

МАТЕМАТИКА И ИГРА

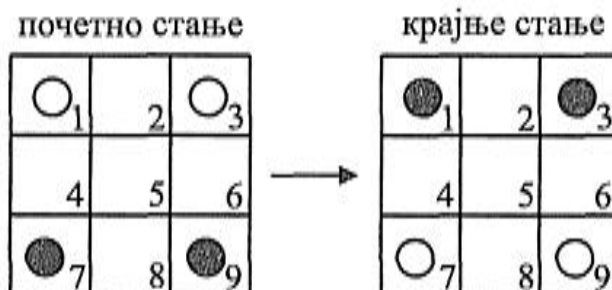
гр Небојша Икодиновић

ЗАМЕНА МЕСТА СКАКАЧИМА НА ТАБЛИ

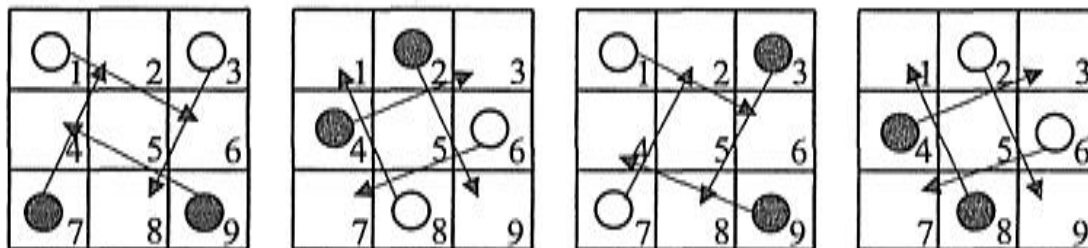
Сматра се да наредни проблем (Игра 1) датира из 1512. године [1], то јест да је стар близу 500 година. Решавање овог, и њему сличних проблема, веома лепо илуструје снагу математичке апстракције.

Игра 1. Посматрајмо мини-таблу 3×3 и четири скакача (коња), два бела постављена у горње углове табле и два црна постављена у доње углове. Скакачи се померају на табли онако како се то чини шаху³.

Заменити места белим и црним скакачима уз минималан број потеза.



Једно решење дела постављеног проблема може се релативно брзо наћи и то „методом покушаја“.



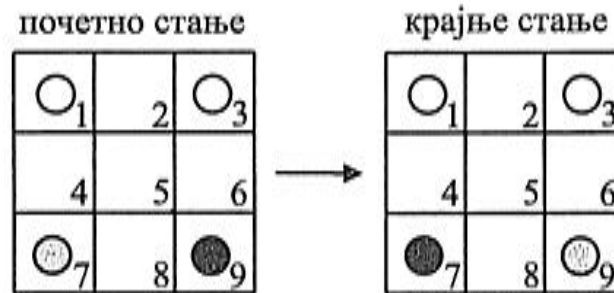
Премештање скакача приказано на претходној слици заиста црне доводи на почетна места белих, а беле на почетне позиције црних. Једноставно закључујемо да се приказана замена добија у $16 (= 4 \cdot 4)$ потеза. Да ли смо, на овај начин, решили проблем? Оно што не можемо са сигурношћу да тврдимо јесте да ли је 16 најмањи број потеза потребан да би се извршила тражена замена?

Недоумица 1. Да ли је 16 најмањи број потеза потребан да би се извршила тражена замена у Игри 1?

Размотримо још један сличан проблем.

³У шаху, скакач се помера или хоризонтално за два поља и вертикално за једно поље или вертикално за два поља и хоризонтално за једно поље. Ако поља дате мини-табле нумеришемо бројевима од 1 до 9, онда се скакач постављен на поље 1 може померити или на поље 6 или на поље 8.

Игра 2. На мини-табли 3×3 постављени су скакачи као у претходној игри, с тим што је црни са поља 7 замењен сивим. Задатак је заменити места сивог и црног скакача.



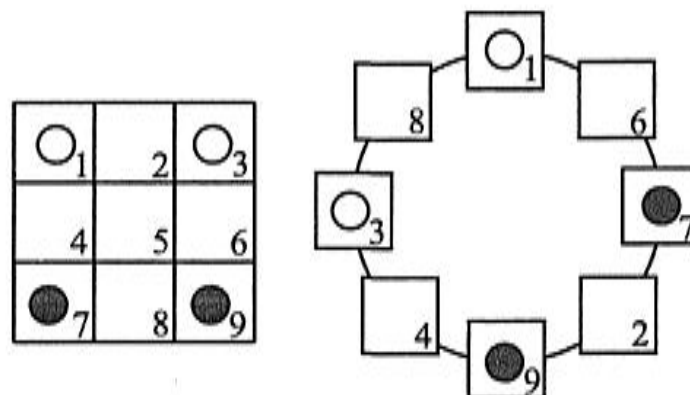
Уколико поново применимо „методу покушаја“, брзо ћемо увидети да нам никако не полази за руком да заменимо места сивом и црном скакачу. Неуспех наше методе наводи на помисао да није могуће извршити тражену замену. Међутим, једна недоумица и даље остаје: решење можда ипак постоји само ми нисмо били довољно упорни. У овом случају, и најупорнији неће успети да пронађе решење, једноставно зато што га нема!

Недоумица 2. Претходни задатак не може да се реши?

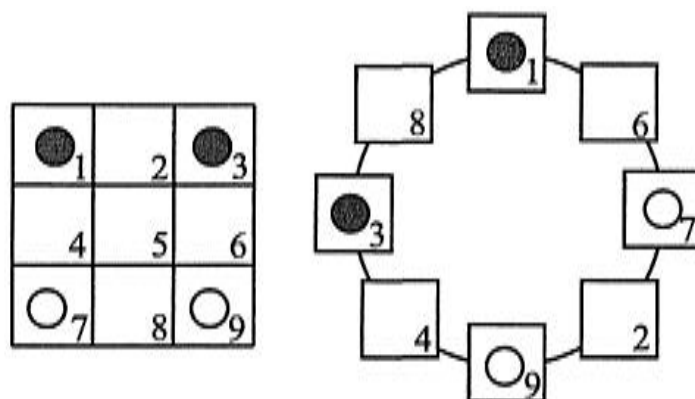
Разрешењу недоумица 1 и 2 значајно ћемо се приближити ако напустимо „методу покушаја“. Преформулисаћемо захтеве игара 1 и 2 тако да неће остати места за наведене недоумице.

Главна досетка је посматрати таблу очима неког од скакача. Наиме, скакачу са поља 1 суседна су она поља на које може прећи у једном потезу, а не поља физички близу пољу 1 на табли (2, 4, 5). Дакле, ако престанемо да посматрамо таблу споља, већ из перспективе скакача, долазимо до шеме, тј. *графа* који повезује поља „суседством“ како га доживљава скакач. Приметимо да поља 5 нема на шеми, зато што ни један скакач на ово поље не може доћи. Другим речима, за скакаче који нису на централном пољу ово поље не постоји.

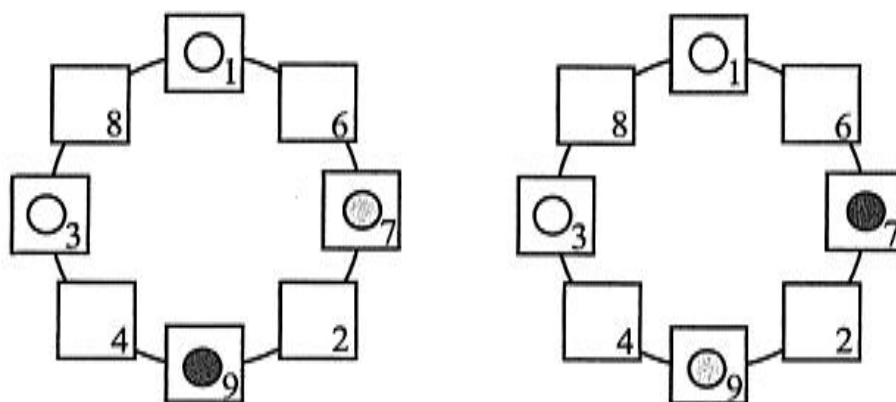
Представимо почетно стање на табли у игри 1 на овај начин.



Сада је сасвим једноставно испунити захтев ове игре, будући да је кретање кроз поља кружне шеме лако сагледати. Није тешко закључити да је потребно најмање 16 потеза да бисмо извршили тражену замену.

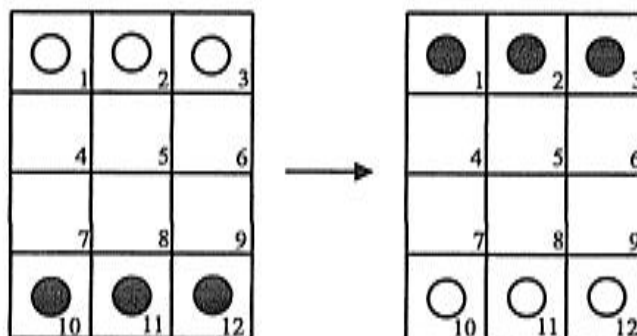


Посматрајмо игру 2 у новом светлу. На наредној слици су кружним дијаграмима дате почетене и крајње позиције скакача.



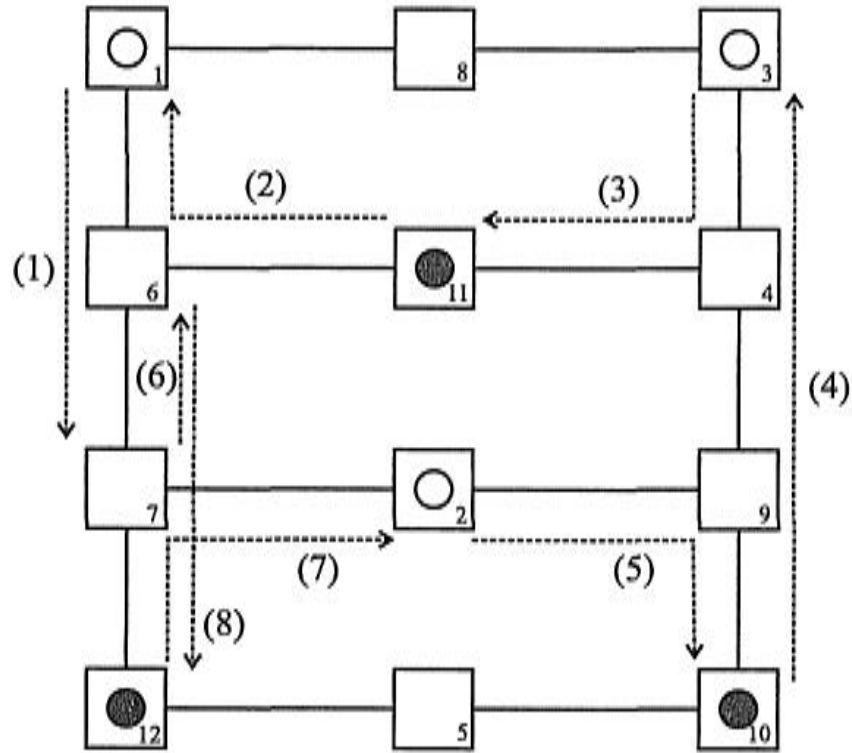
И у овом случају кружне шеме нам лепо визуелизују немогућност решавања постављеног задатка.

Игра 3. На табли 4×3 постављена су три бела скакача и три црна као на наредној слици лево.

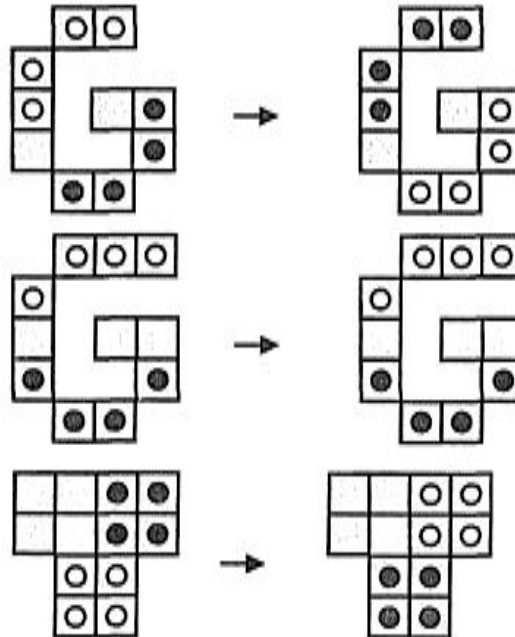


Заменити места белим и црним скакачима уз најмањи број потеза.

Дато почетно стање је на наредној слици приказано одговарајућом шемом која појединостављује решавање проблема. Бројеви уз испрекидане стрелице указују на редослед потеза који доводи до решења. Минималан број потеза је 26.



Игра 4. И на наредним (помало чудим) таблама потребно је заменити места црним и белим скакачима.



ОБИЛАЗАК ТАБЛЕ СКАКАЧЕМ

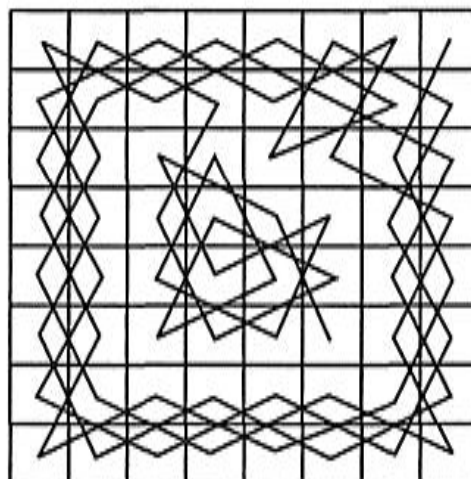
Најпре ћемо се упознати са још једном древном игром која је много познатија од претходних.

Игра 5. Може ли скакач, померајући се на прописани начин, да обиђе сва поља шаховске табле 8×8 тако да на свако поље стане тачно једанпут?

Овај проблем има дугу и богату историју. Датира још од самих почетака шаха (VI век, Индија). Суштина проблема јесте та да на свако поље скакач мора стати тачно једном. Обилазак може да буде *затворен*, што значи да се скакач може вратити на почетну позицију, или *отворен*, што значи да завршава на пољу са кога не може прећи на полазно поље.

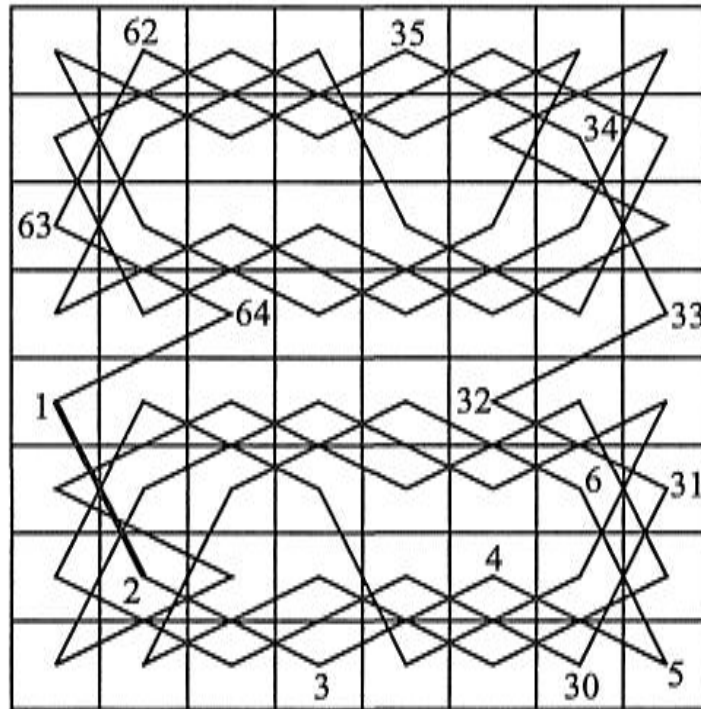
Међу првим познатим решењима постављеног проблема јесте отворени обилазак табле 8×8 који је пронашао француски математичар Моавр (1667–1754). Овај отворени обилазак, приказан на наредној слици, илуструје једну врло једноставну технику која је изненађујуће ефективна: обилазити најпре спољашње квадрате и улазити у унутрашњост само када је то неопходно. На тај начин, у првих 24 потеза могуће је обићи сва поља два спољашња квадрата табле. Почевши од поља 25 циклус треба поновити.

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28



Приметите да Моавров обилазак не може бити затворен; након посете поља 2 и 12 не можемо се више вратити на поље 1. Зато, примењујући Моаврову технику у трагању за затвореним обилазком треба посебно водити рачуна о угаоном пољу и пару поља која су са њим повезана.

И Ојлер (1707 – 1783), један од најпродуктивнијих математичара свих времена, бавио се проблемом обиласка шаховске табле скакачем. Ојлерово решење обиласка табле 8×8 дато је на наредној слици. Он је пронашао један затворени обилазак. Посебно занимљиво у овом обиласку је то што је Ојлер направно отворени обилазак доњег дела табле полазећи са поља 1. Затим је поновио потпуно исти обилазак, симетрично за горњи део табле (почетак 33 а завршетак 64). Треба приметити да је Ојлер врло пажљиво поставио и почетак и крај сваког од ова два отворена полуобиласка, тако да могу да буду спојени у један обилазак целе табле. Ојлеров рад на проблему обиласка има посебан значај будући да је он увео веома моћну и флексибилну технику решавања проблема која превазилази значај самог проблема.

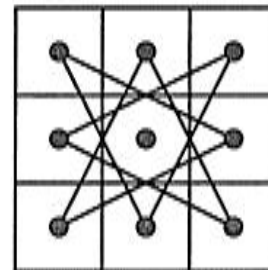


Међутим, убрзо након успешног обиласка табле 8×8 проблем је уопштен. Може ли скакач обићи сва поља табле $m \times n$ тако да на свако поље стане тачно једном (m и n су неки природни бројеви)? Овом приликом нећемо наводити опште резултате, већ ћемо се задовољити прилично непрецизним одговором на постављено питање: *понекад да, понекад не*. Додајмо и то да проблем обиласка табле скакачем постаје стандардан „школски“ задатак за студенте који уче програмирање. Нас ће првенствено занимати приступи и методе решавања разних специјалних случајева којима ћемо илустровати њихову разноврсност. У наставку ћемо под обилском подразумевати искључиво затворени обилазак, док ћемо отворене обиласке називати пуним именом.

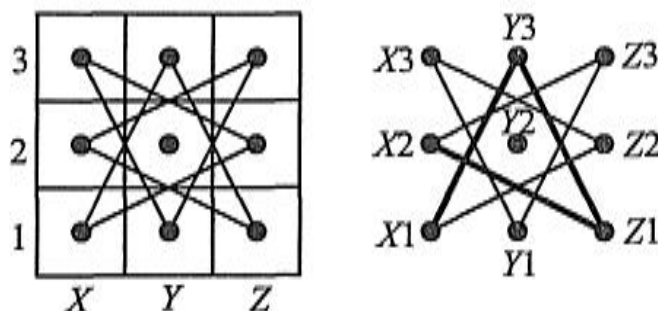
Одмах ћемо одбацити табле на којима скакач не би могао да се помери – $1 \times n$ табле ($n \in \mathbb{N}$), као и оне које је из очигледних разлога немогуће обићи – $2 \times n$ табле ($n \in \mathbb{N}$).

Игра 6. Погледајмо таблу 3×3 .

Решавајући уводне примере видели смо да је централно поље табле 3×3 недоступно скакачу уколико се он налази на било ком другом пољу. С друге стране, уколико се скакач налази на централном пољу ове табле, он са њега не може да се помери. Дакле, није могуће наћи ни затворен нити отворен обилазак табле 3×3 .



Но задржимо се још мало на овој табли да бисмо на њој илустровали формирање *графа* који одговара проблему обиласка. Наимс, сваком пољу табле придружујемо по једну тачку – чвор графа – и повезујемо их на основу суседства из перспективе скакача – два чвора су суседна и тиме повезана линијом (тзв. ивицом) ако су одговарајућа поља суседна у смислу да скакач може са једног од њих прећи на друго у једном потезу (види наредну слику).



Сада, проблем обиласка табле скакачем можемо преформулисати као проблем трагања за путем у одговарајућем графу тако да се сваки чвор посети само једном. Наравно, у графу се крећемо од чвора до чвора дуж ивица с тим што из сваког чвора пут можемо наставити само ивицама које из њега полазе. Пример једног пута истакнут је подебљаним линијама на претходној слици десно: $X1 \rightarrow Y3 \rightarrow Z1 \rightarrow X2$. Уколико је почетни чвор пута једнак крајњем чвору, онда се тај пут назива *циклус*. Пример циклуса је $X1 \rightarrow Y3 \rightarrow Z1 \rightarrow X2 \rightarrow Z3 \rightarrow Y1 \rightarrow X3 \rightarrow Z2 \rightarrow X1$. Овај циклус одговара кретању скакача постављеног на неко од „бочних“ поља током којег он обилази сва поља табле 3×3 осим централног, тачно по једном и враћа се на полазно поље.

Проблем обиласка табле скакачем јесте заправо проблем трагања за такозваним *Хамилтоновим циклусом* у одговарајућем графу. Хамилтонов циклус је циклус који пролази кроз сваки чвор само једном. Овакав циклус је добио назив у част ирског математичара Хамилтона (1805 – 1865).

Игра 7. Ево још једне табле коју скакач не може да обиђе. То је табла 5×5 .

Да бисмо се уверили у ово обојићемо поља табле 5×5 у две боје на уобичајен начин. Главна ствар коју треба приметити је та да се скакач на овако обојеној табли увек креће са поља једне боје на поље друге боје. Зато, скакач при обиласку неизбежно стаје наизменично на црна и бела поља, па се његов обилазак мора састојати од једнаког броја црних и белих поља. Али табла 5×5 нема једнак број црних и белих поља; она има 12 белих и 13 црних поља. Дакле, обилазак 5×5 табле није могућ.

Ово је згодна прилика да приметимо да непостојање затвореног обиласка табле не повлачи за собом немогућност проналажења отвореног обиласка. Отворени обилазак може да почне на црном пољу и да се заврши на црном пољу тако што скакач стаје наизменично на 13 црних и 12 белих поља. Једна могућност отвореног обиласка табле 5×5 дата је на наредној слици.

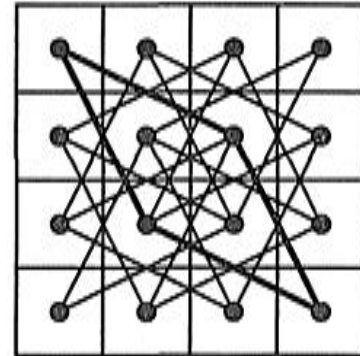
1	14	9	20	3
25	19	2	15	10
13	8	23	4	21
18	24	6	11	16
7	12	17	22	5

На основу управо изложеног аргумента закључујемо да не постоји обилазак било које

табле са непарним бројем поља (3×5 , 5×7 , 7×7 и тако даље).

Игра 8. Да ли је могућ обилазак табле 4×4 ? Летимичан поглед на наредну слику каже нам зашто није могуће обићи ову таблу.

Две подебљане линије, тј. *ивице* које полазе из горњег левог угла представљају једине могуће правце у којима скакач може да крене из овог поља. Дакле, обе ове подебљане ивице морају да буду део било ког обиласка целе табле. Из истог разлога, две подебљане ивице које полазе из доњег десног угла морају такође да буду део било ког обиласка целе табле. Али, као што можемо да видимо са слике ове четири ивице чине мали затворени циклус („круг“) који спаја само четири поља, што значи да та поља не могу истовремено да буду део ширег обиласка целе табле. Дакле, због ове неизбежне петље, затворени обилазак табле 4×4 није могућ.



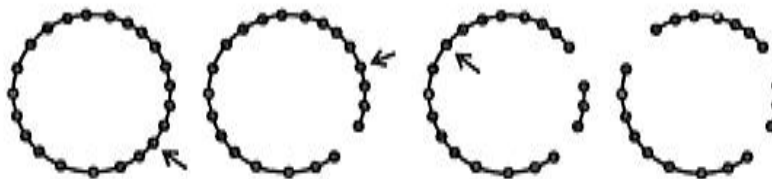
Да је немогуће обићи таблу 4×4 можемо закључити и на основу анализе кретања скакача на овој табли чија су поља обојена са четири боје означене словима А, В, С и Д на наредној слици. Ову анализу остављамо читаоцу. Занимљиво је да на исти начин доказујемо да је немогуће обићи било коју таблу $4 \times n$, $n \in \mathbb{N}$.

A	B	A	B
C	D	C	D
D	C	D	C
B	A	B	A

A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D
D	C	D	C	D	C
B	A	B	A	B	A

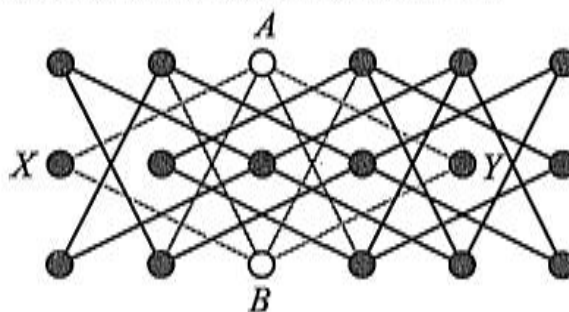
...

Игра 9. Покушајмо са таблом 3×6 . На ову таблу скакач не може да обиђе. Да бисмо то доказали искористићемо једну идеју из теорије графова. Прецизније искористићемо једно веома значајно својство графова који поседују Хамилтонов циклус. Илустроваћемо га на најједноставнијем графу ове врсте – „огрлице“. Наиме, ако уклонимо једну карику огрлице, она ће се отворити али ће остати у једном комаду. Ако уклонимо још једну карику добићемо два дела или пак само један уколико смо уклонили карику која је била суседна претходно уклоњеној. Уклањањем три карике добијамо три или мање делова. Уопште, уклањањем k карика огрлица ће се распасти на k или мање делова. Поента је да се огрлица *никада* неће распасти на више од k делова ако се уклони k карика.



Исто својство имају сви графови који поседују Хамилтонов циклус.

Посматрајмо сада граф скакачевог кретања по табли 3×6 .



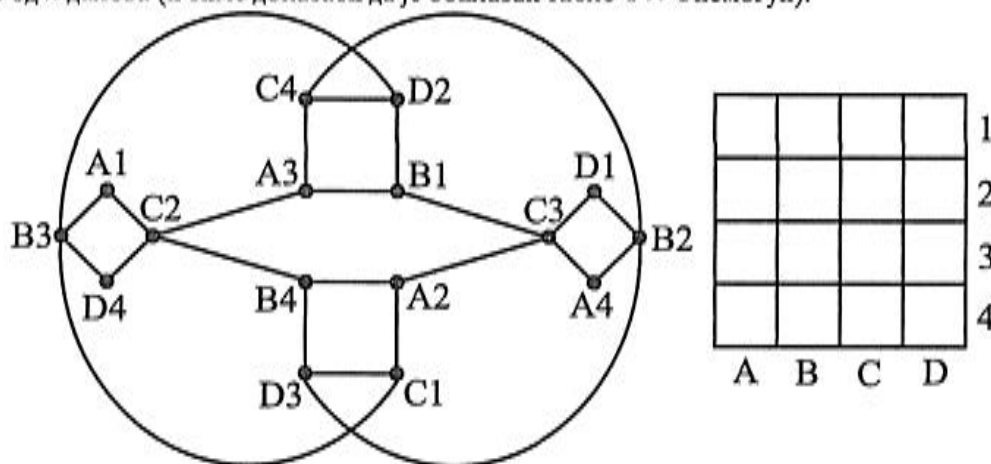
Уклонимо два чвора (поља), на пример A и B , са овог графа. Наравно, уклањањем чворова уклањамо и све ивице које садрже тај чвор. У овом случају, граф се распада на три дела: чвор X је изолован као један део, чвор Y као други, док је остатак графа још увек међусобно повезан и образује трећи део. Дакле, уклонили смо два чвора и добили три дела што значи да граф са претходне слике нема Хамилтонов циклус.

Па постоји ли још нека табла осим табле 8×8 , за коју је обилазак могућ, упитаће неко.

Игра 10. Најмања табла за коју је затворен обилазак могућ је 5×6 и 3×10 . Наћи путању обиласка за сваку од ових табли. Најмања табла за отворен обилазак је 3×4 . Наћи и њега.

Игра 11. Наћи обилазак табле 6×6 .

Игра 12. Наћи k чворова графа придруженог табли 4×4 тако да се граф распадне на више од k делова (и тиме доказати да је обилазак табле 4×4 немогућ).



ЛИТЕРАТУРА

- [1] YVON L'HOSPITALIER: *Énigmes at jeux logiques: Résolution at Construction*, Eyrolles, 1998.
- [2] JOHN J. WATKINS: *Across the board: The Mathematics of Chessboard Problems*, Princeton University Press, 2004.
- [3] <http://www.ageofpuzzles.com/Puzzles/ChessPuzzles.htm>

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2009/10 година