ММО 1995

Задача 1. Нека a_0 е реален број. Низата $\{a_n\}$ е зададена со

$$a_{n+1} = 3^n - 5a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

а) Изразете го општиот член a_n преку a_0 и n.

б) Најдете таков a_0, што $a_{n+1} > a_n$, за секој n.

Решение. а) Од (1) добиваме:

$$a_n = 3^{n-1} - 5a_{n-1} = 3^{n-1} - 5(3^{n-2} - 5a_{n-2}) = 3^{n-1} - 5\cdot 3^{n-2} + 5^2 a_{n-2}\,.$$

Продолжувајќи ја постапката наоѓаме:

$$a_n = 3^{n-1}\left(1 - \frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}\right) + (-1)^n 5^n a_0$$

$$= \frac{1}{8}\left(3^n + (-1)^{n-1}\cdot 5^n\right) + (-1)^n \cdot 5^n a_0, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

б) Да ја одредиме разликата $a_{n+1} - a_n$. **Имаме:**

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{8}\left(3^{n+1} + (-1)^n \cdot 5^{n+1}\right) + (-1)^n \cdot 5^{n+1} a_0 -$$

$$-\frac{1}{8}\left(3^n + (-1)^n \cdot 5^n\right) - (-1)^n \cdot 5^{n+1} a_0$$

$$= \frac{1}{8}\left(3^{n+1} - 3^n + (-1)^n \cdot 5^n \cdot 5 + (-1)^n 5^n\right) + (-1)^{n+1} \cdot 6 \cdot 5^n \cdot a_0$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cdot 3^n + (-1)^n \cdot 6 \cdot 5^n\right) + (-1)^{n+1} \cdot 6 \cdot 5^n \cdot a_0$$

Ако поделиме со 5^n добиваме

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{5^n} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n + (-1)^n \cdot 6\left(\frac{1}{8} - a_0\right). \qquad (2)$$

Според тоа, ако $a_0 \neq \frac{1}{8}$, тогаш при доволно големо n знакот на (2) ќе зависи од знакот на $(-1)^n \cdot 6\left(\frac{1}{8} - a_0\right)$ и ќе се менува во зависност од парноста на n. Ако $a_0 = \frac{1}{8}$, тогаш $a_{n+1} - a_n > 0$. Значи, $a_0 = \frac{1}{8}$.

Задача 2. Нека *a, b* и *c* се страни во триаголник, а h_a, h_b и h_c се соодветните висини. Докажете дека

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \le \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Кога важи равенство?

Решение. Ако со m_a, m_b, m_c ги означиме тежишните линии, тогаш

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}, \quad m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}, \quad m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Од неравенствата

$$h_a^2 \le m_a^2, \quad h_b^2 \le m_b^2, \quad h_c^2 \le m_c^2 \tag{1}$$

добиваме

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \le m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Равенството важи ако и само ако $h_a=m_a$, $h_b=m_b$ и $h_c=m_c$ т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран.

Задача 3. Докажете дека производот на 8 последователни природни броеви никогаш не може да биде четврти степен на природен број.

Решение. Со x да го означиме најмалиот од 8-те последователни природни броеви. Тогаш нивниот производ можеме да го запишеме како:

$$P=\left[x(x+7)\right]\cdot\left[(x+1)(x+6)\right]\cdot\left[(x+2)(x+5)\right]\cdot\left[(x+3)(x+4)\right]=$$

$$=\left(x^2+7x\right)\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+7x+12\right)$$

Ставаме $x^2+7x+6=a$ и добиваме

$$P=(a-6)a(a+4)(a+6)=\left(a^2-36\right)\left(a^2+4a\right)=$$

$$=a^4+4a^3-36a^2-144a=$$

$$=a^4+4a\left(a^2-9a-36\right)=a^4+4a(a+3)(a-12).$$

Бидејќи $a=x^2+7x+6$ и $x \ge 1$ имаме $a \ge 14$ и $(a-12) \in \mathbb{N}$. Значи $P>a^4$.

Но, $P=a^4+4a^3-36a^2-144a<a^4+4a^3+6a^2+4a+1=(a+1)^4$.

Значи,

$$a^4<P<(a+1)^4,$$

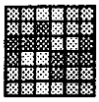
т.е. P секогаш се наоѓа меѓу два последователни четврти степени и затоа не може да биде четврти степен на природен број.

Задача 4. На квадратна табла со димензии 30x30 се поставуваат фигури од облик  (во сите четири можни положби) и фигури од облик . Фигурите не се прекриваат, не преоѓаат преку рабовите на таблата и квадратите од кои се составени лежат точно преку квадратите на таблата.

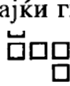
а) Докажи дека таблата целосно може да се покрие користејќи по 100 фигури од двата облика.

б) Докажи дека ако на таблата се веќе поставени 50 фигури од облик  тогаш на таблата може да се постави барем уште една таква фигура.

в) Докажи дека ако на таблата се веќе поставени по 28 фигури од двата облика, тогаш на таблата може да се постават барем по уште една фигура од двата облика.

Решение. а) Од цртежот  е јасно дека табла со димензија 6x6 може да се покрие користејќи по 4 фигури од двата облика. Големата табла се покрива со 25 табли со димензија 6x6. Значи, истата може да се покрие користејќи по $4\cdot 25=100$ фигури од двата облика.

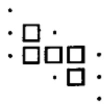
б) Ќе преброиме прво на колку различни начини може фигура од облик  да се постави на таблата. Нејзината положба на таблата е еднозначно определена со положбата на централното поле (на следниот цртеж означено со ■) и една од четирите можни ориентации

Централното поле ■ може да се постави на $28\cdot 28=784$ начини, бидејќи не може да се постави на рабно поле на таблата. Земајќи ги предвид четирите можни ориентации, добиваме дека фигура од облик  може да се постави на таблата на $784\cdot 4=3136$ различни начини.

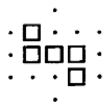
Сега ќе преброиме колку од овие можности се оневозможени со поставување на една фигура од облик . Јасно е дека една поставена фигура не оневозможува поставување на нова фигура само на местото и ориентацијата која ја зазема туку и на некои други кои ќе ги наречеме соседни положби.

Нека е поставена фигура со ориентација .

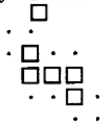
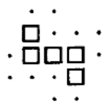
Пребројуваме колку најмногу положби на фигури со ориентација  се оневозможени со веќе поставената фигура. На следниот цртеж е претставена поставената фигура, а со · се означени сите положби на кои не може да стои централното поле на нова фигура со ориентација :



Значи, поставената фигура со дадената ориентација зазема 13 положби за нова фигура со ориентација . Аналогно, цртежот



покажува дека поставена фигура со ориентација  зазема 17 положби за нова фигура со ориентација . Цртежите

 и 

соодветно, покажуваат дека поставената фигура со ориентација  зазема 15 положби за нова фигура со ориентација  и 17 положби за нова фигура со ориентација .

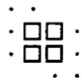
Значи, поставена фигура со ориентација  зазема вкупно 13+17+ +15+17=62 положби за нова фигура. Јасно е дека поставената фигура може да зазема и помалку положби ако е поставена доволно блиску до работ на табелата. Исто така, поради симетрија, добиениот број е еднаков за поставена фигура од било која ориентација.

Бидејќи секоја поставена фигура од облик  зазема најмногу 62 положби за нова фигура од истиот облик, вкупно поставените 50 фигури од облик  заземаат најмногу $50 \cdot 62 = 3100$ положби за нова фигура. Но, тогаш за поставување на нова фигура се слободни најмалку 3136-3100=36 положби.

Значи, без оглед на распоредот на првите 50 фигури може да се постави барем уште една фигура и тоа најмалку на 36 различни начини.

в) Прво утврдуваме дека постојат точно $29 \cdot 29 = 841$ различна положба за поставување на фигура од облик . Положбата на ваквите фигури е еднозначно определена со положбата на нивниот горен лев квадрат.

Цртежот



покажува дека поставена фигура од облик  зазема 12 положби за нова фигура со ориентација . Од причини на симетрија, поставена фигура од облик  зазема вкупно најмногу $4 \cdot 12 = 48$ положби за нова фигура од облик  со каква било ориентација.

Значи, поставените фигури заземаат најмногу $28 \cdot 62 + 28 \cdot 48 = 3080$ положби за нова фигура од облик , па за поставување на 29-тата фигура од облик  остануваат слободни најмалку $3136 - 3080 = 56$ положби.

Нека е поставена и 29-тата фигура од облик . Секоја ваква фигура зазема најмногу 12 положби за поставување на нова фигура од облик , а секоја поставена квадратна фигура зазема најмногу 9 положби за поставување на нова квадратна фигура. Значи, поставените фигури заземаат најмногу $29 \cdot 12 + 28 \cdot 9 = 760$ положби за поставување на нова квадратна фигура, па за поставување на 29-тата квадратна фигура остануваат слободни најмалку 841-760=81 положба.

Задача 5. Нека $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ \ b \neq 0$. Да се определат сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така што

$$f(x + d \cdot f(y)) = ax + by + c, \quad \text{за сите } x, y \in \mathbb{R}.$$

Решение. Нека f е функција за која важи

$$f(x + d \cdot f(y)) = ax + by + c, \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

За $x = 0$, $y = -c/b$ добиваме

$$f(d \cdot f(-c/b)) = 0. \tag{2}$$

Значи, ставајќи $d \cdot f(-c/b) = m$, добиваме

$$f(m) = 0. \tag{3}$$

Со замена $y = m$ во (1), добиваме

$$f(x) = ax + bm + c, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Очигледно, f е линеарна функција од облик

$$f(x) = ax + s, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

каде $s \in \mathbb{R}$ е слободен член кој треба да го определиме. Со замена на (5) во (1) добиваме

$$a^2 dy + (ad + 1)s = by + c, \text{ за секој } y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Последното е можно ако и само ако

$$\begin{cases} a^2 d = b \\ (ad + 1)s = c. \end{cases}$$

Разгледуваме две можности:

I $\boldsymbol{ad + 1 \neq 0}$.

Во овој случај $s = \dfrac{c}{ad + 1}$ и

$$f(x) = ax + \frac{c}{ad + 1}, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Со проверка се утврдува дека функцијата дадена со (7), го задоволува условот (1) доколку се исполнети условите $a^2 d = b$ и $ad + 1 \neq 0$.

II $\boldsymbol{ad + 1 = 0}$.

Во овој случај, очигледно, мора да важи $c = 0$.

Со проверка се утврдува дека секоја функција f, дадена со (5) за произволно $s \in \mathbb{R}$, го задоволува условот (1) доколку се исполнети условите $a^2 d = b,\ \ ad + 1 = 0$ и $c = 0$.

Забелешка. До заклучокот дека f е линеарна функција може да се дојде и побрзо ако воведеме смена

$$z = x + d \cdot f(0), \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

Очигледно z ги прима сите реални вредности. Заменувајќи во (1) со $x = z - d \cdot f(0)$ и $y = 0$, добиваме

$$f(z) = az - ad \cdot f(0) + c, \text{ за секој } z \in \mathbb{R}.$$