Алија Муминагиќ
Данска

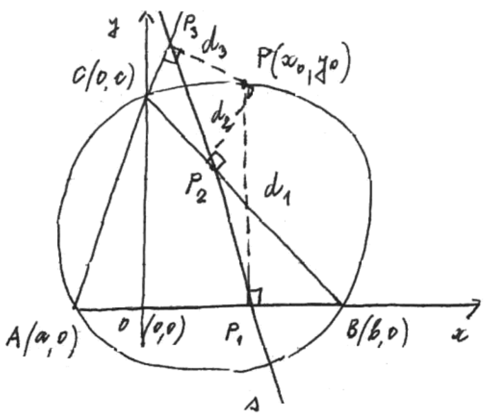
ОБРАТНА ТЕОРЕМА НА ТЕОРЕМАТА НА СИМСОН И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

Во [1] авторката дава доказ на теоремата за Симсоновата права (Robert Simson, шкотски математича, 1687-1768) и напоменува дека важи и обратната теорема:

Точка припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот, ако ортогоналните проекции на точката врз правите определени со страните на триаголникот припаѓаат на една права.

а потоа во истата статија се пресентирани три решени задачи. Меѓутоа, во наведената статија не е даден доказ на обратната теорема, па затоа во оваа статија ќе го презентираме овој доказ, при што ќе користиме аналитичка геометрија.

Доказ. Во правоаголен координатен систем нека е даден триаголник ABC таков што $A(a,0)$, $B(b,0)$ и $C(0,c)$. Нека $P(x_0,y_0)$ е точка која припаѓа на надворешноста на триаголникот ABC и нека растојанијата на точката P до страните AB, BC и CA на триаголникот ABC се $d_1=\overline{PP_1}, d_2=\overline{PP_2}$ и $d_3=\overline{PP_3}$, соодветно. Ќе ги определиме координатите на точките $P_1(x_0,0)$, $P_2(x_2,y_2)$ и $P_3(x_3,y_3)$ и ќе докажеме дека ако точките P_1,P_2 и P_3 се колинеарни, тогаш точката P припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC (цртеж десно).



Равенката на правата низ точките A и C е:

$$y=-\tfrac{c}{a}x+c\ . \tag{1}$$

Бидејќи правата $d_3 \perp AC$ и d_3 минува низ $P(x_0,y_0)$ добиваме дека нејзината равенка е

$$y-y_0=\tfrac{a}{c}(x-x_0)\,, \tag{2}$$

па затоа пресечната точка P_3 на правите d_3 и AC е:

$$P_3\left(\tfrac{a(c^2-cy_0+ax_0)}{a^2+c^2},\tfrac{c(a^2-ax_0+cy_0)}{a^2+c^2}\right)\ . \tag{3}$$

Правата низ точките B и C има равенка $y=-\frac{c}{b}x+c$ и бидејќи $d_2 \perp BC$ и бидејќи d_2 минува низ $P(x_0,y_0)$, на потполно аналоген начин како поогоре добиваме дека

$$P_2(\frac{b(c^2-cy_0+bx_0)}{b^2+c^2},\frac{c(b^2-bx_0+cy_0)}{b^2+c^2}). \qquad (4)$$

Понатаму, равенката на правата која минува низ точките P_1 и P_2 е

$$y=\frac{\frac{c(b^2-bx_0+cy_0)}{b^2+c^2}-0}{\frac{b(c^2-cy_0+bx_0)}{b^2+c^2}-x_0}(x-x_0),$$

односно

$$y=\frac{b^2-bx_0+cy_0}{bc-by_0-cx_0}(x-x_0). \qquad (5)$$

Ако точките P_1,P_2 и P_3 се колинеарни, тогаш точката P_3 припаѓа на правата P_1P_2 и затоа

$$y_3=\frac{b^2-bx_0+cy_0}{bc-by_0-cx_0}(x_3-x_0),$$

па од (3) последователно добиваме:

$$\frac{c(a^2-ax_0+cy_0)}{a^2+c^2}=\frac{b^2-bx_0+cy_0}{bc-by_0-cx_0}(\frac{a(c^2-cy_0+ax_0)}{a^2+c^2}-x_0)$$

$$\frac{c(a^2-ax_0+cy_0)}{a^2+c^2}=\frac{b^2-bx_0+cy_0}{bc-by_0-cx_0}\cdot\frac{ac^2-acy_0+a^2x_0-a^2x_0-c^2x_0}{a^2+c^2}$$

$$c(a^2-ax_0+cy_0)=\frac{b^2-bx_0+cy_0}{bc-by_0-cx_0}\cdot c(ac-ay_0-cx_0)$$

$$(a^2-ax_0+cy_0)(bc-by_0-cx_0)=(b^2-bx_0+cy_0)(ac-ay_0-cx_0)$$

$$acx_0^2-bcx_0^2-a^2cx_0+b^2cx_0+acy_0^2-bcy_0^2+bc^2y_0-ac^2y_0+ab^2y_0-a^2by_0+a^2bc-ab^2c=0$$

$$cx_0^2(a-b)-cx_0(a^2-b^2)+cy_0^2(a-b)-c^2y_0(a-b)-aby_0(a-b)+abc(a-b)=0$$

$$x_0^2-x_0(a+b)+y_0^2-\frac{c^2+ab}{c}y_0+ab=0$$

$$(x_0-\frac{a+b}{2})^2+(y_0-\frac{c^2+ab}{2c})^2=(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2-ab$$

$$(x_0-\frac{a+b}{2})^2+(y_0-\frac{c^2+ab}{2c})^2=(\frac{a-b}{2})^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2 \qquad (6)$$

Конечно од (6) следува дека точката $P(x_0,y_0)$ припаѓа на кружница со центар $(\frac{a+b}{2},\frac{c^2+ab}{2c})$ и радиус

$$r=\sqrt{(\frac{a-b}{2})^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2}.$$

Ни останува да докажеме дека точката $P(x_0,y_0)$ лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Ако равенката на опишаната кружница околу триаголникот ABC има облик $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ тогаш

$$(a-p)^2+q^2=r^2 \tag{7}$$
$$(b-p)^2+q^2=r^2 \tag{8}$$
$$p^2+(c-q)^2=r^2 \tag{9}$$

Ако од (7) ја одземеме (8) добиваме

$$(a-p)^2-(b-p)^2=0$$
$$(a-b)(a+b-2p)=0$$
$$a+b-2p=0$$
$$p=\frac{a+b}{2}. \tag{10}$$

Ако од (9) ја одземеме (8) добиваме

$$p^2+(c-q)^2-(b-p)^2-q^2=0$$
$$c^2-2cq-b^2+2bp=0$$
$$2cq=c^2-b^2+2b\frac{a+b}{2}$$
$$2cq=c^2-b^2+ab+b^2$$
$$q=\frac{c^2+ab}{2c}. \tag{11}$$

Конечно, ако од (10) и (11) замениме во (7) добиваме $(a-\frac{a+b}{2})^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2=r^2$, т.е. $r=\sqrt{(\frac{a-b}{2})^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2}$. Според тоа, опишаната кружница околу триаголникот ABC има равенка:

$$(x-\frac{a+b}{2})^2+(y-\frac{c^2+ab}{2c})^2=(\frac{a-b}{2})^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2,$$

а како што видовме точката $P(x_0,y_0)$ лежи на оваа кружница, што и требаше да се докаже.

Задача 1. Нека K,L,M се проекциите на точката P, која припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC на правите BC,CA,AB, соодветно. Докажи дека

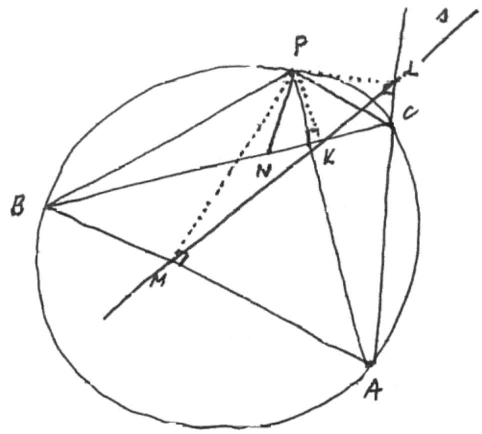
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PL}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{PK}}.$$

Решение. *Прв начин*. Нека N е точка на BC таква што $\measuredangle BNP=\measuredangle ACP$ (види цртеж). Од триаголниците PBK и PAL добиваме

$$\overline{PK}=\overline{PB}\cdot\sin\measuredangle PBK \text{ и } \overline{PL}=\overline{PA}\cdot\sin\measuredangle PAL.$$

Ако ги поделиме последните две равенства и земеме предвид дека $\measuredangle PAL=\measuredangle PBK$ (како перифериски агли над лакот PC) добиваме

$$\frac{\overline{PK}}{\overline{PL}}=\frac{\overline{PB}\cdot\sin\measuredangle PBK}{\overline{PA}\cdot\sin\measuredangle PAL}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}. \qquad (1)$$



Понатаму, $\measuredangle PBN=\measuredangle PBC$ и $\measuredangle BNP=\measuredangle ACP$, па затоа важи $\triangle PBN\sim\triangle PAC$, што значи

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{AC}}. \qquad (2)$$

Сега, од триаголниците PAM и PCK следува

$$\overline{PM}=\overline{PA}\cdot\sin\measuredangle PAM \text{ и}$$

$$\overline{PK}=\overline{PC}\cdot\sin\measuredangle PCK,$$

па ако земеме предвид дека

$$\measuredangle PAM=\measuredangle PAB=\measuredangle PCB=\measuredangle PCK,$$

како периферириски агли над лакот BP, добиваме

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PK}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}. \qquad (3)$$

Четириаголникот $PCAB$ е тетивен, па затоа $\measuredangle ACP+\measuredangle PBA=180^\circ$ и освен тоа важи $\measuredangle BNP+\measuredangle PNC=180^\circ$. Бидејќи точката N ја определивме така што важи $\measuredangle BNP=\measuredangle ACP$, а од последните две равенства имаме:

$$\measuredangle ACP=180^\circ-\measuredangle PBA \text{ и } \measuredangle BNP=180^\circ-\measuredangle PNC,$$

добиваме дека $\measuredangle PBA=\measuredangle PNC$. Но, $\measuredangle PAB=\measuredangle PCN$, па затоа $\triangle PCN\sim\triangle PAB$, што значи дека

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}. \qquad (4)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\frac{\overline{PK}}{\overline{PL}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{AC}}$, т.е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{PL}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{PK}}$, а од (3) и (4) добиваме дека $\frac{\overline{PM}}{\overline{PK}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CN}}$, т.е. $\frac{\overline{CN}}{\overline{PK}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}$. Според тоа,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PL}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{PK}}+\frac{\overline{CN}}{\overline{PK}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{PK}}.$$

На потполно аналоген начин се докажува дека

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PK}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PL}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} \text{ и } \frac{\overline{BC}}{\overline{PK}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{PL}}. \blacksquare$$

Втор начин. Да ги воведеме ознаките

$$\overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{CA}=b,\overline{PK}=d_1,\overline{PL}=d_2 \text{ и } \overline{PM}=d_3,$$

(види цртеж) и че докажеме дека $\frac{c}{d_3}+\frac{b}{d_2}=\frac{a}{d_1}$ ($\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}=\frac{c}{d_3}$ и $\frac{a}{d_1}+\frac{c}{d_3}=\frac{b}{d_2}$).

Точката P ја поврзуваме со точките A и B и за плоштината на триаголникот

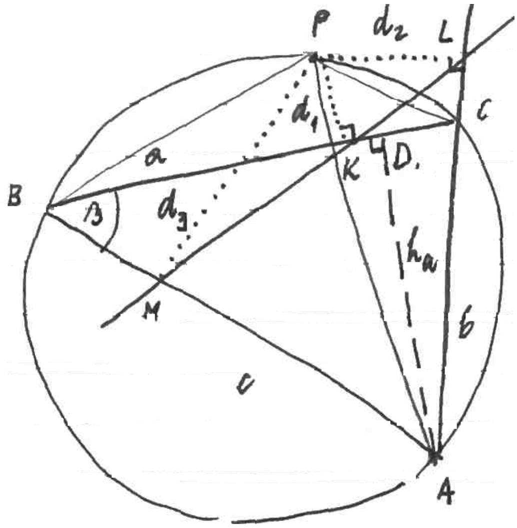
ABP добиваме $P_{ABP} = \frac{cd_3}{2}$ и $P_{ABP} = \frac{\overline{PA} \cdot c \cdot \overline{PB}}{4R}$, од каде следува

$$d_3 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{2R}. \qquad (1)$$

Аналогно добиваме

$$d_1 = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}{2R},\ d_2 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PC}}{2R}. \qquad (2)$$

Четириаголникот $PCAB$ е тетивен, па од теоремата на Птоломеј (Клавдиј Птоломеј, околу 100-178 година, Александриски математичар), следува



$$c \cdot \overline{PC} + b \cdot \overline{PB} = a \cdot \overline{PA}$$

$$\frac{2Rc \cdot \overline{PC}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}} + \frac{2Rb \cdot \overline{PB}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}} = \frac{2Ra \cdot \overline{PA}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}}$$

$$c\frac{2R}{\overline{PA} \cdot \overline{PB}} + b\frac{2R}{\overline{PA} \cdot \overline{PC}} = a\frac{2R}{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}$$

$$\frac{c}{d_3} + \frac{b}{d_2} = \frac{a}{d_1}. \ \blacksquare$$

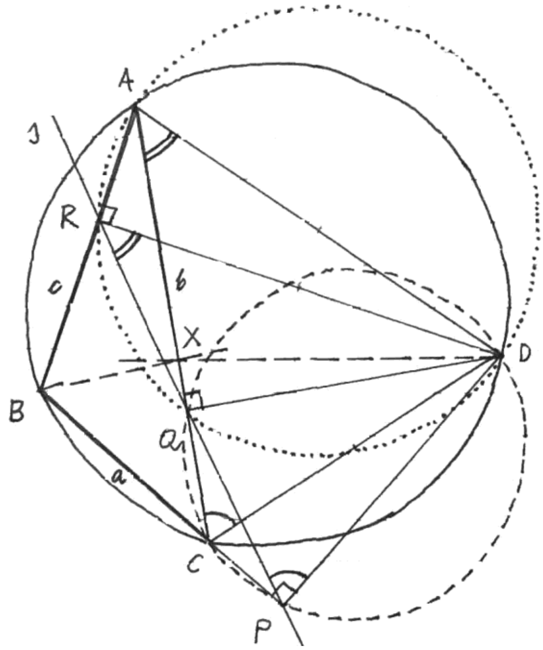
Трет начин. Нека $\overline{AD} = h_a$ е висина и $\measuredangle ABC = \beta$ во триаголникот ABC (цртеж горе). Во правоаголниот триаголник ABD важи $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$, а од синусната теорема применета на триаголникот ABC имаме $\sin\beta = \frac{b}{2R}$. Според тоа, $\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R}$, па затоа

$$h_a = \frac{bc}{2R} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2R}. \qquad (3)$$

Ревнството (3) всушност покажува дека: Висината повлечена од едно теме на триаголникот е еднаква на количникот на должините на страните кои го содржат тоа теме и дијаметарот на опишаната кружница околу тој триаголник. Оттука непосредно следуваат равенствата $d_1 = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}{2R}$, $d_2 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PC}}{2R}$ и $d_3 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{2R}$. Сега решението на задачата е аналогно како при вториот начин. ■

Задача 2. Нека точката D припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека подножните точки на нормалите повлечени кон правите a,b,c на кои лежат страните BC, CA, AB на триаголникот се P,Q,R, соодветно. Докажи дека $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ако и само ако симетралите на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ се сечат во точка X на страната AC на триаголникот ABC.

Решение. Нека претпоставиме дека $D \in AC$, кој не ја содржи точката B.



Точките P, Q, R припаѓаат на Симсоновата права на триаголникот ABC. Од $\measuredangle P = \measuredangle Q = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $DPCQ$ е тетивен. Така $\measuredangle DCQ = \measuredangle DPQ$, како периферски агли над лакот QD, односно $\measuredangle DCA = \measuredangle DPR$ (цртеж десно). Освен тоа и четириаголникот $DQRA$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle DQA = \measuredangle DAC = \measuredangle DRQ = \measuredangle DRP.$$

Значи, $\triangle DCA \sim \triangle DPR$, од каде следува дека $\frac{\overline{DA}}{\overline{DR}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DP}}$, т.е.

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DR}}{\overline{DP}}. \qquad (1)$$

Слично се докажува дека $\triangle DAB \sim \triangle DPQ$ и $\triangle DBC \sim \triangle DRQ$ и од овие сличности следува $\frac{\overline{DB}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QP}}$ и $\frac{\overline{DB}}{\overline{DR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{RQ}}$, па затоа важи

$$\overline{DP} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{QP}}{\overline{AB}}, \qquad (2)$$

$$\overline{DR} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{RQ}}{\overline{BC}}. \qquad (3)$$

Сега, од (1), (2) и (3) следува

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DR}}{\overline{DP}} = \frac{\frac{\overline{DB} \cdot \overline{RQ}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{DB} \cdot \overline{QP}}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{QP}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}. \qquad (4)$$

Од (4) следува дека $\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ кога $\frac{\overline{RQ}}{\overline{QP}} = 1$, т.е. кога $\overline{RQ} = \overline{QP}$. Конечно, симетралата на аголот $\measuredangle ABC$ ја дели страната AC во однос $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, а симетралата на аголот $\measuredangle ACD$ ја дели страната AC во однос $\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$ и оттука следува тврдењето на задачата. ■

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи јапланиметриски обратната теорема на теоремата за Симсоновата права.

2. За подножјата A_1, B_1, C_1 (на Симсоновата права s) на нормалите повлечени од точката P на опишаната кружница околу даден триаголник ABC важи
$$\overline{PA} \cdot \overline{PA_1} = \overline{PB} \cdot \overline{PB_1} = \overline{PC} \cdot \overline{PC_1} = 2Rd$$
каде R е радиусот на опишаната кружница, а d е растојанието на очката P до Симсонавата права s во однос на триаголникот ABC. Докажи!

3. Нека правите p_1, p_2, p_3 се сечат во три различни точки. Во просторот определи го геометриското место на точки P такви што подножјата на нормалите повлечени од точката P на правите p_1, p_2, p_3 се колинеарни. (Теорема на Емил Лемоане, 1840-1912, француски математичар.)

Литература

1. Џајкоска, Л. (2019). Теорема за Симсонова права и нејзина примена, Армаганга, Скопје