Osječki matematički list 12 (2012), 69-81

Igre u kompleksnoj ravnini

Šime Šuljić [*]

Sažetak

U članku je riječ o uporabi GeoGebre, specijaliziranog računalnog programa za dinamičnu matematiku za prikaz i računanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini. Posebno se istražuju geometrijski oblici koji nastaju u iterativnom postupku za dobivanje Mandelbrotovog skupa. Razmatraju se skupovi točaka koji nastaju po određenim kriterijima i raznim transformacijama, uključivši i Möbiusove transformacije.

Ključne riječi: *kompleksna ravnina, kompleksni broj, Möbiusova transformacija, Mandelbrotov skup, iteracija, GeoGebra*

Games in the complex plane

Abstract

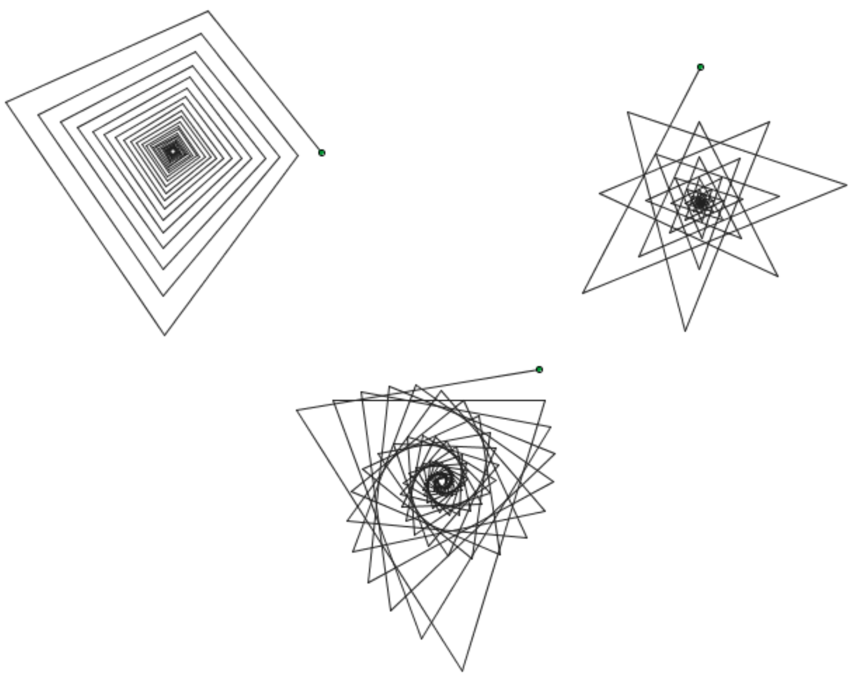
This paper studies the application of GeoGebra, a special computer program for dynamic mathematics used presentation and computation of complex numbers in the Gauss plane. Specially, geometric shapes produced by the iterative procedure for obtaining the Mandelbrot set are investigated. Some sets of the points which emerge according to certain criteria and various transformations, including the Möbius transformation, are considered, too.

Keywords: *complex plain, complex number, Möbius transformation, Mandelbrot set, iteration, GeoGebra*

[*]Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin, email: sime.suljic@normala.hr

1 Uvod

Koje pravilo povezuje tri geometrijske sličice na *Slici 1*? Nije se potrebno previše udubiti da shvatimo da svaki od ovih crteža prilično vjerno možemo skicirati olovkom na papiru u jednom potezu. Ukoliko se odlučimo na konstrukciju geometrijskim priborom bit će riječi o dvije vrste preslikavanja: rotaciji i homotetiji. Ali u vrijeme kada su računala dostupna na svakom koraku svi ćemo najprije pomisliti kako na računalu izraditi takve crteže zadajući niz rotacija i homotetija početne dužine. Riječ je o odličnim vježbicama za početno učenje programskog jezika *Logo* ili kojeg drugog. Ali tu su i programi dinamične geometrije koji od vas ne zahtijevaju poznavanje programiranja, nego samo znanje elementarne geometrije.



Slika 1: Zanimljivi skupovi točaka ravnine

2 Iteracije Mandelbrotovog skupa

Ove slike i jesu nacrtane programom dinamične geometrije ali ne po geometrijskom obrascu. Još je zanimljivije da nisu nacrtane po različitim algoritmima, a niti su mijenjani parametri u algoritmu osim jedne jedine ulazne vrijednosti. Ovdje je naime riječ o točkama kompleksne ravnine koje reprezentiraju kompleksne brojeve. Početni broj podvrgnut je nizu iteracija i onda su točke pridružene tim brojevima spojene dužinama. Riječ je o poznatoj iteraciji kojom nastaje *Mandelbrotov skup*. Podsjetimo se tog iterativnog postupka. Svaki broj c, koji odgovara ispitivanoj točki, podvrgnemo ovakvom iterativnom postupku:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 + c, \\ z_2 &= z_1^2 + c, \\ z_3 &= z_2^2 + c, \\ &\vdots \\ z_n &= z_{n-1}^2 + c \end{aligned}$$

gdje je $z_0 = 0$. Dakle uzmemo 0, pomnožimo samu sa sobom i dodamo broj c, zatim rezultat kvadriramo i dodamo broj c, rezultat ponovo kvadriramo i dodamo početni broj c itd. Ako takav niz iteracija 'odluta' u beskonačnost, onda za točku pridruženu broju c kažemo da ne pripada Mandelbrotovom skupu. Ako i nakon velikog broja iteracija niz ostaje ograničen, te ili ciklički poprima stalno iste vrijednosti ili se u njemu pojavljuju kompleksni brojevi sve manjih apsolutnih vrijednosti, smatramo da točka pripada Mandelbrotovom skupu. Evo nekoliko jednostavnih primjera:

1. $c = 1$, $1^2 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$, $5^2 + 1 = 26$ – niz raste u beskonačnost, točka $1 + 0 \cdot i$ ne pripada skupu.

2. $c = -1$, $(-1)^2 - 1 = 0$, $0^2 - 1 = -1$, $(-1)^2 - 1 = 0$ – niz ostaje ograničen, što znači da točka $-1 + 0 \cdot i$ pripada skupu.

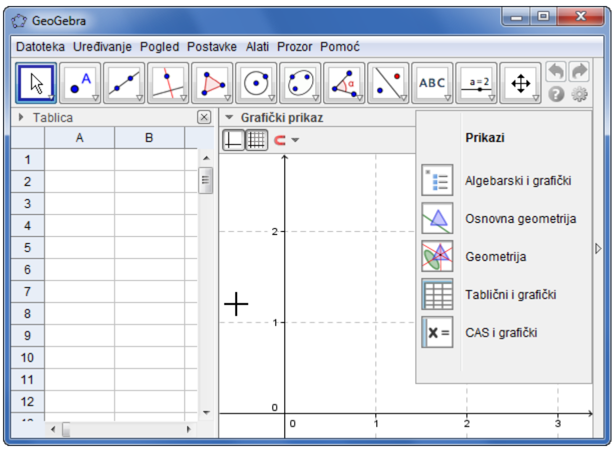
3. $c = i$, $i^2 + i = -1 + i$, $(-1 + i)^2 + i = -i$, $(-i)^2 + i = -1 + i$ – "vrti se u krug", što znači da točka $0 + i$ pripada skupu.

2.1 GeoGebra

A, pripada li broj $c = -0.3 + 0.4i$ skupu? Nakon nekoliko prvih koraka već će nam zatrebati kalkulator, a zapravo puno je bolje da posegnemo za programom *GeoGebra* na računalu. Ne samo da ćemo pomoću tog programa lako izraditi izračun, nego će nam se u kompleksnoj ravnini istovremeno prikazati iteracije. Dinamične iteracije kojima ćemo upravljati potezom miša! Takva interaktivna i dinamična kompleksna ravnina postaje prostor za naše osobno matematičko otkriće ali i otkrića novih dimenzija matematičke ljepote. Učenik se s pojmom kompleksne ravnine susreće relativno rano, početkom drugog razreda srednje škole, a to je prilika da ga matematika privuče preko tehnologije.

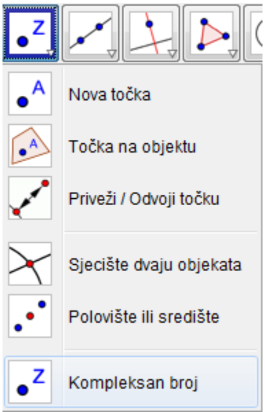
Slika 2: Web aplikacija GeoGebre

Ako nemate program GeoGebra na svom računalu, samo svratite na URL adresu www.geogebra.org, kliknite na gumb preuzimanje, a potom na Webstart za izravno pokretanje. Pri desnom rubu prozora (*Slika 3*) nalazi se izbornik *Prikazi*. Odaberite *Tablični* i *grafički*.



Slika 3: GeoGebra sučelje

Unutar programa na taj ćete način imati dva prikaza (prozora): tablični za numerički proračun koji funkcionira poput *Excela* i grafički s koordinatnim sustavom.



Zumirajte koordinatni sustav jer naša ćemo istraživanja provoditi na malom području u blizini ishodišta. U alatnoj traci kliknite na mali trokutić na drugom alatu *Nova točka* iz padajućeg izbornika odaberite *Kompleksan broj*. Sada lijevom tipkom miša kliknite negdje na grafički prikaz i dobit ćete točku s oznakom z1. Odmah je preimenujte u c. U ćelije *tablice* upišite:

- `A1:=c`
- `A1^2+c` (napomena za kvadrat: alt+broj 2)
- Razvucite ćeliju $A2$ na barem tridesetak ćelija niže radi kopiranja iterativnog postupka. Razvlačenje ćelija izvodi se kao i u Excelu, označi se ćeliju i razvuče kvadratić donjeg desnog ugla. Tako će u ćeliju $A3$ biti upisana formula `A2^2 + c`, i tako redom.

Potom dobivene točke možemo spojiti dužinama. U ćeliju B1 upišite

```
=Dužina[A1, A2]
```

i tu ćeliju razvucimo na sve ćelije ispod nje. U grafičkom prikazu imamo sada točke povezane dužinama. Povlačite li sada početnu točku c po koordinatnom sustavu, dobit ćete one figure s početka članka ali i još mnoge druge. Ukoliko želite promijeniti svojstva objekta poput veličine, debljine i oblika crte, boje i drugo otvorite izbornik *Uređivanje* → *Svojstva*. U GeoGebrin grafički prikaz možete umetnuti sliku Mandelbrotovog skupa radi lakše orijentacije pri surfanju kompleksnom ravninom. Na servisu za razmjenu GeoGebrinih datoteka postavio sam takvu datoteku (www.geogebratube.org/student/m18626). Ovo vam može biti posebno zanimljivo jer ćete otkriti vezu između broja krakova 'antena' na pojedinom 'mjehuriću' na glavnom tijelu skupa i broja vrhova mnogokuta kada točku c pomaknete u središte mjehurića.

2.2 Računanje s kompleksnim brojevima u GeoGebri

Ako u prikazima odaberemo *Algebarski i grafički* pojavit će se na dnu prozora traka za unos. I kroz nju možemo zadati kompleksni broj. Na primjer upisom izraza `sqrt(2)/2 + sqrt(2)/2` i dobit ćemo broj $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ u algebarskom prikazu i odgovarajuću točku u grafičkom prikazu. Predefinirane funkcije vezane uz kompleksne brojeve su:

- `abs(z)` – daje modul kompleksnog broja z
- `arg(z)` – daje argument broja z, odnosno kut što ga dužina koja spaja ishodište koordinatnog sustava i pripadnu točku s pozitivnim smjerom osi x.
- `conjugate(z)` – daje konjugirano kompleksni broj zadanog broja.

Sve računske operacije uključivši potenciranje moguće je raditi s kompleksnim brojevima u GeoGebri kroz traku za unos. U algebarskom prikazu vidjet će rezultat u algebarskom obliku, a u grafičkom pridruženu točku. Na primjer upis `(sqrt(2)/2 + sqrt(2)/2 i)^4` daje broj $-1 + 0 \cdot i$. Mogući su i složeniji primjeri poput ovih:

1. Izračunajte

$$\frac{z^6 + |z| + i^{-111}}{|z^2| + i^{111}}$$

gdje je $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
Uputa: upišite u traku za unos: `z = -sqrt(3)/2 + 1/2 i`, a potom: `(z^6 + abs(z) + i^(-111)) / (abs(z^2) + i^111)`.
GeoGebra daje rezultat: `-0.5 + 0.5i`.

2. Izračunajte

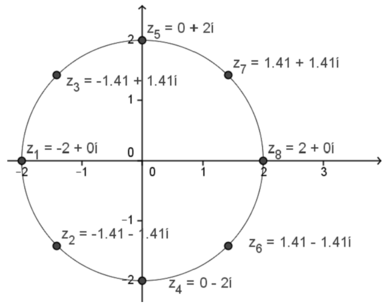
$$\left[\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right]^{42}.$$

Uputa: Upišite

```
(cbrt(2)(cos(5π/12) + i sin(5π/12)))^42
```

Rezultat je broj $z = 0 - 16384i$.

3. Naredba `KompleksniKorijen[z^8 - 256]` dat će rješenja jednadžbe $z^8 - 256 = 0$ kao na desnoj slici.

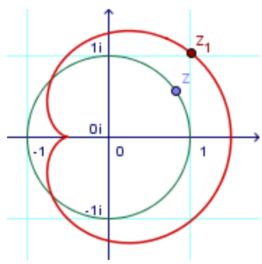


3 Transformacije u kompleksnoj ravnini

Primjer 1. *Neke poznate ravninske krivulje koje možemo inače opisati mehaničkim gibanjem točaka u ravnini ili ih zadati jednadžbama, u kompleksnoj ravnini možemo dobiti krajnje jednostavnim transformacijama. Tako* kardioidu *dobijemo preslikavanjem kružnice polumjera jedan po formuli* $\frac{1}{2}z^2 + z$.

Upisujte u traku za unos redom naredbe:

- `k = Kružnica[(0, 0), 1]`
- `z = Točka[k]` – otvorite Svojstva točke i na kartici Algebra postavite ju kao kompleksan broj.
- `w = 1/2 z^2 + z`
- `Lokus[w, z]`.

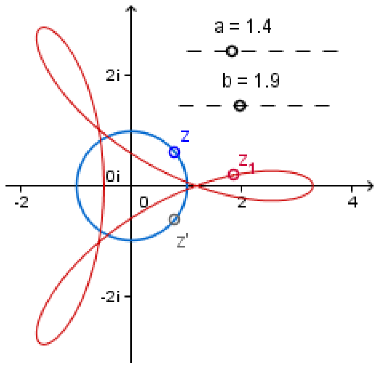


Primjer 2. *Za crtanje ravninskih krivulja koristi se naredba*

```
Krivulja[<izraz>, <izraz>, <varijabla>, <početna vrijednost>, <krajnja vrijednost>]
```

Primjer jednog takvog poziva funkcije je,

```
Krivulja[a cos(2t) + b cos(t), a sin(2t) - b sin(t), t, 0, 2 π]
```

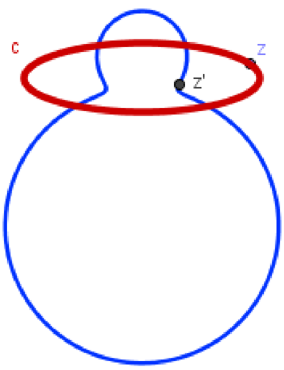


uz uvjet da prethodno definirate parametre (klizače) a i b. Te zanimljive oblike možemo postići i u kompleksnoj ravnini. Neka je z točka na kružnici i $\overline{z}$ konjugirano kompleksni broj broja z. Definirajmo broj $z_1 = az^2 + b\overline{z}$, gdje su a i b ranije definirani parametri. Naredbom `Lokus[z_1, z]` dobijemo krivulju kakvu vidite na slici lijevo i razne druge oblike kad se mijenjaju vrijednosti parametara.

Primjer 3. *Pogledajte sliku 'tikvice' i elipse* (Slika 4)*. Može li se tikvica provući kroz elipsu? Da, može, jer sve se odvija u kompleksnoj ravnini i tikvica se na vrlo zanimljiv način izobličuje kada mijenjate koeficijente u jednadžbi elipse. Ova tikvica je zapravo skup točaka koji dobijemo kada točke elipse transformiramo po formuli:*

$$\overline{z} = \frac{20z}{|z^2|}.$$

Opis konstrukcije rađene prema ideji kolege Marca Rouxa (www.apmep.asso.fr) dan je u Tablici 1.



Slika 4: Slika 'tikvice'

br.	naziv	naredba	vrijednost
1.	broj a		`a=8`
2.	broj b		`b=2.3`
3.	broj p		`p=0`
4.	broj q		`q=1.2`
5.	elipsa c	`(x-p)^2/a^2+(y-q)^2/b^2=1`	`0.03x^2+0.38y^2-0.91y=1.46`
6.	kompleksni broj z	`Tocka[c]`	`z=7.34+2.11i`
7.	kompleksni broj i		`i=0+i`
8.	kompleksni broj z'	`20z/abs(z)^2`	$\bar{z} = 2.52 + 0.72i$
9.	lokus tikvica	`Lokus[z',z]`	tikvica

Tablica 1: Rouxov postupak

Napomena. GeoGebra izrađuje protokol konstrukcije, Opis konstrukcije u izborniku *Pogled*. Popis svih naredbi možete vidjeti u *Tablici 1* i pritom ponoviti konstrukciju počevši od prvog koraka.

3.1 Skup točaka kompleksne ravnine

Može li GeoGebra pomoći pri ovakvim zadacima?

Zadatak 1. Odredite skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetom

$$\mathrm{Re}\frac{z - z_1}{z - z_2} = 0.$$

Algebarsko rješenje: Uzmemo li da je $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, onda nakon uvrštavanja dobivamo:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \frac{(x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_2)}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} i$$

Kako je $z \neq z_2$, slijedi:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

Ovu jednakost možemo pisati i u obliku:

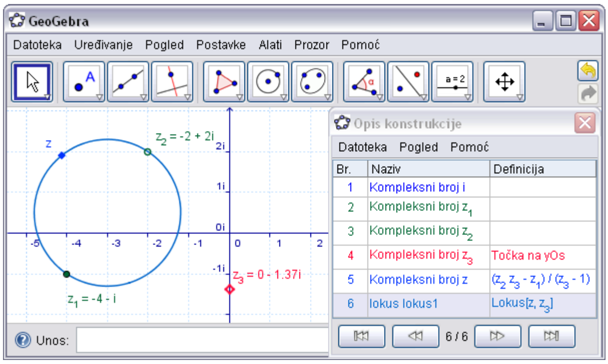
$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2.$$

Desna strana te jednakosti zapravo je kvadrat polovine udaljenosti z_1 i z_2. Traženi skup točaka je kružnica sa središtem u točki

$$z_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

s promjerom koji je udaljenost z_1 i z_2, ali bez točke z_2.

Rješenje uz pomoć GeoGebre: Na priloženoj slici, iz otvorenog programskog prozora Opisa konstrukcije, vidi se da je riječ o svega šest koraka konstrukcije. Zapravo o pet koraka jer definiranje točke (0, 1) kao broja i izvrši program automatski dočim korisnik stane zadavati kompleksne brojeve. Dakle, ova je konstrukcija izvedena na sljedeći način:



Slika 5: Geometrijske konstrukcije u GeoGebri

1. Zadan je kompleksni broj z_1 kao nezavisna točka, odnosno točka koja se slobodno može povlačiti po koordinatnom sustavu.

2. Na isti je način zadan kompleksni broj z_2.

3. Broj z treba predstavljati skup svih brojeva koji moraju ispunjavati zadani uvjet, pa njega nećemo konstruirati kao nezavisan objekt već kao zavisan. Osnovni je problem kako postaviti uvjet da $\mathrm{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}$ bude jednak nuli. Izraz $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ je zapravo kompleksni broj koji označimo kao z_3. Ako je realni dio tog broja jednak nuli onda je on u kompleksnoj ravnini smješten na imaginarnoj osi, pa stoga taj broj zadamo naredbom kroz traku za unos: `z_3 = Točka[yOs]`.

4. Iz relacije izrazimo z i taj broj kroz traku za unos zadamo naredbom `z = (z_2 z_3 - z_1)/(z_3 - 1)`.

5. Povlačimo li sada točku z_3 po osi ordinata možemo uočiti da točka z izvodi kružno gibanje. Bit ćemo sigurniji u to da je riječ o kružnici ukoliko zadamo naredbu `Lokus[z, z_3]`, kojom ćemo dobiti upravo

skup svih kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju postavljeni uvjet zadatka.

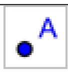
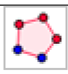
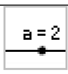
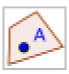
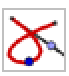
Iz dobivenog *lokusa* vidi se da je riječ o kružnici, čiji je promjer dužina s rubnim točkama z_1, z_2. Njeno polovište središte je kružnice. Do jednadžbe te kružnice možemo doći naredbom `k = Kružnica[z, z_1, z_2]`, a do koordinata središta naredbom `S = Središte[k]`.

3.2 Möbiusove transformacije

Möbiusova transformacija ravnine je racionalna funkcija kompleksne varijable z oblika:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

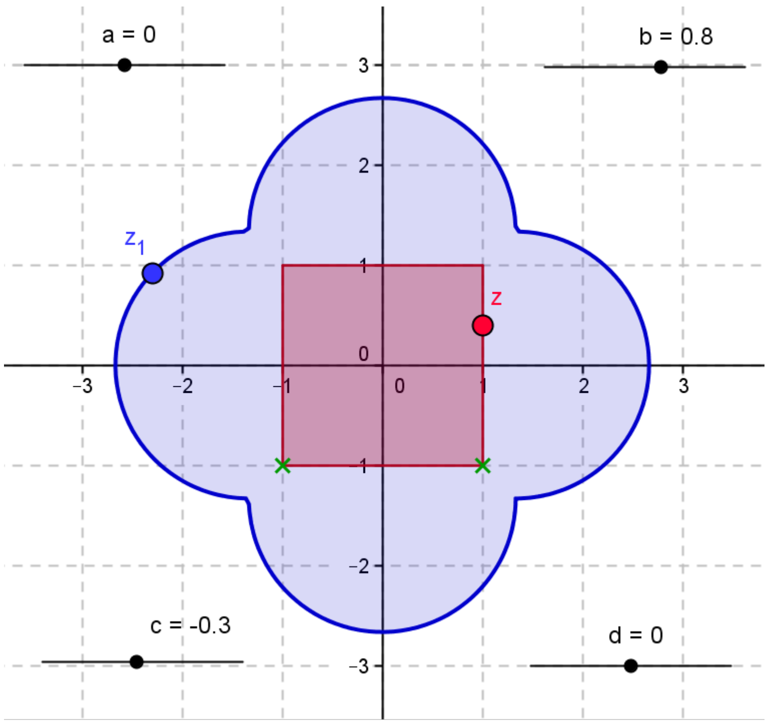
gdje su a, b, c i d kompleksni brojevi. Njezina primjena u fizici je velika, a posebno u teoriji relativnosti. Zahvaljujući GeoGebri učenik se može neposredno uvjeriti u njen učinak. Uradak u GeoGebri neće biti toliko efektan kao *Moebius Transformations Revealed* jedan od poznatijih matematičkih videa na servisu *YouTube*, ali osjećaj da osobno konstruirate, upravljate i ispitujete transformacije u željenom smjeru pruža puno veće zadovoljstvo. Konstrukcija je vrlo jednostavna i popisana je u *Tablici 2*.

	Alatom *Nova točka* nacrtajte dvije točke bilo gdje u koordinatnom sustavu. Kasnije ih možete pomicati.
	Alatom *Pravilni poligon* nacrtajte kvadrat. Upišite 4 u dijaloški okvir.
	Alatom *Klizač* konstruirajte četiri klizača (promjenljiva broja) a, b, c i d.
	Alatom *Točka na objektu* nacrtajte točku na kvadratu. Probajte je pomicati. Ona se mora gibati po rubu kvadrata. Uđite u *Svojstva* te točke i pretvorite ju u kompleksan broj i preimenujte ju u z.
	U traku za unos upišite `z' = (a z + b)/(c z + d)`.
	Alatom *Lokus* kliknite na `z'`, zavisnu točku za koju želimo da definira skup točaka, a zatim na točku z koju uzrokuje poziciju točke `z'`.

Tablica 2: Koraci konstrukcije

Nakon toga nam preostaje da mijenjamo parametre a, b, c i d, odnosno pozicije vrhova koji određuju kvadrat. A zatim možemo redefinirati kvadrat u bilo koji lik ili dodati više likova. Na *Slici 6* vidite jednu od mogućih transformacija kvadrata.

GeoGebra zaista može biti vrlo moćan alat za istraživanje i razumijevanje matematike, pa tako i Möbiusovih transformacija koje bi zasigurno zahtijevale poseban članak.



Slika 6: Möbiusova transformacija

Literatura

[1] Šuljić, Šime: Mandelbrotov skup, math.e, broj 5,
http://e.math.hr/mandelbrot/index.html

[2] GeoGebra en la Ensenanca de las Matematicas
http://geogebra.es/cvg

[3] Christersson, Malin: Geogebra Tutorial
http://www.malinc.se/math

[4] Moebius Transformations Revealed:
http://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY