I олимпијада

1. Докажи дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати ниту за еден природен број n.

Решение. *Прв начин.* Од $3\cdot(14n+3)-2\cdot(21n+4)=1$, следува дека броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, дадената дропка не може да се скрати за еден природен број n.

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(21n+4,14n+3)&=\mathrm{NZD}(7n+1,14n+3)=\mathrm{NZD}(7n+1,7n+2)\\&=\mathrm{NZD}(7n+1,1)=1,\end{aligned}$$

т.е. броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, дадената дропка не може да се скрати за еден природен број n.

2. Во $\mathbb{R}$ реши ги равенките:

а) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

б) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

в) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$. Од $(x-1)^2\geq 0$, следува $x^2\geq 2x-1$, па затоа ако оваа функција е определена за $x\geq\frac{1}{2}$. Со нејзино квадрирање добиваме

$$y^2=2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2x+2\,|\,x-1\,|,\text{ т.е. } y=\sqrt{2}\sqrt{x+|\,x-1\,|}\,.$$

Според тоа,

$$y=\begin{cases}\sqrt{2}, & \frac{1}{2}\leq x\leq 1,\\ \sqrt{2}\sqrt{2x-1}, & x>1.\end{cases}$$

Последното значи дека разгледуваната функција монотоно не опаѓа и дека:

- решение на равенката под а) е секој реален број x таков што $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$,
- равенката под б) нема реални решенија, и
- равенката по в) е еквивалентна на равенката $\sqrt{2}\sqrt{2x-1}=2$, од каде добиваме $2x-1=2$, т.е. $x=\frac{3}{2}$.

3. Дадена е кваратна равенка по однос на $\cos x$:

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0\,,$$

каде $a,b,c,$ се реални броеви.

Со помош на $a,b,c,$ состави ја аналогната квадратна равенка за $\cos 2x$, а потоа спореди ги дадената и добиената равенка за $a=4, b=2, c=-1$.

Решение. Равенката

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

ја множиме со

$$4(a\cos^2 x-b\cos x+c)$$

и по средувањето на изразот од левата страна добиваме

$$4a^2\cos^4 x+2(4ac-2b^2)\cos^2 x+4c^2=0.$$

Ако го искористиме идентитетот $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, од последната равенка добиваме

$$a^2(1+\cos 2x)^2+(4ac-2b^2)(1+\cos 2x)+4c^2=0,$$

или

$$a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0. \quad (1)$$

За $a=4$, $b=2$, $c=-1$ од дадената равенка добиваме

$$4\cos^2 x+2\cos x-1=0$$

а од равенката (1) добиваме

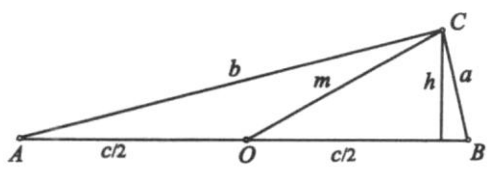
$$4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0.$$

4. Конструирај правоаголен триаголник со должина на хипотенузата c, ако се знае дека должината на тежишната линија повлечена кон хипотенузата е геометриска средина на должините на неговите катети.

Решение. *Прв начин.* Нека α е еден од острите агли во бараниот триаголник. Тогаш $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\frac{a}{c}\frac{b}{c}$, каде a и b се должини на катетите на бараниот триаголник. Должината на тежишната линија повлечена кон хипотенузата е половина од должината на хипотенузата, т.е. $m=\frac{c}{2}$, па од условот на задачата добиваме $\frac{c^2}{4}=ab$. Од претходните равенства следува $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$ и како α е остар агол имаме $\alpha=15^\circ$ или $\alpha=75^\circ$.

Значи, треба да конструираме триаголникот со страна c и налегнати агли на неа $\alpha=15^\circ$ и $\beta=75^\circ$. Задачата има единствено решение до складност.

Втор начин. Анализа. Според условот на задачата важи $m=\sqrt{ab}$, а како триаголникот е правоаголен важи $m=\frac{c}{2}$. Понатаму, за плоштината на



триаголникот имаме $P=\frac{ab}{2}$ и $P=\frac{ch}{2}$, па затоа

$$ab=m^2=(\frac{c}{2})^2 \text{ и } ab=ch,$$

од каде добиваме $ch=(\frac{c}{2})^2$, т.е. $h=\frac{c}{4}$.

Конструкција:

- конструираме отсечка $AB, \overline{AB}=c$ и ја определуваме нејзината средина O,
- конструираме права l паралелна на AB и на растојание $h=\frac{c}{4}$ од неа,
- конструираме кружница $k(O,\frac{c}{2})$ и во пресек со правата l го наоѓаме третото теме C, со што триаголникот ABC е конструиран.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

5. Во рамнина е дадена отсечка AB и произволна нејзина внатрешна точка M. Над отсечките AM и MB како над страни се конструирани квадрати $AMCD$ и $MBEF$ кои се наоѓаат на иста страна од правата AB. Кружниците опишани околу овие квадрати, со центри P и Q, се сечат во точки M и N, соодветно.

а) Докажи дека правите AF и BC се сечат во точката N.

б) Докажи дека правата MN минува низ една иста точка S, независно од изборот на точката M.

в) Најди го геометриското место на средините на отсечките PQ кога M се менува на отсечката AB.

Решение. Поставуваме координатен систем така што правата AB е $x-$оска, а правата AD е $y-$оска. Точката A има координати $(0,0)$ и нека точките B и M имаат координати $B(b,0)$ и $M(m,0)$.

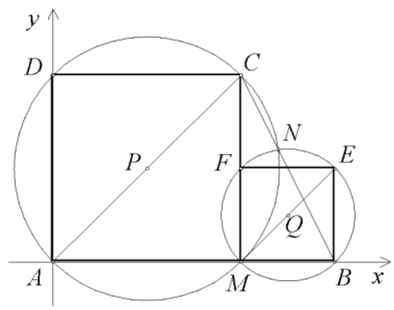
а) Точките F, C, P и Q имаат координати $F(m,b-m)$, $C(m,m)$, $P(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$ и $Q(\frac{b+m}{2},\frac{b-m}{2})$. Равенките на правите AF и BC се

$$AF: \quad y=\frac{b-m}{m}x \qquad \text{и} \qquad BC: \quad y=\frac{m}{m-b}(x-b).$$

Равенките на кружниците опишани околу квадратите $AMCD$ и $MBEF$ се

$$(x-\frac{m}{2})^2+(y-\frac{m}{2})^2=\frac{m^2}{2} \quad \text{и}$$

$$(x-\frac{b+m}{2})^2+(y-\frac{b-m}{2})^2=\frac{(b-m)^2}{2}.$$



Втората пресечна точка на овие кружници е точката

$$N(\frac{m^2b}{b^2-2mb+2m^2},\frac{mb(b-m)}{b^2-2mb+2m^2}).$$

Лесно се проверува дека оваа точка лежи на правите AF и BC.

б) Равенката на правата која минува низ точките M и N е

$$y=\frac{b}{2m-b}(x-m).$$

Ако точката M_1 има координати $(m_1,0)$ тогаш равенката на правата M_1N_1 е

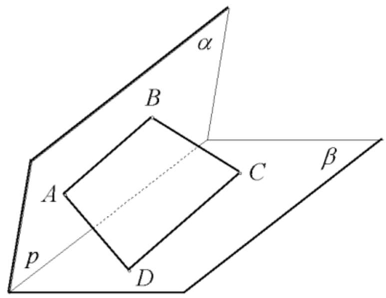
$$y=\frac{b}{2m_1-b}(x-m_1).$$

Правите MN и M_1N_1 се сечат во точката $S(\frac{b}{2},-\frac{b}{2})$. Координатите на S не зависат од m и m_1, па според тоа сите прави MN минуваат низ иста точка S.

в) Координатите на средината на отсечката PQ се $(\frac{b+2m}{4},\frac{b}{4})$ т.е. $x=\frac{b+2m}{4}$ и $y=\frac{b}{4}$. Бидејќи $0\le m\le b$, бараното геометриско место на точки е отсечка со крајни точки $(\frac{b}{4},\frac{b}{4})$ и $(\frac{3b}{4},\frac{b}{4})$.

6. Дадени се рамнини α и β кои се сечат во правата p и точки $A\in\alpha$, $C\in\beta$ такви што $A,C\notin p$. Конструирај рамнокрак трапез $ABCD$, ($AB\parallel CD$) во кој може да се впише кружница, така што $B\in\alpha$ и $D\in\beta$.

Решение. Нека $ABCD$ е бараниот трапез (цртеж десно). Тогаш, $AB\parallel CD\parallel p$ (ако рамнината $ABCD$ ја сече правата p во точка X, тогаш правите $AB=AX$ и $CD=CX$ нема да се паралелни). Значи, низ точките A и C треба да се конструираат прави паралелни со p и на нив да се најдат точки B и D, така што добиениот четириаголник да ги задоволува условите на задачата. Бидејќи трапезот $ABCD$ е тангентен добиваме



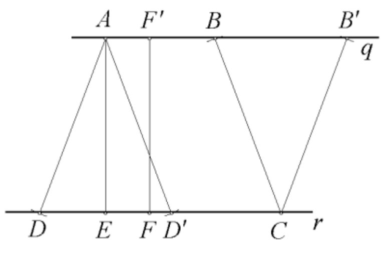
$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}=2\overline{AD}\text{, т.е. } \overline{CD}=2\overline{AD}-\overline{AB}.$$

Ако F' е средина на страната AB, $FF'\perp r$ и E е ортогоналната проекција на A врз CD, тогаш $\overline{AF'}=\overline{EF}$, па според тоа

$$\overline{AB}=2\overline{AF'}=2\overline{EF} \text{ и } \overline{CD}=2\overline{CE}-\overline{AB}.$$

Значи, $\overline{AD}=\overline{CE}$, од што следува дека точката D лежи на кружница со радиус CE и центар во A. Задачата има решение ако и само ако

$$\overline{AD}=\overline{CE}\ge\overline{FF'}.$$



Конструкцијата непосредно следува од претходните разгледувања (цртеж десно).