqrt{m}}=2c+\sqrt{k}$. Го квадрираме последното равенство и добиваме $\sqrt{m}=c^2+c\sqrt{k}$, од каде следува дека $m=c^4+c^2k+2c^3\sqrt{k}$. Конечно, од последното равенство следува дека $\sqrt{k}=\frac{m-c^4-c^2k}{2c^3}\in\mathbb{Q}$.

**47.** Докажи дека бројот $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ е ирационален број.

**Решение.** Нека го претпоставиме спротивното, т.е. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ е рационален број. Постојат цели броеви $p$ и $q$, каде $q\neq 0$, и притоа важи $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=\frac{p}{q}$. Имаме

$$3=(\frac{p}{q}-\sqrt{2})^3=\frac{p^3}{q^3}-\frac{3p^2\sqrt{2}}{q^2}+\frac{3p(\sqrt{2})^2}{q}-(\sqrt{2})^3=\frac{p^3}{q^3}-\frac{3p^2\sqrt{2}}{q^2}+\frac{6p}{q}-2\sqrt{2}$$
$$=\frac{p^3}{q^3}+\frac{6p}{q}-\sqrt{2}(\frac{3p^2}{q^2}+2),$$

дд каде добиваме

$$\sqrt{2}=\frac{\frac{p^3}{q^3}+\frac{6p}{q}-3}{\frac{3p^2}{q^2}+2}=\frac{p^3+6pq^2-3q^3}{3p^2q+2q^3},$$

т.е. $\sqrt{2}$ е рационален број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ е ирационален број.

**48.** Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот $n$. По децималната запирка ги запишуваме еден по друг броевите $S(1), S(2),...$. Докажи дека бројот што се добива е ирационален.

**Решение.** Бројот $0,S(1)S(2)...$ е ирационален, ако е непериодичен. Да претпоставиме дека бројот е периодичен и нека најмалиот период има должина $d$. Јасно, периодот мора да содржи цифри различни од 0, бидејќи во спротивно бројот би бил од облик $0,S(1)S(2)...S(k)$ што не е можно, бидејќи тоа би значело дека збирот на цифрите на сите броеви поголеми од $k$ треба да е еднаков на 0. Имено, секогаш постои број поголем од $k$ чиј збир на цифри е различен од 0, на пример, таков е бројот $10^k$ кој е поголем од $k$, а збирот на цифри му е 1. Меѓутоа, постои доволно голем природен број чиј што збир на цифри завршува на $2d$ нули, на пример бројот 11...11 запишан со $10^{2d}$ единици е број чиј збир на цифри е $10^{2d}$. Последното значи дека периодот со должина $d$ мора да се содржи во бројот $S(10^{2d})$, што би значело дека ериодот $d$ е запишан само со нули, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека бројот $0,S(1)S(2)...$ е непериодиче, т.е. е ирационален број.

## 5.2. КОНГРУЕНЦИИ

**1.** Секој прост број поголем од 3 има остаток 1 или 5 при делење со 6. Докажи!

**Решение.** Нека $p>3$ е прост број.

Ако $p\equiv 0(\mathrm{mod}\,6)$ тогаш $p=6k$ е делив со 6.

Ако $p\equiv 2(\mathrm{mod}\,6)$ тогаш $p=6k+2=2(3k+1)$ е делив со 2.

Ако $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$ тогаш $p=6k+3=3(2k+1)$ е делив со 3

Ако $p\equiv 4(\mathrm{mod}\,6)$ тогаш $p\equiv 6k+4=2(3k+2)$ е делив со 2.

Останува дека секој прост број поголем од 3 дава остаток 1 или 5 при делење со 6.

**2.** Ако $x\equiv a(\mathrm{mod}\,n)$, докажи дека $x\equiv a(\mathrm{mod}\,2n)$ или $x\equiv a+n(\mathrm{mod}\,2n)$.

**Решение.** Од $x\equiv a(\mathrm{mod}\,n)$ следува дека $n\,|\,x-a$, т.е. постои цел број $k$ таков што $x-a=kn$. Можни се два случаја:

1) Ако $k=2s$, тогаш $x-a=2ns$ т.е. $2n\,|\,x-a$, па значи $x\equiv a(\mathrm{mod}\,2n)$.
2) Ако $k=2s+1$, тогаш $x-a=2ns+n$, т.е. $2n\,|\,x-(a+n)$, што значи дека $x\equiv a+n(\mathrm{mod}\,2n)$.

**3.** Ако $p\geq 5$ е прост број, докажи дека $p^2+2$ е сложен број. Докажи!

**Решение.** Според претходната задача важи $p \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,6)$, па затоа важи $p^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$. Оттука $p^2 + 2 \equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$, т.е.
$p^2 + 2 = 6k + 3 = 3(2k+1)$,

што значи дека $p^2 + 2$ е делив со 3, т.е. е сложен број.

**4.** Ако целите броеви $x_i$, $i = 1, 2, ..., 9$ не се деливи со 3, докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_9^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

**Решение.** Бидејќи $x_i$, $i = 1, 2, ..., 9$ не се деливи со 3 добиваме дека

$$x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\,3) \text{ или } x_i \equiv 2(\mathrm{mod}\,3).$$

Според тоа $x_i^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_9^2 \equiv 9 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

**5.** Нека $n$ и $8n^2 + 1$ се прости броеви. Докажи дека $8n^2 - 1$ е прост број.

**Решение.** Ако $n = 2$, тогаш $8n^2 + 1 = 33$ не е прост број. Ако $n = 3$, тогаш $8n^2 + 1 = 73$ е прост број и притоа $8n^2 - 1 = 71$ исто така е прост број.

Понатаму, ако $n > 3$ е прост број, тогаш $n \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,6)$, па затоа $n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$, т.е. $8n^2 + 1 \equiv 9 \equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$. Сега од задача 1 следува дека $8n^2 + 1$ е сложен број. Значи, $n = 3$ е единствениот прост број за кој и бројот $8n^2 + 1$ е прост и тогаш и бројот $8n^2 - 1$, што и требаше да се докаже.

**6.** Дали постои природен број $n$ таков што четирицифрениот завршеток на бројот $1 + 2 + ... + n$ е 2005?

**Решение.** Доволно е да се испита решливоста во $\mathbb{N}$ на конгруенцијата

$$\tfrac{n(n+1)}{2} \equiv 2005(\mathrm{mod}\ 10000). \qquad (1)$$

Ако постои решение $n_0$ на (1) и $n_0 > 20000$, тогаш $n_0' = n_0 - 20000[\frac{n_0}{20000}]$ е решение на (1) во множеството $\{1, 2, ..., 20000\}$. Според тоа (1) има решение во $\mathbb{N}$ ако и само ако има решение во множеството $\{1, 2, ..., 20000\}$. Тоа значи дека равенката се сведува на решливоста на барем една од равенките $\frac{n(n+1)}{2} = 2005$ и $\frac{n(n+1)}{2} = 12005$. Последниве две равенки немаат целобројни решенија, што значи дека не постои $n \in \mathbb{N}$ што го исполнува условот на задачата.

**7.** Дали постои природен број $m$ таков што 7 е делител на $2^{m^2} - 4$?

**Решение.** Од $2^3 = 8 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$ и својствата на конгруенциите следува дека $2^{3k+1} \equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$, $2^{3k+2} \equiv 4(\mathrm{mod}\,7)$ и $2^{3k} \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$, за секој $k \in \mathbb{N}_0$. Според тоа, $2^{m^2} - 4$ е делив со 7 ако и само ако $m^2 = 3k + 2$. Меѓутоа, за секој природен број

$m$ важи $m^2 \equiv 0(\bmod 3)$ или $m^2 \equiv 1(\bmod 3)$, што значи дека не постои природен број $m$ таков што $2^{m^2} - 4$ е делив со 7.

**8.** Определи го најмалиот природен број $M$ за кој бројот 2012 може да се запише како збир на кубови на $M$ цели броеви.

**Решение.** Нека бројот 2012 е запишан како збир на кубови на $M$ цели броеви. Лесно се проверува дека за произволен цел број $x$ важи

$$x^3 \equiv 0,1 \text{ или } -1(\bmod 9).$$

Од друга страна $2012 \equiv 9(\bmod 9)$, па затоа $M \geq 4$. Понатаму, едно можно претставување на 2012 како збир на четири кубови е

$$2012 = (-4)^3 + 5^3 + (-25)^3 + 26^3,$$

па затоа $M = 4$.

**9.** Ванчо на таблата ги запишал броевите 1 и 2, а потоа продолжил да запишува броеви така што секој нов број е еднаков на збирот на квадратите на последните два запишани броја. Докажи, дека продолжувајќи ја оваа постапка Ванчо никогаш нема да запише број кој е делив со 3 или кој е делив со 7.

**Решение.** Ванчо последователно ги запишува членовите на низата $\{a_k\}$ зададена со

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \; a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-2}^2, \text{ за } k \geq 3.$$

Првите неколку членови на низата се $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 29, \ldots$. Забележуваме дека $a_2 \equiv a_3 \equiv 2(\bmod 3)$. Нека претпоставиме дека $a_k \equiv a_{k+1} \equiv 2(\bmod 3)$, за некој $k \geq 2$. Тогаш $a_{k+2} = a_k^2 + a_{k+1}^2 \equiv 2^2 + 2^2 \equiv 2(\bmod 3)$, па од принципот на математичка индукција следува дека $a_n \equiv 2(\bmod 3)$, за секој $n \geq 2$, т.е. ниту еден член на низата не е еделив со 3.

Да ги разгледаме остатоците при делење со 7. Имаме

$$a_1 \equiv 1(\bmod 7) \qquad a_5 \equiv 5^2 + 1^2 \equiv 5(\bmod 7)$$
$$a_2 \equiv 2(\bmod 7) \qquad a_6 \equiv 1^2 + 5^2 \equiv 5(\bmod 7)$$
$$a_3 \equiv 1^2 + 2^2 \equiv 5(\bmod 7) \qquad a_7 \equiv 5^2 + 5^2 \equiv 1(\bmod 7)$$
$$a_4 \equiv 2^2 + 5^2 \equiv 1(\bmod 7) \qquad a_8 \equiv 5^2 + 1^2 \equiv 5(\bmod 7)$$

Сега, со математичка индукција лесно се докажува дека

$$a_{3k} \equiv 5(\bmod 7)$$
$$a_{3k+1} \equiv 1(\bmod 7)$$
$$a_{3k+2} \equiv 5(\bmod 7)$$

за секој $k \geq 1$, што значи дека ниту еден член на низата не е делив со 7.

**10.** Определи ги сите природни броеви $n$ за кои $2^{n+1}$ е делител на $7^{n!} - 3^{n!}$.

**Решение.** Нека $n! = 2^k m$, каде $m$ е непарен број, а $k$ е ненегативен цел број. Тогаш

$$7^{n!}-3^{n!}=(7^m)^{2^k}-(3^m)^{2^k}=(7^m-3^m)(7^m+3^m)(7^{2m}+3^{2m})...(7^{2^{k-1}m}+3^{2^{k-1}m}).$$

Бидејќи

$$7^m+3^m\equiv 7^{2m}+3^{2m}\equiv ...\equiv 7^{2^{k-1}m}+3^{2^{k-1}m}\equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \text{ и } 7^m-3^m\equiv 4(\mathrm{mod}\,8)$$

заклучуваме дека $2^{k+2}\mid(7^{n!}-3^{n!})$, но $2^{k+3}\nmid(7^{n!}-3^{n!})$. Затоа, $n+1\le k+2$, т.е. $k\ge n-1$.

Од друга страна, ако $2^t\le n<2^{t+1}, t\in\mathbb{N}_0$, тогаш

$$k=[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{2^2}]+...+[\tfrac{n}{2^t}]\le\tfrac{n}{2}+\tfrac{n}{2^2}+...+\tfrac{n}{2^t}=n(1-\tfrac{1}{2^t})\le n-1.$$

Според тоа, $k=n-1$ и $n=2^t$, $t\in\mathbb{N}_0$.

**11.** Дадена е низа $\{x_n\}$ таква што $x_1\in\{5,7\}$ и $x_{n+1}\in\{5^{x_n},7^{x_n}\}$, за $n=1,2,...$. Определи ги можните вредности на последните две цифри на $x_{2009}$.

**Решение.** Имаме $7^k\equiv 7,49,43,1(\mathrm{mod}\,100)$ за $k\equiv 1,2,3,0(\mathrm{mod}\,4)$, соодветно и $5^k\equiv 25(\mathrm{mod}\,100)$ за $k\ge 2$.

За $x_n, n=2009$ можни се следниве случаи

1) Ако $x_n=7^{x_{n-1}}=7^{5^{x_{n-2}}}$, тогаш $5^{x_{n-2}}\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ и затоа $x_n\equiv 7(\mathrm{mod}\,100)$.
2) Ако $x_n=7^{x_{n-1}}=7^{7^{x_{n-2}}}$, тогаш $7^{7^{x_{n-2}}}\equiv(-1)^{x_{n-2}}\equiv -1\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ и затоа $x_n\equiv 43(\mathrm{mod}\,100)$.
3) Ако $x_n=5^{x_{n-1}}$, тогаш $x_n\equiv 25(\mathrm{mod}\,100)$.

**12.** Нека $x$ е природен број и $p$ е прост број така што $\mathrm{NZD}(x,p)=1$. Докажи дека, ако $m$ и $n$ се природни броеви такви што $x^m\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ и $x^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, тогаш $x^{\mathrm{NZD}(m,n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

**Решение.** Нека $\mathrm{NZD}(m,n)=d$. Тоа значи дека постојат цели броеви $m_0$ и $n_0$ такви што $d=mm_0+nn_0$.

Ако $m_0,n_0>0$, тогаш

$$x^{\mathrm{NZD}(m,n)}=x^{mm_0+nn_0}=(x^m)^{m_0}\cdot(x^n)^{n_0}\equiv 1\cdot 1\equiv 1(\mathrm{mod}\,p).$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $m_0>0$ и $n_0<0$. Тогаш $(x^n)^{-n_0}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ и $(x^m)^{m_0}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ па затоа

$$x^{\mathrm{NZD}(m,n)}\equiv x^{\mathrm{NZD}(m,n)}\cdot(x^n)^{-n_0}\equiv x^{\mathrm{NZD}(m,n)-nn_0}\equiv(x^m)^{m_0}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p).$$

**13.** Докажи дека за секои цели броеви $x,m$ и $n$ такви што $m,n\ge 0$ важи

$$\mathrm{NZD}(x^m-1,x^n-1)=|x^{\mathrm{NZD}(m,n)}-1|.$$

**Решение.** доволно е да докажеме дека

$$\mathrm{NZD}(x^m-1,x^n-1)\,|\,|x^{\mathrm{NZD}(m,n)}-1| \text{ и } |x^{\mathrm{NZD}(m,n)}-1|\,|\,\mathrm{NZD}(x^m-1,x^n-1).$$

Нека $d = \mathrm{NZD}(x^m - 1, x^n - 1)$. Тогаш $x^m \equiv 1(\mathrm{mod}\, d)$ и $x^n \equiv 1(\mathrm{mod}\, d)$. Да означиме $k = \mathrm{NZD}(m, n)$. Тоа значи дека постојат цели броеви $m_0$ и $n_0$ такви што $k = mm_0 + nn_0$. Според тоа,

$$x^{\mathrm{NZD}(m,n)} - 1 \equiv x^{mm_0 + nn_0} - 1 \equiv (x^m)^{m_0} \cdot (x^n)^{n_0} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, d\right),$$

што значи дека

$$\mathrm{NZD}(x^m - 1, x^n - 1) = d \,||\, x^{\mathrm{NZD}(m,n)} - 1|.$$

Нека $| x^{\mathrm{NZD}(m,n)} - 1 | = d$. Јасно, $x^{\mathrm{NZD}(m,n)} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, d\right)$, па оттука добиваме

$$x^m - 1 \equiv (x^{\mathrm{NZD}(m,n)})^{\frac{m}{\mathrm{NZD}(m,n)}} - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, d),\ x^n - 1 \equiv (x^{\mathrm{NZD}(m,n)})^{\frac{n}{\mathrm{NZD}(m,n)}} - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, d)$$

Бидејќи $d \mid x^m - 1$ и $d \mid x^n - 1$ следува дека

$$| x^{\mathrm{NZD}(m,n)} - 1 | - d \mid \mathrm{NZD}(x^m - 1, x^n - 1).$$

**14.** Нека $n$ е непарен природен број поголем од 1. Докажи, дека бројот $3^n + 1$ не е делив со $n$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека постои непарен природен број $n$ поголем од 1 таков што $n \mid 3^n + 1$. Нека $p$ е најмалиот прост делител на бројот $n$. Тогаш $p \mid 3^n + 1$, т.е. $3^n \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$, па затоа $3^{2n} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Од малата теорема на Ферма следува $3^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ Сега, бидејќи $\mathrm{NZD}(3, p) = 1$ од последните две конгруенции заклучуваме дека

$$3^{\mathrm{NZD}(2n, p-1)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p). \qquad (1)$$

Бидејќи $n$ е непарен добиваме дека $p-1$ е парен број, а според претпоставката бројот $p$ е најмалиот прост делител на бројот $n$, па затоа $\mathrm{NZD}(n, p-1) = 1$. Тоа значи, дека $\mathrm{NZD}(2n, p-1) = 2$. Сега од (1) следува дека $3^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $p \mid 8$, што не е можно, бидејќи $p$ е непарен природен број. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

**15.** Секој прост делител $p > 3$ на број од облик $x^2 + 1, x > 1$ е од облик $4k + 1$. Докажи!

**Решение.** Нека $p \mid x^2 + 1$, $p > 3$ е прост број. Според тоа, $x^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $x^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, што значи $x^{4k} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Од $p \mid x^2 + 1$ следува дека $p$ не е делител на $x$, т.е. $\mathrm{NZD}(p, x) = 1$.

Од малата теорема на Ферма имаме $x^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Бидејќи $x^{4k} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ следува дека $p - 1 = 4k$, од каде добиваме $p = 4k + 1$.

**16.** Нека $p$ и $q$ се различни непарни прости броеви такви што $p-1 \mid q-1$. Ако $\mathrm{NZD}(a, pq) = 1$ докажи дека $pq \mid a^{q-1} - 1$.

**Решение.** Од малата теорема на Ферма имаме

$$a^{p-1} \equiv 1(\bmod p) \text{ и } a^{q-1} \equiv 1(\bmod q).$$

Бидејќи $p-1 \mid q-1$ постои природен број $k$ таков што $q-1=k(p-1)$. Имаме $a^{q-1} \equiv a^{(p-1)k} \equiv 1^k \equiv 1(\bmod q)$, т.е. односно $p \mid a^{q-1}-1$. Но, $p$ и $q$ се заемно прости па од $p \mid a^{q-1}-1$ и $q \mid a^{q-1}-1$ следува $pq \mid a^{q-1}-1$.

**17.** Нека $x, y \in \mathbb{N}$. Докажи, дека $\frac{4x^2+1}{y^2+2} \notin \mathbb{N}$.

**Решение.** Ако $\frac{4x^2+1}{y^2+2} \in \mathbb{N}$, тогаш $y$ е непарен број, т.е. $y=2k+1$. Според тоа,

$$y^2+2=4k(k+1)+3=4 \cdot 2l+3, \; l \in \mathbb{N}_0.$$

Понатаму, производ на два броја од видот $4u+1$ е број од истиот вид, па затоа постои прост број $p$ од видот $4n+3, n \in \mathbb{N}_0$ кој е делител на $y^2+2$. Но, $\frac{4x^2+1}{y^2+2} \in \mathbb{N}$, па заклучуваме дека $p$ е делител на $4x^2+1$. Последното не е можно, бидејќи тогаш ќе важи $4x^2 \equiv -1(\bmod p)$, т.е.

$$(4x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2n+1} \equiv -1(\bmod p),$$

што е противречност, бидејќи според малата теорема на Ферма имаме

$$(4x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (2x)^{p-1} \equiv 1(\bmod p).$$

**18.** Нека $a, b \in \mathbb{N}, a > b$ и $a+b$ е парен број. Докажи, дека корените на равенката

$$x^2-(a^2-a+1)(x-b^2-1)-(b^2+1)^2=0$$

се природни броеви, но ниту еден од нив не е точен квадрат.

**Решение.** Корените на равенката се $x_1=b^2+1$ и $x_2=a^2-b^2-a$. Јасно, тие се природни броеви и $x$ не е точен квадрат. Да претпоставиме дека постојат природни броеви $a>b$, за кои $a+b$ е парен број и $x_2$ е точен квадрат., на пример $c^2$. Тогаш $m=\frac{a+b}{2}$ и $n=\frac{a-b}{2}$ се природни броеви и важи

$$(4m-1)(4n-1)=4(4mn-m-n)+1=4(a^2-b^2-a)+1=(2c)^2+1^2.$$

Според тоа, бројот $(2c)^2+1$ има прост делител од видот $4k-1$. Од малата теорема на Ферма следува дека тој делител треба да е делител на $2c$ и 1, што е противречност.

**19.** Докажи дека ако $n$ е природен број поголем од еден, тогаш $n$ не е делител на бројот $2^n-1$.

**Решение.** Нека $n \mid 2^n-1$ и нека $p$ е најмалиот прост делител на $n$. Бидејќи $2^n-1$ е непарен број, важи $p \geq 3$. Според тоа, $p \mid 2^n-1$, т.е. $2^n \equiv 1(\bmod p)$.

Бидејќи $\mathrm{NZD}(2,p)=1$ од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. Според тоа, $2^{\mathrm{NZD}(p-1,n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. Но, $p\,|\,n$, па затоа $\mathrm{NZD}(p-1,n)=1$. Значи $2\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ што е противречност. Конечно, од добиената противрелност следува дека $n$ не е делител на бројот $2^n-1$.

**20.** Реши ја конгруентната равенка $x^{12}-2x^7+x^3+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$.

**Решение.** Од малата теорема на Ферма следува $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,5)$, па оттука следува:

$$x^{12}\equiv (x^5)^2\cdot x^2\equiv x^2\cdot x^2\equiv x^4(\mathrm{mod}\,5) \text{ и } x^7\equiv x^5\cdot x^2\equiv x\cdot x^2\equiv x^3(\mathrm{mod}\,5).$$

Добиваме

$$x^{12}-2x^7+x^3+1\equiv x^4-x^3+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$$

Сега со проверка за $x\equiv 0,1,2,3,4(\mathrm{mod}\,5)$ во равенката $x^4-x^3+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ добиваме дека $x\equiv 3(\mathrm{mod}\,3)$.

**21.** Докажи, дека за секој природен број $k$ постојат бесконечно многу природни броеви $n$ такви што броевите

$$2^n+3^n-1,\, 2^n+3^n-2,\, ...,\, 2^n+3^n-k$$

се сложени.

**Решение.** Нека $k$ е даден природен број и да избереме природен број $m$ таков што $2^m+3^m-k>1$. Од секој од броевите

$$2^m+3^m-1,\, 2^m+3^m-2,\, ...,\, 2^m+3^m-k$$

избираме по еден прост делител $p_1,p_2,...,p_k$, соодветно. Нека

$$n_t=m+t(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)$$

каде $t$ е произволен природен број. За секој $i, 1\le i\le k$ ќе докажеме дека $2^{n_t}\equiv 2^m(\mathrm{mod}\,p_i)$. За $p_i=2$ конгруенцијата е очигледна, а за $p_i\neq 2$ од малата теорема на Ферма следува

$$2^{n_t}\equiv 2^m 2^{t(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)}\equiv 2^m\cdot 1\equiv 2^m(\mathrm{mod}\,p_i).$$

Аналогно се докажува дека $3^{n_t}\equiv 3^m(\mathrm{mod}\,p_i)$, па затоа

$$2^{n_t}+3^{n_t}-i\equiv 2^m+3^m-i(\mathrm{mod}\,p_i),$$

при што важи $2^{n_t}+3^{n_t}-i>2^m+3^m-i$. Според тоа, $2^{n_t}+3^{n_t}-i$ е сложен број. Според тоа, за $n=n_t$ броевите

$$2^n+3^n-1,\, 2^n+3^n-2,\, ...,\, 2^n+3^n-k$$

се сложени. Но, $t$ е произволен број, па затоа постојат бесконечно многу такви броеви.

**22.** Докажи го или негирај го тврдењето: За секој природен број $n\ge 2$ остатокот при делењето на $2^{2^n}$ со $2^n-1$ е степен на бројот 4.

**Решение.** Со $r$ да го означиме остатокот од делењето на $2^n$ со $n$. Тогаш $2^n = nk + r$ за некој природен број $k$ и $0 \le r < n$. Според тоа,

$$2^{2^n} = 2^{nk+r} \equiv 2^r (\bmod 2^n - 1)$$

и $2^r < 2^n - 1$, што значи дека $2^r$ е остатокот од делењето на $2^{2^n}$ со $2^n - 1$. Ако $r$ е парен број, тогаш $2^r$ е степен на бројот 4.

За да го оповргнеме тврдењето треба да најдеме $n$ за кој соодветниот $r$ е непарен. Јасно, ако $n$ е парен, тогаш $r = 2^n - kn$ исто така е парен број. Ако $n$ е непарен прост број, тогаш од малата теорема на Ферма следува $2^n \equiv 2(\bmod n)$, т.е. $r \equiv 2^n \equiv 2(\bmod n)$. Бидејќи $r < n$ добиваме $r = 2$.

Според тоа, треба да бараме контрапример кога $n$ е непарен сложен број. За $n = 25$ лесно се пресметува дека

$$2^{25} = 2^{10} \cdot 2^5 \equiv (-1)^2 \cdot 2^5 \equiv 2^5 \equiv 7(\bmod 25),$$

што значи дека $2^7$ е остаток при делењето на $2^{2^{25}}$ со $2^{25} - 1$.

**23.** Нека $p$ е прост број и $a_1, a_2, ..., a_{2p-1}$ се различни природни броеви од интервалот $[1, p^2]$ чиј збир е делив со $p$. Докажи, дека постојат природни броеви $b_1, b_2, ..., b_{2p-1}$ такви што ниту еден од нив не е делив со $p$ и за кои

1) Во записот на секој од нив во броен систем со основа $p$ се среќаваат само цифрите 0 и 1,
2) Збирот $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_{2p-1} b_{2p-1}$ е делив со $p^{2012}$.

**Решение.** Тврдењето ќе го докажеме за произволен природен број $n$. За таа цел прво ќе ја докажеме следнава лема.

*Лема*. Ако $x_1, x_2, ..., x_{p-1}$ се природни броеви кои не се деливи со $p$, тогаш за секој $r$, $1 \le r \le p-2$ можеме за избереме неколку од нив чиј збир при делење со $p$ дава остаток $r$.

*Доказ*. Да ставиме $S_0 = 0$ и да претпоставиме дека сме нашле $k, 0 \le k \le p-2$ збирови $S_0, S_1, ...., S_k$ во секој од кои учествуваат само броеви од $x_1, x_2, ..., x_k$ и кои при делење со $p$ даваат различни остатоци. Го додаваме бројот $x_{k+1}$ и да ги разгледаме збировите $S_0 + x_{k+1}, S_1 + x_{k+1}, ...., S_k + x_{k+1}$ кои при делење со $p$ даваат различни остатоци. Ако претпоставиме дека тие остатоци се пермутација на $S_0, S_1, ...., S_k$ и собереме почлено ќе добиеме $(k+1)x_{k+1} \equiv 0(\bmod p)$, што не е можно. Според тоа, добивме барем еден нов остаток и така по индукција ќе ги добиеме сите можни ненулти остатоци. Со тоа лемата е докажана. ■

Сега тврдењето следува по индукција. Бидејќи збирот на дадените броеви е делив со $p$, имаме база на индукцијата.

Нека претпоставиме дека постојат броеви $b_1, b_2, ..., b_{2p-1}$ кои ги задоволуваат условот и такви што $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_{2p-1} b_{2p-1} = p^n A$ каде $n \ge 1$ и $p$ не е делител на $A$. Бидејќи во интервалот $[1, p^2]$ има точно $p$ броеви кои се деливи со $p$, добиваме дека меѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{2p-1}$ има барем $p-1$ кои не се деливи со $p$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа се броевите $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$.

Согласно лемата, без ограничување на општоста можеме да земеме дека за броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ е точно дека збирот $a_1 + a_2 + ... + a_k + A$ е делив со $p$. Сега, ако ставиме $b_i' = b_i + p^n, i = 1, 2, ..., k$ и $b_i' = b_i, i = k+1, k+2, ..., 2p-1$, тогаш новите броеви го задоволуваат условот и $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_{2p-1} b_{2p-1}$ е делив со $p^{n+1}$.

**24.** Определи ги сите парови на природни броеви $(m,n)$ такви што

$$\mathrm{NZD}((n+1)^m - n, (n+1)^{m+3} - n) > 1.$$

**Решение.** Нека $n$ и $m$ се природни броеви такви што

$$\mathrm{NZD}((n+1)^m - n, (n+1)^{m+3} - n) = d > 1.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} d &\mid (n+1)^m - n, \\ d &\mid (n+1)^{m+3} - n. \end{aligned} \tag{1}$$

Од $\mathrm{NZD}(n, n+1) = 1$, следува дека $d \nmid n+1$. Уште повеќе $\mathrm{NZD}(d, n+1) = 1$. Навистина, ако $p > 1$ е таков што $p \mid d$ и $p \mid n+1$, тогаш $p \mid (n+1)^m$ и $p \mid (n+1)^m - n$, од каде добиваме дека

$$p \mid (n+1)^m - n - (n+1)^m = -n.$$

Според тоа

$$1 < p < \mathrm{NZD}(-n, n+1) = \mathrm{NZD}(n, n+1) = 1.$$

Од (1) добиваме дека

$$d \mid (n+1)^{m+3} - n - (n+1)^m + n = (n+1)^{m+3} - (n+1)^m = (n+1)^m[(n+1)^3 - 1]. \tag{2}$$

Бидејќи $\mathrm{NZD}(d, (n+1)^m) = 1$ од (2) добиваме $d \mid (n+1)^3 - 1$, односно

$$(n+1)^3 \equiv 1 \pmod{d}. \tag{3}$$

Од дефинцијата на $d$ имаме

$$(n+1)^m \equiv n \pmod{d}. \tag{4}$$

Ќе разгледаме три случаи.

Нека $m = 3k$. Тогаш

$$\begin{aligned} &n \equiv (n+1)^m = (n+1)^{3k} = [(n+1)^3]^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{d}. \\ &n+1 \equiv 2 \pmod{d}, \\ &2^3 \equiv (n+1)^3 \equiv 1 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Бидејќи $7 \equiv 0 \pmod{d}$ имаме $d = 7$.

Нека $m = 3k+1$. Од (3) и (4) добиваме

$$n \equiv (n+1)^m = (n+1)^{3k}(n+1) = [(n+1)^3]^k (n+1) \equiv 1^k (n+1) \equiv (n+1) \pmod{d}.$$

Но, тогаш $1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, d)$, што значи $d \mid 1$. Тоа е во контрадикција со претпоставката за $d$.

Нека $m = 3k + 2$. Повторно од (3) и (4) имаме

$$n \equiv (n+1)^m = (n+1)^{3k}(n+1)^2 = [(n+1)^3]^k (n+1)^2 \equiv 1^k (n+1)^2 \equiv (n+1)^2 \pmod d$$

т.е.

$$n \equiv n^2 + 2n + 1 \,(\mathrm{mod}\, d),$$

$$n^2 + n \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, d). \qquad (5)$$

Од друга страна од $n \equiv (n+1)^2 \pmod d$ и добиваме

$$n(n+1) \equiv (n+1)^3 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, d). \qquad (6)$$

Тогаш од (5) и (6) имаме $2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)$, односно $d = 2$. Но, тоа не е можно, бидејќи $d \mid n$ или $d \mid n+1$ и би добиле контрадикција со (1).

Не е тешко да се провери дека за $n = 7l + 1$ и $m = 3k$ се добива $d > 1$. Конечно, решенија на задачата се $(m, n) = (3k, 7l + 1)$.

**25.** Ако за некој цел број $k \geq 0$ важи $p^{k+1} \mid a^{p^k} + 1$, каде $a$ е непарен број поголем од 1, $p$ е непарен прост број, тогаш $p^{k+2} \mid a^{p^k} + 1$. Докажи!

**Решение.** Да претпоставиме дека за некој $k \geq 0$ важи $p^{k+1} \mid a^{p^k} + 1$. Ставаме $a^{p^k} = b$ и добиваме дека $p^{k+1} \mid b + 1$, т.е. $b \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p^{k+1})$.

Бидејќи $p$ е непарен број важи

$$a^{p^{k+1}} + 1 = b^p + 1 = (b+1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots - b + 1),$$

и како $b \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p^{k+1})$ важи $b \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$, па е

$$b^{2p} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p) \text{ и } b^{2p-1} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p), \text{ за } p = 1, 2, \ldots .$$

Оттука

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots - b + 1 \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = p \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p).$$

Според тоа, $p \mid (b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots - b + 1)$ и како $p^{k+1} \mid (b+1)$ добиваме

$$p^{k+2} \mid (a^{p^{k+1}} + 1).$$

**26.** (Теорема на Луивил). За секој прост број $p > 5$ и секој природен број $m$ равенството $(p-1)! + 1 = p^m$ не е можно. Докажи!

**Решение.** За прост број $p > 5$ имаме $2 < \frac{p-1}{2} < p - 1$, па е

$$(p-1)^2 = 2\frac{p-1}{2}(p-1) \mid (p-1)!.$$

Нека за простиот број $p > 5$ и за некој природен број $m$ важи

$$(p-1)! + 1 = p^m. \qquad (1)$$

Тогаш $(p-1)^2 \mid p^m - 1$, од каде наоѓаме дека

$$(p-1) \mid p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1. \qquad (2)$$

Но, $p-1 \mid p^k - 1$, па е

$$p^k \equiv 1 (\bmod\, p-1), \text{ за } k = 0,1,2,\ldots,$$

што значи

$$p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1 \equiv m (\bmod\, p-1).$$

Сега од (2) добиваме $p-1 \mid m$, што значи $m \geq p-1$. Конечно,

$$p^m \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1} \geq (p-1)! + 1,$$

т.е. $p^m \geq (p-1)! + 1$ што противречи на (1).

**27.** Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви $q$ такви што за некој природен број $n < q$ важи $q \mid (n-1)! + 1$.

**Решение.** Според теоремата на Луивил, ако $p$ е прост број поголем од 5, за ниту еден број $m$ не е можно равенството $(p-1)! + 1 = p^m$. Бројот $(p-1)! + 1$ е непарен и е поголем од 1, па значи има прост непарен делител $q \neq p$. Од релацијата $q \mid (p-1)! + 1$ следува дека $q > p-1$ и затоа $q > p$. Сега сметајќи дека $p$ може да биде произволно голем прост број, можеме да заклучиме дека прости броеви $q$ за кои при некој $q > p$ важи $q \mid (p-1)! + 1$ постојат бесконечно многу.

**28.** Определи ги сите броеви од облик $2^n, n \in \mathbb{N}$, такви што после отстранувањето на првата цифра во декадниот запис на бројот $2^n$ одново се добива степен на бројот 2.

**Решение.** Од условот на задачата следува $2^n = 10^k m + 2^a$, каде $n,k,a \in \mathbb{N}$ и $m \in \{1,2,\ldots,9\}$. Земаме $m = 2^p q$ и добиваме $2^n = 2^{p+k} 5^k q + 2^a$, $p \in \{0,1,2,3\}$ и $q \in \{1,3,5,7,9\}$, при што сите комбинации за $p$ и $q$. Од $2^a(2^{n-a} - 1) = 2^{p+k} 5^k q$ следува $a = p + k$ и $2^{n-a} - 1 = 5^k q$. Според тоа, $5 \mid 2^{n-a} - 1$, што е можно ако и само ако $n - a = 4t$. Од

$$2^{4t} - 1 = (2^4 - 1)[(2^4)^{t-1} + (2^4)^{t-2} + \ldots + 2^4 + 1]$$

следува $15 \mid 2^{4t} - 1$, т.е. $15 \mid 5^k q$. Според тоа, $q = 3j$, $j = 1,3$. Нека $q = 9$. Добиваме $2^{4t} - 1 = 9 \cdot 5^k$. За $k = 1$ имаме $2^{4t} = 46$, што не е можно. Ако $k > 1$, тогаш $9 \cdot 5^k \equiv 25 (\bmod 100)$, а $2^{4t} - 1 \equiv 15 (\bmod 100)$, што повторно не е можно. Останува да го разгледаме случајот $q = 3$. Добиваме $2^{4t} - 1 = 3 \cdot 5^k$. За $k = 1$ имаме $2^{4t} = 16$, т.е. $4t = 4$. Значи, $n - 4 = a$, па затоа $n = a + 4, a = k + 1$ и $p \in \{0,1\}$. За $p = 0$ имаме $a = 1, n = 5$ и $2^n = 32$, а за $p = 1$ добиваме $a = 2, n = 6$ и $2^6 = 64 = 6 \cdot 10 + 2^2$. Како и во случајот кога $q = 9$, претпоставката $k > 1$ доведува до противречност.

Значи, единствени можни решенија се $n=5$ и $n=6$, т.е. бараните броеви се $2^5=32$ и $2^6=64$.

**29.** (Лема на Туе) Нека $m>1$ и $x$ се цели броеви, $\text{NZD}(m,x)=1$. Докажи дека постојат природни броеви $a$ и $b$, такви што $a,b\leq[\sqrt{m}]$ и еден од броевите $ax+b$ или $ax-b$ е делив со $m$.

**Решение.** Ги разгледуваме броевите од облик $u(\alpha,\beta)=\alpha x+\beta$, $0<\alpha,\beta\leq[\sqrt{m}]$. Нивниот број е $(\sqrt{m}+1)^2>m$, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два различни пара $(\alpha_1,\beta_1)$ и $(\alpha_2,\beta_2)$ такви што $u(\alpha_1,\beta_1)\equiv u(\alpha_2,\beta_2)(\text{mod}\, m)$, т.е. $(\alpha_1-\alpha_2)x\equiv(\beta_2-\beta_1)(\text{mod}\, m)$. Но, $\text{NZD}(m,x)=1$, па затоа $\alpha_1\neq\alpha_2$ и $\beta_1\neq\beta_2$. Нека $a=|\alpha_1-\alpha_2|$ и $b=|\beta_1-\beta_2|$. Добиваме дека $ax\equiv\pm b(\text{mod}\, m)$. Според тоа $m\,|\,ax+b$ или $m\,|\,ax-b$.

## 5.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

**1.** Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x!+y!+z!=u!.$$

**Решение.** Нека четворката $(x,y,z,u)$ е решение на дадената равенка. Нека $v=\max\{x,y,z\}$ тогаш $1\leq v<u$ и $uv!\leq u(u-1)!=u!=x!+y!+z!\leq 3v!$. Значи $u\leq 3$. За $u=3$ ја добиваме равенката $3!=x!+y!+z!$ чиешто решение е $x=y=z=2$. За $u=2$, равенката нема решение бидејќи $x!+y!+z!\geq 3>2=2!$. Слично, равенката нема решение кога $u$=1. Значи, единствено решение е $x=y=z=2$, $u=3$.

**2.** Определи ги сите природни броеви $n$, такви што бројот
$$1!+2!+3!+...+n!$$
да е полн квадрат.

**Решение.** Од тоа што $5!=120$ заклучуваме дека цифрата на единиците на $n!$ е нула за секој $n\geq 5$. Според тоа, бројот $1!+2!+3!+...+n!$ има цифра на единици 3, за $n\geq 5$, (цифрата на единиците на $1!+2!+3!+4!=33$ е 3). Ако еден број има цифра на единици 3, тогаш тој број не е квадрат на ниту еден број, бидејќи квадратот на било кој број има цифра на единици или 1, или 4, или 5, или 6, или 9, или 0. Значи, за ниту еден природен број $n\geq 5$ бројот $1!+2!+3!+...+n!$ не е полн квадрат. Останува да се испита дали за некој природен број $n\leq 4$ бројот $1!+2!+3!+...+n!$ е полн квадрат. Притоа:

- за $n=1$, $\quad 1!+2!+3!+...+n!=1=1^2$
- за $n=2$, $\quad 1!+2!+3!+...+n!=1!+2!=3$,
- за $n=3$, $\quad 1!+2!+3!+...+n!=1!+2!+3!=9=3^2$
- за $n=4$, $\quad 1!+2!+3!+...+n!=1!+2!+3!+4!=33$

Значи, единствени природни броеви $n$ за кои бројот $1!+2!+3!+...+n!$ е полн квадрат на некој природен број се 1 и 3.

**3.** Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} ab+c=13, \\ a+bc=23. \end{cases}$$

**Решение.** Ако ги собереме равенките, после средувањето добиваме:

$$(a+c)(b+1)=36$$

Ако пак, од втората ја одземеме првата равенка, после средувањето добиваме:

$$(c-a)(b-1)=10$$

Според тоа, $(b+1)\,|\,36$ и $(b-1)\,|\,10$. Но, $36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6$ и $10=1\cdot 10=2\cdot 5$. Со непосредна проверка се добива дека единствени можни вредности за $b$ се 2, 3 и 11. За $b=2$, се добива системот

$$\begin{cases} 2a+c=13 \\ a+2c=23 \end{cases}$$

чие решение е $a=1, c=11$. За $b=3$, се добива системот

$$\begin{cases} 3a+c=13 \\ a+3c=23 \end{cases}$$

чие решение е $a=2, c=7$. За $b=11$, се добива системот

$$\begin{cases} 11a+c=13 \\ a+11c=23 \end{cases}$$

чие решение е $a=1, c=2$.

**4.** Во множеството природни броеви reши го системот равенки

$$\begin{cases} x!+y!=z! \\ x+y=z. \end{cases}$$

**Решение.** Ако од втората равенка замениме во првата равенка на системот $z=x+y$, добиваме $x!+y!=(x+y)!$.

Ако последната равенка ја поделиме со $x!y!$ ја добиваме равенката

$$\frac{x!+y!}{x!y!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}, \qquad \frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}.$$

Бројот од десната страна на равенката $\frac{(x+y)!}{x!y!}$ секогаш природен број. Според тоа треба да ги определиме броевите $x$ и $y$ за кои $\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}$ е природен број и тој број треба да биде еднаков $\frac{(x+y)!}{x!y!}$. Ако $x,y\geq 3$, тогаш $\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}\leq\frac{2}{6}<1$, од што следува дека $0\leq x,y\leq 2$. Непосредно се проверува дека зразот $\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}$ е цел број само за $x=y=0$, $x=y=1$ и за $x=y=2$. Од определените вредности за $x$ и $y$ единствено $x=y=1$ е решение на последната равенка.

Значи, решение на системот е $x=y=1$, $z=2$.

**5.** Во множеството природни броеви реши ја равенката: $\frac{x^2+y^2}{z!}=\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}$.

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $y \geq x$. Ако $x = y$, тогаш $x^2 x! = z!$, па затоа $z \geq x$. Последната равенка нема решенија за $z \geq x+2$, бидејќи левата страна е помала од десната, а во случаите $z = x$ и $z = x+1$ лесно се добива решението $x = y = z = 1$.

Нека $y > x$, што значи $y \geq 2$. Ако равенката ја помножиме со $y!$ добиваме

$$\frac{y!(x^2+y^2)}{z!} = 1 + y(y-1)...(x+1). \tag{1}$$

Ако $y > z$, тогаш левата страна на (1) е делива со $y$, па затоа $y|1$, што е противречност. Според тоа, $y \leq z$.

*Случај* 1. За $y = z$ имаме $x^2 + y^2 = 1 + y(y-1)...(x+1)$. Ако $y \geq x+3$, тогаш $y \geq 4$ и

$$(y-3)^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 \geq 1 + y(y-1)(y-2),$$

па затоа $y^3 - 5y^2 + 8y - 8 \leq 0$, т.е. $y^2(y-5) + 8(y-1) \leq 0$. Лесно се гледа дека последното не важи за $y \geq 5$, а $y = 4$ не дава решение. Значи, $x+1 \leq y \leq x+2$. Така ги добиваме равенките $2x^2 + x - 1 = 0$ и $2(x^2 + 2x + 2) = 1 + (x+1)(x+2)$, кои очигледно немаат решенија во множеството природни броеви.

*Случај* 2. За $y < z$ имаме $\frac{x^2+y^2}{z(z-1)...(y+1)} = 1 + y(y-1)...(x+1)$. Јасно, ако $y \geq x+3$, тогаш горните оценки се уште посилни, што значи дека повторно имаме $x+1 \leq y \leq x+2$. Ако $y = x+2 \geq 3$, добиваме $z \geq 4$ и значи

$$\frac{x^2+(x+2)^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2}{z(z-1)...(y+1)} = 1 + (x+1)(x+2).$$

Оттука $2x^2 + 4x + 4 \geq 4x^2 + 12x + 12$, што не е можно. Останува да го разгледаме случајот $y = x+1$, при што $\frac{x^2+(x+1)^2}{z(z-1)...(x+2)} = x+2$. Ако во именителот на дропката на последната равенка има два множители, тогаш таа е помала или еднаква на $\frac{2x^2+2x+1}{x^2+5x+6} < 2$. Значи, $z = x+2$ и $2x^2 + 2x + 1 = (x+2)^2$, од каде наоѓаме $x = 3$. Сега $y = 4$ и $z = 5$.

Конечно, решенија на почетната равенка се $(x, y, z) = (1,1,1), (3,4,5)$ и $(4,3,5)$.

**6.** Во множеството цели броеви да се реши равенката

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1. \tag{1}$$

**Решение.** Ако воведеме смени $x = u+1$ и $y = v+1$ добиваме

$$(u+1)^2 v + (v+1)^2 u = 1.$$

Со средување на последната равенка добиваме

$$\begin{aligned} &u^2 v + 2uv + v + v^2 u + 2uv + u = 1 \\ &uv(u+v) + 4uv + u + v = 1 \\ &uv(u+v+4) + (u+v+4) = 5 \\ &(u+v+u)(uv+1) = 5. \end{aligned} \tag{2}$$

Бидејќи $u,v$ се цели броеви, а $5$ е прост број, можни се следниве случаи

$$\begin{cases}u+v+4=5\\ uv+1=1,\end{cases}\quad \begin{cases}u+v+4=-5\\ uv+1=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}u+v+4=-1\\ uv+1=-5,\end{cases}\quad \begin{cases}u+v+4=1\\ uv+1=5.\end{cases}$$

Според тоа,

$$\begin{cases}u+v=1\\ uv=0\end{cases},\quad \begin{cases}u+v=-9\\ uv=-2\end{cases},\quad \begin{cases}u+v=-5\\ uv=-6\end{cases},\quad \begin{cases}u+v=-3\\ uv=4\end{cases}.$$

Според тоа, $u$ и $v$ се целобројни решенија на некоја од квадратните равенки:

$$t^2-t=0,\qquad t^2+9t-2=0,\qquad t^2+5t-6=0,\qquad t^2+3t+4=0.$$

Втората и четвртата равенка немаат целобројни решенија, додека првата има решенија $t_1=0,t_2=1$, а третата $t_3=-6,t_4=1$.

Конечно, за $u$ и $v$ постојат четири подредени пара кои се решенија на (2) и тоа $(0,1)$, $(1,0)$, $(-6,1)$ и $(1,-6)$, а за $(x,y)$ решенија се подредените парови $(1,2),(-5,2),(2,1),(2,-5)$.

**7.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2=6z^2$$

**Решение.** Прво да забележиме дека $(x,y,z)=(0,0,0)$ е решение на равенката. Нека $(a,b,c)$ е едно решение на равенката различно од тривијалното и нека $\mathrm{NZD}(a,b,c)=1$. Ако $\mathrm{NZD}(a,b,c)=k>1$, тогаш

$$a^2+b^2=6c^2,(\tfrac{a}{k})^2+(\tfrac{b}{k})^2=6(\tfrac{c}{k})^2 \text{ и } a_1=\tfrac{a}{k}\in\mathbb{Z},\ b_1=\tfrac{b}{k}\in\mathbb{Z} \text{ и } c_1=\tfrac{c}{k}\in\mathbb{Z}$$

и $(a_1,b_1,c_1)$ е решение на равенката и $\mathrm{NZD}(a_1,b_1,c_1)=1$. Бидејќи $3\,|\,6c^2$ мора и $3\,|\,a^2+b^2$. Ако 3 не е делител на $a$ и 3 не е делител на $b$ тогаш $a\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,3)$ и $b\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,3)$ па $a^2\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$ и $b^2\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$ и се добива дека $a^2+b^2\equiv2(\mathrm{mod}\,3)$ па се добива дека 3 не е делител на $6c^2$ што е противречност, па мора 3 да е делител на $a$ или на $b$. Ако $3\,|\,a$, тогаш $3\,|\,b$ (исто се добива ако се претпостави дека $3\,|\,b$). Значи $9\,|\,a^2$ и $9\,|\,b^2$ па мора и $9\,|\,6c^2$ односно $3\,|\,c^2$, па и $3\,|\,c$, од каде добиваме дека еден заеднички делител на $a$, $b$ и $c$ е 3, па $\mathrm{NZD}(a,b,c)\neq1$. Значи, единствено решение на равенката е тривијалното $(x,y,z)=(0,0,0)$.

**8.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$z^2+1=xy(xy+2y-2x-4).$$

**Решение.** Воведуваме смени $x=u-1, y=v+1$ и добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката $z^2+1=(u^2-1)(v^2-1)$. Лесно се покажува дека $u,v$ и $z$ се парни броеви. Понатаму, ако $|u|>1$, тогаш $u^2-1$ има прост делител $p$ таков што $p\equiv3(\mathrm{mod}\,4)$. Затоа $z^2+1\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$ што не е можно, бидејќи ако $p$ е прост број таков што $p\equiv3(\mathrm{mod}\,4)$ и $p$ е делител на $a^2+b^2$, тогаш $p$ е делител и на $x$ и на $y$. Според тоа, $u=0$. Аналогно се добива дека

$v=0$. Значи, $z=0$ и единствено решение на дадената равенка е $x=-1$, $y=1$, $z=0$.

**9.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

**Решение.** Да забележиме дека $(x,y,z)=(0,0,0)$ е решение на равенката. Јасно, ако еден од броевите $x$, $y$ и $z$ е еднаков на нула, тогаш и останатите два се еднакви на нула. Нека претпоставиме дека ниту еден од од броевите $x$, $y$ и $z$ не е еднаков на нула. Тогаш $x=2^k x_1$, $y=2^n y_1$ и $z=2^m z_1$, каде $x_1$, $y_1$ и $z_1$ се непарни броеви. Заради симетричноста на равенката без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $k\le n\le m$. Тогаш

$$2^{2k}x_1^2+2^{2n}y_1^2+2^{2m}z_1^2=2^{k+n+m+1}x_1y_1z_1,$$
$$x_1^2+(2^{n-k}y_1)^2+(2^{m-k}z_1)^2=2^{n+m-k+1}x_1y_1z_1.$$

Ако $k<n$ тогаш левата страна е непарна, а десната парна, што не е можно, па затоа $k=n$. Според тоа,

$$x_1^2+y_1^2+(2^{m-k}z_1)^2=2^{m+1}x_1y_1z_1.$$

Ако $k=m$ тогаш левата страна на равенката е непарна, а десната страна е парна, што не е можно, па затоа $k<m$. Сега од $x_1\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,4)$ и $y_1\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,4)$ следува $x_1^2+y_1^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, т.е. 4 не е делител на $x_1^2+y_1^2$, но $4\,|\,(2^{m-k}z_1)^2$ и $4\,|\,2^{m+1}x_1y_1z_1$ што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека единствено решение е тривијалното $(x,y,z)=(0,0,0)$.

**10.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3=(x-y)(3xy+1).$$

**Решение.** *Прв начин.* Ставаме $x=y+z$ и после смена во дадената равенка ја добиваме равенката

$$z(z^2-1)=(-y)^3. \qquad (1)$$

Ако $z>1$, тогаш $-y>0$. Бидејќи броевите $z$ и $z^2-1$ се заемно прости, следува дека $z=a^3$ и $z^2-1=b^3$, каде $a,b\in\mathbb{N}$. Оттука добиваме $(a^2)^3-b^3=1$, што не е можно (докажи!). Ако $z<-1$, ставаме $t=-z$ и (1) го прима видот $t(t^2-1)=y^3$, па според претходно изнесеното повторно немаме решение. Според тоа, $z=0$, $z=\pm1$, $y=0$, па затоа решенија на дадената равенка се $(x,y)=(0,0),(1,0),(-1,0)$.

*Втор начин.* Нека $x\ne0, x\ne y$. Бидејќи броевите $x$ и $3xy+1$ се заемно прости добиваме, дека $x$ е делител на $x-y$, т.е. $x$ е делител на $y$. Ставаме $x=ky$, каде $k\in\mathbb{Z}$. Заменуваме во дадената равенка и добиваме $(1-k)(3ky^2+1)=x^2$. Ако $k>1$ или $k<0$, десната страна на последната равенка е негативна, што не е можно. За $k=0,1$ ги добиваме решенијата $(x,y)=(0,0),(1,0),(-1,0)$.

**11.** Определи го најмалиот природен број $n$ за кој равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{n}{4z^2+1}$ нема решение $x,y,z$ во множеството природни броеви.

**Решение.** За $n=1,2,3$ решенија на равенката се $x=y=10, z=1$; $x=y=5, z=1$ и $x=10,\ y=2,\ z=1$, соодветно.

Ќе докажеме дека за $n=4$ равенката нема решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $(x+y)(4z^2+1)=4xy$. Нека $x=2^a x_1,\ y=2^b y_1$, каде $a,b\ge 0$ и $x_1,y_1$ се непарни броеви. Ако $a>b$, тогаш

$$(2^{a-b}x_1+y_1)(4z^2+1)=4\cdot 2^a x_1 y_1,$$

што не е можно, бидејќи левата страна на последната равенка е непарен број. Аналогно, случајот $b>a$ не е можен. Според тоа,

$$(x_1+y_1)(4z^2+1)=4\cdot 2^a x_1 y_1.$$

Тогаш 4 е делител на $x_1+y_1$, што значи дека $x_1$ и $y_1$ се непарни броеви кои даваат различни остатоци при делење со 4. Нека $x_1=4x_2+1$ и $y_1=4y_2-1$. Но, тогаш $y_1$ има прост делител $p$ од видот $4k-1$, кој е делител на $4z^2+1$, што не е можно.

**12.** Дадени се два заемно прости природни броја $m$ и $n$. Докажи, дека равенката $x^m u^n + y^m v^n = z^m w^n$ има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.

**Решение.** Бидејќи $m$ и $n$ се заемно прости броеви, постојат броеви $1\le k\le n$ и $1\le l\le m$ такви што $km-nl=1$. Тогаш за секој $i\in\mathbb{N}$ броевите

$$x=y=2^m,\ u=v=2^{mi},\ z=2^{ni+k},\ w=2^{mi-l}$$

се решенија на дадената равенка.

**13.** Докажи дека за секој ненегативен цел број $n$, равенките $x^2+y^2=n$ и $x^2+y^2=2n$ имаат ист број целобројни решенија.

**Решение.** Нека $n\in\mathbb{N}_0$ и нека $K(n)$ е бројот на целобројни решенија на равенката $x^2+y^2=n$, а $L(n)$ е бројот на целобројни решенија на $x^2+y^2=2n$. Нека $(x_0,y_0)$ е целобројно решение на $x^2+y^2=n$. Тогаш $(x_0-y_0,x_0+y_0)$ е целобројно решение на $x^2+y^2=2n$. Притоа, ако $(x_1,y_1)\ne(x_2,y_2)$, тогаш и $(x_1-y_1,x_{1+}y_1)\ne(x_2-y_2,x_2+y_2)$. Значи на секое решение на $x^2+y^2=n$ соодветствува целобројно решение на $x^2+y^2=2n$, и на различни решенија на $x^2+y^2=n$ соодветствуваат различни решенија на $x^2+y^2=2n$. Според тоа, $K(n)\le L(n)$. Сега, ако $(x_0,y_0)$ е решение на $x^2+y^2=2n$, тогаш броевите $\frac{x_0-y_0}{2}$ и $\frac{x_0+y_0}{2}$ се цели (Зошто?) и $(\frac{x_0-y_0}{2},\frac{x_0+y_0}{2})$ е решение на $x^2+y^2=n$. Притоа на различни решенија на $x^2+y^2=2n$ соодветсвуваат раззлични решенија на $x^2+y^2=n$. Значи, $L(n)\le K(n)$, па затоа $K(n)=L(n)$.

**14.** Докажи дека за секој природен број $k$ равенката $a^2+b^2=c^k$ има решение во множеството природни броеви.

**Решение.** Ако $k\in\mathbb{N}$, тогаш $5^k=(\frac{5+(-1)^k}{8}\cdot 2^{\frac{3+(-1)^k}{2}}\cdot 5^{[\frac{k-1}{2}]})^2+(2^{\frac{3+(-1)^k}{2}}\cdot 5^{[\frac{k-1}{2}]})^2$, т.е. $5^{2k-1}=(5^{k-1})^2+(2\cdot 5^{k-1})^2$, $5^{2k}=(3\cdot 5^{k-1})^2+(4\cdot 5^{k-1})^2$.

Докажи дека дадената равенка има бесконечно решенија во $\mathbb{N}$ за произволно избран $k\in\mathbb{N}$.

**15.** Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(7a-b)^2=2(a-1)b^2.$$

**Решение.** Од условот следува дека $2(a-1)$ мора да биде точен квадрат на природен број, па затоа $a-1=2k^2$, т.е. $a=2k^2+1$, за некој цел број $k$. Тогаш $7a-b=\pm 2kb$, т.е. $7(2k^2+1)-b=\pm 2kb$. Бидејќи не поставивме услов $k>0$, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $7(2k^2+1)-b=2kb$, од каде добиваме

$$b=\frac{7(2k^2+1)}{2k+1}.$$

Но, $b$ е цел број, па затоа $2k+1\,|\,7(2k^2+1)$ и бидејќи

$$2\cdot 7(2k^2+1)=2\cdot 7(2k^2+1)-7+7=7(4k^2-1)+21=7(2k-1)(2k+1)+21$$

заклучуваме дека $2k+1\,|\,7(2k^2+1)$ ако и само ако $2k+1\,|\,21$. Притоа, за секој цел број $k$ за кој $2k+1\,|\,21$, решение на дадената равенка е парот

$$a=2k^2+1,\ b=\frac{7(2k^2+1)}{2k+1}.$$

Сега лесно се добива дека

$$(k,a,b)\in\{(0,1,7),(1,3,7),(3,19,19),(10,201,67),(-1,3,-21),$$
$$(-2,9,-21),(-4,33,-33),(-11,243,-81)\}.$$

**16.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3.$$

**Решение.** Јасно, $x,y,z\ne 0$. Дадената равенка ја множиме со $xyz$ и после средувањето истата може да се запише во обликот

$$(y^2+z^2)x^2-3xyz+y^2z^2=0. \qquad (1)$$

Последната равенка е квадратна равенка по $x$ со целобројни коефициенти. За да истата има целобројни решенија потребно е нејзината дискриминанта да е точен квадрат. Значи,

$$9y^2z^2-4y^2z^2(y^2+z^2)=y^2z^2(9-4(y^2+z^2))=A^2,\ A\in\mathbb{Z}.$$

Оттука следува дека $9-4(y^2+z^2)=B^2$, $B\in\mathbb{Z}$. Значи, $4(y^2+z^2)=9-B^2\le 9$, па затоа $y^2+z^2\le 2$. Но, $y,z\ne 0$, па од последната равенка следува $y^2=z^2=1$, т.е. $y=\pm1,\ \ z=\pm1$.

Ако $y=z=\pm1$, тогаш од (1) следува $2x^2-3x+1=0$, од каде наоѓаме $x=1$.

Ако $y=1,\ z=-1$ или ако $y=-1,\ z=1$, тогаш од (1) следува $2x^2+3x+1=0$, од каде наоѓаме $x=-1$.

Значи, решенија на дадената равенка се

$$(x,y,z)\in\{(1,1,1),(-1,1,-1),(-1,-1,1),(1,-1,-1)\}.$$

**17.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2+2ab+2b^2=13.$$

**Решение.** Равенката ќе ја запишеме во видот $(a+b)^2+b^2=13$. Бидејќи $a$ и $b$ се цели броеви, добиваме дека $-3\le a+b\le 3$. Навистина, ако $a+b\ge 4$ или $a+b\le -4$, тогаш $(a+b)^2+b^2\ge 16+b^2\ge 16>13$. Значи, треба да ги разгледаме седумте случаи: $a+b=\pm3$, $a+b=\pm2$, $a+b=\pm1$ и $a+b=0$.

Ако $a+b=\pm1$ или $a+b=0$, тогаш равенката го добива видот $b^2=12$ или $b^2=13$. Последните две равенки немаат решение во множеството цели броеви.

Ќе ги разгледаме четирите преостанати случаи.

а) $a+b=-3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$. За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=-5, b=2$. За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=-1, b=-2$.

б) $a+b=3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$. За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=1, b=2$. За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=5, b=-2$.

в) $a+b=-2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$. За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=1$, $b=-3$. За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-5$, $b=3$.

г) $a+b=2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$. За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=5$, $b=-3$. За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-1$, $b=3$.

Конечно решенијата на равенката се

$$(a,b)\in\{(-5,2),(-1,-2),(1,2),(5,-2),(1,-3),(-5,3),(5,-3),(-1,3)\}.$$

**18.** Во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$ реши ја равенката $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.

**Решение.** Очигледно е дека $(0,0)$ е едно решение на равенката. Почетната равенка ја трансформираме во обликот $x(x+1)=(y^2+1)(y^2+y)$. За $y=1$ ја добиваме равенката $x(x+1)=4$ која нема решение во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$. За $y=2$ ја добиваме равенката $x(x+1)=5\cdot 6$ и парот $(5,2)$ во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$ **е** единствено решение на почетната равенка. Нека $y\geq 3$. Тогаш

$$(y^2+1)(y^2+y)=y^4+y^3+y^2+y<y^4+y^3+\tfrac{5y^2}{4}+\tfrac{y}{2}=(y^2+\tfrac{y}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+1) \text{ и}$$

$$(y^2+1)(y^2+y)=y^4+y^3+y^2+y>y^4+y^3+\tfrac{y^2}{4}-\tfrac{1}{4}=(y^2+\tfrac{y}{2}-\tfrac{1}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+\tfrac{1}{2}).$$

Според тоа,

$$(y^2+\tfrac{y}{2}-\tfrac{1}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+\tfrac{1}{2})<x(x+1)<(y^2+\tfrac{y}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+1) \qquad (1)$$

и како $x,y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ од последните неравенства следуваат неравенствата

$$y^2+\tfrac{y}{2}-\tfrac{1}{2}<x<y^2+\tfrac{y}{2}. \qquad (2)$$

Сега, ако $y=2k$, тогаш од (2) следува дека $4k^2+2k-\frac{1}{2}<x<4k^2+2k$, што не е можно за ниту еден $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Понатаму, ако $y=2k+1$, тогаш од (2) следува дека $(2k+1)^2+k<x<(2k+1)^2+k+\frac{1}{2}$, што не е можно за ниту еден $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Според тоа, за $y\geq 3$ почетната равенка нема решение .

Значи, единствени решенија на равенката се $(0,0)$ и $(5,2)$.

**19.** Даден е природен број $n$. Определи ги сите подредени четворки цели броеви $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ такви што $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4^n$.

**Решение.** Нека $n=1$. Тогаш равенката го добива видот $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4$, од каде следува дека

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\{(\pm2,0,0,0),(0,\pm2,0,0),(0,0,\pm2,0),(0,0,0,\pm2),(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)\}$.

Нека претпоставиме дека $n\geq 2$. Тогаш

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4^n=16\cdot 4^{n-2}\equiv 0(\text{mod}\,8). \qquad (1)$$

Но, за секој природен број $x$ важи $x^2\equiv 0,1$ или $4(\text{mod}\,8)$, па затоа за да збирот биде парен меѓу остатоците може да има само парен број единици. Но, тогаш

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\equiv 2,4,6 \text{ или } 10(\text{mod}\,8),$$

што противречи на (1). Според тоа, ниту еден од броевите $x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2$ не е конгруентен со 1 по модул 8, па заклучуваме дека броевите $x_1,x_2,x_3,x_4$ се парни, т.е.

$$x_1=2k_1,\ x_2=2k_2,\ x_3=2k_3,\ x_4=2k_4,$$

Ако замениме во почетната равенка добиваме и добиената равенка ја поделиме со 4 ја добиваме равенката

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2=4^{n-1}.$$

за некои цели броеви $k_1,k_2,k_3,k_4$. Ако $n-1\geq 2$, тогаш од претходно изнесеното следува дека броевите $k_1,k_2,k_3,k_4$ мора да се парни. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека

$$x_1=2^{n-1}m_1,\ x_2=2^{n-1}m_2,\ x_3=2^{n-1}m_3,\ x_4=2^{n-1}m_4,$$

за некои цели броеви $m_1, m_2, m_3, m_4$. Со замена во почетната равенка, после скратувањето со $4^{n-1}$ ја добиваме равенката $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = 4$, за која претходно покажавме дека единствени решенија се

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \{(\pm 2, 0, 0, 0), (0, \pm 2, 0, 0), (0, 0, \pm 2, 0), (0, 0, 0, \pm 2), (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)\}.$$

Конечно, од досега изнесенот следува дека единствени решенија на почетната равенка се

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(\pm 2^n, 0, 0, 0), (0, \pm 2^n, 0, 0), (0, 0, \pm 2^n, 0), (0, 0, 0, \pm 2^n), (\pm 2^{n-1}, \pm 2^{n-1}, \pm 2^{n-1}, \pm 2^{n-1})\}.$$

**20.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0.$$

**Решение.** Јасно, едно решение на дадената равенка е $a = b = c = d = 0$. Нека претпоставиме дека дадената равенка има друго решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a,b,c,d) = 1$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2(a^2 + 5b^2) = (2c + d)^2 + 5d^2. \qquad (1)$$

Ќе разгледуваме конгруенции по модул 5. Притоа да забележиме дека за секој $p \in \mathbb{Z}$ важи $p^2 \equiv 0, 1$ или $4 \pmod 5$. Од (1) следува дека

$$2a^2 \equiv (2c + d)^2 \pmod 5.$$

Ако $a^2 \equiv 1 \pmod 5$, тогаш $(2c + d)^2 \equiv 2 \pmod 5$, што е противречност.

Ако $a^2 \equiv 4 \pmod 5$, тогаш $(2c + d)^2 \equiv 3 \pmod 5$, што е противречност.

Значи, $a^2 \equiv 0 \pmod 5$ и тогаш $(2c + d)^2 \equiv 0 \pmod 5$, од каде следува дека $a \equiv 0 \pmod 5$ и $2c + d \equiv 0 \pmod 5$. Воведуваме смени $a = 5x$ и $2c + d = 5y$, со што ја добиваме равенката

$$2(5x^2 + b^2) = 5y^2 + d^2.$$

На потполно ист начин како и претходно заклучуваме дека $b \equiv 0 \pmod 5$ и $d \equiv 0 \pmod 5$, а потоа од $2c + d = 5y$ следува дека $c \equiv 0 \pmod 5$. Според тоа, важи $5 \mid \mathrm{NZD}(a,b,c,d)$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека единствено решение на почетната равенка е $a = b = c = d = 0$.

**21.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

**Решение.** Равенката можеме да ја запишеме како квадратна равенка по $b$, при што

$$5b^2 + (5a - 14)b + 5a^2 - 7a = 0.$$

Нејзини решенија се

$$b_{1/2} = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2 - 7a)}}{10} = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{196 - 75a^2}}{10}.$$

За да решенијата се реални, доволно е $196-75a^2 \geq 0$, т.е. $a^2 \leq \frac{196}{75}$. Значи, $-\frac{14}{5\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{14}{5\sqrt{3}}$. Но, $a$ е цел број, па можни вредности за $a$ се $a \in \{-1,0,1\}$. Со замена во почетната равенка добиваме: ако $a=-1$, тогаш $b_1 = 3$ и $b_2 \notin \mathbb{Z}$; ако $a=0$, тогаш $b_1 \notin \mathbb{Z}$ и $b_2 = 0$; ако $a=0$, тогаш $b_1 = 2$ и $b_2 \notin \mathbb{Z}$.

Значи, бараните решенија се $(a,b) \in \{(-1,-3),(0,0),(1,2)\}$.

**22.** Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3 + y^3 + 1 = 3xy$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2y - 3xy^2 + 1 - 3xy = 0,$$

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y+1) + 1 = 0.$$

Ако воведеме ознаки $x+y=p$ и $xy=q$, тогаш добиваме $p^3 - 3q(p+1)+1=0$, т.е.

$$(p+1)(p^2 - p + 1 - 3q) = 0. \qquad (1)$$

За природни броеви $x$ и $y$ важи $p = x+y > 0$, па затоа $p+1>1$. Според тоа, решенија на (1) се решенијата на равенката $p^2 - p + 1 - 3q = 0$. Тоа значи дека решенија на почетната равенка се решенијата на системот

$$\begin{cases} x+y=p \\ xy = q = \frac{1}{3}(p^2 - p + 1) \end{cases}.$$

Ќе ја разгледаме квадратната равенка

$$z^2 - pz + \frac{1}{3}(p^2 - p + 1) = 0. \qquad (2)$$

Ако $z_1, z_2$ се решенија на равенката (2), тогаш $z_1 + z_2 = p$ и $z_1 z_2 = \frac{1}{3}(p^3 - p + 1)$. Значи доволно е да се најдат решенијата на равенката (2). Нејзини решенија се

$$z_{1/2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{1}{3}(p^2 - p + 1)} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{12}(p^2 - 4p + 4)} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{12}(p-2)^2}$$

Очигледно е дека решенијата ќе бидат реални ако подкореновата величина е еднаква на нула, т. е. ако $p=2$. Тогаш и $z_1 = z_2 = 1$, па затоа единствено решение на почетната равеннка е $x=y=1$.

**23.** Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2.$$

**Решение.** Јасно, броевите $x$ и $y$ треба да се со различна парност. Тогаш $x-y=k$ е непарен број и дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(3k-6)y^2 + (3k^2 + 10)y + k^3 + 10k - 1 = 0$$

која е квадратна по $y$. Нејзината дискриминанта

$$D = -3k^4 + 24k^3 - 60k^2 + 252k + 76$$

треба да е точен квадрат. Бидејќи $D=-k^2(3k^2-24k+60)+252k+76$, добиваме дека $D<0$ кога $k\le -1$. Од друга страна $D=3k^3(8-k)+2(38-k^2)+2k(126-29k)$ и затоа $D<0$ кога $k\ge 8$. Исто така $D=-71<0$ за $k=7$. Остануваат случаите $k=1,3,5$. Тогаш соодветно $D=289=17^2$, $d=697$, $D=961=31^2$, од што следуваат решенијата $(x,y)\in\{(6,5),(2,-3)\}$.

**24.** Докажи дека равенката

$$3x^4+2013=25y^2-24x^2$$

нема целобројни решенија.

**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3x^4+24x^2-25y^2+2013=0.$$

Сите собирци, освен $25y^2$ се деливи со 3, па затоа мора и $25y^2$ дае делив со 3, што значи $y=3u$. Ако замениме во почетната равенка и поделиме со 3, ја добиваме равенката

$$x^4+8x^2-75u^2+671=0.$$

Да ги разгледаме остатоците на изразот на левата страна при делење со 3. Ако $x$ е делив со 3, тогаш сите собирци освен 671 се деливи со 3, што е противречност. Ако $x$ не е делив со 3, тогаш $x^2$ при делење со 3 дава остаток 1, па затоа

$$x^4+8x^2\equiv 1+8\cdot 1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3),$$

од каде следува дека

$$x^4+8x^2-75u^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3),$$

а 671 не е делив со 3, што е противречност. Конечно, од претходните разгледувања следува дека дадената равенка нема целобројни решенија.

**25.** Во една компанија има $m\ge 1$ мажи и $j\ge 1$ жени, $j<2004$. Секој пратил на секого (освен на самиот себе) по една честитка. Се покажало дека бројот на честитките пратени од мажите е еднаков на бројот на честитките пратени од жените на жени. Определи ги сите можни вредности на $j$.

**Решение.** Од условот на задачата следува равенството $m(m+j-1)=j(j-1)$, кое е еквивалентно на равенството $m^2=(j-1)(j-m)$. Ако $p$ е прост делител на $j-m$ и $j-1$, тој е делител и на $m$, па значи и на $j$, од каде следува дека е делител на 1, што е противречност. Според тоа, $j-m$ и $j-1$ се заемно прости броеви и затоа $j-m=u^2$, $j-1=v^2$ за некои природни броеви $u,v$. Сега имаме $uv=m$ и $u^2+uv=j=v^2+1$, а од условот $1\le j<2004$ добиваме $0\le v\le 44$. Според тоа, во множеството ненегативни цели броеви треба да ја решиме равенката

$$u^2+uv=v^2+1. \qquad (1)$$

За $v=0$ добиваме $u=1$. Нека претпоставиме дека подредениот пар $(u_0,v_0)$ е решение на (1) и $v_0\ge 1$. Тогаш $u_0\ge 1$ и како $u_0v_0\ge 1$ добиваме $u_0\le v_0$. Да ставиме $v_1 = v_0 - u_0$, $0 \le v_1 < v_0$. Имаме

$$u_0^2 = v_0(u_0 - u_0) + 1 = (u_0 + v_1)v_1 + 1 = u_0 v_1 + v_1^2 + 1.$$

Да ставиме $u_1 = u_0 - v_1$. Тогаш

$$(u_1 + v_1)^2 = (u_1 + v_1)v_1 + v_1^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_1^2 + u_1 v_1 = v_1^2 + 1,$$

т.е. добивме ново решение на (1). Ако $v_1 = 0$, добиваме $u_1 = 1$. Нека $v_1 \ge 1$, што значи $u_1 \ge 1$. Тогаш ставајќи $v_2 = v_1 - u_1 < v_1$ и $u_2 = u_1 - v_2$ аналогно добиваме ново решение. Така добиваме низа од ненегативни цели броеви $v_0 > v_1 > v_2 > ...$, од каде следува дека за некој $k$ важи $v_k = 0$. Тогаш $u_k = 1$ и ако по обратен редослед ги определиме $u_{k-1}, v_{k-1}, ..., u_0, v_0$ ја добиваме низата на Фибоначи. Значи, решенија на (1) се $(u,v) = (1,0), (1,1), (2,3), (5,8), (13,21)$ и при следното решение важи $v > 44$. За првото решение имаме $j = v^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$ и имаме $m = uv = 0$, што според условот на задачата не е можно. Останатите решенија ги даваат решенијата

$$j = 1^2 + 1 = 2,\ j3^2 + 1 = 10,\ j = 8^2 + 1 = 65,\ j = 21^2 + 1 = 442.$$

**26.** Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$5^n + 2^{n+1}3^n = 9^n + 4^n.$$

**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$5^n = 3^{2n} - 2 \cdot 3^n \cdot 2^n + 2^{2n},$$

т.е. на равенката

$$5^n = (3^n - 2^n)^2.$$

Десната страна на последната равенка е точен квадрат, па затоа мора да е и левата што значи дека мора да важи $n = 2k, \in \mathbb{N}$. Значи,

$$5^k = 3^{2k} - 2^{2k}, \text{ т.е. } 5^k = (3^k - 2^k)(3^k + 2^k).$$

Понатаму,

$$3^k + 2^k - (3^k - 2^k) = 2^{k+1},$$

па затоа не е можно и двата броја $3^k - 2^k$ и $3^k + 2^k$ да се деливи со 5. Затоа мора $3^k - 2^k = 1$ и $3^k + 2^k = 5^k$, од каде добиваме $k = 1$. Значи, единствено решение е $n = 2k = 2$.

**27.** Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$2^a + 8b^2 - 3^c = 283.$$

**Решение.** Лесно се докажува дека $a, c \ge 0$. Бидејќи $3^c$ дава остаток 1 или 3 при делење со 8, заклучуваме дека $0 \le a \le 2$. Ако $a = 0$ или $a = 1$, тогаш соодветно се добива дека 2 е делител на $3^c$ или 8 е делител на $3^c + 1$, што е противречност. Нека $a = 2$, т.е. $8b^2 - 3^c = 279$. Случаите $c = 0,1$ не се можни, па затоа $c \ge 2$. Тогаш $3 | b$ и ако ставиме $b = 3d$ добиваме $8d^2 - 3^{c-2} = 31$. Ако $c \ge 3$, тогаш

$3 \mid d^2+1$, што е противречност. Според тоа, $c=2$ и $d=\pm 2$. Конечно, $a=2$, $b=\pm 6$ и $c=2$.

**28.** Во множеството цели броеви реши ја равенката $3\cdot 2^m+1=n^2$.

**Решение.** Ако $m<0$, тогаш левата страна на равенката не е цел број, па затоа во овој случај задачата нема решение. Ако $m=0$, тогаш $n=\pm 2$. Нека $m>0$. Ако $(m,n)$ е решение на равенката, тогаш и $(m,-n)$ е решение на равенката, па затоа доволно е да ги определиме решенијата за кои $n\geq 0$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $(n-1)(n+1)=3\cdot 2^m$. Понатаму, броевите $n-1$ и $n+1$ се со иста парност, па затоа и двата мора да се парни. Освен тоа, бидејќи $3\cdot 2^m>0$ и двата броја мора да се позитивни. Можни се два случаја.

*Прв случај.* $n-1=2^k, n+1=3\cdot 2^l$, каде $k,l\geq 1$ и $k+l=m$. Имаме

$$2=3\cdot 2^l-2^k=2(3\cdot 2^{l-1}-2^{k-1}), \text{ т.е. } 3\cdot 2^{l-1}=2^{k-1}+1.$$

Ако $l=1$, тогаш $3=2^{k-1}+1$, па затоа $k=2$, од каде следува $m=3, n=5$.

Ако $l>1$, тогаш левата страна на $3\cdot 2^{l-1}=2^{k-1}+1$ е делива со 6, што не е можно, бидејќи $6\nmid 2^{k-1}+1$, за било кој природен број $k$.

*Втор случај.* $n-1=3\cdot 2^k, n+1=2^l$, каде $k,l\geq 1$ и $k+l=m$. Имаме

$$2=2^l-3\cdot 2^k=2(2^{l-1}-3\cdot 2^{k-1}), \text{ т.е. } 2^{l-1}=3\cdot 2^{k-1}+1.$$

Ако $k=1$, тогаш $2^{l-1}=3+1$, па затоа $l=3$, од каде следува $m=4, n=7$.

Ако $k>1$, тогаш левата страна на $3\cdot 2^{k-1}=2^{l-1}-1$ е делива со 6, што не е можно, бидејќи $6\nmid 2^{l-1}-1$, за било кој природен број $l$.

Конечно, решенија на дадената равенка се $(m,n)=(0,\pm 2),(3,\pm 5),(4,\pm 7)$.

**29.** Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2=3^y+7$.

**Решение.** Бидејќи $x^2,7\geq 0$, а $x^2=8$ и $x^2=10$ (за $y=0, y=1$) немаат решение во множеството цели броеви, добиваме дека $y\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Понатаму, $3^y+7$ е парен број, па затоа и $x^2$ е парен, т.е. $x$ е парен. Од тука следува дека десната страна на равенката е делива со 4. Нека $y$ е непарен, односно $y=2k+1$. Тогаш

$$x^2=3^{2k+1}+7=3\cdot 3^{2k}-3+10=3(3^k-1)(3^k+1)+10.$$

Но, $x^2$ и $3(3^k-1)(3^k+1)$ се деливи со 4, а 10 не е делив со 4, што е противречност. Значи, $y$ мора да е парен број. Нека $y=2s, s\geq 1$.

Сега, $x^2=3^{2s}+7$, односно $(x-3^s)(x+3^s)=7$, каде $x-3^s<x+3^s$. Тогаш можни се само следниве два случаи:

а) $\begin{cases} x-3^s=1 \\ x+3^s=7 \end{cases}$, од каде $x=4, s=1$ и б) $\begin{cases} x-3^s=-7 \\ x+3^s=-1 \end{cases}$, од каде $x=-4, s=1$.

Конечно, непосредно се проверува дека $(4,2)$ и $(-4,2)$ се решенија на почетната равенка.

**30.** Определи ги сите целобројни решенија на равенката $2^x+1=y^2$.

**Решение.** Равенката ја запишуваме во обликот

$$2^x=y^2-1=(y-1)(y+1).$$

Можни се два случаи

а) $\begin{cases} 2^a=y+1 \\ 2^b=y-1 \end{cases}$, ( $a>b$ ) и б) $\begin{cases} -2^a=y+1 \\ -2^b=y-1 \end{cases}$, $(b>a)$.

Од првиот систем следува $2=2^a-2^b=2^b(2^{a-b}-1)$. Бидејќи $2^{a-b}-1$ е непарен број, добиваме $2^b=2$ и $2^{a-b}-1=1$. Според тоа, $b=1$ и $a-b=1$, т.е. $b=1$ и $a=2$. Конечно, со замена во една од равенките на системот имаме $y=3$, па затоа $x=3$.

Од вториот систем, добиваме, $2=2^b-2^a=2^a(2^{b-a}-1)$. Аналогно, бидејќи $2^{b-a}-1$ е непарен број, добиваме $2^a=2$ и $2^{b-a}-1=1$. Од последните две равенки добиваме $a=1$ и $b=2$. Конечно, $y=-3$ и од почетната равенка добиваме $x=3$.

Значи, решенија на равенката се подредените парови

$$(x,y)=(3,3) \text{ и } (x,y)=(3,-3).$$

**31.** За кои цели броеви $a$ и $b$ системот

$$\begin{cases} m^2+n^2=b \\ \frac{m^n-1}{m^n+1}=a \end{cases}$$

има решение ( по $m$ и $n$ ) во множеството $\mathbb{Z}$ од целите броеви.

**Решение.** Од првата равенка добиваме $m^n=\frac{1+a}{1-a}=1+\frac{2a}{1-a}$, што значи дека бројот $\frac{2a}{1-a}$ треба да биде цел. Бидејќи $a$ и $a-1$ се заемно прости за $a\neq 0$, бројот $\frac{2a}{1-a}$ е цел ако и само ако $a=-1,2,3$.

За $a=-1$ имаме $m^n=0$, од каде што добиваме дека $m=0$ и $n$ е произволен цел број различен од 0.

За $a=2$ добиваме $m^n=-3$, па $m=-3, n=1$.

За $a=3$, добиваме $m^n=-2$, па $m=-2$, $n=1$.

Од друга страна за $a=0$ имаме $m^n=1$, од каде што добиваме $n=0$, $m$ е било кој цел број различен од нула или $m=1$ и $n$ произволен цел број.

Следствено, системот има решение во множеството од целите броеви за:

$$a=-1, b=n^2, n\neq 0,\ b=m^2, m\neq 0,\ a=0, b=1+n^2;\ a=2, b=10;\ a=3, b=5.$$

**32**. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336.$$

**Решение.** Ако една подредена тројка природни броеви е решение на равенката, тогаш и секоја нејзина пермутација е исто така решение на равенката.

Нека $x, y, z$ е решение на равенката природни броеви. Ќе покажеме дека $x \neq y \neq z \neq x$, покажувајќи дека ако два броеви од $x, y, z$ се еднакви, тогаш $x, y, z$ не е решение. Нека $x = y$. Тогаш е можно: 1) $z = x$; 2) $z < x$; 3) $z = x+1$ или 4) $z > x+1$.

1) Ако $z = x$, тогаш $2^x + 2^y + 2^z = 3 \cdot 2^x$ е делив со $3$, а $2336$ не е делив со $3$.

2) Ако $z = x+1$, тогаш $2336$ е делив со $73$, а $2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+2}$ не е.

3) Нека $z > x+1$, т.е. $z = x+1+k$ за некој природен број $k$. Тогаш

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+1}(1+2^k)$$

не е еднаков на $2336$ од исти причини како и во 2).

На ист начин се покажува дека $x \neq z$ и $y \neq z$.

Нека $x < y < z$, т.е. $y = x + p$, $z = y + s = x + p + s$. Тогаш од

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^x[1+2^p(1+2^s)] = 2^5[1+2^3(1+2^3)] = 2336,$$

следува дека $x = 5, y = 8$ и $z = 11$. Значи, решенија на равенката се сите пермутации на броевите 5, 8, 11. .

**33.** Докажи дека равенката

$$\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y} = \tfrac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}$$

има единствено решение во $\mathbb{N}$ ако и само ако $p$ е прост број.

**Решение.** Ако парот $(x, y)$ е решение на равенката, тогаш $\frac{1}{x} > \frac{1}{p}$, па $x < p$. Значи, за $p = 1$ равенката нема решение во множеството природни броеви.

Нека $p > 1$. Ако постои решение во $\mathbb{N}$, тогаш $x = p - k$ за некој природен број $0 < k < p$ од што следува дека $\frac{1}{p-k} - \frac{1}{p} = \frac{1}{y}$, т.е. $y = \frac{p(p-k)}{k}$. За $k = 1$ се добива едно решение: $x = p-1$, $y = p(p-1)$.

Нека $p$ е прост број. Тогаш за секој $1 < k < p$, $\text{NZD}(p, k) = 1$ и $\text{NZD}(p-k, k) = 1$. Според тоа $\frac{p(p-k)}{k}$ не е природен број, па единствено решение е: $x = p-1$, $y = p(p-1)$.

Обратно, ако $p$ не е прост број, т.е. $p = m \cdot n$, $m \neq 1 \neq n$, тогаш решение на равенката е и парот $x_1 = p - m$, $y_1 = n(p-m)$.

**34.** Да се реши равенката

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$$

во множеството цели броеви.

**Решение.** Дадената равенка да ја запишеме во обликот

$$(1+x)(1+x^2) = 2^y.$$

Од овде следува дека $x+1=2^m$, $x^2+1=2^{y-m}$, т.е. $x=2^m-1$ и $x^2=2^{y-m}-1$. Од првата равенка добиваме $x^2=2^{2m}-2^{m+1}+1$ и ако замениме во втората добиваме

$$2^{y-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2\ .$$

Можни се следниве два случаи:

$(i)$ Нека $m=0$, тогаш единствено решение е $x=y=0$

$(ii)$ Нека $m>0$. Тогаш се добива $2^{y-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$. Бидејќи $2^m$ и $2^{2m-1}$ се парни броеви, следува дека $2^{y-m-1}$ е непарен број, а тоа е можно ако и само ако $2^{y-m-1}=1$, т.е. $y=m+1$. Заменувајќи го тоа, се добива $2^m=2^{2m-1}$, од каде што следува дека $m=1$, $y=2$ и $x=1$.

Значи, единствено решение во овој случај е $x=1$ и $y=2$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.:  Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиућ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика+, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагиќ, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагиќ, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011