ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

# ГЕОМЕТРИЈА

## ЗА VI ОДДЕЛЕНИЕ

V ИЗДАНИЕ

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 1980

Рецензенти:

*Магдалена Пасху,* професор во ПА — Скопје

*Милка Стојанова-Стрезовска* наставник во основно училиште

*Душко Ачовски,* наставник во основно училиште

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 03-43/1 од 31. III 1976 година се одобрува употребата на овој учебник. .

Глава I

# ОСНОВНИ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

## § 1. ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ ГЕОМЕТРИСКИ ПОИМИ. ДЕФИНИЦИЈА

Во математиката под зборот **реченица** ќе подразбираме исто што и во граматиката: јазичен израз (множество од зборови) со кои се изразува некоја самостојна мисла. Нивниот карактер може да биде различен. Со едни се објаснува и се утврдува смислата на нешто, со други се тврди или одрекува нешто, итн.

Математиката (во чиј склоп е и геометријата) работи со редица **поими**, што се изразуваат со разни „стручни термини“ или „изрази“.

Реченицата, со која се разјаснува смислата и се утврдува содржината на даден поим, се вика *дефиниција*.

Минатата година ние работевме со низа геометриски поими, на пример: кружница, круг, агол, многуаголник, итн. Да се потсетиме како ги определивме поимите кружница и круг. Тоа го сторивме со следниве дефиниции:

*Дефиниција* 1. **Кружница е множество на сите точки во рамнината, што се наоѓаат на дадено растојание $r$ од една постојана точка $O$, што ѝ припаѓа на таа рамнина.**

*Дефиниција 2.* **Круг е множество на сите точки во рамнината, чие растојание од една постојана точка во таа рамнина не е поголемо од $r$.**

Гледаме дека при определувањето на поимите кружница и круг ние користиме други поими: множество, точка, рамнина, растојание, припаѓа на. Истото се случува и при дефинирањето на другите поими во геометријата. Според тоа:

Дефинирањето на даден поим се состои во тоа, што тој се објаснува со помош на други „веќе познати“ поими. Но, тие „веќе познати“ поими исто така, порано сме ги дефинирале со помош на некои други уште од порано предходно познати поими, итн.

Очигледно е дека тој синџир (на определување на еден поим со помош на друг) неминовно ќе се прекине кога ќе дојдеме до некој поим којшто не може да се објасни, бидејќи „веќе познати“ поедноставни поими нема. Таквите поими присилени сме да ги прифатиме без дефиниција, и да ги објаснуваме единствено преку наведување на низа примери од секојдневниот живот.

Поимите, што ги прифаќаме без дефиниција, се викаат *йојдовни* или *основни йоими;* а сите други поими — *изведени* или *дефинирани йоими.*

Во геометријата за основни поими се земаат поимите: *йочка, йрава* и *рамнина.*

При дефинирањето на геометриските поими ќе користиме и некои општи математички поими. Такви се на пример, поимите: *множесйво, йодмножесйво, йрийаѓа на, йресек, унија, разлика* и др.

Поимот „*множесйво*“ е основен поим на целата математика.

При дефинирањето на изведените поими нужно е да настојуваме дефинициите да бидат кратки, јасни и точни.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Кои поими ги користиме во дефиницијата за: кружница и круг?

**2.** Потсетете се од минатата година како ги дефиниравме поимите: а) агол; б) напоредни агли; в) вкрстени агли. Кои поими ги користевме во секоја од тие дефиниции?

**3.** Формулирајте ги дефинициите за: а) радиус; б) тетива; в) дијаметар на кружницата!

**4.** Што се тоа основни (појдовни) поими, а што — изведени (дефинирани) поими?

**5.** Кои поими во геометријата се земаат за појдовни (основни)?

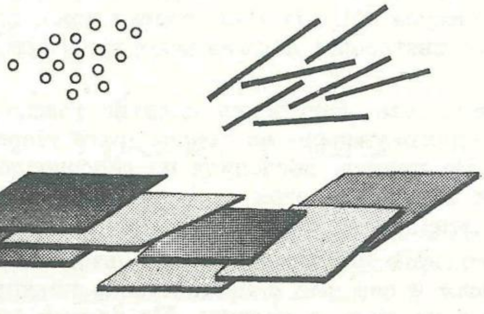
**6.** На прашањето: „Што е аглов степен?“ Никола одговорил: „Аглов степен е 90-ти дел од правиот агол“. А на прашањето: „Што е прав агол?“, тој одговорил: „Прав агол е агол, кој содржи 90 аглови степени“. Наставникот останал незадоволен од дадената дефиниција за прав агол. Зошто? Со дадените дефиниции на поимите за аглов степен и агол велиме „Никола се врти во круг“.

**7.** На прашањето: „Што е квадрат?“ Кирил одговорил: „Квадрат е ромб со прави агли“. При каков одговор на прашањето: Што е ромб? ќе се добие „вртење во круг“?

**8.** Наведете други примери, при кои се добива „вртење во круг“!

## § 2. АКСИОМИ И ТЕОРЕМИ. ДОКАЗ

Точките, правите и рамнините во почетокот на нивното разгледување можеме да ги замислуваме како некои објекти (предмети) и тоа: точките како мали топченца, правите како долги тенки жички, а рамнините како плочки со мала дебелина (црт. 1).



**Црт. 1**

Во почетокот, за нас тие се само објекти, кои засега немаат одредена *содржина* и не се сврзани еден со друг во некои *релации*.

Меѓутоа, геометриските објекти (точка, права, рамнина и др.), како што ќе видиме, се карактеризираат со редица *својства* преку кои се осмислува нивната содржина, а, исто така, тие се наоѓаат и во одредени релации (соодноси).

По однос на многубројните својства на одделните објекти, како и за нивните соодноси; често искажуваме одредени *тврдења* формулирани со соодветни реченици. Во геометријата (како и во секоја наука) она што се тврди треба и да се докаже. Секое тврдење во геометријата, дури откако ќе се докаже, станува призната геометриска вистина.

Образложението, со кое се уверуваме во вистинитоста на некое тврдење по пат на аргументирано логичко расудување, се вика *доказ*.

При докажувањето на кое и да било тврдење можеме да се повикуваме само на порано докажани вистини. Но, тие „порано докажани вистини" сме биле должни да ги докажеме со помош на некои други уште порано докажани висини, итн.

Веднаш станува јасно (слично како и при дефинирањето на поимите) дека неминовно ќе дојдеме до некои појдовни тврдења, кои не можат да се докажат со помош на некои други порано докажани вистини; бидејќи такви нема. Таквите тврдења, кои не можат да се докажат со помош на поелементарни, а за да би имале некоја основа на која би можеле да градиме (да ги докажуваме другите тврдења), присилени сме да ги прифатиме без доказ.

Тврдењата, што ги прифаќаме како вистинити без доказ, се викаат *појдовни тврдења* или *аксиоми*; а сите други тврдења — *изведени тврдења* или *теореми*.

Формулацијата на секоја теорема, обично, се состои од два дела: прв дел — *услов* (*претпоставка* или *хипотеза*) и втор дел — *заклучок* (*тврдење* или *теза*). Во првиот дел се зборува за она што е дадено (или се претпоставува), а во вториот дел се зборува за она што во теоремата се тврди и треба да се докаже.

На пример, во теоремата: „Во секој триаголник збирот на внатрешните агли ($\alpha$, $\beta$ и $\gamma$) изнесува $180°$", претпоставка е: аглите $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ да се внатрешни агли на еден ист (кој и да било) триаголник; а тврдење е: нивниот збир изнесува $180°$. Истата теорема може да се формулира и вика: „Ако $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ се внатрешни агли на некој триаголник, тогаш $\alpha+\beta+\gamma=180°$".

Теорема, која што непосредно следува (лесно се увидува нејзината вистинитост) по докажувањето на некоја друга теорема, се вика *последица* на таа теорема. На пример, последица на горенаведената теорема е теоремата: „Ако еден внатрешен агол во триаголникот е прав или тап, тогаш другите два негови агли се остри".

Теорема во која претпставка е она што е тврдење во некоја друга теорема, а тврдење е она што е претпоставка во другата теорема, се вика *обратна теорема* на другата теорема. На пример, за теоремата „Ако $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ се внатрешни агли на некој триаголник, тогаш $\alpha+\beta+\gamma=180°$"; нејзина обратна теорема ќе биде: „Ако $\alpha+\beta+\gamma=180°$, тогаш $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ се внатрешни агли на некој триаголник". Во овој случај и дадената и нејзината обратна теорема се точни; но секогаш тоа не е така. Често се случува обратната теорема да не е точна.

Истакнавме дека вистинитоста на теоремите ја установуваме со доказ. Доказот може да биде: *директен* и *индиректен* (или *доказ од спротивното*). Кај директниот доказ поаѓаме од претпоставката и со примена на некои познати (порано докажани) теореми и аксиоми доаѓаме до вистинитоста на тврдењето. А кај индиректниот доказ, или доказ од спротивното, претпоставуваме дека тезата е неточна, односно дека е точно спротивното од она што го тврди теоремата. Ако по пат на логичко расудување дојдеме до некоја противречност со претпоставката на теоремата, или со некоја аксиома или порано докажана теорема, тогаш од тоа заклучуваме дека: штом спротивното од она што го тврди теоремата е неточно, останува дека е точно тврдењето на теоремата.

И двата вида докази ќе ги илустрираме на повеќе примери до кои ќе наидеме во натамошното разгледување на темите.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е геометриски доказ?

**2.** Што е аксиома, а што теорема?

**3.** Од кои два дела се состои формулацијата на секоја теорема?

**4.** Теоремата: „Спроти две складни страни во триаголникот лежат складни агли", искажи ја во форма: „Ако . . . , тогаш . . . .". Потоа покажи во неа што е претпоставка (услов), а што тврдење (заклучок)!

**5.** За теоремата: „Ако во еден триаголник аглите се складни, тогаш тој триаголник е рамностран“, формулирај ја нејзината обратна теорема!

**6.** За секоја од следниве теореми формулирај ја обратната теорема: а) Ако еден од аглите на триаголникот е прав, тогаш другите два негови агла се остри.; б) Ако бројот е делив со 6, тогаш тој е делив со 3.; в) Ако две отсечки имаат еднакви должини, тогаш тие се складни.; г) Ако два агла се прави, тогаш тие се складни.

**7.** Кој доказ го викаме директен, а кој индиректен?

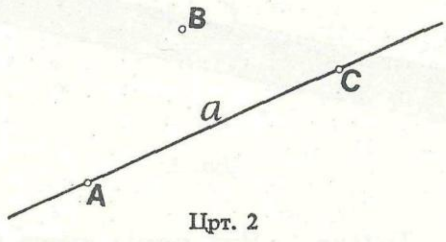
## § 3. ТОЧКА И ПРАВА

Точката и правата се првите поими со кои почнуваме да ја изучуваме геометријата. На цртежот точките ги обележуваме (цртаме) со мали кружчиња, а ги означуваме со големите печатни букви од латинската азбука: $A, B, C, \ldots$ Различните точки, обично, ги означуваме со различни букви. Но, ако со буквите $A$ и $B$ означиме една иста точка, тогаш пишуваме $A \equiv B$ и велиме дека „точките $A$ и $B$ *се совпаѓаат*“.

Просторот, што нè опкружува, го замислуваме како едно универзално бесконечно множество од точки; а за одделните точки велиме дека се елементи на тоа множество.

Правите ги замислуваме како некои множества од точки, што се подмножества, пак, од множеството точки — просторот. Нив ги означуваме со малите ракописни латински букви $a, b, c, \ldots$

Погледајте го цртежот 2. На него гледате точки $A$, $B$, $C$ и права $a$. За точките $A$ и $C$ велиме дека *лежат* на правата $a$, а за точката $B$ дека *не лежи* на правата $a$. Може да се каже уште и дека: правата $a$ *минува низ* точките $A$ и $C$, а *не минува* низ точката $B$.



Црт. 2

Јазикот на множествата е многу погоден и користен и во геометријата. На тој јазик горниве реченици ги искажуваме вака: Точките $A$ и $C$ *ѝ припаѓаат* на правата $a$, а точката $B$ *не ѝ припаѓа* на правата $a$. Тоа кратко, симболички го запишуваме вака: $A \in a$, $C \in a$, $B \notin a$.

Поимот права не го дефинираме. Него го осмислуваме со следниве тврдења што ги земаме за појдовни (основни), т. е. со аксиомите:

**Аксиома 1.** *Правата е множество од бесконечно многу точки, а за секоја права постојат точки што не ѝ припаѓаат.*

*За секоја точка постојат прави што минуваат низ неа, и прави што не минуваат низ неа.*

**Аксиома 2. (Аксиома на правата):** *Низ кои било две различни шочки минува една, и шоа само една ӣрава.*

Аксиомата 2 утврдува дека секогаш постои (егзистира) права која минува низ кои било две различни точки и дека таа права е и единствена. Од неа следува дека:

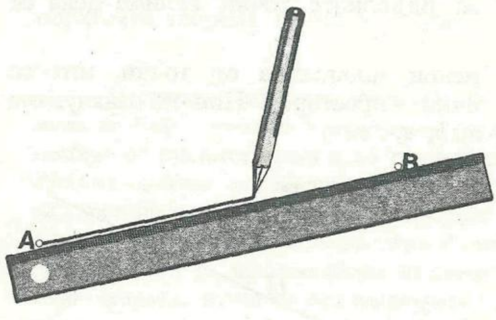
**Правата е еднозначно определена со две различни точки.**

Навистина, две различни точки ѝ припаѓаат само на *една единсшвена* права. Поимот „*еднозначно оӣределена*" значи исто што и поимот „една единствена".

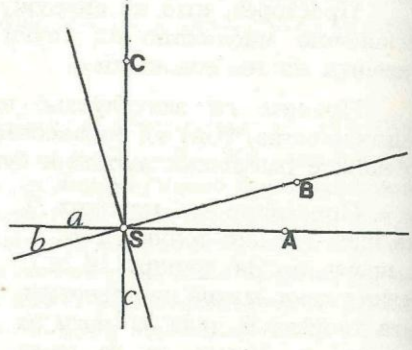
Правата може да се означува и со две точки што лежат на неа. На пример, правата $a$ на црт. 2 може да се означи и со $AC$.

Правите ги цртаме со помош на **линир.** На цртеж 3 гледате како се црта права што минува низ точките $A$ и $B$.

Врз основа на аксимите 1 и 2 ќе покажеме како ги докажуваме следниве две тврдења — теореми:




Црт. 3




Црт. 4

*Теорема* 1. **Низ секоја точка минуваат бесконечно многу прави.**

*Доказ*: Нека се дадени две различни точки $S$ и $A$. Согласно аксиомата 2 тие определуваат некоја единствена права $a$ (црт. 4). А согласно аксиомата 1 постои некоја точка $B$ што не ѝ припаѓа на правата $a$. Но, точките $S$ и $B$, исто така определуваат некоја друга права $b$, која минува низ точката $S$. На сличен начин може да се најде и некоја точка $C$, низ која не минува ниту правата $a$, ниту правата $b$. Очигледно е дека точките $S$ и $C$ определуваат некоја трета права $c$, различна од $a$ и $b$, а која минува, исто така низ точката $S$, итн.

*Теорема 2*. **Две различни прави не можат да имаат повеќе од една заедничка точка.**

*Доказ*: Ако допуштиме дека две различни прави $a$ и $b$ имаат две заеднички точки $M$ и $N$, тогаш тие две точки ќе им припаѓаат на две различни прави, а тоа е во контрадикција со аксиомата 2.

Според тоа, правите $a$ и $b$ не можат да имаат повеќе од една заедничка точка, т. е. тие или немаат заедничка точка, или имаат само една заедничка точка.

*Дефиниција*: **Ако две прави $k$ и $p$ имаат само една заедничка точка $S$, т. е. ако $k \cap p = \{S\}$, тогаш велиме дека тие се сечат во точката $S$.**

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Кои точки на црт. 4 ѝ припаѓаат на правата $a$, а кои не ѝ припаѓаат на правата $a$? Кои точки ѝ припаѓаат на правата $b$, а кои не ѝ припаѓаат на правата $b$? Запиши го тоа симболички!

**2.** Покажи како цртаме права, што минува низ две дадени точки со помош на линир!

**3.** Што утврдува аксиома 1, а што аксиома 2?

**4.** Колку линии можат да се повлечат низ две дадени точки $A$ и $B$? Колку прави минуваат низ тие две точки? Направете цртеж!

**5.** Со што правата е еднозначно определена?

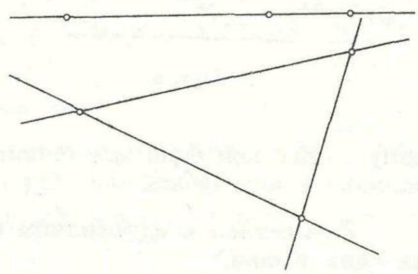
**6.** Колку прави определуваат три дадени точки, што не лежат на иста права? Од каде следува вашиот заклучок?

**7.** Зошто две различни прави не можат да имаат повеќе од една заедничка точка?

**8.** Дефинирај го поимот: две прави се сечат во точката $A$!

**9.** На црт. 5 покажано е дека три точки можат да определуваат една или три прави. Покажи дека четири точки можат да определуваат една, четири или шест прави!

**10.** Колку прави минуваат низ една дадена точка? Од каде следува тврдењето?



Црт. 5

## § 4. ТОЧКА И РАМНИНА

Основниот поим рамнина не го дефинираме. Него го осмислуваме со следниве тврдења — аксиоми:

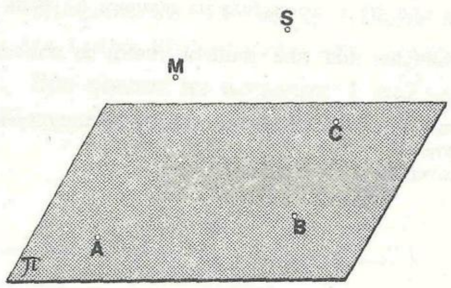
**Аксиома 3.** *Рамнината е множество од бесконечно многу точки, а за секоја рамнина постојат точки што не ѝ припаѓаат.*

*На секоја рамнина лежат барем три точки што не ѝ припаѓаат на исти права.*

**Аксиома 4. (Аксиома на рамнината):** *Низ кои било три точки што не лежат на една права, минува една, и тоа само една рамнина.*

Забележуваме дека со аксиомите 1 и 3 и правата и рамнината ги замислуваме како бесконечни множества од точки. Меѓутоа тие се различни множества од точки (т. е. различни фигури). На пример: Ако се дадени три различни точки $A$, $B$, $C$; тогаш, според аксиомата 2, не мора да постои права што ќе минува низ сите три точки; но, според аксиомата 4, секогаш постои рамнина која минува низ тие точки.

Рамнините ги означуваме со грчките букви: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . . , $\pi$,. На цртеж може да се претстави само дел од рамнината, а тој дел, обично, го цртаме во форма на паралелограм (црт. 6).

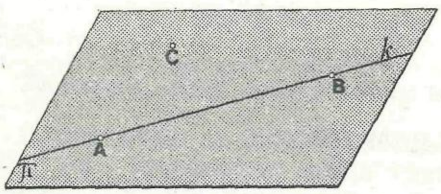



Црт. 6

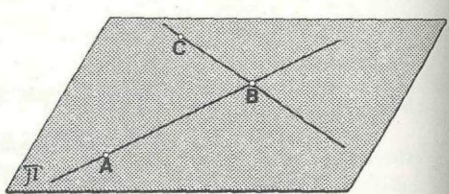
Ако $A$, $B$, $C$, $M$, $S$ се точки, тогаш тие можат да ѝ припаѓаат на рамнината $\pi$ ($A$, $B$, $C \in \pi$) или да не ѝ припаѓаат ($M$, $S \notin \pi$) (црт. 6). Ако $A \in \pi$, тогаш уште велиме дека точката $A$ *лежи на* рамнината $\pi$, или рамнината $\pi$ *минува низ* точката $A$. Ако, пак, $M \notin \pi$, тогаш велиме дека точката $M$ *не лежи на* рамнината $\pi$, или точката $M$ *е надвор од* рамнината $\pi$.

Аксиомата 4 утврдува дека секогаш постои рамнина, која минува низ кои било три точки, што не лежат на една права и дека таа рамнина е *една единствена*.. Од неа следува дека:

**Рамнината е еднозначно определена со три точки што не лежат на една права.**



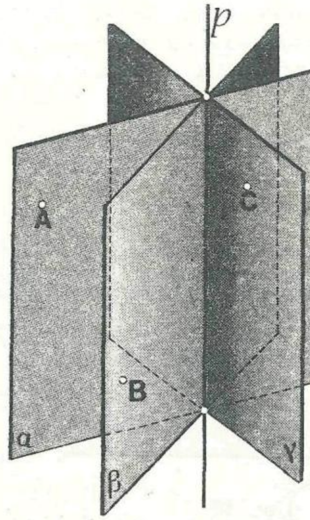

Црт. 7




Црт. 8

Бидејќи кои било три точки $A$, $B$, $C$, што не лежат на една права, секогаш можат да се заменат со една права $AB$ и точка $C \notin AB$ (црт. 7), или со две прави $AB$ и $BC$ кои се сечат (црт. 8); тоа станува јасно дека по однос на еднозначната определеност на рамнината ќе важи следнава:

*Теорема*: **Рамнината е еднозначно определена уште и: а) со една права $k$ и една точка $C$, што не ѝ припаѓа на правата $k$, или б) со две прави кои се сечат.**




Црт. 9

Од горнава теорема (случај а) следува следнава:

*Последица*: **Низ која било права $p$ минуваат (можат да се постават) бесконечно многу различни рамнини** (црт. 9).

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што утврдува аксиомата 3, а што аксиомата 4?

**2.** Од каде следува дека рамнината е еднозначно определена со три точки, што не лежат на една права?

**3.** Триножното столче може ли да се лула кога се седи на него?, а четириножното столче? Објасни зошто?

**4.** Од каде заклучуваме дека правата $p$ и рамнината $\pi$ се различни множества точки?

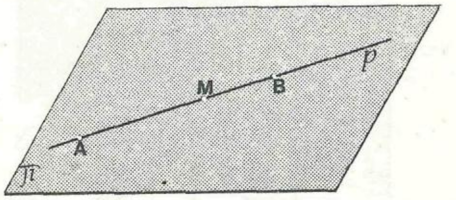
**5.** Од каде заклучуваме дека: а) една права; б) една рамнина е вистинско подмножество од множеството точки во просторот?

**6.** Колку рамнини минуваат низ: а) една права и една точка која не лежи на правата; б) две прави што се сечат?

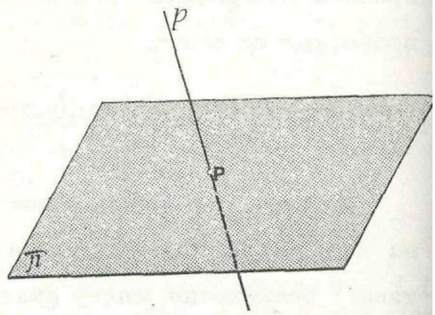
## § 5. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И РАМНИНА

Нека се дадени некоја рамнина $\pi$ и права $p$ која минува низ точките $A$ и $B$. Ако точките $A$ и $B$ ѝ припаѓаат и на рамнината $\pi$, и ако $M$ е произволна точка од пратата $p$, тогаш само врз основа на аксиомите 3 и 4 не можеме да заклучиме дали точката $M$ ѝ припаѓа на намнината $\pi$, или не (црт. 10). Затоа ја воведуваме и следната:

**Аксиома 5. (Аксиома за права и рамнина):** *Ако две различни точки $A$ и $B$ од правата $p$ ѝ припаѓаат на рамнината $\pi$, тогаш и секоја точка $M$ од правата $p$ ѝ припаѓа на рамнината $\pi$* (црт. 10).




Црт. 10



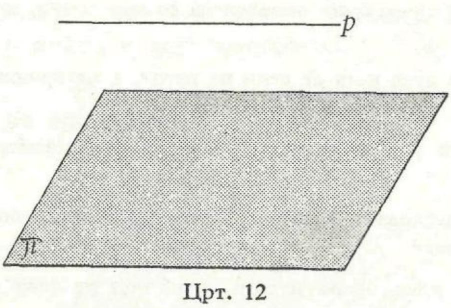

Црт. 11

**Од аксиомата 5 следува: Дадена права $p$ и дадена рамнина $\pi$, може**

**— или секоја точка од правата $p$ да ѝ припаѓа на рамнината $\pi$,**

**— или да имаат само една заедничка точка (црт. 11),**

**— или да немаат ниту една заедничка точка (црт. 12).**




Црт. 12

Во првиот случај очигледно е дека правата $p$ е подмножество (и тоа вистинско подмножество) од рамнината $\pi$, т. е. $p \cap \pi = p$ и пишуваме $p \subset \pi$. Затоа велиме дека правата $p$ **ѝ припаѓа (лежи)** на рамнината $\pi$, или дека рамнината $\pi$ **минува низ** правата $p$.

*Дефиниција 1.* **Ако правата $p$ и рамнината $\pi$ имаат само една заедничка точка $P$, т. е. ако $p \cap \pi = \{P\}$, тогаш велиме дека правата $p$ ја прободува рамнината $\pi$ во точката $P$** (црт. 11).

Заедничката точка $P$ се вика **пробод на** правата $p$ во рамнината $\pi$.

*Дефиниција 2.* **Ако правата $p$ и рамнината $\pi$ немаат заедничка точка ($p \cap \pi = \varnothing$) или правата $p$ лежи на рамнината $\pi$ ($p \cap \pi = p$), тогаш велиме дека тие се паралелни и пишуваме $p \| \pi$,** т. е.

$$p \| \pi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (p \cap \pi = \varnothing \text{ или } p \cap \pi = p)$$

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што означува исказот: Правата $a$ лежи на рамнината $\pi$! Како тоа го запишуваме?

**2.** Што означува исказот: Правата $a$ ја прободува рамнината $\pi$ во точката $S$! Како тоа го запишуваме?

**3.** Што може да се тврди за точките $A$, $B$, $C$, ако $A, B, C \in p$ и $p \subset \pi$?

**4.** Може ли права и рамнина да имаат: а) само една; б) само две заеднички точки?

**5.** Кои услови треба да ги исполнуваат правата $k$ и рамнината $\pi$, за тие да бидат паралелни? Запиши го тоа симболички!

**6.** Нека правата $k$ лежи на рамнината $\pi$. Како заклучиваме дека правата $k$ е вистинско подмножество од множеството точки на рамнината $\pi$?

## § 6. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ ПРАВИ

Нека $A$, $B$, $C$ се три точки што не лежат на една права. Според аксиомата 4, низ нив минува некоја рамнина $\pi$. А според аксиомата 5 правите $AB$ и $BC$ лежат на рамнината $\pi$. (црт. 8). Според тоа:

**Постојат прави кои лежат на една иста рамнина.**

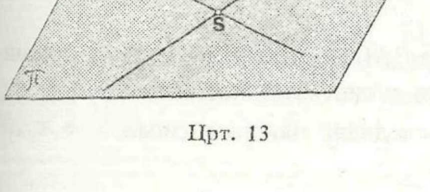
Да видиме каква заемна положба можат да имаат две прави $k$ и $p$, кои лежат во една рамнина $\pi$. За нив постојат три можности. Тие можат:

— или да имаат барем две заеднички точки $A$ и $B$,

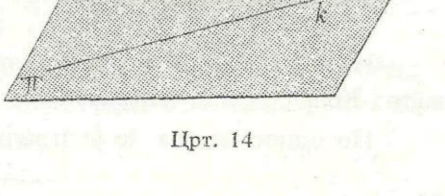
— или да имаат само една заедничка точка $S$, т. е. $k \cap p = \{S\}$,

— или да немаат ниту една заедничка точка, т. е. $k \cap p = \varnothing$.

Во првиот случај ако правите $k$ и $p$ имаат две заеднички $A$ и $B$, тогаш, согласно аксиомата 2, низ точките $A$ и $B$ минува една и само една права. Значи, правите $k$ и $p$, како множества точки, се еднакви, т. е. $k = p$. Во тој случај велиме дека правите *се совпаѓаат*.




Црт. 13




Црт. 14

Ако две прави $k$ и $p$ имаат само една заедничка точка ($S$), тогаш за правите $k$ и $p$ велиме дека *се сечат* во точката $S$ (црт. 13). Знаете дека: две прави што се сечат определуваат една и само една рамнина.

*Дефиниција 1.* **Ако правите $\kappa$ и $p$ лежат во иста рамнина $\pi$ и ако тие немаат ниту една заедничка точка или се совпаѓаат, тогаш за нив велиме дека се паралелни и пишуваме $\kappa \| p$** (црт. 14).

Тоа се заемните положби на две прави што лежат во една рамнина. Но, дали постојат прави што не можат да лежат на една иста рамнина? Одговор на тоа прашање ни дава следнава:

*Теорема 1.* **Постојат прави што не можат да лежат на една иста рамнина.**

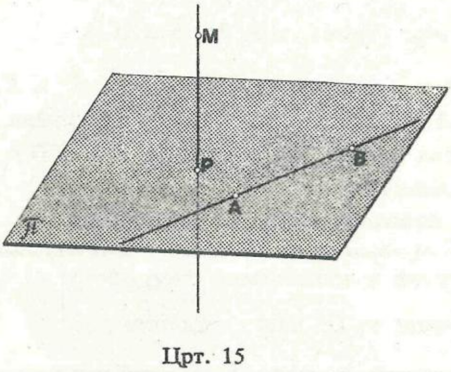
*Доказ*: Според аксиомата 3, за секоја рамнина постојат точки што не ѝ припаѓаат. На пример, нека $A$, $B$, $P \in \pi$ и не лежат на една права, а точката $M \notin \pi$ (црт. 15). Правите $AB$ и $PM$ не лежат на една иста рамнина, бидејќи ако тие би можеле да лежат на една иста рамнина, тогаш и точките $A$, $B$, $P$ и $M$ би лежеле на таа рамнина; а тоа противречи на претпоставката.

Од цртежот 15 гледате: правата $AB$ лежи во рамнината $\pi$, а правата $MP$ ја прободува рамнината $\pi$ во точката $P$. Очигледно е дека правите $AB$ и $MP$ не лежат во една рамнина и немаат заеднички точки, т.е. $AB \cap MP = \varnothing$.

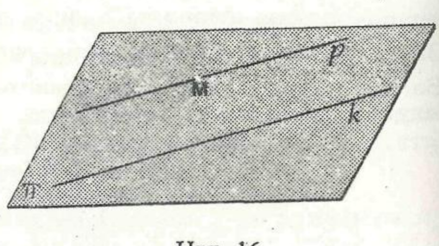
*Дефиниција 2.* **Две прави, што не можат да лежат на иста рамнина, се вика разминувачки прави.**

Пресекот на две разминувачки прави е празно множество.

Од горното заклучуваме дека: Две различни прави $\kappa$ и $p$, кои немаат ниту една заедничка точка, т.е. $\kappa \cap p = \varnothing$; или се паралелни (ако лежат во една рамнина) или се разминувачки (ако не можат да лежат во иста рамнина).




Црт. 15




Црт. 16

Нека се дадени правата $\kappa$ и точката $M \notin \kappa$. Да го поставиме прашањето: Колку прави, паралелни со правата $\kappa$ минуваат низ точката $M$?

По однос на тоа ќе ја прифатиме следнава важна аксиома:

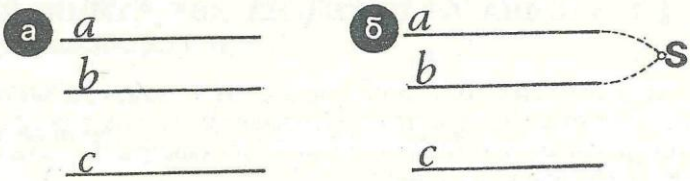
*Аксиома 6.* **(Аксиома за паралелност):** *Низ точката М, што не лежи на дадена права к ($M \notin к$), минува една и само една права р, која е паралелна на дадената права к* (црт. 16).

Врз основа на аксиомата 6 лесно ја докажуваме следната:

*Теорема 2.* **Ако секоја од две прави $a$ и $b$ е паралелна на трета права $c$, тогаш и тие се паралелни меѓу себе,** т. е.

$$(a \parallel c \text{ и } b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$$

*Доказ:* Ќе се ограничиме на случајот кога правите $a$, $b$ и $c$ лежат на иста рамнина (црт. 17-а). Нека е $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Треба да докажеме дека е $a \parallel b$.




Црт. 17

Да допуштиме дека правите $a$ и $b$ не се паралелни. Бидејќи тие лежат во една рамнина и не се паралелни, тоа значи дека тие се сечат во некоја точка $S$ (црт.17-б). Меѓутоа во тој случај низ точката $S$ ќе минуваат две прави $a$ и $b$ што се паралелни на трета права $c$, а тоа е во контрадикција со аксиомата 6. Значи, претпоставката е неточна, а точно е тврдењето на теоремата, т. е. дека $a \parallel b$.

Врз основа на горната теорема и дефиницијата 1, заклучуваме дека релацијата паралелност на правите ги има својствата на:

1°. **Рефлексивност:** $a \parallel a$.

2°. **Симетричност:** $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$.

3°. **Транзитивност:** $(a \parallel b \text{ и } b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$.

Својството рефлексивност можеме да го добиеме од транзитивноста: $(a \parallel b \text{ и } b \parallel a) \Rightarrow a \parallel a$. Затоа земаме дека секоја права е паралелна сама на себе, т. е. $a \parallel a$.

**1.** Кои услови треба да ги исполнуваат правите $a$ и $b$, за тие да бидат паралелни?

**2.** Правите $a$ и $b$ се паралелни и лежат во рамнината $\pi$. Правата $p$ ги сече и правата $a$ и правата $b$. Дали правата $p$ лежи во рамнината $\pi$? Зошто?

**3.** Правата $p$ ја прободува рамнината $\pi$. Може ли во рамнината $\pi$ да лежи права која е паралелна со правата $p$?

**4.** Правата $p$ е паралелна со рамнината $\pi$ и со правата $k$. Во каква заемна положба се наоѓаат правата $k$ и рамнината $\pi$?

**5.** Докажи дека: Рамнината е еднозначно определена со две различни паралелни прави.

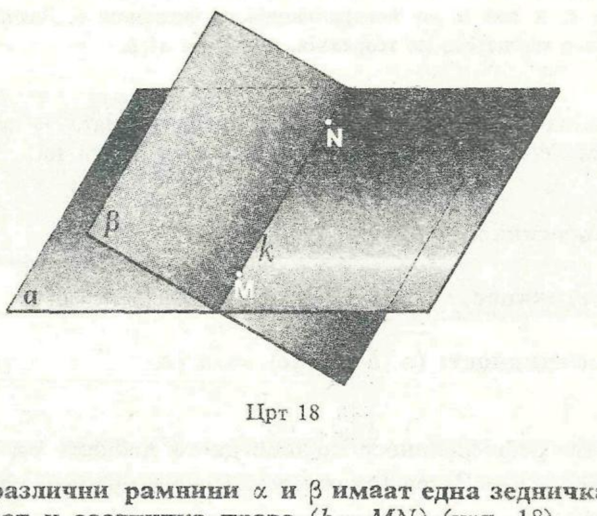
**6.** Што утврдува аксиомата за паралелност на правите?

## § 7. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ РАМНИНИ

Видовме дека: две различни прави не можат да имаат повеќе од една заедничка точка. Дали е таков случајот и со две различни рамнини, од досега прифатените аксиоми не можеме да заклучиме. Затоа ќе ја прифатиме уште и следнава аксиома:

**Аксиома 7. (Аксиома за две рамнини):** *Ако две различни рамнини $\alpha$ и $\beta$ имаат една заедничка точка $(M)$, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка $(N)$.*

Од аксиомите 7 и 2 следува дека:




Црт 18

**Ако две различни рамнини $\alpha$ и $\beta$ имаат една здничка точка $(M)$, тогаш тие имаат и заедничка права $(k = MN)$ (црт. 18).**

Значи, по однос на заемната положба на две рамнини можни се следниве три случаи:

— или да немаат ниту една заедничка точка, т. е. $\alpha \cap \beta = \varnothing$,

— или да имаат една заедничка точка. Тогаш тие имаат и заедничка права. (Во тој случај за рамнините велиме дека *се сечат*),

— или да имаат три заеднички точки, што не лежат на една права. (Тогаш тие **се совпаѓаат**), т. е. $\alpha \equiv \beta$.

Во првиот и третиот случај за рамнините велиме дека ***се паралелни.***

*Дефиниција*: **Две рамнини се паралелни, ако и само ако тие немаат заеднички точки или се совпаѓаат,** т. е.

$$\alpha \parallel \beta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\alpha \cap \beta = \varnothing \text{ или } \alpha \equiv \beta)$$

Релацијата паралелност на рамнините, слично како и релацијата паралелност на правите, ги има својствата на:

**1°. Рефлексивност:** $\alpha \parallel \alpha$.

**2°. Симетричност:** $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$.

**3°. Транзитивност:** $(\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma) \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.

Видовме дека и правата и рамнината се множества од точки, кои имаат определени својства утврдени со наведените аксиоми.

Множество од точки претставува и отсечката, кружницата, кругот, триаголникот, и др.

*Дефиниција*: **Секое непразно множество од точки се вика геометриска фигура или, само фигура.**

Правите и рамнините ги викаме уште и *основни геометриски фигури.*

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Од каде следува дека: ако две различни рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие се сечат и нивниот пресек е права.

**2.** Можат ли две рамнини да имаат: а) само една; б) само две; в) само три заеднички точки?

**3.** Кои услови треба да ги исполнуваат две рамнини $\alpha$ и $\beta$, за тие да се паралелни? Запиши го тоа симболички!

**4.** Колку различни рамнини минуваат во просторот: а) низ една точка; б) низ две точки; в) низ три точки што лежат на една права; г) низ три точки што не лежат на една права?

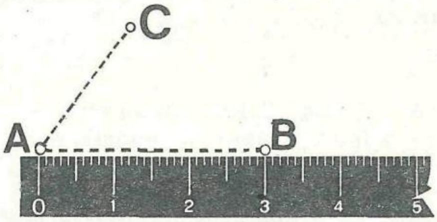
**5.** Каква фигура претставува множеството на заедничките точки на две различни рамнини?

## § 8. РАСТОЈАНИЕ. ПОЛУПРАВА. ОТСЕЧКА

Во редот на основните поими го вбројуваме и поимот „растојание меѓу две точки".

Практиката нé упатува на едно вакво сознание: Секоја точка се наоѓа на некое *растојание* од која да била друга точка, односно: на секои две точки им соодветствува некоја точно определена величина, која се вика растојание од едната до другата.

Растојанието од точката $A$ до точката $B$ ќе го означуваме со $\overline{AB}$. Тоа, како и секоја величина, може да се мери и да се изразува со броеви. На пример, растојанието од точката $A$ до точката $B$ на цртежот 19 е еднакво на 3 $cm$ и пишуваме $\overline{AB}=3\ cm$, а растојанието од точката $A$ до точката $C$ е еднакво на 2 $cm$, т. е. $\overline{AC}=2\ cm$.



Црт. 19

Поимот растојание го осмислуваме со следниве три негови својства:

**1°. Растојанието од точката $A$ до точката $B$ е поголемо од нула ако тие се различни, и еднакво на нула ако тие се совпаѓаат т. е.**

$\overline{AB}>0$, ако $A\not\equiv B$; и $\overline{AB}=0$, ако $A\equiv B$.

**2°. Растојанието од точката $A$ до точката $B$ еднакво е нá растојанието од точката $B$ до точката $A$,** т. е. $\overline{AB}=\overline{BA}$

**3°. За кои да било три точки $A$, $B$, $C$ растојанието од $A$ до $C$ не е поголемо од збирот на растојанијата од $A$ до $B$ и од $B$ до $C$,** т. е.

$$\overline{AC}\leqslant\overline{AB}+\overline{BC}.$$

Сега ќе воведеме еден нов поим — поимот „*лежи меѓу*". Тој поим, со помош на поимот растојание, го дефинираме вака:

*Дефиниција 1.* **Точката $S$ лежи меѓу точките $A$ и $B$ ако тие се три различни точки од една права и ако важи релацијата:**

$$\overline{AB}=\overline{AS}+\overline{SB}$$

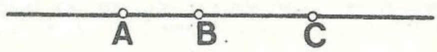
Според аксиомата 1, правата е бесконечно множество од точки.

Нашата нагледна претстава ни говори дека точките на правата се наоѓаат во некој „определен ред".

Подреденоста на точките на правата ја осмислуваме со следниве шест својства, кои ќе ги наведеме без доказ:

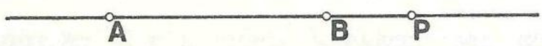
**1°. Ако точката** $B$ **лежи меѓу точките** $A$ **и** $C$**, тогаш точката** $B$ **лежи, исто така, и меѓу** $C$ **и** $A$ (црт. 20).

**2°. Од кои било три различни точки на иста права, една и само една лежи меѓу другите две** (црт. 20).




Црт. 20

**3°. За две точки** $A$ **и** $B$ **секогаш постои барем една точка** $P$ **на правата** $AB$**, таква што** $B$ **лежи меѓу** $A$ **и** $P$ (црт. 21).

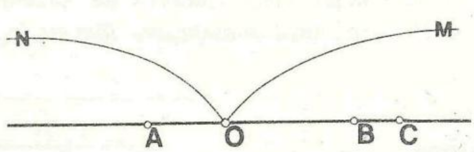



Црт. 21

**4°. Секоја точка** $O$ **што лежи на една права ги разделува останатите точки на таа права на две непразни множества точки (**$M$ **и** $N$**), така што:**

а) **Точката** $O$ **лежи меѓу кои било две точки од различните множества** ($M$ и $N$).

б) **Од кои било две точки на едно исто множество (**$M$ **или** $N$**), една од нив лежи меѓу другата точка и точката** $O$ (црт. 22).




Црт. 22

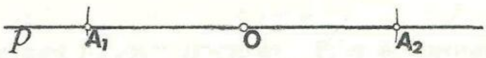
*Дефиниција 2.* **Секое од множествата (**$M$ **или** $N$**), на кои точката** $O$ **ја разделува една права, и на кое е приклучена точката** $O$**, се вика полуправа со почетна точка** $O$ (црт. 22)

2*

Ако $O$ е почетна точка, а $C$ — која било точка од полуправата, тогаш таа полуправа ќе ја означуваме со $OC$. Значи, првата буква во записот $OC$ секогаш треба да ја покаже почетната точка на полуправата.

**5°. На дадена полуправа со почетна точка $O$ постои една и само една точка $A$, која се наоѓа на растојание $r$ од точката $O$.**

Оттука, пак, следува дека: На дадена права $p$ постојат точно две точки $A_1$ и $A_2$, кои се наоѓаат на растојание $r$ од една фиксна точка $O$ на таа права. Нив лесно ги наоѓаме со помош на шестар (црт. 23).




Црт. 23

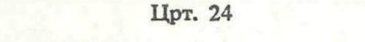
**6°. За секои две различни точки $A$ и $B$ секогаш постои барем една точка $S$, која лежи меѓу точките $A$ и $B$** (црт. 24).

Оттука следува дека и меѓу точките $A$ и $S$ ќе постои некоја точка $S_1$, а меѓу $A$ и $S_1$ — некоја точка $S_2$, итн. Според тоа:

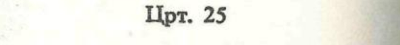
**Меѓу кои било две различни точки на правата лежат бесконечно многу други точки.**

*Дефиниција 3.* **Множеството од две различни точки $A$ и $B$ на правата и сите точки што лежат меѓу нив, се вика отсечка и се означува со $AB$.**

Точките $A$ и $B$ се викаат *крајни точки* на отсечката $AB$, а точките што лежат меѓу $A$ и $B$ — нејзини *внатрешни точки* (црт. 25).




Црт. 24




Црт. 25

*Дефиниција 4.* **Растојанието меѓу крајните точки на отсечката $AB$ се вика должина на отсечката и се означува со $\overline{AB}$.**

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Познато е растојанието $\overline{AB}=7\ cm$. Колкаво е растојанието $\overline{BA}$?

**2.** Три различни точки $A$, $B$, $C$ лежат на една права. Познато е: $\overline{AC}=12\ cm$, $\overline{BC}=7\ cm$. Колкаво може да биде растојанието $\overline{AB}=$? За секој можен случај направи цртеж!

**3.** Три различни точки $M$, $N$, $P$ лежат на една права. Познато е: $\overline{MN}=9\ cm$, $\overline{NP}=5\ cm$. Може ли при тие услови растојанието $\overline{MP}$ да биде еднакво на: а) 18 $cm$; б) 14 $cm$; в) 9 $cm$; г) 7 $cm$; д) 4 $cm$; ѓ) 3 $cm$?

**4.** Што може да се каже за положбата на точките $K$, $L$ и $M$, ако $\overline{KL}+\overline{KM}=\overline{LM}$ ? Која од тие точки лежи меѓу другите две?

**5.** На правата $p$ означи четири точки $A$, $B$, $C$, $D$, така што точката $C$ да е меѓу точките $A$ и $D$, а точката $D$ да е меѓу точките $B$ и $C$!

**6.** Што е полуправа, а што — отсечка? Како ги означуваме нив?

**7.** Различни ли се: а) отсечките $AB$ и $BA$; б) полуправите $AB$ и $BA$?

**8.** Точките $A$ и $B$ лежат на правата $p$. Колку полуправи се определени на правата $p$ со точките $A$ и $B$?

**9.** Може ли две различни отсечки да имаат: а) само една заедничка точка; а) само две заеднички точки?

**10.** Дали точките $K$, $L$ и $M$ лежат на една права ако:
а) $KL=7\ cm$, $\overline{KM}=5\ cm$, $\overline{LM}=4\ cm$; б) $\overline{KL}=5\ cm$, $\overline{KM}=9\ cm$, $\overline{LM}=4\ cm$?

**11.** Точките $A$, $B$, $C$ лежат на правата $k$. Колку различни отсечки и полуправи се определени со тие точки на правата $k$?

**12.** На колку делови се разделува отсечката $AB$ од: б) две; б) три нејзини внатрешни точки?

**13.** Што е должина на отсечката $AB$? Како се означува таа?

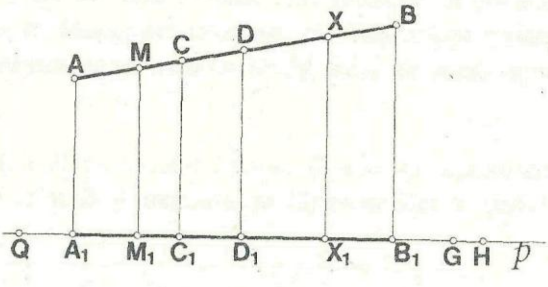
Глава II

# ПРЕСЛИКУВАЊЕ. ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА

## § 9. ПРЕСЛИКУВАЊЕ НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

Нека се дадени две множества $F$ и $F_1$ од точки. На елементите од едното множество на различни начини може да им се придружат определени елементи од другото множество. Еве неколку примери:

**Пример 1.** Нека се дадени отсечката $AB$ и права $p$, кои лежат во една рамнина (црт. 26). На која било точка $M$ од отсечката $AB$ да ѝ ја придружиме точката $M_1$ — во која нормалата на $p$ низ точката $M$ ја сече правата $p$.



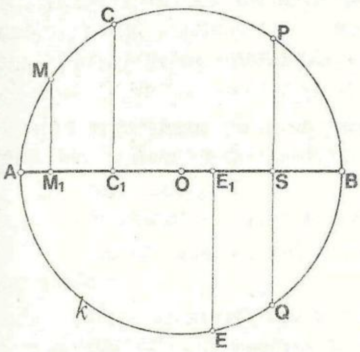

Црт. 26

На тој начин гледаме: На точката $A$ ѝ е придружена точката $A_1$, на $B - B_1$, на $C - C_1$, итн. Значи, на секоја точка $X$ од отсечката $AB$ може да ѝ се придружи (да ѝ соодветствува) по една точно определена точка $X_1$ од правата $p$.

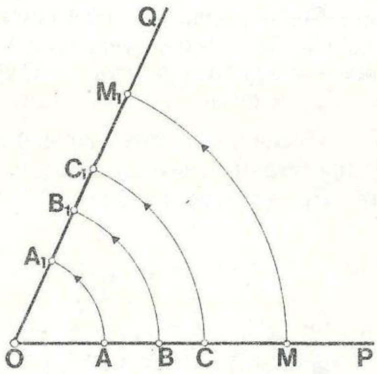
**Пример 2.** На цртеж 27 се гледа дека на секоја точка $M$ од кружницата $k$ ѝ е придружена (ѝ соодветствува) по една точно определена точка $M_1$ од дијаметарот $AB$, која заедно со точката $M$, лежи на една нормала кон дијаметарот $AB$ на таа кружница.

Во овој случај на точката $C$ ѝ е придружена точката $C_1$, на $E$ — точката $E_1$, на $P$ — точката $S$, на $Q$ — точката $S$, итн. (црт. 27).

**Пример 3.** На цртеж 28 нацртан е агол $POQ$. Се гледа дека на секоја точка $M$ од кракот $OP$ ѝ е придружена (ѝ соодвествува) по една точно определена точка $M_1$ од кракот $OQ$, којшто заедно со точката $M$, лежи на ист кружен лак од кружницата, што е опишана од точката $O$ како центар со радиус $OM$.




Црт. 27




Црт. 28

При тоа, на точката $A$ ѝ е придружена точката $A_1$, на точката $B$ — точката $B_1$, на $C$ — $C_1$, итн.

Забележуваме дека: во трите примери, на секој елемент (точка) од множеството $F$ на одреден начин му е придружен по еден единствен елемент од множеството $F_1$. Велиме дека: во трите случаи (примери) е зададено по едно *пресликување од множеството* $F$ *во множеството* $F_1$.

Поимот пресликување познат ви е од алгебрата. Него го воведуваме со следнава:

*Дефиниција 1.* **Ако на секој елемент (точка) од множеството $F$, според некое правило му е придружен по еден единствен елемент од множеството $F_1$, тогаш велиме дека е определено (зададено) едно пресликување $f$ од множеството $F$ во множеството $F_1$.**

Тоа симболички го запишуваме: $f$: $F \to F_1$ или само со $f$.

Множеството $F$ се вика *домен*, а $F_1$ — *кодомен* (или *мета*) на пресликувањето $f$: $F \to F_1$.

Ако на точката $X \in F$ ѝ е придружена точката $Y \in F_1$, тогаш велиме дека $Y$ *е слика* на $X$ при пресликувањето $f: F \to F_1$, а $X$ *е оригинал* на сликата $Y$. Тоа симболички го запишуваме: $X \xrightarrow{f} Y$ или $Y = f(X)$.

Пресликувањата во разгледаните погоре примери ќе ги означиме соодветно со $f$, $g$ и $h$, т.е. $f: AB \to p$, $g: k \to AB$ и $h: OP \to OQ$,

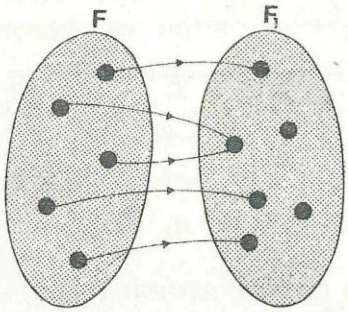
Кај пресликувањето $f: AB \to p$ забележувме дека *секоја* точка од отсечката $AB$ има своја слика на правата $p$, но *не секоја* точка од правата $p$ претставува слика на некоја точка од отсечката $AB$. На пример, точките $C_1$ и $D_1$ од правата $p$ се слики на точките $C$ и $D$ од отсечката $AB$; но точките $G$ и $H$ не се слики на ниедна точка од отсечката $AB$ (црт. 26).

Кај пресликувањето $g: k \to AB$ (пример 2), за разлика од пресликувањето $f$, секоја точка од дијаметарот $AB$ е слика *барем на една* точка од кружницата $k$ (црт. 27).

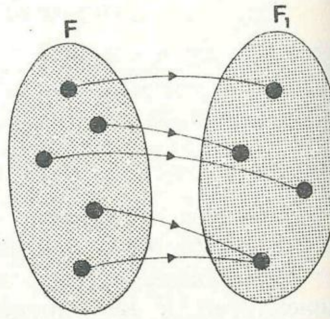
Пресликувањето $f$ во првиот пример се вика *ūресликување „во"*, а пресликувањето $g$ во вториот пример — *ūресликување „на"*.

Значи, треба да се прави разлика во употребата на предлозите „во" и „на". Кај првиот пример не може да речеме: „Отсечката $AB$ е пресликана *на* правата $p$; туку: „Отсечката $AB$ е пресликана *во* правата $p$"; или таа е пресликана *на* отсечката $A_1B_1$ (црт. 26).

Пресликувањето на фигурата $F$ **во** фигурата $F_1$ шематски може да се претстави како на црт. 29, а пресликувањето на фигурата $F$ **на** фигурата $F_1$ — како на црт. 30.




Црт. 29




Црт. 30

Кај пресликувањето $f: AB \to p$ карактеристично е уште и тоа што различните точки од отсечката $AB$ имаат различни слики на правата $p$. Велиме дека пресликувањето $f$ е *инјекшивно ūресликување* или *инјекција*.

*Дефиниција 2.* **Пресликувањето $f: F \to F_1$ се вика инјекција, ако секои две различни точки од $F$ се пресликуваат во две различни точки од $F_1$,** т.е.

$$X_1 \neq X_2 \Rightarrow f(X_1) \neq f(X_2)$$

За пресликувањето $g: k \to AB$ рековме дека е пресликување „на". Пресликукувањето „на" уште го нарекуваме и *сурјекшивно ūресликување* или само *сурјекција*.

*Дефиниција 3.* **Пресликувањето $g: F \to F_1$ се вика сурјекција, ако секоја точка од $F_1$ е слика барем на една точка од $F$.**

Пресликувањето $h: OP \to OQ$ гледаме дека истовремено е и инјекција и сурјекција. Ако едно пресликување истовремено е и инјекција и сурјекција, тогаш тоа уште се вика и *биективно* (*заемно еднозначно*) *пресликување* или, кратко, *биекција*. Тоа значи:

*Дефиниција 4.* **Пресликувањето $h: F \to F_1$ се вика биекција, ако секоја точка од фигурата $F_1$ е слика на една и само една точка од фигурата $F$.**

Биективното пресликување од $F$ на $F_1$ шематски го прреставуваме како на цртеж 31.

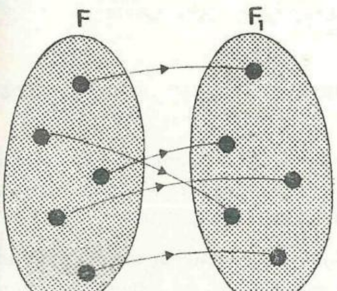
За пресликувањето $h: OP \to OQ$ насетуваме дека постои и друго пресликување $\varphi: OQ \to OP$ (и тоа обратно: од кракот $OQ$ на кракот $OP$) такво што на секоја точка $M_1$ од кракот $OQ$ да и́ ја придружиме токму онаа точка $M$ од кракот $OP$, на којашто точката $M_1$ и́ беше слика при пресликувањето $h: OP \to OQ$ (црт. 28).

Така зададеното ново пресликување $\varphi: OQ \to OP$ се вика *инверзно* (*обратно*) *пресликување* во однос на првото пресликување $h: OP \to OQ$.

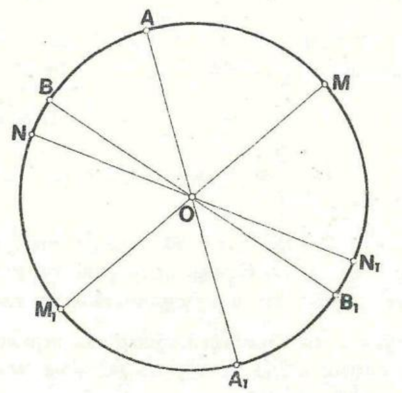
За пресликувањето $h$ утврдивме дека е биекција. Гледаме дека тоа има и свое инверзно пресликување.

Воопшто: Секое биективно пресликување има свое инверзно пресликување.

Во разгледаните примери до тука имавме пресликување од точките на една фигура $F$ во или на точките на друга фигура $F_1$. Но, фигурите $F$ и $F_1$ не е задолжително да бидат различни. Ако фигууите $F$ и $F_1$ не се различни, тогаш велиме дека имаме некое *пресликување $f$ од фигурата $F$ врз самата себе*. Тоа симболички го означуваме вака: $f: F \to F$.




Црт 31.




Црт 32.

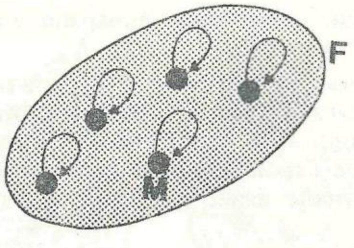
На пример, ако на секоја точка $M$ од една кружница и́ ја придружиме дијаметрално спротивната нејзина точка $M_1$ (црт. 32), добиваме едно биективно пресликување на кружницата на самата себе.

Секое пресликување $f: F \to F$ (од фигурата $F$ на самата себе) се вика уште и *трансформација на фигурата* $F$.

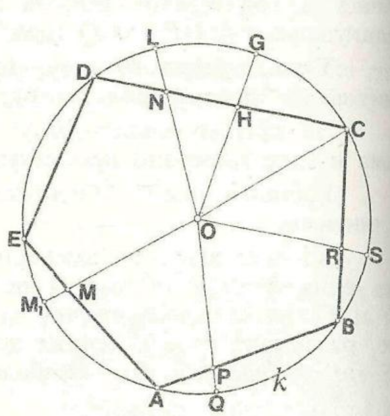
Во геометријата ние често ќе разгледуваме и пресликувања на целата рамнина на самата себе. Секое пресликување на рамнината на самата себе се вика уште *геометриска трансформација* или, кратко, само *трансформација на рамнината*.

При трансформацијата на некоја фигура $F$ (или на рамнината) може да се случи некоја точка $M$ да се совпадне со својата слика, т. е. $f(M) = M$. Таквите точки се викаат *неподвижни точки* на таа трансформација.

Ако секоја точка $M$ од фигурата $F$ се пресликува во самата себе, тогаш таквото пресликување се вика *идентично пресликување* или *идентична трансформација*, која шематски ја претставуваме како на цртеж 33. Очигледно е дека кај идентичната трансформација секоја точка на фигурата $F$ е неподвижна (црт. 33).




Црт. 33



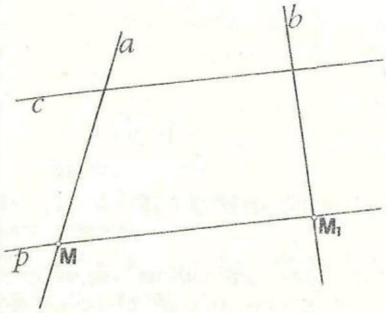

Црт. 34

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

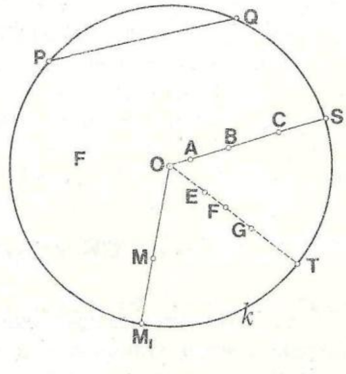
**1.** Објасни каква разлика постои помеѓу пресликувањето „во" и пресликувањето „на"!

**2.** На цртеж 34 даден е многуаголник $ABCDE$ и околу него опишана е кружница со центар $O$. Секоја полуправа со почетна точка $O$ ја сече контурата на многуаголникот во точка $M$, а кружницата $k$ во точка $M_1$. Со тоа е зададено пресликување $f$ од контурата на многуаголникот на кружницата $k$, т.е. $M \xrightarrow{f} M_1$. а) Именувај ги сликите на точките $P$, $H$ и $N$; б) на која точка соодветствува точката $S$; в) од каков вид е тоа пресликување?

**3.** Нека правата $c$ ги сече правите $a$ и $b$ што лежат во една рамнина (црт. 35). На точките од $a$ да им придружиме точки од правата $b$, по следново правило: Произволна права $p$ што е паралелна на $c$ ги сече правите $a$ и $b$ соодветно во точките $M$ и $M_1$, при што на точката $M \in a$ ѝ ја придружуваме точката $M_1 \in b$. Какво е ова пресликување? Има ли тоа свое инверзно пресликување?




Црт. 35

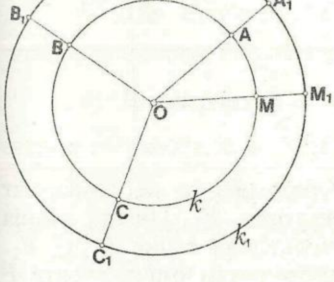



Црт. 36

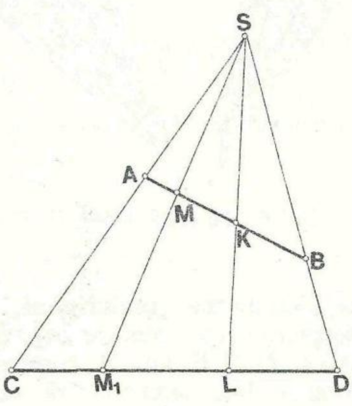
**4.** Да извршиме пресликување од кругот $F$ на кружницата $k$, со која тој е ограничен, по следново правило: На произволна точка $M \neq O$ од кругот $F$ ѝ ја придружуваме точката $M_1 \in k$ во која полуправата $OM$ ја сече кружницата $k$ (црт. 36). а) Кои точки се слики на токитие $A, B, C$?; б) на која фигура се пресликува тетивата $PQ$ на кругот?; в) Точката $T \in k$ на кои точки од кругот е слика?; г) Постои ли инверзно пресликување за него?

**5.** Помеѓу точките на две концентрични кружници $k$ и $k_1$ воспоставено е соодветство како што е покажано на црт. 37, каде што $M \xrightarrow{f} M_1$, $A \xrightarrow{f} A_1$, $B \xrightarrow{f} B_1$, итн. Пресликување од која на која фигура е зададено тука? Какво е тоа пресликување? Постои ли обратно пресликување за него?

**6.** Зададено е пресликивање $f$ од отсечката $AB$ на отсечката $CD$, како што е покажано на црт. 38, каде што $A \xrightarrow{f} C$, $M \xrightarrow{f} M_1$, $B \xrightarrow{f} D$, итн. а) Која точка ѝ соодветствува на точката $K$?; б) На која фигура се пресликува отсечката $AK$; в) Можеме ли да кажеме: отсечката $AK$ се пресликува на отсечката $CD$?




Црт. 37




Црт. 38

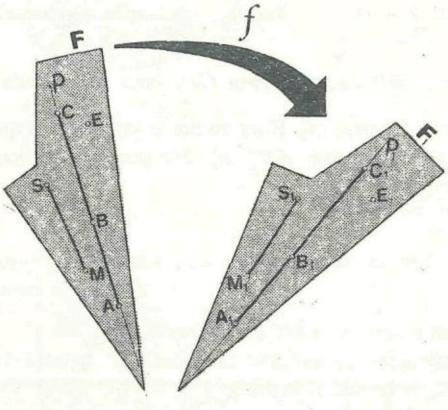
**7.** Дадено е пресликувањето $f$, при кое на определена точка $O$ од рамнината ѝ е придружена истата точка, а на секоја друга точка $M$ од рамнината ѝ се придружува точка $M_1$, така што точката $O$ да е средишна точка на отсечката $MM_1$. а) Точен ли е исказот: „Пресликувањето $f$ претставува едно пресликување на рамнината врз самата себе"?, б) Дали пресликувањето $f$ е заемно еднозначно пресликување?; в) Кои се неподвижни точки на тоа пресликување?

## § 10. СКЛАДНИ (КОНГРУЕНТНИ) ФИГУРИ

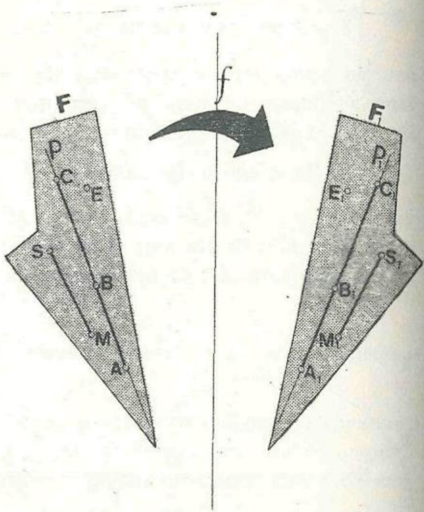
Со поимот складни (конгруентни) фигури сме запознати од минатата година. Тогаш говоревме дека: две отсечки (односно два агла) се складни или конгруентни ако нив со лизгање или на друг начин можеме да ги поставиме една на друга, така што тие да се совпаднат.

Да видиме какви својства имаат две фигури, кои можат да се поставатедна на друга, така што тие да се совпаднат.

Нека, на пример, фигурите $F$ и $F_1$ на црт. 39 и 40 се такви, што кога ги поставиме една на друга тие да се совпаднат. Практично тоа можеме да го постигнеме ако фигурата $F$ ја изрежеме или ја прекопираме на лист хартија, а потоа ја лизгаме во рамнината на цртежот (црт. 39) или ја превртиме и ја лизгаме (црт. 40) сè додека таа не се совпадне со фигурата $F_1$.




Црт. 39




Црт. 40

При тоа, точките $A$, $B$, $C$, $M$, $S$ од фигурата $F$ ќе се совпаднат соодветно со точките $A_1$, $B_1$, $C_1$, $M_1$, $S_1$ од фигурата $F_1$. Значи, секоја точка $M \in F$ ќе се совпадне со една точно определена точка $M_1 \in F_1$. Според тоа, можеме да кажеме дека множеството точки од фигурата $F$ се пресликало на множеството точки од фигурата $F_1$.

Очигледно е дека при ова пресликување $f: F \to F_1$ две произволни точки $M$ и $S$ од $F$ се пресликуваат во такви две определени точки $M_1$ и $S_1$ од $F_1$, при што растојанијата $\overline{MS}$ и $\overline{M_1S_1}$ останувaат еднакви.

Ова пресликување се карактевизира и со тоа што: три точки $A, B, C$, што ѝ припаѓаат на една права $p$, се пресликуваат во три определени точки $A_1, B_1, C_1$, кои, исто така ѝ припаѓаат на една права $p_1$; и тоа ако $B$ лежи меѓу $A$ и $C$, тогаш и $B_1$ лежи меѓу точките $A_1$ и $C_1$ (црт. 39 и 40).

За фигурите $F$ и $F_1$, кои на било кој начин можат да се постават една на друга, така што тие да се совпаднат, велиме дека се *складни* или *конгруентни*.

Поимот складни фигури со помош на поимот пресликување го дефинираме вака:

*Дефиниција*: **Ако фигурата $F$ на кој било начин може да се преслика на фигурата $F_1$, така што за секои две точки $X$ и $Y$ од $F$ и нивните слики $X_1$ и $Y_1$ од $F_1$ да важи релацијата $\overline{XY} = \overline{X_1Y_1}$, тогаш велиме дека фигурата $F$ е складна на фигурата $F_1$ и пишуваме $F \cong F_1$.**

Симболот „$\cong$" се вика **знак на складност,** а записот $F \cong F_1$ се чита: „$F$ **е складна на** $F_1$".

Релацијата складност на фигурите ги има својствата на:

**1°. Рефлексивност:** т. е. секоја фигура е складна на себе си: $F \cong F_1$,

**2°. Симетричност:** $F \cong F_1 \Rightarrow F_1 \cong F$.

**3°. Транзитивност:** $(F \cong F_1$ и $F_1 \cong F_2) \Rightarrow F \cong F_2$.

Од алгебрата знаете дека секоја релација која ги има својствата на рефлексивност, симетричност и транзитивност се вика **релација на еквивалентност.** Според тоа:

**Релацијата складност „$\cong$" е релација на еквивалентност.**

Ќе наведеме неколку примери на складни фигури:

а) Два пара точки $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ се складни, ако и само ако тие имаат еднакви растојанија, т. е. $\{A, B\} \cong \{C, D\} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$;

б) Две отсечки $AB$ и $CD$ се складни ако и само ако тие имаат еднакви должини, т. е. $AB \cong CD \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$;

в) Два агла $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ се складни ако и само ако тие имаат еднакви големини, т. е. $\measuredangle A \cong \measuredangle B \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$;

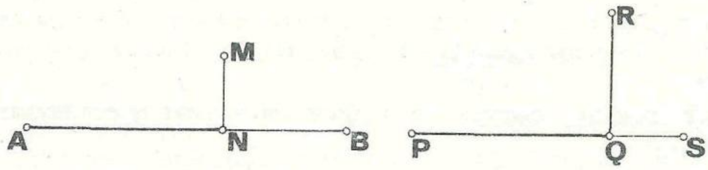
г) Две кружници (односно два круга) се складни, ако и само ако тие имаат еднакви радиуси;

д) Секои две полуправи се складни;

ѓ) Секои две прави се складни.

**1.** За кои две фигури велиме дека се складни?

**2.** Што значи кога ќе кажеме: две прави се складни?




Црт. 41

**3.** Нацртај две складни отсечки $AB$ и $CD$. Уочи три точки на отсечката $AB$, а потоа одреди ги нивните слики при доведувањето на отсечката $AB$ врз отсечката $CD$, при што $A$ се пресликува во $C$.

**4.** Ако за фигурите $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$, е познато дека: $F_1 \cong F_2$, $F_2 \cong F_3$, $F_3 \cong F_4$, $F_4 \cong F_5$, што може да се каже за фигурите $F_1$ и $F_5$?

**5.** Може ли две фигури да се составени од еднаков број складни делови, а тие да не се складни? (Разгледај го цртеж 41, каде што $AN \cong PQ$, $NB \cong QR$ и $MN \cong QS$)!.

## § 11. ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА

### 11. 1. ПОИМ ЗА ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА

Да избереме во рамнината $\pi$ една точка $O$ што ќе ја викаме *центар*. На произволна точка $M$ да ѝ ја придружиме точката $M_1$, така што точката $O$ да е средина на отсечката $MM_1$. На пример, на цртеж 42 имаме:

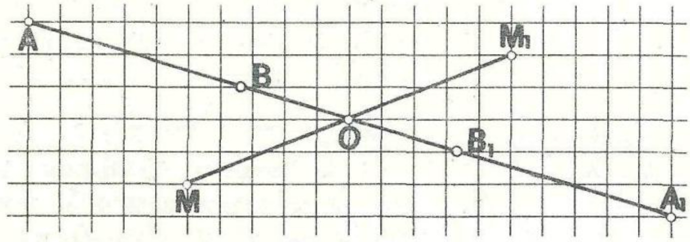
$$M \to M_1,\ A \to A_1,\ B \to B_1, \text{ итн.}$$

Точката $M_1$ се вика *симетрична точка на точката $M$ во однос на центарот $O$*. Очигледно е дека, ако $A_1$ е симетрична на точката $A$, тогаш и точката $A$ е симетрична на $A_1$ во однос на центарот $O$. Затоа велиме: точките $A$ и $A_1$ се симетрични една на друга во однос на центарот $O$.

Точката $O$ се вика *центар на симетријата*, а пресликувањето од овој вид — *симетрија во однос на точка* или *централна симетрија*.

Симетријата во однос на точката $O$ симболички ја запишуваме $S_O$.

За да се конструира точката $M_1$, што е центарално симетрична на дадена произволна точка $M$, потребно е на правата $OM$ да се конструира отсечката $OM_1$, која е складна на отсечката $OM$, а да се наоѓа на другата страна од центарот $O$ (црт. 42). Во тој случај центарот $O$ сигурно ќе биде средишна точка на отсечката $MM_1$, бидејќи $OM_1 \cong OM$, а $OM_1$ лежи на правата $OM$.




Црт. 42

Бидејќи секоја отсечка има една средишна точка; тоа на секоја точка $M$ од рамнината $\pi$ ќе и́ соодветствува по една точно определена точка $M_1$ од истата рамнина, таква што точката $O$ да е средишна точка на отсечката $MM_1$. Точно е и обратното: За секоја точка $M_1$ може да се одреди и точката $M$, чија слика е таа.

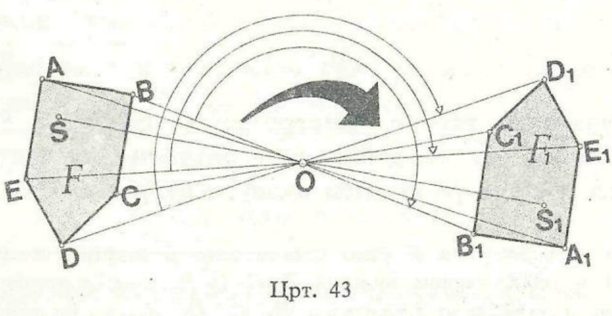
Со оглед на тоа, централната симетрија можеме да ја разгледуваме како пресликување на целата рамнина на самата себе.

*Дефиниција*: **Централна симетрија со центар $O$ се вика пресликување на рамнината на самата себе, при што на секоја точка $M$ од рамнината и́ соодветствува точка $M_1$, таква што точката $O$ да е средишна точка на отсечката $MM_1$.**

Ако точката $M$ се совпаѓа со центарот $O$, тогаш точката $M_1$ е точката $O$. Според тоа, центарот $O$ е неподвижна точка на пресликувањето централна симетрија. Други неподвижни точки $S_o$ нема.

Централната симетрија е зададена, ако е даден нејзиниот центар, или ако се познати кои да било две соодветни нејзини точки.

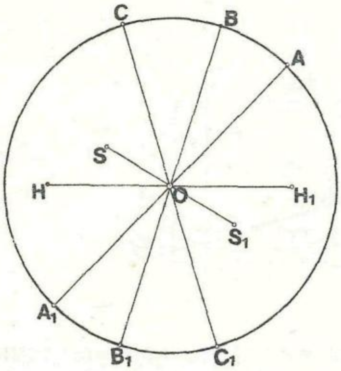
Во рамнината нека е дадена некоја фигура $F$ и центар $O$ (црт. 43). Ако секоја точка од фигурата $F$ симетрично ја пресликавме во однос на центарот $O$, тогаш множеството од сите симетрични точки во однос на




Црт. 43

центарот $O$ ќе образува некоја фигура $F_1$, која претставува слика на фигурата $F$ во однос на центарот $O$, а се вика *симетрична фигура на фигурата $F$ во однос на точката $O$* (црт. 43).

Од црт. 43 гледаме како се црта фигура, што е симетрична на дадена фигура $F$ во однос на дадена точка. Сторете го тоа и сами!



Црт. 44

Ако при централната симетрија $S_0$ фигурата $F$ се пресликува сама на себе, тогаш за фигурата $F$ велиме дека е *централно симетрична*, а точката $O$ — нејзин *центар на симетријата*.

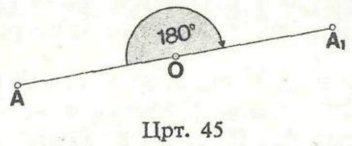
На пример, централно симетрични фигури се кружницата и кругот (црт. 44). Нивен центар на симетријата е центарот на кружницата, односно кругот. Понатаму ќе се запознаеме и со други централно симетрични фигури.

## 11. 2. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ЦЕНТРАЛНАТА СИМЕТРИЈА

Централната симетрија ги има следниве поважни својства:

**1°. Точката $A_1$, што е симетрична на точката $A$ во однос на центарот $O$, може да се добие со завртување на точката $A$ за 180° во рамнината околу центарот $O$.**

Навистина ако точката $A$ ја завртиме во рамнината за 180° околу $O$, таа ќе ја заземе положбата на точката $A_1$ (црт. 45). Бидејќи $A\widehat{O}A_1=180°$, тоа точките $A$ и $A_1$ ќе лежат на една права со точката $O$, само што на разни страни од неа. При тоа ќе биде $AO \cong OA_1$. Значи, точката $A_1$ е симетрична на $A$ во однос на центарот $O$.



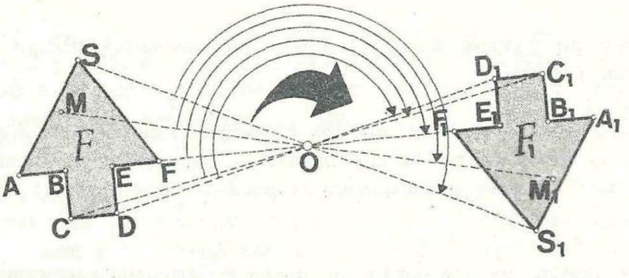
Црт. 45

**2°. Фигурата $F_1$ што е симетрична на фигурата $F$ во однос на центарот $O$, може на се добие со завртување на фигурата $F$ како цврсто тело за 180° во рамнината околу центарот $O$** (црт. 46).

Навистина, ако фигурата $F$ како цврсто тело ја завртиме во рамнината за 180° околу $O$, тогаш и секоја нејзина точка $A$ $B$, $C$, $D$ $E$... ќе се заврти за 180° и соодветно ќе ја заземе положбата на точките $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$,... Бидејќи точките $A_1$, $B_1$ $C_1$, $D_1$, $E_1$,... се соодветно симетрични на $A$, $B$, $C$, $D$, $E$,... во однос на центарот $O$, тоа множеството од сите тие, и само на тие, точки ќе ја образува фигурата $F_1$ што е симетрична на $F$ во однос на центарот $O$ (црт. 46).

Оттука следува и својството:

**3°. При централната симетрија секоја фигура $F$ се пресликува во складна на неа фигура $F_1$.** Тоа значи дека:




Црт. 46

а) Отсечката $AB$ се пресликува во складна на неа отсечка $A_1B_1$;

б) Аголот $ASB$ се пресликува во складен на него агол $A_1S_1B_1$;

в) Кружницата $k$ се пресликува во складна на неа кружница $k_1$;

г) Многуаголникот се пресликува во складен многуаголник, итн.

Од својството (б) следува дека: две паралели прави се пресликуваат во две паралелни прави, а две заемно нормални прави — во две заемно нормални прави.

**4°. Отсечките $AB$ и $A_1B_1$, што се симетрични во однос на центарот $O$, или се паралелни, или лежат на една права.** Провери го тоа со цртање!

**5°. Правите $a$ и $a_1$, што се симетрични во однос на точката $O$, или се паралелни, или се совпаѓаат.** Провери со цртање!

**6°. Секоја права е централно симетрична во однос на која и да било своја точка.** Увери се во тоа со цртање!

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** На кои начини може да биде зададена централната симетрија?

**2.** Ако централната симетрија е зададена со еден пар соодветни точки, тогаш која точка ќе биде нејзин центар на симетријата?

**3.** Какво пресликување е инверзното пресликување на централната симетрија?

**4.** Која фигура се вика централно симетрична?

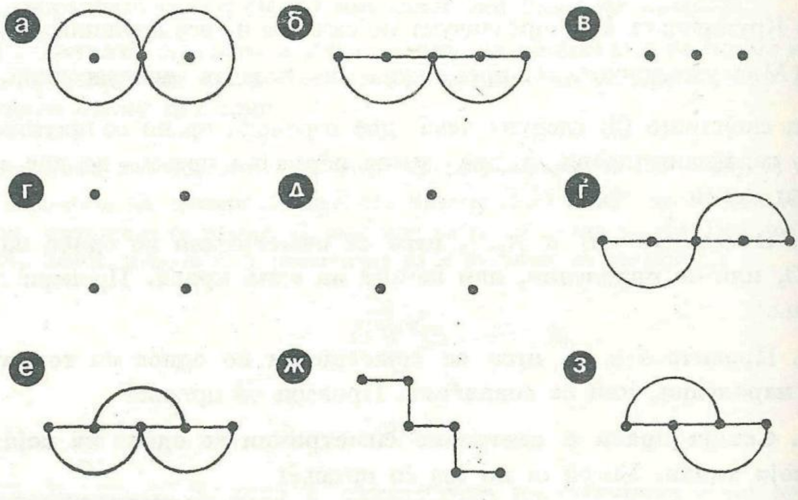
**5.** Дали отсечката е центрлно симетрична фигура? Која точка е нејзин центар на симетријата?

**6.** Еден пар точки $\{A, B\}$ дали е централно симетрична фигура? Која точка е нејзин центар на симетријата?

**7.** Постои ли фигура, која има барем два различни центри на симетријата? Наведи една таква фигура!

**8.** Испитај која од следниве фигури е централно симетрична и во потврден случај одреди го нејиниот центар на симетријата: а) Унијата од две прави што се сечат; б) *унијата од две складни и паралелни отсечки;* в) *полуправата;* ѓ) *полурамнината;* д) аголот?

**9.** Дали унијата на две паралелни прави е централно симемрична фигура? Која точка е нејзин центар на симетријата?




Црт. 47

**10.** Кои од фигурите на црт. 47 се централно симетрични и одреди го нејзиниот центар на симетријата!

**11.** Кои прави при централната симетрија се пресликуваат сами на себе?

## § 12. ПРИМЕНА НА ЦЕНТРАЛНАТА СИМЕТРИЈА

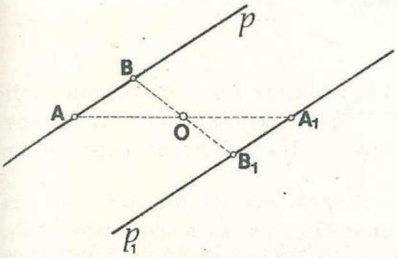
Централната симетрија наоѓа широка примена при решавањето на различни задачи во геометријата. Еве неколку такви задачи:

**Задача 1.** Дадени се права $p$ и точката $O \notin p$. Да се конструира сликата $p_1$ на правата $p$ при симетрија во однос на точката $O$.

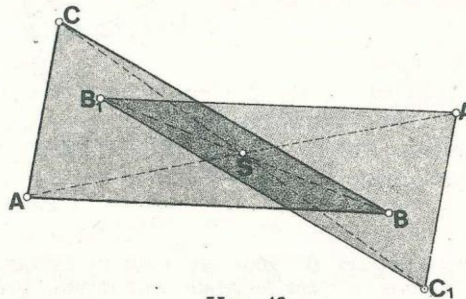
**Решение:** Бараната слика $p_1$ на правата $p$ во однос на точката $O$ ќе биде права паралелна на $p$. Бидејќи правата е определена со две свои точки, доволно е да ги одредиме сликите на кои да било две точки $A$ и $B$ од дадената права $p$ во однос на центарот $O$. Правата $A_1B_1$ е бараната права $p_1$ (црт. 48).

**Задача 2.** Даден е триаголник $ABC$ и точката $S$, што лежи внатре во триаголникот. Да се конструира сликата $A_1B_1C_1$ на дадениот триаголник при централна симетрија со центар во точката $S$ (црт. 49)

**Решение:** За да го конструираме триаголникот $A_1B_1C_1$ доволно е да ги конструираме неговите темиња $A_1$, $B_1$ и $C_1$ кои се симетрични на темињата на дадениот туиаголник $ABC$ во однос на точката $S$ (црт. 49).

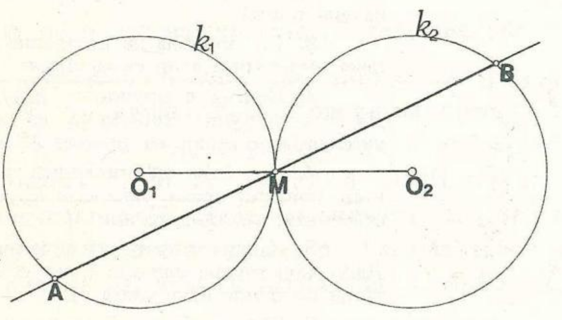


Црт. 48



Црт. 49

**Задача 3.** Две кружници со еднакви радиуси се допираат однадвор во точката $M$. Да се докаже дека кружниците отсекуваат складни тетиви од секоја права, што минува низ точката $M$ и не е тангента на нив.

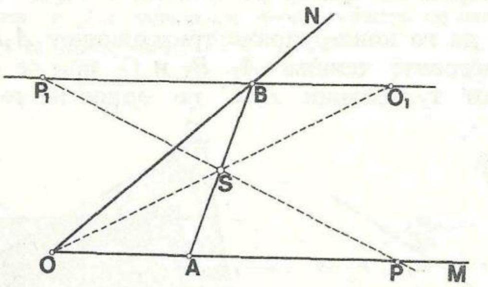


Црт. 50

*Доказ*: Нека се дадени кружниците $k_1(O_1, r)$ и $k_2(O_2, r)$, кои се допираат однадвор во точката $M$ (црт. 50). Бидејќи е $\overline{MO_1}=\overline{MO_2}=r$, тоа двете кружици се симетрични една на друга во однос на точката $M$. Значи, централната симетрија со центар $M$ кружницата $k_1$ ја пресликува во кружница $k_2$, па, според тоа, и точката $A \in k_1$ во точката $B \in k_2$. Бидејќи точките $A$ и $B$ лежат на права која минува низ центарот на симетријата $M$ и се симетрични една на друга во однос на точката $M$, тоа ќе имаме дека е $MA \cong MB$.

**Задача 4.** Даден е агол $MON$ и точката $S$ од неговата внатрешна област. Низ точката $S$ да се повлече отсечка чии крајни точки лежат соодветно на краците на дадениот агол, а точката $S$ да е нејзина средишна точка.

*Решение:* Бараната отсечка нека е отсечката $AB$ (црт. 51). Ако точката $S$ ја земеме за центар на симетријата, тогаш точките $A$ и $B$ се симетрични во однос на $S$. Потоа, ако кракот $OM$ го пресликаме симетрично во однос на точката $S$, ќе ја добиеме неговата слика – полуправата $O_1P_1$ (за тоа доволно е да ги одредиме сликите на две точки $O$ и $P$ од кракот $OM$). Бидејќи точката $A$ лежи на кракот $OM$, тоа и нејзината

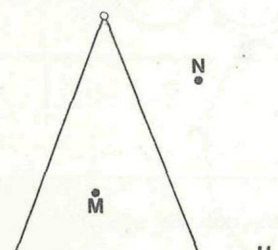



Црт. 51

слика (точката $B$) мора да лежи на сликата на кракот $OM$, т.е. на полуправата $O_1P_1$. Но точката $B$ треба да лежи и на кракот $ON$. Според тоа, точката $B$ ќе биде пресечна точка на кракот $ON$ со сликата на кракот $OM$ во однос на точката $S$.

Од направената анализа следува и постапката на одредувањето на бараната отсечка.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ




Црт. 52

**1.** Нацртаниот триаголник на црт. 52 пресликај го со централна симетрија во однос на секоја означена точка!

**2.** Со примена на централна симетрија докажи дека вкрстените агли се складни!

**3.** Дадена е кружница $k(0,r)$ и точка $M \neq O$. Да се конструира сликата $k_1$ на кружницата $k$ при симетрија во однос на точката $M$.

**4.** Низ една од пресечните точки на две кружници повлечи права, така што кружниците од неа да отсекуваат складни тетиви!

**5.** Дадена е права $s$ и точката: а) $M \in s$, б) $M \notin s$. Да се конструира сликата $s_1$ на правата $s$ при симетрија во однос на точката $M$.

**6.** Дадени се точка $S$, права $p$ и кружница $k$. Да се нацрта отсечката $MN$, со средишна точка $S$, а крајните ѝ точки да лежат соодветно на правата $p$ и кружницата $k$. **Упатство:** Правата $p$ пресликај ја симетрично во однос на точката $S$.

Глава III

# ОСНА СИМЕТРИЈА. ПРИМЕНА

## § 13. ОСНА СИМЕТРИЈА

### 13. 1. ПОИМ ЗА ОСНА СИМЕТРИЈА

Во рамнината $\pi$ нека е дадена една права $p$ и нека треба да се изврши пресликување $f$ на точките од рамнината $\pi$ согласно правилото: На секоја точка $M$ од рамнината ѝ се придружува точка $M_1$ од истата рамнина, таква што отсечката $MM_1$ да е нормална на правата $p$ и да се располовува од неа. На тој начин имаме: $M \xrightarrow{f} M_1$; $A \xrightarrow{f} A_1$; $B \xrightarrow{f} B_1$ итн. (црт. 53).

Точката $M_1$ (слика на $M$) се вика *симетрична точка на точката $M$ во однос на правата $p$*.

Очигледно е дека: ако точката $M_1$ е симетрична на точката $M$ во однос на правата $p$, тогаш и точката $M$ е симетрична на $M_1$ во однос на $p$. Затоа велиме дека точките $M$ и $M_1$ се заемно симетрични во однос на правата $p$.

Правата $p$ се вика *оска на симетријата*, а пресликувањето од овој вид — *симетрија во однос на права* или, кратко, *осна симетрија*.

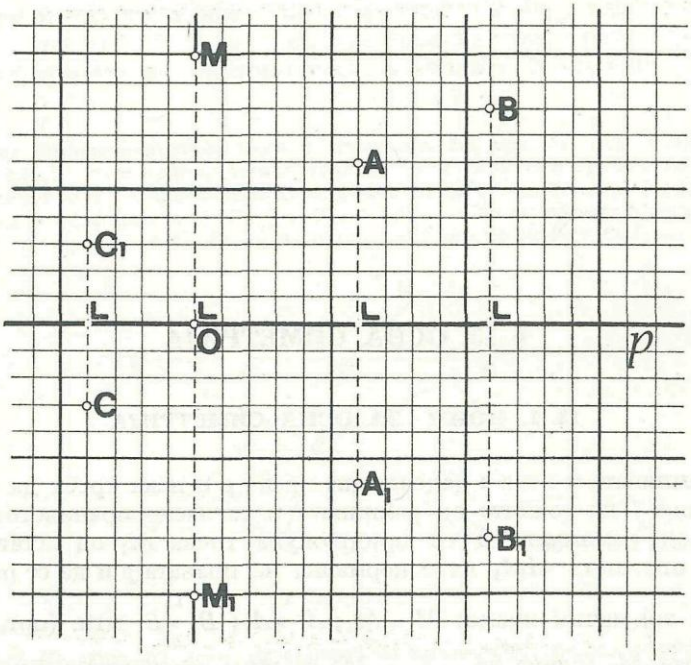
Симетријата во однос на правата $p$ симболички ќе ја означуваме $S_p$.

За да се определи точката $M_1$, што е симетрична на дадена произволна точка $M$ од рамнината во однос на правата $p$, потребно е низ точката $M$ да се повлече една нормална права на оската $p$. Таа нормала ќе ја пресече оската $p$ во некоја точка $O$. Потоа на правата $MO$ ја пренесуваме отсечката $OM_1$, која е складна на отсечката $MO$, а да се наоѓа на другата страна од оската $p$. Така ја добивме бараната точка $M_1$ — слика на точката $M$, која ги исполнува условите:

$$MM_1 \perp p \text{ и } MO \cong OM_1 \text{ (црт. 53).}$$

Да ја прифатиме следнава теорема без доказ:

*Теорема*: **Низ секоја точка од рамнината може да се повлече една и само една права што е нормална на дадена права.**




Црт. 53

Врз основана горнава теорема следува дека на секоја точка $M$ од рамнината $\pi$ може да и се придружи еднозначно определена точка $M_1$ од истата рамнина, што е симетрична на точката $M$ во однос на правата $p$.

Точно е и обратното: за секоја точка $M_1$ може да се одреди и точката $M$, чија слика е таа.

Со оглед на тоа, осната симетрија со право можеме да ја разгледуваме како пресликување на целата рамнина на самата себе.

*Дефиниција*: **Осна симетрија со оска $p$ се вика пресликувањето на рамнината на самата себе, при што на секоја точка $M$ од рамнинауа ѝ соодветствува точка $M_1$, таква што отсечката $MM_1$ е нормална на оската $p$ и се располовува од неа.**

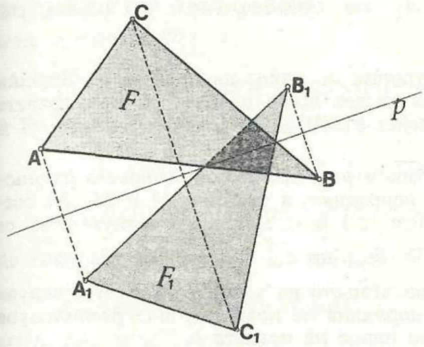
Ако точката $M$ лежи на оската $p$, тогаш таа се совпаѓа со својата симетрична точка $M_1$. Според тоа, секоја точка од оската $p$ е неподвижна точка при осната симетрија $S_p$. Други неподвижни точки осната симетрија нема.

Осната симетрија е зададена, ако е дадена нејзината оска, или ако се познати кои било две соодветни (симетрични) точки во однос на неа.

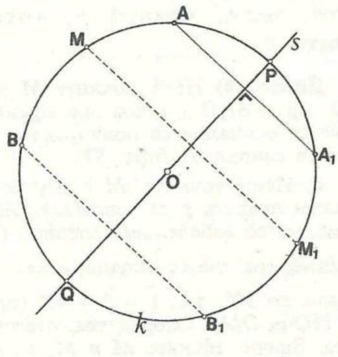
При осната симетрија можеме да вршиме пресликување не само на целата рамнина, туку и на некој дел од неа.

Ако секоја точка од фигурата $F$ симетрично ја пресликаме во однос на оската $p$, тогаш множеството од сите симетрични точки во однос на $p$ ќе образува некоја фигура $F_1$, која претставува *слика на фигурата $F$ во однос на оската $p$*, а се вика *симетрична фигура на фигурата $F$ во однос на оската $p$* (црт. 54).

Ако при осната симетрија $S_p$ фигурата $F$ се пресликува сама на себе, тогаш за фигурата $F$ велиме дека е *осно симетрична*, а правата $p$ — нејзина *оска на симетријата* или *симетрала*.

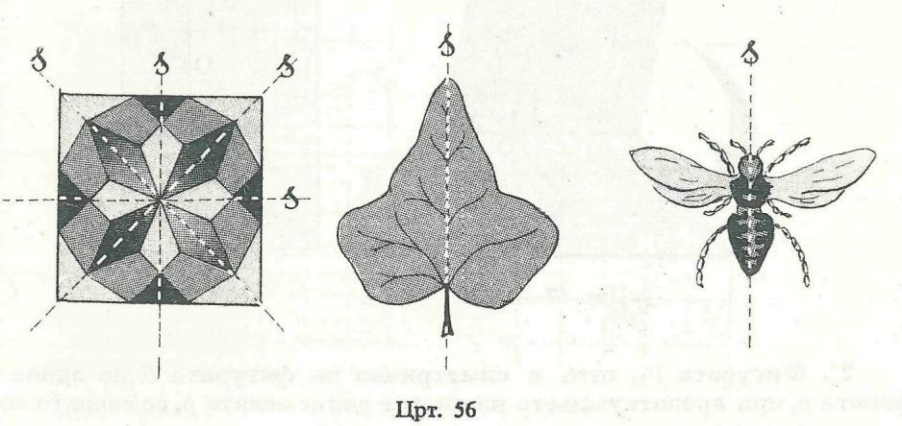



Црт. 54




Црт. 55

На пример, кружницата и кругот се осно симетрични фигури во однос на која и да било права што минува низ нивниот центар. Навистина, нека правата $s$ минува низ центарот $O$ на дадената кружница $k$ (црт. 55).



Црт. 56

Да земеме произволна точка $M$ од кружницата $k$. Таа ќе се преслика во симетричната точка $M_1$ во однос на правата $s$, која, исто така, лежи на дадената кружница. Неподвижни точки на ова пресликување се само точките $P$ и $Q$, во кои правата $s$ ја сече кружницата $k$ (црт. 55).

На цртежот 56 дадени се три фигури (шара, лист од бршљан и слика на пеперуга), кои се симетрични во однос на правата $s$.

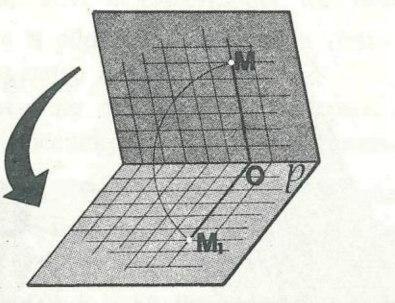
### 13. 2. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ОСНАТА СИМЕТРИЈА

Осната симетрија ги има следниве поважни својства:

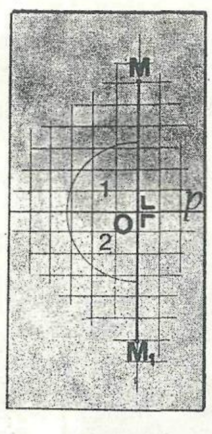
**1°. Ако точките $M$ и $M_1$ се симетрични во однос на правата $p$, тогаш при превиткувањето на листот долж оската $p$, тие се совпаѓаат. Обратно, ако точките $M$ и $M_1$ се совпаѓаат при превиткувањето на листот долж оската $p$, тогаш $M$ и $M_1$ се симетрични во однос на правата $p$.**

**Доказ:** а) Нека, точките $M$ и $M_1$ се симетрични во однос на правата $p$. Бидејќи е $MO \perp p$ и $M_1O \perp p$ тоа при превиткувањето на листот долж правата $p$, полуправата $OM$ ќе се совпадне со полуправата $OM_1$; но бидејќи е $OM \cong OM_1$, тоа и точките $M$ и $M_1$ ќе се совпаднат (црт. 57).

б) Нека точките $M$ и $M_1$ не лежат на правата $p$, а при превиткувањето на листот долж правата $p$ се совпаѓаат. Ако листот го исправиме, а точките $M$ и $M_1$ ги соединиме, ќе го забележиме следното: Бидејќи аглите $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ при превиткувањето се совпаѓале, тоа тие се складни, т.е. $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$. Но, бидејќи е $\widehat{1} + \widehat{2} = 180°$, тоа секој од нив има по 90°, т.е. $\widehat{1} = \widehat{2} = 90°$ (црт. 58). Од совпаѓањето на точките $M$ и $M_1$ следува дека $MO \cong OM_1$. Според тоа, отсечката $MM_1$ е нормална на правата $p$ и се располовува од неа. Значи, точките $M$ и $M_1$ се симетрични во однос на правата $p$.



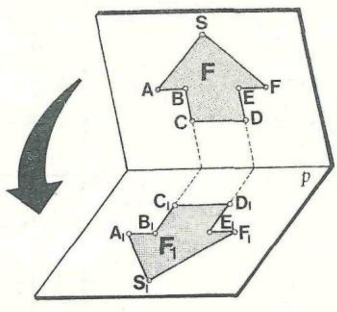
Црт. 57



Црт. 58

**2°. Фигурата $F_1$, што е симетрична на фигурата $F$ во однос на правата $p$, при превиткувањето на листот долж оската $p$, се совпаѓа со $F$.**

**Доказ:** Нека $F$ и $F_1$ се симетрични во однос на правата $p$ (црт. 59). Ако листот харија го превиткаме долж правата $p$, тогаш секоја точка $A, B, C, D, E, \ldots$ од фигурата $F$ ќе се совпадне со нејзината симетрична точка $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \ldots$ во однос на правата $p$. Тоа покажува дека фигурата $F$ ќе се совпадне со некоја фигура што е образувана од множеството на сите симетрични точки на точките од фигурата $F$ во однос на правата $p$. А тоа е токму фигурата $F_1$ – симетрична слика на $F$ во однос на $p$.



Црт. 59

Од својството 2° непосредно следува:

**3°. При осната симетрија секоја фигура $F$ се пресликува во складна на неа фигура $F_1$.**

Тоа значи дека при осната симетрија, исто како и при централната симетрија:

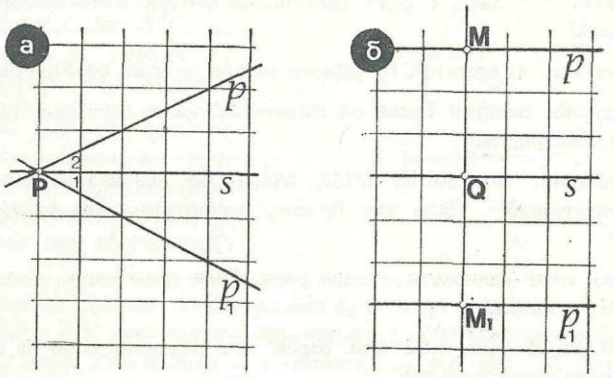
а) Отсечката $AB$ се пресликува во складна на неа отсечка $A_1B_1$;

б) Аголот $AOB$ се пресликува во складен на него агол $A_1O_1B_1$;

в) Кружницата $k$ се пресликува во складна на неа кружница $k_1$;

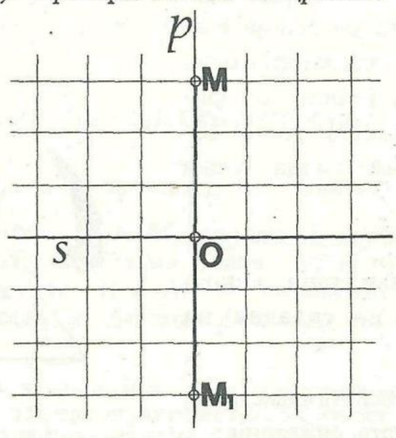
г) Секој многуаголник се пресликува во складен на него многуаголник, итн.

Од својството (б) следува дека: две паралелни прави се пресликуваат во две паралелни прави, а две заемно нормални прави — во две заемно нормални прави.



Црт. 60

**4°. Правите $p$ и $p_1$, што се симетрични во однос на оската $s$, или се сечат во точка што лежи на оската $s$ и при тоа образуваат складни агли со оската $s$, или се паралелни и еднакво оддалечени од оската $s$.** (црт. 60). Провери го тоа со цртање!




Црт. 61

**5°. Секоја права $p$, што е нормална на осата $s$, при осната симетрија се пресликува сама на себе си.** (црт. 61).

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** На колку начини може да биде зададена осната симетрија?

**2.** Ако е познат еден пар соодветни точки при осната симетрија, како ќе се определи оската на симетријата?

**3.** Какво пресликување е инверзното на осната симетрија?

**4.** Која фигура се вика осно симетрична?

**5.** Множеството од две точки $\{A, B\}$, дали е осно симетрична фигура? Што е нејзина оска на симетријата!

**6.** Отсечката $AB$ дали е осно симетрична фигура, а ако е, одреди ја нејзината оска на симетријата!

**7.** Одреди кои: а) арапски; б) римски цифри се осно симетрични!

**8.** Кои големи печатни букви од нашата азбука се осно симетричи и одреди ги нивните оски на симетријата.

**9.** Во броевите: 101, 80108, 25652, 888, 65756, 808 велиме дека цифрите им се „симетрично расположени". Дали тие броеви, посматрани како фигури, се осно симетрични?

**10.** Нацртај еден равнокрак и еден равностран триаголник. Колку оски на симетријата има секој од нив?

**11.** Постои ли фигура, која има барем две различни оски на симетријата? Ако постои, нацртај една таква фигура!

**12.** Дали правата е осно симетрична фигура? Која е нејзина оска на симетријата?

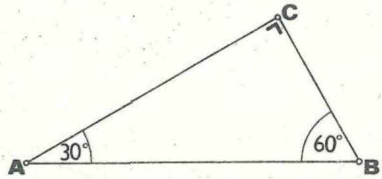
**13.** Кои од следниве фигури се осно симетрични и одреди ги нивните оски на симетријата: а) унија од две прави што се сечат; б) унија од две паралелни прави; в) полуправа; г) полурамнина; д) агол.

**14.** Кои од фигурите на црт. 47 се осно симетрични и одреди ги нивните оски на симетријата?!

**15.** Кои прави при осната симетрија се пресликуваат сами на себе?

**16.** Крајните точки на отсечката $AB$ се симетрични во однос на правата $p$. Каква положба има отсечката $AB$ спрема правата $p$?

**17.** Каква фигура претставува унијата од правоаголниот триаголник $ABC$ (црт. 62) и неговата симетрична слика во однос на правата $AC$.



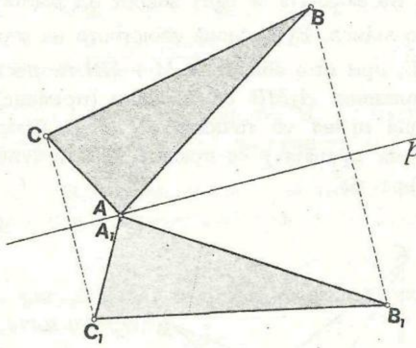

Црт. 62

## § 14. ПРИМЕНА НА ОСНАТА СИМЕТРИЈА

На неколку примери ќе покажеме каква примена има осната симетрија при решавањето на задачи и докажувањето на некои теореми.

**Задача 1.** Даден е триаголник $ABC$ и правата $p$ која минува низ темето $A$, а не ја сече спротивната страна $BC$ на триаголникот. Да се конструира слаката $A_1B_1C_1$ на дадениот триаголник при симетрија во однос на правата $p$ (црт. 63).

**Решение:** За да го конструираме триаголникот $A_1B_1C_1$ доволно е да ги конструираме неговите темиња $A_1$, $B_1$ и $C_1$, кои се симетрични на темињата на дадениот триаголник $ABC$ во однос на правата $p$. Темето $A_1$ се совпаѓа со $A$ (црт. 63). Зошто?

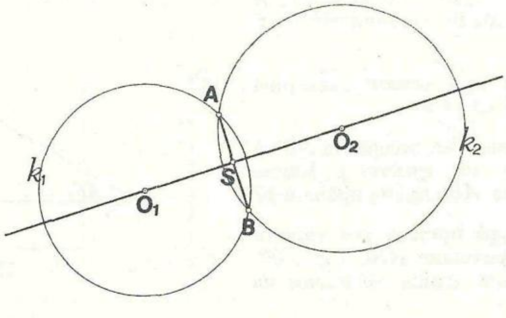



Црт. 63

**Задача 2.** Да се докаже дека пресечните точки на две кружници $k_1$ и $k_2$ се симетрични во однос на правата што минува низ центрите на тие кружници!

*Доказ:* Нека се дадени две кружници $k_1$ $(O_1, r_1)$ и $k_2$ $(O_2, r_2)$, кои се сечат во точките $A$ и $B$ (црт. 64). Знаеме дека кружницата е осно симетрична фигура во однос на која и да било права што минува низ нејзиниот центар (црт. 55). Затоа, правата што минува низ центрите $O_1$ и $O_2$ на двете кружници ќе претставува нивна заедничка оска на симетријата. Ако кружниците $k_1$ и $k_2$ ги пресликаме симетрично во однос на правата

$O_1O_2$, тие ќе се пресликаат сами на себеси. Притоа точката $A$ ќе се преслика во $B$, а $B$ во $A$. Значи, пресечните точки $A$ и $B$ на кружниците се симетрични една на друга во однос на правава $O_1O_2$ (црт. 64), штд. Од симетричноста на точките $A$ и $B$ следува уште и дека:



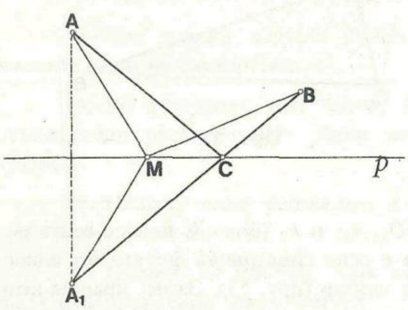

Црт. 64

*Заедничката тетива на две кружници $k_1$ и $k_2$, кои се сечат, е нормална на правата што минува низ центрите на тие кружници и се преполовува од неа* (црт. 64), т.е. $AB \perp O_1O_2$ и $AS \cong SB$.

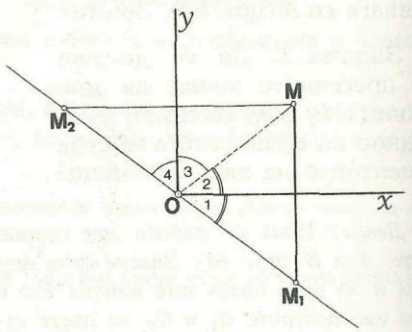
**Задача 3.** Дадена е права $p$ и две точки $A$ и $B$ што лежат на иста страна од неа. На правата $p$ да се одреди точка $C$, таква што збирот од растојанијата $\overline{AC} + \overline{BC}$ да биде возможно најмал.

**Решение:** Точката $A$ симетрично да ја пресликаме на точка $A_1$ во однос на правата $p$ (црт. 65). Потоа произволна точка $M$, што лежи на правата $p$, да ја соединиме со точките $A$, $A_1$ и $B$. Гледаме: $A_1M \cong MA$, бидејќи $A_1M$ и $MA$ се симетрични во однос на правата $p$.

Во задачата се бара збирот од растојанијата $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{A_1M} + \overline{MB}$ да биде возможно најмал. Врз основа својството на страните на триаголникот, имаме: $\overline{A_1M} + \overline{MB} > \overline{A_1B}$, при што збирот $\overline{A_1M} + \overline{MB}$ ќе достигне најмала вредност, еднаква на $\overline{A_1B}$, кога триаголникот $A_1MB$ се изродни (премине) во отсечка, т.е. кога точката $M$ ќе лежи на на една права со точките $A_1$ и $B$. Според тоа, бараната точка $C$ ќе биде пресечната точка на правата $p$ со правата која минува низ точките $A_1$ (слика на $A$ во однос на $p$) и $B$ (црт. 65).




Црт. 65




Црт. 66

**Задача 4.** Во внатрешната област на правиот агол $xOy$ земена е произволна точка $M$. Нека $M_1$ и $M_2$ се симетрични точки на точката $M$ во однос на краците $Ox$ и $Oy$ на правиот агол $xOy$ (црт. 66). Да се докаже дека точките $M_1$, $O$ и $M_2$ лежат на една права.

**Доказ:** За да докажеме дека точките $M_1$, $O$ и $M_2$ лежат на една права, доволно е да докажеме дека збирот на аглите $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 4$ е рамен агол, т.е. дека $\widehat{1}+\widehat{2}+\widehat{3}+\widehat{4}=180°$ (црт. 66).

Познато е дека $\widehat{2}+\widehat{3}=90°$. Од симетричноста на точките $M$ и $M_1$ следува дека се симетрични и аглите $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ во однос на $Ox$. Според тоа, аглите $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ се складни, односно $\widehat{1}=\widehat{2}$. Од симетричноста, пак на точките $M$ и $M_2$ аналогно наоѓаме дека е $\widehat{4}=\widehat{3}$. Ако ги собереме соодветните леви и десни страни на равенствата $\widehat{1}=\widehat{2}$ и $\widehat{4}=3$, добиваме: $\widehat{1}+\widehat{4}=\widehat{2}+\widehat{3}$. Бидејќи е $\widehat{2}+\widehat{3}=90°$, тоа и $\widehat{1}+\widehat{4}=90°$, а збирот на четирите агли е $\widehat{1}+\widehat{4}+\widehat{2}+\widehat{3}=180°$, штд.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Даден е триаголникот $ABC$. Пресликај го тој триаголник симетрично во однос на правата: а) $AB$; б) $AC$; в) $BC$!

**2.** Дадени се права $p$ и две точки $A$ и $B$, што лежат на иста страна од неа. На правата $p$ да се одреди точка $C$, таква што полуправите $CA$ и $CB$ со правата $p$ да образуваат складни агли!

**3.** Даден е рамностран триаголник $ABC$. Земајќи ја секоја страна за оска на симетријата, нацртај ги осно симетричните фигури на тој триаголник. Каква фигура претставува унијата од дадениот и конструираните триаголници?

**4.** Дадени се правите $p$ и $s$ и точка $M$. Конструирај ги точките: $M_1$ — симетрична на $M$ во однос на правата $s$ и $M_2$ — симетрична на $M_1$ во однос на правата $p$!

**5.** Дадени се две различни точки $O$ и $A$. Кое е множеството на точките што се симетрични на точката $A$ во однос на правите кои минуваат низ точката $O$ и сите лежат во една рамнина?

**6.** Одреди ги оските на симетријата на фигурите: а) унија од права и кружница; б) унијата од две складни кружници со различни центри.

**7.** Дадени се две концентрични кружници $k_1$ и $k_2$. Правата $p$ ја сече кружницата $k_1$ во точките $A$ и $B$, а кружницата $k_2$ во точките $C$ и $D$. Докажи дека $AC \cong BD$!

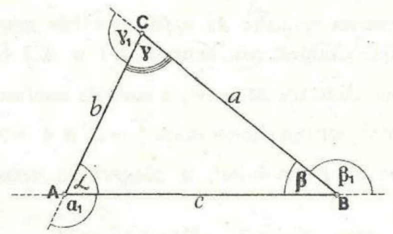
**8.** Дадени се правите $s$ и $s_1$, кои се соодветни при некоја осна симетрија. Одреди ја оската $p$ на симетријата, ако: а) $s$ и $s_1$ се сечат; б) $s \parallel s_1$!

**9.** Нацртај квадрат и низ едно негово теме повлечи права $p$ која да е паралелна со дијагоналата. Нацртај го квадратот, што е симетричен на дадениот во однос на правата $p$!

# § 15. РАВНОКРАК ТРИАГОЛНИК

## 15. 1. ОПШТИ ПОИМИ ЗА ТРИАГОЛНИКОТ (ПОВТОРУВАЊЕ)

Од минатата година познато ни е дека: кај секој триаголник $ABC$ разликуваме: три темиња $A, B, C$; три страни $AB, BC, AC$; три внатрешни агли $\alpha, \beta, \gamma$ и три надворешни агли $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (црт. 67).




Црт. 67

Страната $BC$ се вика *сӣроӣивна* на темето $A$, односно на аголот $\alpha$; страната $AC$ — *сӣроӣивна* на темето $B$, односно на аголот $\beta$; а страната $AB$ — спротивна на $C$, односно на аголот $\gamma$.

Должините на страните ги означуваме соодветно со буквите $a$, $b$, $c$, т.е.

$$a = \overline{BC};\ b = \overline{AC};\ c = \overline{AB}.$$

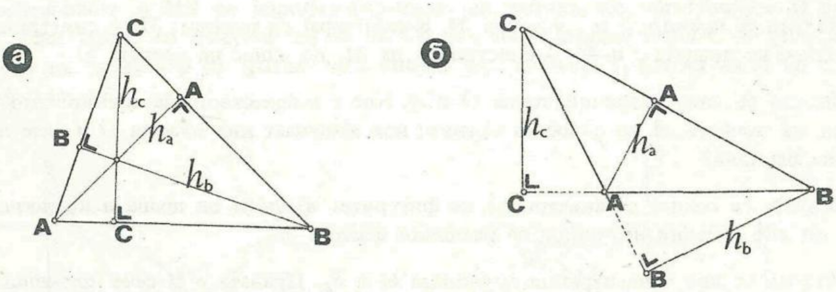
Големината на внатрешните агли $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (или $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$) ја означуваме соодветно со $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (или $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$).

Познат ни е поимот *бисекӣриса на агол.* Тоа е права која, минува низ темето на аголот и го дели истиот на два складни агла.

За триаголникот ќе воведеме и некои нови поими. Тоа се:

*Дефиниција 1.* **Отсечката од нормалата, која е повлечена од кое и да било теме на триаголникот кон спротивната страна, се вика висина на триаголникот** (црт. 68-а, б).

Понекогаш висината на триаголникот ја сече не самата страна, туку нејзиното продолжение (црт. 68 – б).




Црт. 68

Секој триаголник има три висини: $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ (црт. 68). Должините на висините, во зависност од страните кон кои се повлечени, ги означуваме соодветно со $h_a$, $h_b$, $h_c$, т.е. $h_a = \overline{AA_1}$, $h_b = \overline{BB_1}$, $h_c = \overline{CC_1}$

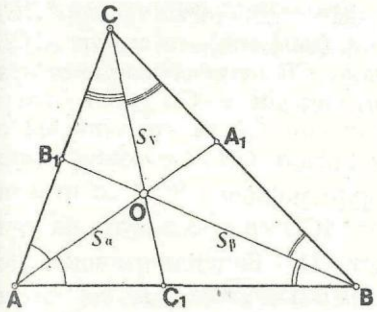
*Дефиниција 2.* **Отссечката од бисектрисата на кој и да било внатрешен агол на триаголоикот од неговото теме до спротивната страна, се вика бисектриса на триаголникот.**

Секој триаголник има три бисектриси: $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ (црт. 69). Должините на бисектрисите на триаголникот, обично, ги означуваме со $s_\alpha$, $s_\beta$, $s_\gamma$.

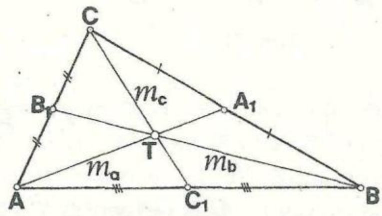
*Дефиниција 3.* **Отсечката, која го соединува кое и да било теме на триаголникот со средината на спротивната му страна, се вика медијана на триаголникот.**

Секој триаголник исто така има и три медијани: $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, (црт. 70). Должните на медијаните ги означуваме соодветно со $m_a$, $m_b$, $m_c$.

Страните и аглите на триаголникот, а исто и висините, бисектрисите и медијаните се викаат *елементи на триаголникот*.




Црт. 69




Црт. 70

Во зависност од должините на страните имаме разнострани и равнокраки триаголници. Триаголник, на кој сите три страни имаат различни должини, се вика *разностран триаголник*.

*Дефиниција 4.* **Триаголник, кој има барем две складни страни, се вика равнокрак триаголник.**

Складните страни се викаат *краци*, а третата страна — *основа* на равнокракиот триаголник. Темето што е спроти основата се вика уште и *врв* на равнокракиот триаголник.

Помеѓу равнокраките триаголници има и такви, кај кои сите три страни се складни. Таквите равнокраки триаголници се викаат *рамнострани триаголници*. Значи, равностраниот триаголник е специјален случај од равнокракиот. Кај него секоја страна може да биде основа.

Во зависност од големината на внатрешните агли, разликуваме: остроаголни, правоаголни и тапоаголни триаголници.

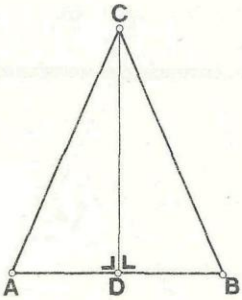
Триаголник кај кој сите внатрешни агли се остри се вика *остроаголен*. Триаголник кој има еден прав агол се вика *правоаголен*; а триаголник кој има еден тап агол се вика *тапоаголен триаголник*.

Во правоаголниот триаголник страната што лежи спроти правиот агол се вика *хипотенуза*, а другите две страни — *катети*.

## 15. 2. СВОЈСТВА НА РАВНОКРАКИОТ ТРИАГОЛНИК

Ќе покажеме дека важи следнава:

*Теорема*: **Рамнокракиот триаголник е оско симетрична фигура, чија оска на симетријата е бисекрисата што е повлечена од врвот кон основата на триаголникот.**



Црт. 71

*Доказ*: Нека е даден равнокрак триаголник $ABC$ ($AC \cong BC$), во кој $CD$ е бисектриса што е повлечена од врвот $C$ кон основата $AB$ (црт. 71).

Штом $CD$ е бисектриса на триаголникот $ABC$, тоа, според дефиницијата, имаме дека аглите $ACD$ и $BCD$ се складни, т.е. $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$. Ако листот го превиткаме долж правата $CD$, тогаш аголот $BCD$ ќе се совпадне (поклопи) со аголот $ACD$, при што кракот $CB$ ќе се совпадне со кракот $CA$. Но бидејќи е $CB \cong CA$, тоа и темето $B$ од кракот $CB$ ќе се совпадне со темето $A$ од кракот $CA$. Со совпаѓањето, пак, на темињата $B$ и $A$, очигледно е дека триаголникот $BCD$ се пресликува на триаголникот $ACD$; а триаголникот $ACD$ се пресликува на триаголникот $BCD$ во однос на оската $CD$ (црт. 71). Бидејќи равнокракиот триаголник $ABC$ е унија од триаголниците $ACD$ и $BCD$, тоа тој симетрично се пресликува во однос на бисектрисата $CD$ сам на себе, штд.

Од горнава теорема непосредно следуваат следниве својства:

**1°. Во равнокракиот триаголник аглите при основата се складни,** т.е. $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$.

**2°. Бисектрисата $CD$, што е повлечена од врвот кон основата е симетрала на основата на равнокракиот триаголник,** т.е. таа е нормална на основата ($CD \perp AB$) и ја преполнува ($AD \cong DB$), односно точката $D$ е средишна точка на основата $AB$ (црт. 71).

Од својството 2° следува и:

**3°. Во равнокракиот триаголник бисектрисата $CD$, што е повлечена од врвот кон основата, истовремено е и висина и медијана на триаголникот.**

Гледаме дека, во равнокракиот триаголник $ABC$ една иста отсечка $CD$ (црт. 71) поседува неколку својства: таа е и бисектриса повлечена од врвот, и симетрала на основата, и висина повлечена кон основата, и медијана повлечена кон основата. Со секое од тие својства положбата на отсечката $CD$ е еднозначно определена.

Бидејќи равностраниот триаголник е специјален случај на равнокрак триаголник, кај кого сите три страни се складни, тоа која и да било негова страна може да се смета како основа, а другите две — краци.

Спореед тоа, во равностраниот триаголник секоја бисектриса е и симетрала на основата, и висина и медијана на триаголникнт.

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Колку оски на симетријата има равнокракиот триаголник, што не е равностран?

**2.** Колку оски на симетријата има равностраниот триаголник?

**3.** Во равнокрак триаголник, што не е равностран, од неговите темиња повлечени се сите негови бисектриси, висини и медијани. Колку различни отсечки притоа се добиваат?

**4.** Бисерктисата што е повлечена од врвот кон основата, на какви триаголници го дели равнокракиот триаголник?

**5.** Каков е триаголникот, ако медијаната и висината, што се повлечени кон една иста страна, се совпаѓаат?

## § 16. СИМЕТРАЛА НА ОТСЕЧКА

### 16. 1. СВОЈСТВА НА СИМЕТРАЛАТА НА ОТСЕЧКА

Нека е дадена отсечката $AB$, која е дел од правата $p$, т.е. $AB \subset p$ (црт. 72), а точката $S$ нека е нејзина средишна точка ($AS \cong SB$)

Познато ни е дека отсечката е осно симетрична фигура. Таа има две оски на симетријата; едната е правата $p$ на која лежи отсечката $AB$; а втората е правата $s$, која е нормална на отсечката $AB$ и минрва низ нејзината средишна точка $S$. Втората оска на симетријата се вика уште и *симетрала на отсечката* $AB$.

*Дефиниција*: **Симетрала на дадена отсечка се вика правата која е нормална на дадената отсечка и минува низ нејзината средина.**

Да видиме кои својства ги имаат точките од симетралата $s$ на дадена отсечка $AB$.

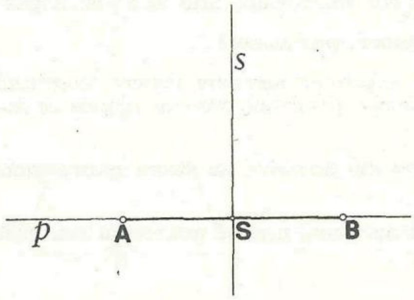
*Теорема 1-а.* **Ако точката $M$ лежи на симетралата на дадена отсечка $AB$, тогаш таа е еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката.**

*Доказ*: Нека $s$ е симетрала на отсечката $AB$, т.е. $s \perp AB$ и $AS \cong SB$ (црт. 73). Треба да докажеме дека за произвотна точка $M \in s$ важи $\overline{MA} = \overline{MB}$.

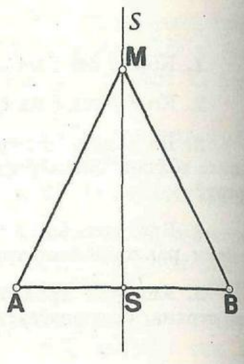
Ако точката $M$ се совпаѓа со средината $S$ на отсечката $AB$, навистина е $\overline{SA} = \overline{SB}$.

Нека $M \not\equiv S$. Точката $M$ да ја соединиме со точките $A$ и $B$. При тоа го добивме триаголникот $ABM$, во кој отсечката $MS$ е и негова медијана и негова висина. Според тоа, триаголникот $ABM$ е рамнокрак, т.е.

$$\overline{MA} = \overline{MB}. \text{ Следствено: } M \in s \Rightarrow \overline{MA} = \overline{MB}, \text{ штд.}$$




Црт. 72




Црт. 73

Ќе докажеме дека важи и обратната теорема:

*Теорема 1-б.* **Ако некоја точка $M$ е еднакво оддалечена од крајните точки на дадена отсечка $AB$, тогаш таа лежи на симетралата на отсечката $AB$.**

*Доказ*: Нека е $s$ симетрала на отсечката $AB$. Треба да докажете: за секоја точка $M$, ако е $\overline{MA} = \overline{MB}$, тогаш е $M \in s$.

Ако $M \equiv S$, тогаш навистина $M \in s$.

Нека $M \not\equiv S$. Точката $M$ да ја соединиме со точките $A$ и $B$. Притоа го добиваме триаголникот $ABM$, кој е рамнокрак, бидејќи е $MA \cong MB$. Отсечката $MS$ е медијана кон основата $AB$ на тој триаголник; според тоа, таа е и висина кон основата $AB$. Значи: $MS \perp AB$ и $\overline{AS} = \overline{SB}$. Но во тој случај точката $M$ лежи на симетралата $s$ на отсечката $AB$. Следствено: $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow M \in s$, штд.

Докажаните две теореми (права и обратна) заедно ги формулираме вака:

**Множеството од сите точки, кои се еднакво оддалечени од крајните точки на отсечката $AB$, се совпаѓа со симетралата на таа отсечка.**

Тоа значи дека: Една точка е на еднакви растојанија од две дадени точки $A$ и $B$, ако и само ако таа лежи на симетралата на отсечката $AB$, односно дека: сите точки од симетралата $s$ на отсечката $AB$ имаат едно карактеристично својство — да се еднакво оддалечени од точките $A$ и $B$.

Врз основа на горната теорема заклучуваме дека:

**Симетралата на секоја тетива на кружницата минува низ центарот на кружницата. Таа е воедно и симетрала на кружните лаци над неа.**

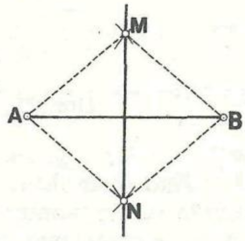
### 16. 2. КОНСТРУКЦИЈА НА СИМЕТРАЛАТА НА ОТСЕЧКА

Досега при решавањето на некои задачи со цртање, се ползувавме со шестар, линир, правоаголен триаголник и агломер. Но понекогаш цртањето на геометриските фигири можеме да го изведеме и само со помош на шестар и линир. Решавањето на задачите со цртање и тоа со помош само со шестар и линир, во геометријата го викаме *конструкција* или *конструирање*, а задачите — *конструктивни задачи*.

**Задача:** Да се конструира симетралата на дадена отсечка $AB$!

Задачата ќе ја решиме врз основа на познатото својство на симетралата на отсечка, и тоа вака:

Со отвор на шестарот поголем од половина на отсечката $AB$, околу крајните точки $A$ и $B$ опишуваме кружни лаци, кои ќе се сечат во две точки $M$ и $N$ (црт. 74). Правата која минува низ точките $M$ и $N$ е бараната симетрала на отсечката $AB$.



Црт. 74

**Доказ:** Точките $M$ и $N$ лежат истовремено и на едниот и на другиот кружен лак, кои се опишани со ист отвор на шестарот; затоа тие се еднакво оддалечени од крајните точки на отсечката $AB$, т.е.

$$\overline{MA} = \overline{MB} \text{ и } \overline{NA} = \overline{NB}$$

Според тоа, согласно теоремата *1-б* точките $M$ и $N$ се две точки од бараната симетрала на отсечката $AB$.

## § 17. ОПИШАНА КРУЖНИЦА ОКОЛУ ТРИАГОЛНИКОТ

Да се опише кружница околу даден триаголник $ABC$, значи да се конструира кружница $k$ која ќе минува низ трите темиња на триаголникот, т.е. да е

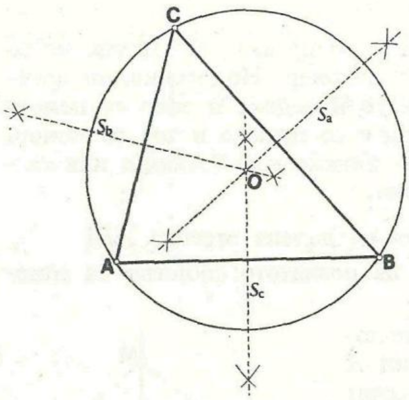
$$A \in k, B \in k \text{ и } C \in k.$$

Очигледно е дека: центарот $O$ на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$ мора да биде еднакво оддалечен од трите темиња на триаголникот, т.е.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

Ќе ја докажеме следнава:

*Теорема*: **Симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка, која е и центар на опишаната кружница околу триаголникот.**



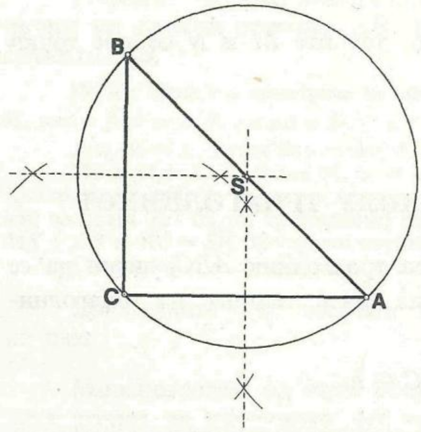

Црт. 75

*Доказ*: Нека е даден триаголникот $ABC$ (црт. 75). Да ги конструираме симетралите $s_a$ и $s_b$ на страните $BC$ и $AC$ на тој триаголник. Тие ќе се сечат во некоја точка $O$. Точката $O$ бидејќи лежи на симетралата $s_a$ на страната $BC$, таа е еднакво оддалечена од темињата $B$ и $C$. Но, бидејќи точката $O$ лежи и на симетралата $s_b$ на страната $AC$, таа е еднакво оддалечена и од темињата $A$ и $C$.

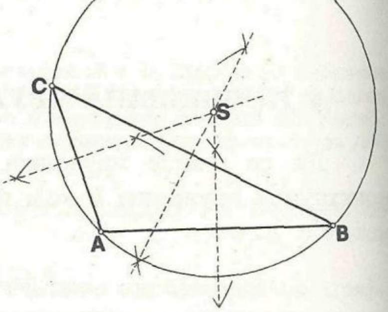
Оттука заклучуваме дека и третата симетрала $s_c$ на страната $AB$ мора да мине низ точката $O$ (Зошто?). А тоа значи дека точката $O$ е заеднички пресек на трите симетрали на страните на триаголникот $ABC$.

Ако растојанието од точката $O$ до кое и да било теме го земеме за радиус на кружница, што ќе ја опишеме од точката $O$ како центар, тогаш таа ќе минува низ трите темиња на триаголникот $ABC$.

Со тоа теоремата е докажана.




Црт. 76




Црт. 77

Ако кај правоаголниот триаголник $ABC$ (црт. 76) го конструираме пресекот на симетралите на неговите страни, ќе забележиме дека тој ќе падне во средината на хипотенузата. Конструирај потоа еден тапоаголен триаголник (црт. 77) и конструирај го пресекот на симетралите на неговите страни! Што забележуваш, каде паѓа пресекот на симетралите на страните?

**1.** Што е симетрала на дадена отсечка?

**2.** Кое карактеристично својство го имаат сите точки, што лежат на симералата на една отсечка? Докажи го тоа својство!

**3.** Дадена е отсечка $AB$. Конструирај ја нејзината симетрала!

**4.** Конструирај ја симетралата на отсечката $AB$, така што потребните цртања да се извршат само на една страна на отсечката $AB$!

**5.** Кое својство го има симетралата на која да било тетива во кружницата?

**6.** Конструирај го центарот на дадена кружница, ако на цртежот тој не е одбележан!

**7.** Што значи да се опише кружница околу даден триаголник?

**8.** Конструирај ги симетралите на страните на даден: а) остроаголен; б) правоаголен; в) тапоаголен триаголник. Каде се наоѓаат нивните пресеци?

**9.** Каква фигура образува множеството на врвовите на сите рамнокраки триаголници со иста основа, а кои лежат во една рамнина. Направи цртеж!

**10.** Посматрај го тркалото на еден велосипед што се движи праволиниски. Каква фигура образува множеството на центрите на тркалото што се наоѓа во движење? Направи цртеж!

**11.** Каква фигура образува множеството на центрите на кружниците, кои минуваат низ една дадена точка $A$, а имаат еднакви радиуси! Направи цртеж!

**12.** Нацртај по еден остроаголен, правоаголен и тапоаголен триаголник, па околу секој од нив опиши кружница!

## § 18. БИСЕКТРИСА НА АГОЛ

### 18. 1. СВОЈСТВА НА БИСЕКТРИСТА НА АГОЛ

Знаеме дека аголот е осно симетрична фигура. Негова оска на симетријата е правата $s$, која минува низ неговото теме и го дели истиот на два складни агли. Таа се вика уште и *бисектриса на аголот.*

Да видиме кои својства ги имаат точките од бисектрисата $s$ на даден агол. Ќе разгледуваме агли, што се помали од рамен агол т.е. чија големина е помала од 180°.

*Теорема 1-а.* **Ако точката $M$ лежи на бисектрисата на даден агол $XOY$, тогаш таа е еднакво оддалечена од краците на аголот.**

*Доказ*: Нека $OC$ е бисектриса на аголот $XOY$ (црт. 78). Треба да докажеме дека произволна точка $M \in OC$ е еднакво оддалечена од краците на аголот $XOY$, т.е. дека $\overline{MA} = \overline{MB}$, каде што $MA \perp OX$ и $MB \perp OY$.

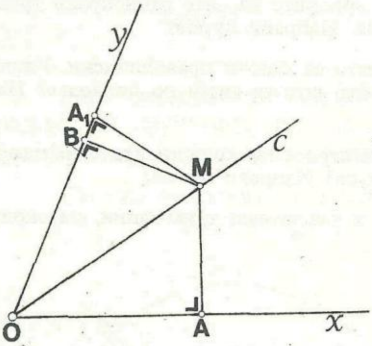
Да ја разгледаме осната симетрија $S_{oc}$ со оска $OC$. Кај неа аголот $XOC$ ќе се преслика на складниот нему агол $YOC$, при што кракот $OX$ ќе се преслика на кракот $OY$, а кракот $OC$ останува неподвижен.

Точката $A \in OX$ ќе се преслика во некоја точка $A_1 \in OY$. Ако допуштиме да е $A_1 \not\equiv B$, тогаш доаѓаме во ситуација дека од една иста точка $M$ се повлечени две различни нормали $MA_1$ и $MB$ кон кракот $OY$, а тоа е невозможно (види теорема во § 13). Значи $A_1 \equiv B$, т.е. точката $A$ се пресликува во точката $B$, а со тоа и отсечката $MA$ — на отсечката $MB$. Оттука следува дека $MA \cong MB$, односно $\overline{MA} = \overline{MB}$, штд.

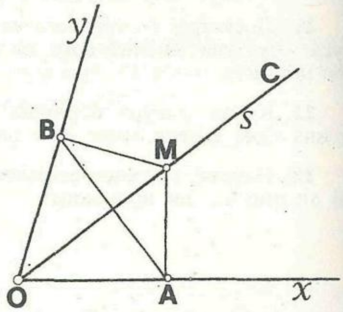
Важи и обратната теорема од теоремата 1-*а*.

*Теорема 1-б.* **Ако некоја точка $M \in \sphericalangle XOY$ е еднакво оддалечена од краците на аголот $XOY$, тогаш таа лежи на бисектрисата на тој агол.**

*Доказ*: Нека точката $M \in \sphericalangle XOY$ е еднакво оддалечена од краците на аголот $XOY$, т.е. нека е $\overline{MA} = \overline{MB}$, каде што $MA \perp OX$ и $MB \perp OY$ (црт. 79). Треба да докажеме дека, тогаш точката $M$ лежи на бисектрисата $OC$ на аголот $XOY$.




Црт. 78




Црт. 79

Од претпоставката $\overline{MA} = \overline{MB}$ следува дека точката $M$ лежи на симетралата $s$ на отсечката $AB$. Да ја разгледаме осната симетрија $S_s$ со оска $s$. При таа симетрија: $M \to M$, $A \to B$, $MA \to MB$, $AX \to BY$. Знаеме дека, ако две прави се симетрични во однос на некоја права и не се паралелни, тогаш тие се сечат во точка, што лежи на оска на симетријата $s$. Според тоа, правата $s$ минува низ пресечната точка $O$ на правите $AX$ и $BY$. Во тој случај е $\sphericalangle AOM \cong \sphericalangle BOM$, откаде заклучуваме дека правата $s$ се совпаѓа со бисектрисата $OC$ на аголот $XOY$.

Значи, точката $M$ лежи на бисектрисата на аголот $XOY$, штд.

Од горното уште следува дека точките $A$ и $B$ се еднакво оддалечени од темето на аголот $XOY$. т.е. $\overline{OA} = \overline{OB}$ (Зошто?).

Двете теореми (права и обратна) заедно ги формулираме вака:

**Множеството од сите точки на аголот $XOY$, кои се еднакво оддалечени од неговите краци, се совпаѓа со бисектрисата на тој агол.**

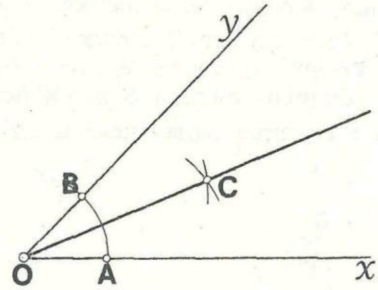
Тоа значи дека: Една точка е на еднакви растојанија од краците на даден агол, ако и само ако таа лежи на бисектрисата на тој агол, односно дека: Сите точки од бисектрисата на даден агол имаат едно карактеристично својство да се еднакво оддалечени од краците на тој агол.

## 18. 2. КОНСТРУКЦИЈА НА БИСЕКТРИСАТА НА АГОЛ

Конструкцијата на бисекрисата на агол се засновува врз заклучоците до кои дојдовме при докажувањето на теоремата *1-6*, имено дека: Симетралата $s$ на отсечката $AB$, чии крајни точки лежат на краците на аголот $XOY$, и се еднакво оддалечени од неговото теме $O$, т.е. $\overline{AO} = \overline{BO}$, се совпаѓа ҫе бисектрисата на аголот $XOY$ (црт. 79).

Според тоа, за да ја конструираме бисектрисата на аголот $XOY$, треба да земеме на неговите краци $OX$ и $OY$ две точки $A$ и $B$, такви што $\overline{OA} = \overline{OB}$, а потоа да ја конструираме симетралата на отсечката $AB$ (црт. 79).

Конструкцијата на бисектрисата на даден агол $XOY$ практично ја вршиме вака: Од темето $O$ со произволен радиус опишуваме кружен лак, кој ги сече краците $OX$ и $OY$ на аголот во точките $A$ и $B$ (црт. 80). Потоа од точките $A$ и $B$ како центри опишуваме кружни лаци со еднаков радиус, кои ќе се пресечат во некоја точка $C$. Правата, која минува низ темето $O$ на аголот и точката $C$, е бараната бисектриса на аголот $XOY$ (црт. 80).



Црт. 80

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Кое својство го имаат точките што лежат на бисектрисата на даден агол. Докажи го тоа својство!

**2.** Даден е агол $XOY$. Конструирај ја неговата бисектриса!

**3.** Конструирај ги бисектрисите на два напоредни агли! Под каков агол се сечат нивните бисектриси? Докажи!

**4.** Даден е агол $XOY$ и права $p$, која ги сече двата крака на аголот. На правата $p$ одреди точка која е еднакво оддалечена од краците на аголот $XOY$.

**5.** Даден е аголот $XOY$ и кружница $k$. која ги сече краците на надениот агол. Да се одредат точките од кружницата $k$, кои се еднакво оддалечени од краците на дадениот агол!

**6.** Каква фигура образува множеството на сите точки, од кои секоја е еднакво оддалечена од две прави што се сечат?

**7.** На страната $BC$ од триаголникот $ABC$ да се конструира точка, која е еднакво оддалечена од другите две страни на триаголникот!

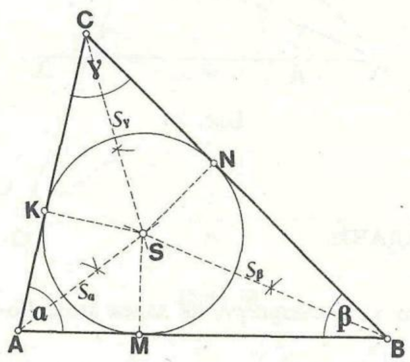
**8.** Докажи дека од дадена точка $M$ кон дадена права $p$ не можат да се повлечат повеќе од две коси отсечки со еднакви должини!

## § 19. ВПИШАНА КРУЖНИЦА ВО ТРИАГОЛНИКОТ

Да се впише кружница во даден триаголник $ABC$, значи да се нацрта кружницата $k$ која ќе се допира до сите три страни на триаголникот. Очигледно е дека центарот на вписаната кружница во триаголникот мора да биде еднакво оддалечен од трите страни на триаголникот. Да ја докажеме следнава:

*Теорема*: **Бисектрисите на внатрешните агли на триаголникот се сечат во една иста точка. Таа точка е центар на впишаната кружница во триаголникот.**

*Доказ*: Нека е даден произволен триаголник $ABC$ (црт. 81). Да ги конструираме бисектрисите $s_\alpha$ и $s_\beta$ на аглите $\alpha$ и $\beta$ на триаголникот. Тие се сечат во некоја точка $S$. Точката $S$, бидејќи лежи на бисектрисата $s_\alpha$ на аголот $\alpha$, таа е еднакво оддалечена од краците (страните) $AB$ и $AC$. Но, бидејќи точката $S$ лежи истовремено и на бисектрисата $s_\beta$ на аголот $\beta$, таа е еднакво оддалечена и од страните $AB$ и $BC$.




Црт. 81

Оттука заклучуваме дека и третата бисектриса $s_\gamma$ на аголот $\gamma$ мора да мине низ точката $S$, која е еднакво оддалечена од страните $AC$ и $BC$ (краци на аголот $\gamma$). Тоа значи дека точката $S$ е заеднички пресек на сите три бисектриси на аглите на триаголникот $ABC$.

Ако растојанието на точката $S$ до која да било страна на триаголникот го земеме за радиус на кружница што ќе ја опишеме од точката $S$ (како центар), ќе забележеме дака таа ќе ги допира трите страни на триаголникот $ABC$.

Значи, пресекот на бисектрисите на внатрешните агли на триаголникот претставува центар на впишаната кружница во триаголникот.

Со тоа теоремата е докажана.

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што значи да се впише кружница во даден триаголник?

**2.** Даден е произволен триаголник $ABC$. Конструирај ги бисектрисите на неговите внатрешни агли. Каде се сечат тие? Докажи!

**3.** Нацртај по еден остроаголен, правоаголен и тапоаголен триаголник, па во секој од нив впиши кружница.

**4.** Нацртај еден рамнокрак триаголник и во него впиши кружница!

**5.** Нацртај еден рамностран триаголник, па во него впиши, а околу него опиши кружница! Што забележуваш? Каде лежат центрите на тие две кружници во рамностраниот триаголник?

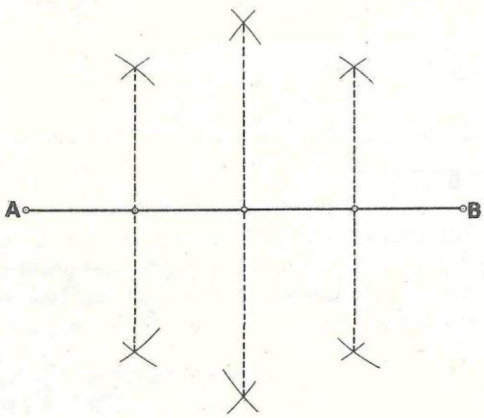
## § 20. ОСНОВНИ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Врз основа конструкцијата на симетрала на отсечка и бисектриса на агол ќе ги решиме следниве конструктивни задачи:

**Задача 1.** Дадена отсечка да се подели на 2; 4; 8;... складни делови.

**Решение:** Познато ни е дека симетралата на која и да било отсечка ја поделува истата на два складни дела. Според тоа, задачата:
да се подели дадена отсечка $AB$ на два складни дела, ќе ја решиме со конструкција на симетралата на отсечката $AB$ (црт. 82).

Ако над секоја половина од отсечката $AB$ конструираме симетрали, дадената отсечка ќе се подели на 4 складни делови (црт. 82). А со повторување на оваа постапка над добиените делови, дадената отсечка можеме да ја поделиме на 8, 16, 32,... складни делови.




Црт. 82

**Задача 2.** Низ дадена точка $M$, што не лежи на дадена права $p$, да се повлече нормала на правата $p$.

**Решение:** Знаеме дека симетралата на дадена отсечка, покрај тоа што ја дели истата на два складни дела, таа е и нормална на неа. Да го искористиме тоа при решавањето на горнава задача.

Од точката $M$, како центар, да опишеме произволен кружен лак, кој ќе ја пресече правата $p$ во две точки $A$ и $B$. Според теоремата *1-б*, во § 16 точката $M$ лежи на симетралата на отсечката $AB$. Меѓутоа за конструирање на симетралата на отсечката $AB$, потребно е да конструираме уште една точка $N$ од неа. Правата, која минува низ точките $M$ и $N$ е бараната нормала на правата $p$ (црт. 83).

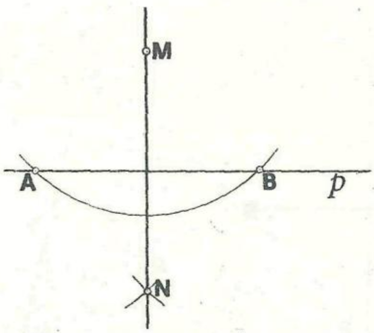
**Забелешка:** Точката $N$ (црт. 83) можеме да ја конструираме и така што таа да биде на исто растојание до правата $p$, како што е и дадената точка $M$ до правата $p$. Тоа го постигнуваме, ако лаците опишани од точките $A$ и $B$ бидат со ист радиус, како и лакот што е опишан околу дадената точка $M$. Во тој случај точката $N$ ќе претставува во исто време и симетрична точка за точката $M$ во однос на правата $p$.

**Задача 3.** Низ точката $M$, што лежи на дадена права $p$, да се повлече нормала на таа права.

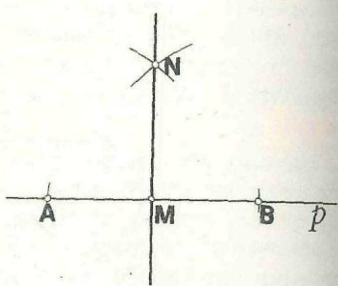
**Решение:** Од точката $M$ со произволен отвор на шестарот ја пресекуваме правата $p$ во две точки $A$ и $B$, кои се еднакво оддалечени од точката $M$, т.е. $\overline{MA} = \overline{MB}$.

Симетралата на отсечката $AB$ ќе ја даде бараната нормала (црт. 84).

Конструираната нормала низ точката $M$ кон дадената права $p$ во оваа и во претходната задача е единствена согласно теоремата во § 13.




Црт. 83




Црт. 84

**Задача 4.** Во почетокот на полуправата $OX$ да се конструира прав агол.

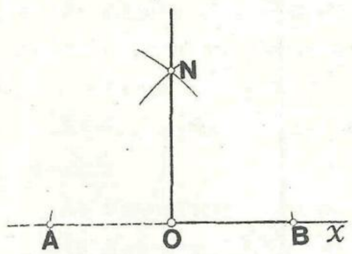
**Решение:** Ако полуправата $OX$ ја продолжиме откај страната на почетокот $O$ (црт. 85), тогаш конструкцијата се сведува како кај задачата 3.

**Задача 5.** Да се конструира тангента во дадена точка $M$ на кружницата $k$!

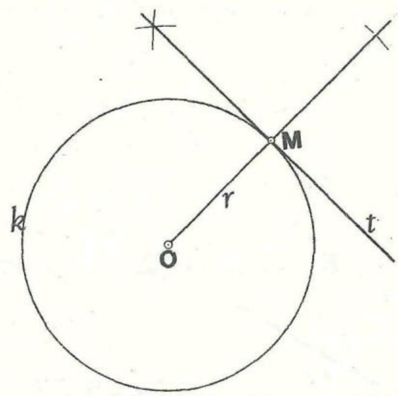
**Решение:** Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и една произволна точка $M \in k$ (црт. 86). Од минатата година познато ни е дека:

**Тангентата на кружницата е нормална на радиусот во допирната точка.**

Врз основа на тоа својство, бараната тангента на кружницата $k$ во точката $M$ ја конструираме вака: Го повлекуваме радиусот ($OM$) на дадената точка $M$, а потоа во точката $M$ конструираме нормала на тој радиус. Тоа го правиме како кај задачите 3 и 4. Таа нормала ќе биде бараната тангента на кружницата $k$ во точката $M$.




Црт. 85



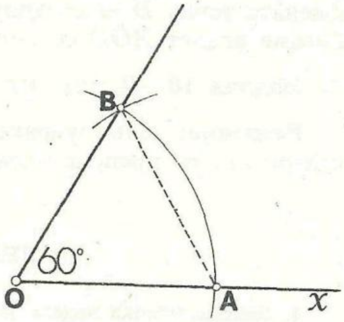

Црт. 86

**Задача 6.** Даден агол да се подели на 2; 4; 8;... складни делови.

**Решение:** Ако ја конструираме бисектрисата на даден агол, таа ќе го подели на два складни дела. Ако над секоја половина од дадениот агол конструираме нови бисектриси, тогаш аголот се поделува на 4 складни делови. Со повторувањето на оваа постапка над добиените делови, дадениот агол го поделуваме на 8; 16; 32,... складни дела.

**Задача 7.** Да се конструира агол со големина 60°!

**Решение:** Познато ни е дека секој агол во рамностраниот триаголник има по 60°. Според тоа, за да конструираме агол од 60° треба да конструираме рамностран триаголник. Тоа го правиме вака: Нацртуваме една полуправа $OX$ (црт. 87). Од точката $O$ (почеток на полуправата $OX$) опишуваме кружен лак со произволен радиус, која ја сече полуправата $OX$ во некоја точка $A$. Потоа од точката $A$ со истиот отвор на шестарот го пресекуваме опишаниот кружен лак во некоја точка $B$. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB}$, тогаш триаголникот $OAB$ ќе биде рамностран. Според тоа, така конструираниот агол ќе има $\widehat{AOB} = 60°$.



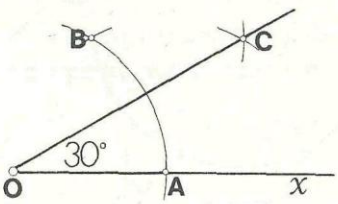

Црт. 87

**Задача 8.** Да се конструира агол со големина 30°.

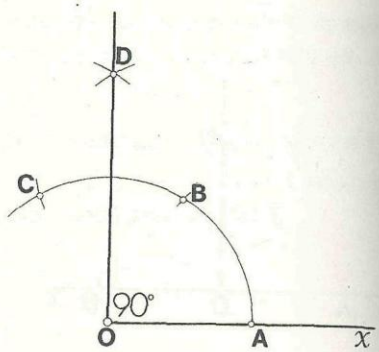
**Решение:** Агол од 30° се конструира кога прво ќе конструираме агол од 60°, па тој агол го преполовиме (црт. 88).

**Задача 9.** Да се конструира агол од 90°!

**Решение:** Порано прав агол конструиравме со помош на симетрала на отсечка. Тука ќе покажеме како може да се корструира агол од 90° со помош на собирање на аглите 60° и 30°.




Цтт. 88




Цтт. 89

Нацртуваме една полуправа $OX$ (црт. 89). Од точката $O$ со произволен радиус опишуваме кружен лак, кој ја сече полуправата $OX$ во точката $A$. Од точката $A$, со истиот отвор на шестар, два пати едно по друго ја пренесуваме по опишаниот кружен лак должината $OA$, па така на кужниот лак добивме две точки $B$ и $C$. Потоа треба лакот $BC$ (т.е. $O\widehat{B}C = 60°$) да се преполови. За таа цел од точките $B$ и $C$ опишуваме кружни лаци со еднакви радиуси. Тие лаци ќе се сечат во некоја точка $D$. Добиената точка $D$ ја соединуваме со почетокот на полуправата $OX$, па го добиваме аголот $AOD$ со големина 90° (црт. 89).

**Задача 10.** Да се конструира агол со големина 45°.

**Решение:** Конструираме прво агол од 90°, па тој агол со помош на бисектрисата го преполовуваме. Така добиваме агол од 45°.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Дадена отсечка подели ја на: а) 2; б) 4; в) 8 складни дела!

**2.** Конструирај кружница, така што отсечката $AB$ да биде нејзин дијаметар!

**3.** Дадена е права $p$ и точка $M \notin p$. Низ точката $M$ повлечи нормала на правата $p$.

**4.** Дадена е права $a$ и точка $A \in a$. Низ точката $A$ повлечи нормала на правата $a$!

**5.** Дадена е точка $C$ и права $p$. Конструирај точка $C_1$, што е симетрична на точката $C$ во однос на правата $p$!

**6.** На дадена права $p$ одреди ја онаа точка, која е најблиска до дадена точка $M \notin p$!

**7.** Дадена е отсечка $AB$. Конструирај таква отсечка $CD$, чија должина е еднаква $\overline{CD} = \frac{3}{8}\overline{AB}$!

**8.** Конструирај прав агол во почетокот на дадена полуправа $OX$!

**9.** Конструирај квадрат со страна долга $a=6$ *cm*!

**10.** Конструирај правоаголник со должини на страните: $a=12{,}5$ *cm*. и $b=7{,}2$ *cm*!

**11.** Нацртај еден тап агол и подели го на 4 складни делови!

**12.** Нацртај агол со големина $\alpha=152°$, потоа конструирај друг агол $\beta$, чија големина е еднаква $\beta = \frac{5}{8}\cdot\alpha$!

**13.** Конструирај го аголот $\alpha$, ако ни е позната големината на еден негов дел $\frac{2}{9}\cdot\alpha = 28°$!

**14.** Конструирај ги аглите со големина: 60°, 30°, 15°!

**15.** Конструирај ги аглите со големина: 120°, 90°, 45°, 22°30′!

**16.** Конструирај ги аглите со големина: $105° = 60° + 45°$, $135° = 90° + 45°$, $75° = 45° + 30°$

**17.** Подели го рамниот агол на три складни делови!

**18.** Подели го правиот агол на три складни делови!

**19.** Низ дадена точка $C$ да се повлече права, што ќе биде паралела сѐ дадена права $p$!

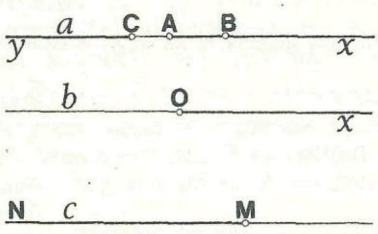
**20.** Нацртај кружница со произволен радиус и истата подели ја на 2; 4; 8 складни делови!

Глава IV

# ВЕКТОРИ. ТРАНСЛАЦИЈА

## § 21. НАСОКА. НАСОЧЕНОСТ НА ПОЛУПРАВИТЕ

За две полуправи велиме дека се паралелни, ако тие лежат на една иста права или на две паралелни прави. На црт. 90 нацртани се пет паралелни полуправи. Полуправите $Ax$, $Bx$ и $Cy$ лежат на иста права $a$; а полуправите $Ox$ и $MN$ — на две паралелни прави $b$ и $c$, при што $a \| b \| c$.



Црт. 90

За паралелните полуправи ќе воведеме еден нов поим — *насока* на полуправите. На пример: полуправите $Ax$ и $Bx$ велиме дека имаат *иста насока*, или, пократко тие се *исто насочени*; а полуправите $Ox$ и $MN$ имаат *спротивни насоки*, или тие се *спротивно насочени*. Да ги разјасниме овие поими.

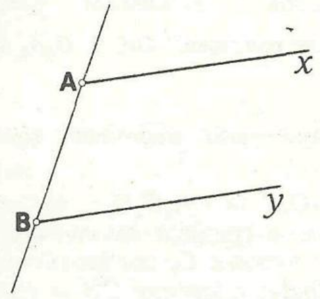
**1°.** Две полуправи, кои лежат на една иста права, велиме дека имаат иста насока (или тие се истонасочени), ако една од нив се содржи во другата; а велиме пак, дека тие имаат спротивни насоки (или тие се спротивно насочени), ако ниту една од нив не се содржи во другата.

На пример, полуправите $Ax$ и $Bx$ се исто насочени, бидејќи $Bx \subset Ax$, а полуправите $Ax$ и $Cy$ се спротивно насочени, бидејќи $Ax \not\subset Cy$ и $Cy \not\subset Ax$ (црт. 90).

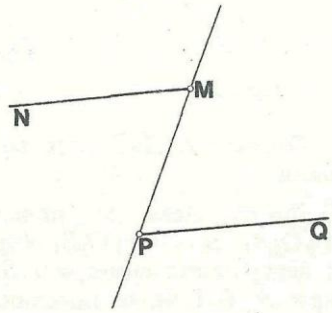
**2°.** За две паралелни полуправи, што не лежат на една права секогаш постои права која минува низ нивните почетни точки. Таа права ја дели рамнината на две полуравнини. Ако паралелните полуправи лежат во една од тие полурамнини, тогаш велиме дека полуправите се исто насочени. Ако, пак, паралелните полуправи лежат во различни полурамнини, тогаш велиме дека тие се спротивно насочени.

На пример, полуправите $Ax$ и $By$ на црт. 91 се исто насочени, а полуправите $MN$ и $PQ$ на црт. 92 се спротивно насочени.

За непаралелните полуправи не се воведуваат поимите исто насочени и спротивно насочени. Според тоа, поимите исто насочени полуправи и спротивно насочени полуправи го опфаќаат и поимот дека тие се паралелни.




Црт. 91




Црт. 92

Очигледно е дека истонасоченоста и спротивноначоченоста се две релации (соодноси) меѓу паралелните полуправи. Истонасоченоста на полуправите ја означуваме со знакот „$\uparrow\uparrow$", а спротивнонасоченоста — со знакот „$\uparrow\downarrow$". На пример: $Ax\uparrow\uparrow By$; $MN\uparrow\downarrow PQ$ (црт. 91 и 92).

Може да се докаже дека релацијата истонасоченост на полуправите ги има својствата на:

**1°.** *Рефлексивност*: $Ax\uparrow\uparrow Ax$.

**2°.** *Симетричност*: $Ax\uparrow\uparrow By \Rightarrow By\uparrow\uparrow Ax$.

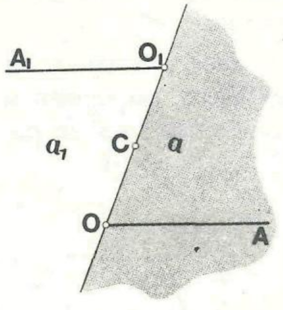
**3°.** *Транзитивност*: $(Ax\uparrow\uparrow By$ и $By\uparrow\uparrow Cz) \Rightarrow Ax\uparrow\uparrow Cz$.

Јасно е дека постојат бесконечно многу полуправи, што се исто насочени со дадена полуправа $Ax$. Множеството на сите тие исто насочени полуправи дефинираа една *заедничка насока*, а полуправата $Ax$ е еден *претставник* на таа насока.

Спротивно насочените полуправи го имаат следново својство:

*Теорема 1.* **Две спротивнасочени полуправи се централно симетрични во однос на средината на отсечката, што ги соединува нивните почетни точки.**

*Доказ*: Нека е $OA \uparrow\downarrow O_1A_1$; $C \in OO_1$; $OC \cong O_1C$. Правата $OO_1$, што минува низ почетните точки $O$ и $O_1$ на полуправите $OA$ и $O_1A_1$ ја дели рамнината на две полурамнини $\alpha$ и $\alpha_1$.




Црт. 93

Очигледно е дека при централната симетрија $S_c$ точката $O$ ќе се преслика во точката $O_1$. Правата $OA$ ќе се преслика на права, која минува низ точката $O_1$ и е паралелна со $OA$, а тоа е правата $A_1O_1$. Полурамнина $\alpha$ ќе се преслика на полурамнината $\alpha_1$. Оттука станува јасно дека полуправата $OA \subset \alpha$ ќе се преслика на полуправата $O_1A_1 \subset \alpha_1$ (црт. 93).

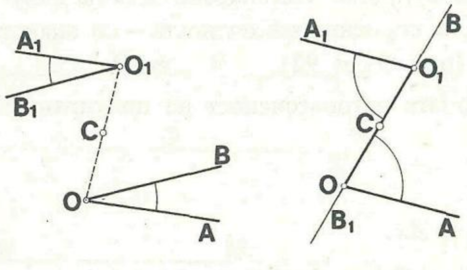
Со тоа теоремата е докажана за случајот кога спротивно насочените полуправи $OA$ и $O_1A_1$ не лежат на една права.

*Теорема 2.* **Два агла со соодветно спротивно насочени краци се складни.**

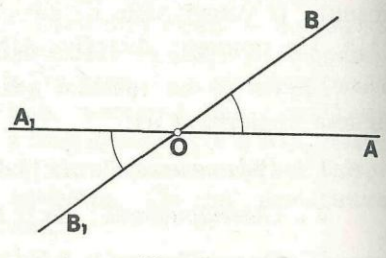
*Доказ*: Нека се дадени аглите $AOB$ и $A_1O_1B_1$, такви што: $OA\uparrow\downarrow O_1A_1$ и $OB\uparrow\downarrow O_1B_1$ (црт. 94). Нека $C$ е средина на отсечката $OO_1$. При централната симетрија $S_c$ во однос на точката $C$, согласно теоремата 1, кракот $OA$ ќе се преслика на кракот $O_1A_1$; а кракот $OB$ — на кракот $O_1B_1$.

Според тоа, аголот $AOB$ ќе се преслика на аголот $A_1O_1B_1$, а тоа значи дека $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A_1O_1B_1$.

*Последица*: **Вкрстените агли** $AOB$ **и** $A_1OB_1$ (црт. 95), **се складни.**

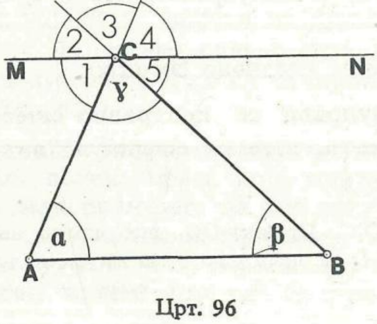



Црт. 94




Црт. 95

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ




Црт. 96

**1.** Релацијата спротивнонасоченост на полуправите дали го има својството на: а) симетричност; б) транзитивност; в) рефлективнотс?

**2.** Каква фигура ќе биде: а) пресекот; б) унијата на две исто насочени полуправи, кои лежат на една права?

**3.** Каква фигура може да биде: а) пресекот, б) унијата на две спротивно насочени полуправи, кои лежат на една права?

4. На црт. 96 имаме $MN \parallel AB$ и $C \in MN$. Кои парови агли на тој цртеж се: а) со соодветно исто насочени краци; б) со соодветно спротивно насочени краци?

5. Докажи дека две спротивно насочени полуправи, што лежат на една права, се централно симетрични во однос на средината на отсечката што ги соединува нивните почетни точки.

## § 22. ВЕКТОРИ

### 22. 1. ПОИМ ЗА ВЕКТОР

Познато ни е дека симболите $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ означуваат множества од две точки $A$ и $B$. Велиме дека тие множества се еднакви (идентични) и пишуваме $\{A, B\} = \{B, A\}$. Но често пати е потребно: една (седно која) од тие две точки да ја сметаме како *прва*, а другата како *втора*. Во таков случај велиме: точките $A$ и $B$ образуваат *подредена двојка* или *двојка точки*, која ја запишуваме $(A, B)$. Во $(A, B)$ $A$ е *прва точка* или *почеток* на двојката, а $B$ е *втора точка* или *крај* на двојката. Според тоа, $(A, B)$ и $(B, A)$ се две различни двојки точки, т.е. $(A, B) \neq (B, A)$.

Знаеме дека секои две точки $A$ и $B$ определуваат една и само една отсечка $AB$ (или $BA$), чии краеви се точките $A$ и $B$. Тоа е така, бидејќи досега не обрнувавме внимание на редот во кој се дадени краевите на отсечката, т.е. не правиме разлика меѓу отсечката $AB$ и отсечката $BA$. Меѓутоа, постојат проблеми во кои од битно значење е и редот на крајните точки на отсечката. Во таквите случаи, кога треба да се разликува „почетокот" $A$ на отсечката $AB$ од нејзиниот „крај" $B$, односно кога краевите на отсечката образуваат подредена двојки точки, велиме дека тоа е *ориентирана (насочена) отсечка* или *вектор*.

*Дефиниција 1.* **Отсечката, чии краеви се подредена двојка точки, се вика вектор.**

Векторот, што го образува двојката точки $(A, B)$, симболички го означуваме: $\overrightarrow{AB}$ (читај вектор $AB$). При тоа, на прво место го пишуваме почетокот, а на второ место — крајот на векторот.

Меѓутоа, векторите често ќе ги означуваме е со една буква: $\overrightarrow{a}$ (вектор $a$), $\overrightarrow{b}$ (вектор $b$), $\overrightarrow{c}$ (вектор $c$), итн. (црт. 97).

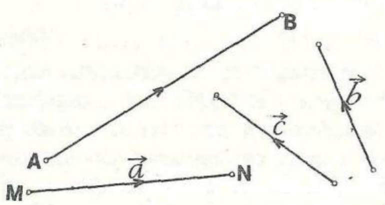
Векторот $\overrightarrow{a}$ е наполно определен ако е дадена двојката соодветни точки $M$ и $N$ (неговиот почеток $M$ и крај $N$), т.е. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{MN}$ (црт. 97).

Кај секој вектор разликуваме: *насока*, *правец* и *должина*.

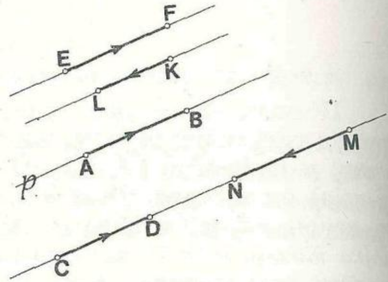
Насока на векторот $\overrightarrow{AB}$ ја викаме насоката (ориентацијата) од почетокот на векторот кон неговиот крај; а ја означуваме со стрелка во една негова точка, што е насочена кон крајот на векторот (црт. 97).

Правата $p$, на која векторот $\overrightarrow{AB}$ ѝ припаѓа (лежи) се вика *носач на векторот* (црт. 98). Знаеме дека постојат бесконечно многу прави што се паралелни со дадената права $p$. Множеството на сите тие прави велиме дека определуваат еден *правец*, а правата $p$ е *претставник* на тој правец.

Правец на векторот $\overrightarrow{AB}$ го викаме правецот, чиј претставник е носачот на векторот $\overrightarrow{AB}$. Оттука заклучуваме дека: Два вектора имаат ист правец, ако носачите им се совпаѓаат или се паралелни. На пример, сите вектори претставени на црт. 98 имаат ист правец, а векторите на црт. 97 имаат различни правци.




Црт. 97




Црт. 98

За два вектора, кои имаат ист правец, велиме дека имаат и една *иста насока* ако тие се ориентирани (односно стрелките им гледаат) на една иста страна од правецот; а имаат *спротивни насоки* ако тие се ориентирани во различни страни од правецот

**Пример:** На црт. 98 векторот $\overrightarrow{AB}$ има иста нарока со $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$; а спротивна насока со $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Ако, пак, два вектора имаат различни правци, тогаш тие имаат и различни насоки.

Должина на векторот $\overrightarrow{AB}$ ја викаме должината на отсечката $AB$. Должината на векторот се вика уште и *модул*, *интезитет* или *апсолутна вредност на векторот*, а симболички се означува со $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Вектор, чија должина е еднаква на нула, се вика *нула-вектор* и се означува со $\vec{O}$, т.е. $\vec{O}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\ldots$

Нула-векторот се смета дека има правец и насока на секој друг вектор.

## 22. 2. ЕДНАКВОСТ НА ВЕКТОРИ

*Дефиниција 3.* **Два вектора се еднакви ако и само ако тие имаат ист правец, иста насока и еднакви должини.**

**Пример:** Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се еднакви, а исто и векторите $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{LK}$ (зошто?). Тоа го запишуваме $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{LK}$ (црт. 99). Но, векторите $\overrightarrow{LK}$ и $\overrightarrow{MN}$, иако имаат ист правец и насока, не се еднакви, бидејќи немаат исти должини $|\overrightarrow{LK}| \neq |\overrightarrow{MN}|$. Затоа можеме да запишеме $\overrightarrow{LK} \neq \overrightarrow{MN}$. Векторите $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$, иако имаат еднакви должини и ист правец, не се еднакви, т.е. $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{RS}$, бидејќи немаат иста насока (црт. 99).

Од дефиницијата 3 следува дека: **Векторот е еднозначно определен со неговиот правец, насока и должина.**

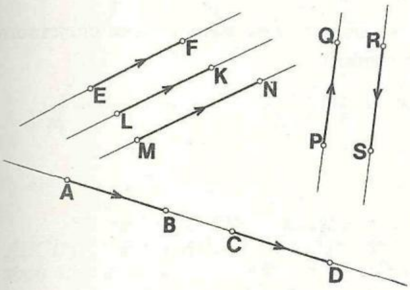
Два вектора, кои имаат ист правец, а насоките им се исти или спротивни; се викаат *колинеарни вектори.* Такви се векторите на црт. 98.

Нула-векторот сметаме дека е колинеарен со секој вектор.

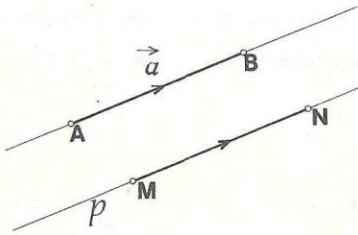
Множеството од даден вектор $\vec{a}$ и сите еднакви на него вектори образува една *класа V еднакви вектори.* Векторот $\vec{a}$ е *претставник* на класата V еднакви вектори, но нејзин претставник може да биде и кој било друг вектор од истата класа.

Нека на рамнината е даден векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и една произволна точка $M$ (црт. 100). Ќе покажеме дека важи следнава:

*Теорема*: **Во секоја точка $M$ од рамнината постои единствен вектор $\overrightarrow{MN}$ со почеток $M$, кој е еднаков на даден вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.**




Црт. 99




Црт. 100

*Доказ:* Согласно аксиомата за паралелност постои една и само една права $p$, која минува низ точката $M$ и е паралелна со правата $AB$ — носач на дадениот вектор $\vec{a}$. Ако на правата $p$ од точката $M$ ја пренесеме во насока на векторот $\vec{a}$ отсечката $AB$, ќе добиеме единствена точка $N$, таква што $\overline{MN} = \overline{AB}$. Двојката точки $(M, N)$ го определува векторот $\overrightarrow{MN}$ кој е еднаков на дадениот вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Конструкцијата на векторот $\overrightarrow{MN}$ се вика *пренесување на векторот $\vec{a}$* од точката $M$ (црт. 100). Значи, даден вектор $\vec{a}$ може да се пренесе од која и да било точка во рамнината.

Од дефиницијата 3 следува дека релацијата еднаквост на вектори ги има својствата на:

1°. *Рефлексивност*: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

2°. *Симетричност*: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

3°. *Транзитивност*: $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Дадени се двојките точки: $(A, B)$, $(C, D)$, $(K, L)$, $(S, T)$, $(X, Y)$. Запиши ги векторите што ги определуваат тие!

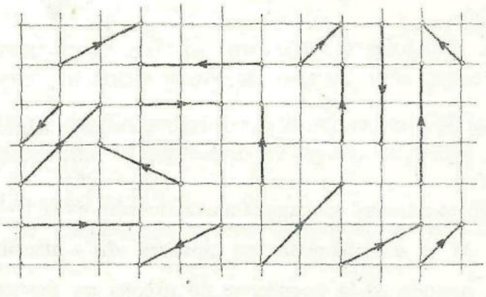
**2.** Каква разлика постои меѓу поимите: „правец на векторот“ и „насока на векторот“?

**3.** Можат ли два вектора, кои не лежат на една права да бидат колинеарни?

**4.** Познато е дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PS}$ се колинеарни. Дали се колинеарри и векторите $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{SP}$?

**5.** Испитај и утврди дали релацијата колинеарност на векорите го има својството на: а) рефлексивност; б) симетричност; в) транзитивност!

**6.** Покажи кои од векторите на црт. 101 се еднакви!

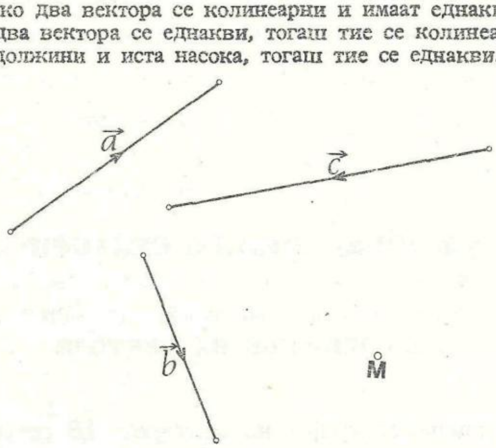


Црт. 101

**7.** Даден е вектор $\vec{a}$ и точка $S$. Колку вектори, еднакви на векторот $\vec{a}$ можат да се постават од точката $S$?

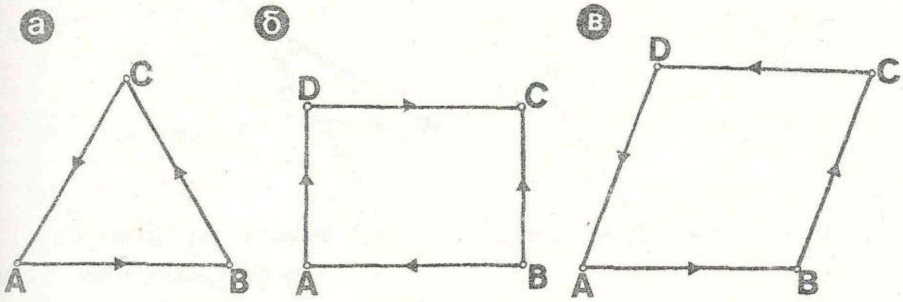
**8.** На црт. 102 дадени се векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и точката $M$. Пренеси го секој од тие вектори од точката $M$!

**9.** Кои од следниве тврдења се точни: а) Ако два вектора се колинеарни, тогаш тие се еднакви; б) Ако два вектора се колинеарни и имаат еднакви должини, тогаш тие се еднакви; в) Ако два вектора се еднакви, тогаш тие се колинеарни; г) Ако два вектора имаат еднакви должини и иста насока, тогаш тие се еднакви.



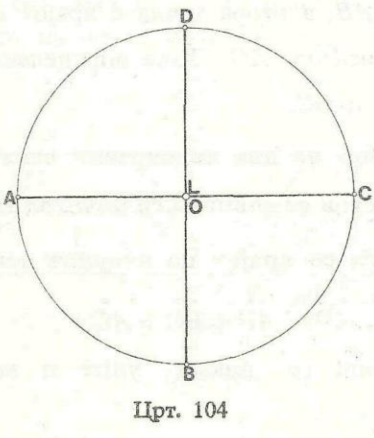

Црт. 102

**10.** Точно ли е тврдењето: $(AB \parallel KM$ и $\overline{AB}=\overline{KM}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KM}$?




Црт. 103

**11.** На црт. 103 нацртани се: а) рамностран триаголник $ABC$; б) правоаголник $ABCD$; в) ромб $ABCD$ со чии темиња се зададени повеќе вектори. Колку различни вектори има на секоја од нацртаните фигури?



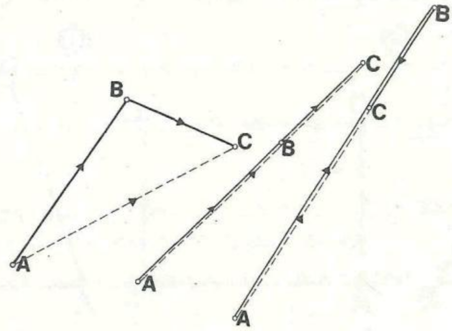

Црт. 104

**12.** Радиусите на кружницата $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ образуваат четири прави агли (црт. 104). Земи произволна точка $K$ и конструирај ги векторите: $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{OD}$. Одреди каква фигура образуваат тие вектори. Каков е векторот $\overrightarrow{SK}$?

## § 23. ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ

### 23. 1. СОБИРАЊЕ НА ВЕКТОРИ

На црт. 105 гледаме: крајот на векторот $\overrightarrow{AB}$ се совпаѓа со почетокот на векторот $\overrightarrow{BC}$. Во тој случај велиме дека векторот $\overrightarrow{BC}$ е *надоврзан* на векторот $\overrightarrow{AB}$.




Црт. 105

Очигледно е дека подредената двојка точки $(A, C)$, чија прва точка е почетокот на векторот $\overrightarrow{AB}$, а втора точка е крајот на надоврзаниот вектор $\overrightarrow{BC}$, определува нов вектор $\overrightarrow{AC}$. Така определениот вектор $\overrightarrow{AC}$ се вика *збир на векторите* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

*Дефиниција 1.* **Збир на два надоврзани вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ се вика векторот $\overrightarrow{AC}$, чиј почеток се совпаѓа со почетокот на првиот вектор $\overrightarrow{AB}$, а крајот му се совпаѓа со крајот на вториот вектор $\overrightarrow{BC}$,** т.е.

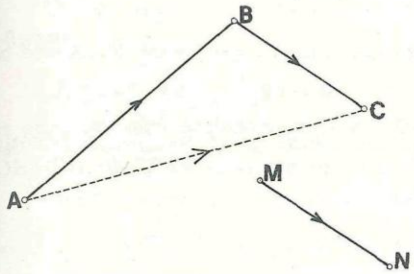
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Векторите собироци се викаат уште и *компоненти*, а нивниот збир — *резултанта*.

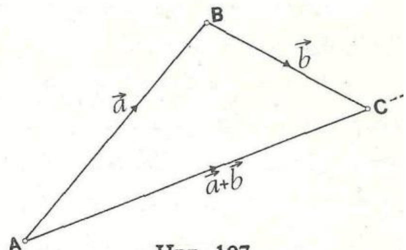
Лесно се уверуваме дека горната дефиниција може да се примени и за собирање на два произволни вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{MN}$, каде што точките $A$, $B$, $M$ и $N$ се произволно распоредени во рамнината (црт. 106). За тат цел доволно е векторот $\overrightarrow{MN}$ да се пренесе од точката $B$:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Значи, конструкцијата на збирот на два вектора се сведува на конструкција на триаголникот $ABC$ (црт. 107). Велиме дека збирот на два вектора го конструираме по *правилото на триаголник.*




Црт. 106

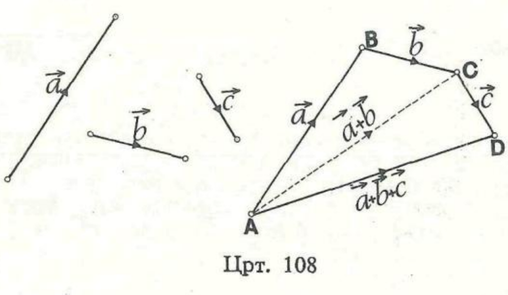



Црт. 107

Може да се покаже дека збирот на два вектора секогаш е еднозначно определен вектор.

Збир на три вектори е збирот од збирот на првите два вектора и третиот вектор (црт. 108), збир на четири вектори е збирот од збирот на првите три вектори и четвртиот вектор, итн.

Според тоа, ќе важи: Збир од три или повеќе надоврзани вектори е вектор, чиј почеток се совпаѓа со почетокот на првиот вектор, а крајот му се совпаѓа со крајот на последниот вектор.




Црт. 108

Нека е даден вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и нула-векторот $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$. Од дефиницијата на два вектора следува дека: $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ т.е.

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Затоа велиме дека: **нула-векторот $\vec{0}$ е неутрален елемент при собирањето.**

Операцијата собирање на вектори ги има својствата на:

**1°.** *Комутативност*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

**2°.** *Асоцијативност*: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$

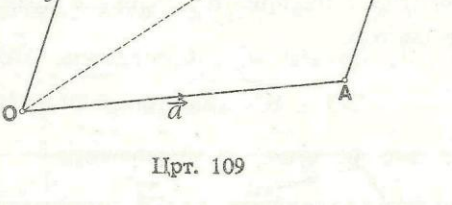
**Доказ:** Горниве својства ќе ги докажеме во специјален случај кога векторите се неколинеарни.

**1°.** Нека се дадени векторите $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, чии почетоци се совпаѓаат. Да го конструираме паралелограмот $OACB$ (црт. 109). Од него имаме: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$; $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$, а по правилото на триаголник: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$

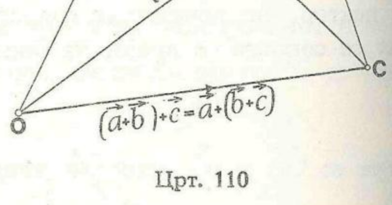
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

Отука следува дека: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}$

Својството 1° открива друг начин на конструкција на збирот на два вектора според таканареченото *правило на паралелограмот*, кое е илустрирано на црт. 109.




Црт. 109




Црт. 110

**2°.** Нека се дадени векторите $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$ (црт. 110).

Тогаш е: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

Значи: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

## § 23. 2. ОДЗЕМАЊЕ НА ВЕКТОРИ

Прво да го воведеме поимот спротивни вектори.

*Дефиниција 2.* **Два колинеарни вектори, кои имаат еднакви должини и спротивни насоки, се викаат спротивни вектори.**

На пример, на векторот $\overrightarrow{AB}$ спротивен му е векторот $\overrightarrow{BA}$.

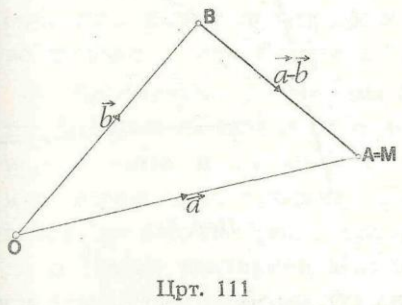
Спротивниот вектор на векторот $\vec{a}$, обично, го означуваме со $-\vec{a}$. Јасно е дека секој вектор има свој спротивен вектор. Врз основа на дефиницијата за збир на два вектора, следува дека е:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}, \text{ односно } \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

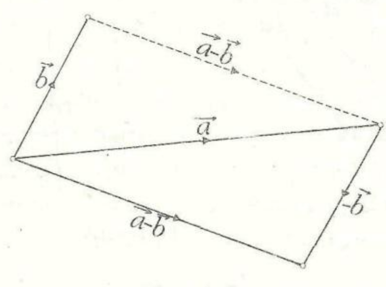
Одземањето на векторите го дефинираме како обратна операција на собирањето.

*Дефиниција 3.* **Разлика на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, која симболички ја запишуваме $\vec{a}-\vec{b}$, се вика векторот $\vec{x}$, таков што $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$.**

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат заеднички почеток $O$, т.е. нека е $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ (црт. 111). Бараниот вектор $\vec{x}$ (разликата $\vec{a}-\vec{b}$) може да се пренесе од точката $B$, т.е. нека е $\vec{x}=\overrightarrow{BM}$. Но, бидејќи збирот $\vec{b}+\vec{x}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$ мора да е еднаков на векторот $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, тоа точката $M$ ќе се совпадне со точката $A$, т.е. $M\equiv A$.




Црт. 111




Црт. 112

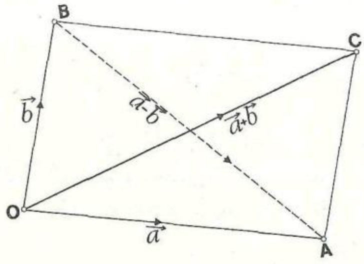
Според тоа, правилото за одземање на вектори ќе гласи;

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

Ќе покажеме дека: Одземањето на векторот $\vec{b}$ може да се замени со додавање на нему спротивниот вектор $-\vec{b}$ (црт. 112), т.е. дека важи:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Навистина: $\vec{b}+(\vec{a}+(-\vec{b}))=\vec{a}+(\vec{b}+(-\vec{b}))=\vec{a}+\vec{O}=\vec{a}.$



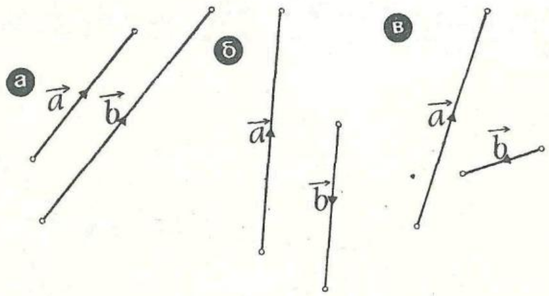
Црт. 113

Лесно уочивме дека: ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ги пренесеме од иста точка $O$, т.е. ако $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$ и над нив конструираме паралелограм $OACB$ (црт. 113), тогаш дијагоналата $OC$ го определува збирот $\vec{a}+\vec{b}$, а другата дијагонала $BA$ на тој паралелограм ја определува разликата $\vec{a}-\vec{b}$ на дадените вектори (црт. 113).

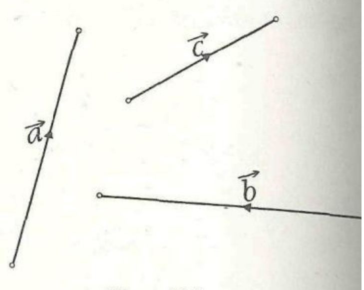
## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Дадени се два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (црт. 114). Конструирај ги збировите: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{a}$!

**2.** Дадени се три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (црт. 115). Конструирај ги збировите: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}$!



Црт. 114



Црт. 115

**3.** Радиусите на кружницата $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ образуваат четири прави агли (црт. 104). Конструирај ги зборовите: $\vec{OA}+\vec{OB}$, $\vec{OB}+\vec{OC}$, $\vec{OC}+\vec{OD}$, $\vec{OD}+\vec{OA}$, $\vec{OA}+\vec{OC}$, $\vec{OB}+\vec{OD}$, $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}$!

**4.** Како се применува правилото на паралелограмот при собирањето на три вектори? Покажи го тоа со векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$ на црт. 115!

**5.** Дали се собираат колинеарните вектори по правилото на паралелограмот?

**6.** Нека $A$, $B$, $C$ се три произволни точки. Докажи дека важи релацијата $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{O}$!

**7.** Земи два произволни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, потоа конструирај ја нивната разлика $\vec{a} - \vec{b}$!

**8.** Дадени се два колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со иста насока. Конструирај ја разликата $\vec{a} - \vec{b}$, ако е: а) $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, б) $|\vec{a}| < |\vec{b}|$, в) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$!

**9.** Дадени се три вектори со заеднички почеток: $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$. Конструирај ги векторите: а) $\vec{SA} - \vec{SC}$, б) $\vec{SB} - \vec{SA}$, в) $\vec{SC} - \vec{SB}$!

**10.** Покажи дека важи тврдењето: $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$!

## § 24. ПРИМЕНА НА ВЕКТОРИ

Сите величини што се изучуваат во математиката, физиката, механиката и некои други науки, можат да се поделат во две групи. Во едната група спаѓаат величините, како што се, на пример: должина, плоштина, волумен, маса, температура, време и др., кои наполно се определени со броеви, што ја изразуваат нивната големина во соодветни единици мерки. На пример, кога ќе кажеме дека училницата има должина 7 m, или дека садот има волумен 5 *l*, тогаш должината на училницата и волуменот на садот со тие податоци се наполно определени. Таквите величини примено е да се викаат **скаларни величини** или, кратко, **скалари.**

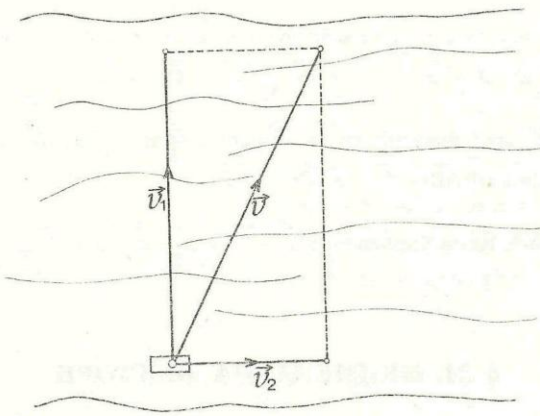
Во другата група спаѓаат величините, кои не можат наполно да се определат само со својата бројна вредност. Такви се, на пример, величините во физиката: сила, брзина, забрзување и др.

Ако кажеме: ветрот има брзина 30 km на час, тоа само со тој податок брзината на ветрот не е наполно определена; бидејќи таа се карактеризира уште и со својата насока: север-југ, југ-север, исток-запад или некоја друга насока. Таквите величини, кои се карактеризираат, освен со својата бројна вредност, уште и со својата насока, примено е да се викаат **векторски величини.**

Јасно е дека за наполното задавање на секоја векторска величина, освен нејзината апсолутна вредност, потребно е да биде дадена и нејзината насока и правец.

Секоја скаларна величина при утврден размер може да се претстави (изрази) со отсечка на бројната оска. Слично на тоа, при избран размер, векторските величини, пак, можат да се изразат со соодветни геометриски вектори, со кои се запознавме сега. На тој начин, собирањето и одземањето на векторските величини го заменуваме со собирање и одземање на нивните вектори.

Да го разгледаме движењето на еден моторен чамец напречно на течењето на реката (црт. 116).




Црт. 116

Нека бројната вредност на брзината на движењето на чамецот во мирна вода изнесува $|\vec{V}_1| = 4$ m/сек. а таа на текот на реката $|\vec{V}_2| = 2$ m/сек. Сопствената брзина на чамецот 4 m/сек. на цртежот (црт. 116) претставена е со вектор $\vec{V}_1$ со должина 40 mm и насока напречна на насоката на текот на реката, а брзината на текот на реката 2 m/сек. — со вектор $\vec{V}_2$ со должина 20 mm и насока — насока на текот на реката.

Јасно е дека збирот $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ ќе ни го даде векторот $\vec{V}$, што соодветствува на брзината на чамецот во реката при избраниот размер на цртање.

**Векторите играат многу голема улога во математиката и во другите науки. Нивната примена е разновидна, а со неа ќе се запознаеме во некои од наредните теми.**

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Познато е дека двојките точки $(A, B)$ и $(A_1, B_1)$ се симетрично расположени во однос на точката $S$. Што може да се каже за правците на векторите $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1B_1}$?

**2.** Познато е дека двојките точки $(S, T)$ и $(S_1, T_1)$ се ситетрично расположени во однос на правата $p$. Што може да се каже за правците на векторите $\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{S_1T_1}$ и $\overrightarrow{ST} - \overrightarrow{S_1T_1}$?

**3.** Кои величини се викаат скаларни, а кои — векторски величини? Со што ги изразуваме векторските величини?

**4.** Даден вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ претстави го како збир од: а) два; б) три, в) четири вектори!

5. Во физиката и техниката често се користи разложување на даден вектор на два вектора, чии правци се дадени. Земи произволен вектор $\vec{a} = \vec{AB}$ и истиот разложи го на два вектора, чии правци се дадени!

6. Нека $A$, $B$, $C$, $D$ се темиња на еден четириаголник. Докажи дека е: $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{O}$!

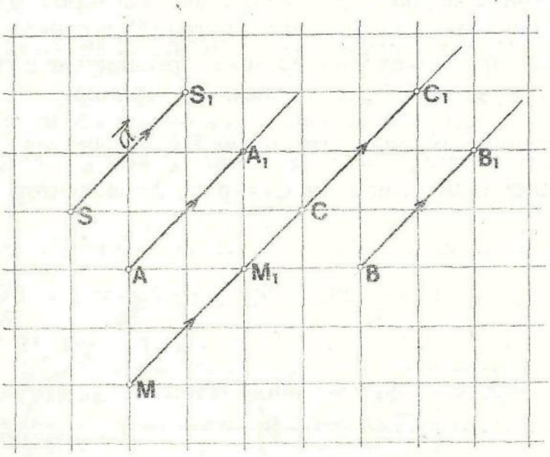
7. Покажи со конструкција дека важи релацијата: $\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$!

## § 25. ТРАНСЛАЦИЈА

### 25. 1. ПОИМ ЗА ТРАНСЛАЦИЈА

Во рамнината $\pi$ нека е даден вектор $\vec{a} = \vec{SS_1}$ и нека треба да се изврши пресликување $t$ на точките од рамнината $\pi$ согласно правилото:

На секоја точка $M$ од рамнината ѝ се придружува точка $M_1$ од истата рамнина, таква што векторот $\vec{MM_1}$ да е еднаков на дадениот вектор $\vec{SS_1}$, т.е. $\vec{MM_1} = \vec{SS_1}$. На тој начин имаме: $M \xrightarrow{t} M_1$, $A \xrightarrow{t} A_1$, $B \xrightarrow{t} B_1$, $C \xrightarrow{t} C_1$, итн. (црт. 117.)




Црт. 117

За да се определи точката $M_1$ — слика на точката $M$ при пресликувањето $t$, доволно е дадениот вектор $\vec{a}$ да се пренесе од точката $M$. При тоа го добиваме единствениот вектор $\vec{MM_1}$, кој е еднаков на дадениот вектор $\vec{a}$. Крајот на векторот $\vec{MM_1}$ е бараната точка $M_1$ — слика на $M$ (црт. 117).

Очигледно е дека при горното пресликување $t$ на секоја точка $M$ од рамнината $\pi$ може да ѝ се придружи (да ѝ соодветствува) по една и само една точка $M_1$ од истата рамнина. Значи, тоа е **еднозначно пресликување** на целата рамнина на самата себе.

*Дефиниција*: **Пресликувањето на рамнината на самата себе, при кое на секоја точка $M$ од рамнината ѝ соодветствува точка $M_1$, таква што векторот $\overrightarrow{MM_1}$ да е еднаков на даден вектор $\vec{a}$, се вика транслација на рамнината за вектор $\vec{a}$.**

Дадениот вектор $\vec{a}$ се вика *вектор на транслацијата*, а точките $M$ и $M_1$ (слика на $M$) се викаат *соодветни* (*кореспонденти*) *точки* на *транслацијата*. Транслацијата за вектор $\vec{a}$ симболички ќе ја означиме со $t_{\vec{a}}$ а точките $M$ и $M_1$ да бидат нејзини соодветни точки со

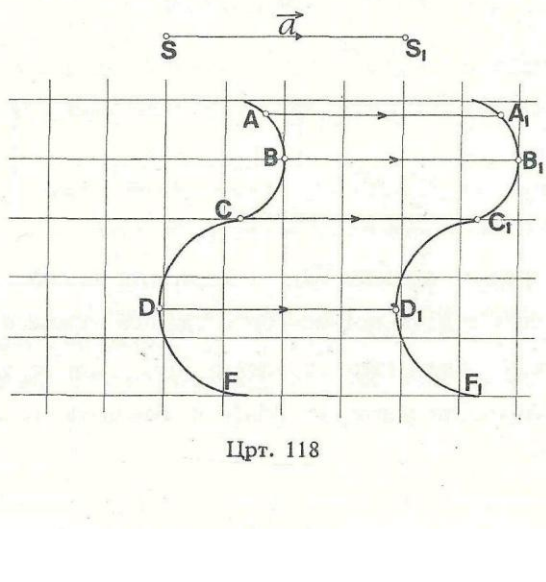
$$M \xrightarrow{t_{\vec{a}}} M_1 \text{ или } M_1 = t_{\vec{a}}(M).$$

Транслацијата е зададена, ако е даден нејзиниот вектор $\vec{a}$ или кои било две нејзини соодветни точки $M$ и $M_1$, кои образуваат една подредена двојка точки $(M, M_1)$.

Затоа велиме: **Секоја транслација е еден вектор,** и обратно: **секој вектор е една транслација.** На пример: ако векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ го разгледуваме како транслација, тогаш неговиот крај $(B)$ е слика на почетокот $(A)$.

При транслација можеме да вршиме пресликување не само на целата рамнина, туку и на некој дел од неа. На пример:

Нека во рамнината е даден вектор $\vec{a} = \overrightarrow{SS_1}$ и некоја фигура $F$ (црт. 118). Да извршиме транслација на фигурата $F$ за вектор $\vec{a}$ значи: за се-




Црт. 118

која точка $A, B, C, \ldots, M, \ldots$ од фигурата $F$ да ја одредиме нејзината слика $A_1, B_1, C_1, \ldots M_1, \ldots$ за вектор $\vec{a}$. Множеството на сите така добиени точки $A_1, B_1, C_1, \ldots M_1, \ldots$ ќе ја образува фигурата $F_1$ — *слика* на фигурата $F$.

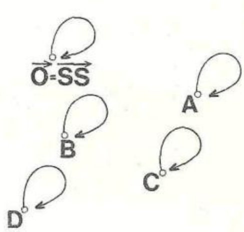
За фигууата $F_1$ велиме дека е добиена од фигурата $F$ со транслација на фигурата $F$ за вектор $\vec{a}$. Симболички тоа го означуваме:

$$F \xrightarrow{t_{\vec{a}}} F_1 \text{ или } F_1 = t_{\vec{a}}\ (F).$$

Рековме дека секој вектор определува една транслација. Каква транслација определува нула-векторот $\vec{0}$?

Бидејќи кај нула-векторот $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ неговиот крај се совпаѓа со почетокот, тогаш јасно е дека транслацијата за нула-вектор $\vec{0}$ секоја точка $M$ од рамнината ја пресликува во самата себе (црт. 119). А тоа е идентично пресликување, односно идентична транслација. Според тоа:

**Нула-векторот $\vec{0}$ е идентична транслација,** односно **транслацијата за нула-векторот $\vec{0}$ претставува идентична транслација.**




Црт. 119

## 25. 2. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА

Транслацијата ги има следниве поважни својства:

**1°. Инверзното пресликување на една транслација е пак транслација.**

**Доказ:** Нека е даден вектор $\vec{a} = \overrightarrow{SS_1}$. Транслација $t$ за вектор $\vec{a} = \overrightarrow{SS_1}$ точката $M$ ја пресликува во точка $M_1$, а фигурата $F$ — на фигура $F_1$, т.е. $M \xrightarrow{t_{\vec{a}}} M_1$ (црт. 120).

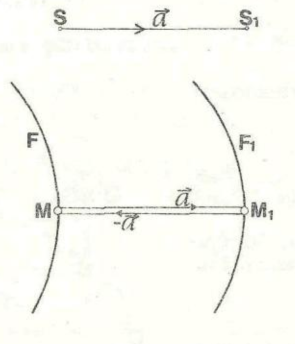
Но, транслацијата $t_1$ за спротивниот вектор $-\vec{a}$ точкаа $M_1$ ја враќа во почетната положба $M$, а сликата $F_1$ — во фигурата $F$, т.е.

$$M_1 \xrightarrow{t_1(-\vec{a})} M.$$

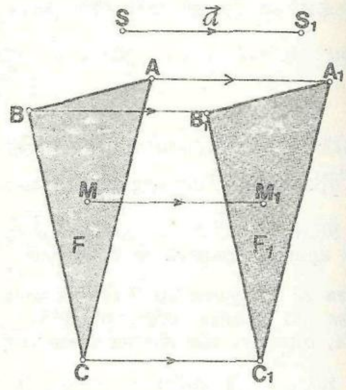
Значи, транслацијата $t_1$ за вектор $-\vec{a}$, што е спротивен на дадениот вектор $\vec{a}$, претставува инверзна транслација за транслацијата $t$ за вектор $\vec{a}$.

Од својството 1° следува дека транслацијата е заемно еднозначно пресликување (биекција) на рамнината врз самата себе.

**2°. Фигурата $F_1$ што е слика на фигурата $F$ при транслацијата за вектор $\vec{a}$, може да се добие со поместување на целата фигура $F$ како цврсто тело во рамнината за вектор $\vec{a}$ (црт. 121).**




Црт. 120




Црт. 121

Навистина, ако фигурата $F$ како цврсто тело ја поместиме во рамнината за вектор $\vec{a}$, тогаш и секоја нејзина точка $A, B, C, \ldots M, \ldots$ ќе се помести за вектор $\vec{a}$ и соодветно ќе ја заземе положбата на точките $A_1, B_1, C_1, \ldots M_1, \ldots$ Бидејќи точките $A_1, B_1, C_1, \ldots M_1, \ldots$ се слики на точките $A, B, C, \ldots M, \ldots$ при транслацијата за вектор $\vec{a}$, тоа множеството од сите тие точки (и само тие) ќе ја образува фигурата $F_1$ што е слика на $F$ при транслацијата за вектор $\vec{a}$ (црт. 121).

Од својството 2° непосредно следува и:

**3°. При транслацијата за вектор $\vec{a}$ секоја фигура $F$ се пресликува во складна на неа фигура $F_1$**

Тоа значи дека при транслацијата:

а) Отсечката $AB$ се пресликува во складна на неа отсечка $A_1B_1$;

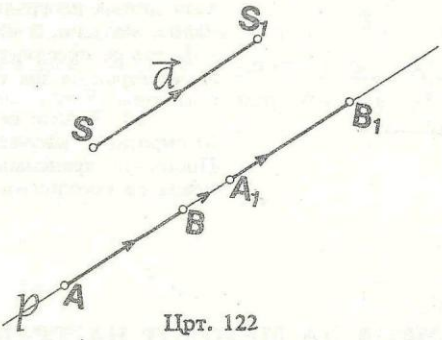
б) Аголот $AOB$ се пресликува во складен агол $A_1O_1B_1$;

в) Кружницата $k$ се пресликува во складна на неа кружница $k_1$;

г) Секој многуаголник се пресликува во складен многуаголник, итн.

Од (б) следува дека: При транслацијата две паралелни прави се пресликуваат на две паралелни прави, а две заемно нормални прави — пак на две заемно нормални прави.

Да забележиме дака: При транслацијата за вектор $\vec{a} = \overrightarrow{SS_1}$ отсечката $AB$ се пресликува на отсечка $A_1B_1$, која е складна и паралелна на $AB$. Така е секогаш кога отсечката $AB$ е непаралелна со носачот на векторот на транслацијата. Ако пак $AB \parallel SS_1$, тогаш при транслацијата за векторот $\vec{a} = \overrightarrow{SS_1}$ отсечката $AB$ се пресликува на складна отсечка $A_1B_1$, која лежи со неа на иста права $p$ (црт. 122).




Црт. 122

Оттука станува јасно дека:

**4°. При транслацијата за вектор $\vec{a}$ правата $p$ се пресликува на права $p_1$, која е паралелна или се совпаѓа со неа.**

Исто така, при транслацијата и секоја полуправа се пресликува во исто насочена полуправа.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Како може да биде зададена транслацијата?

**2.** Даден е вектор $\vec{a}$ и точки $A, B, C$. Изврши транслација на точките $A, B, C$ за векторот $\vec{a}$!

**3.** Ако е познат еден пар соодветни точки $A, A_1$ при транслацијата $t$, како ќе се определи векторот на транслацијата?

**4.** На правата $p$ дадени се две точки $A$ и $B$. Изврши транслација на правата $p$ за вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$. На што се пресликува правата $p$ при таа транслација?

**5.** При транслацијата $t_{\vec{a}}$ во каква фигура се пресликува: а) отсечката; б) правата; в) полуправата; г) кружницата; д) кругот?

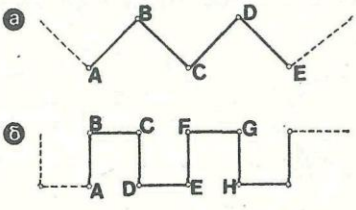
**6.** При транслацијата за вектор $\vec{a} = \overrightarrow{SS_1}$ кои прави се пресликуваат сами на себе?

**7.** При транслацијата $t$ во какви фигури се пресликува (се трансформира): а) аголот; б) триаголникот; в) квадратот; г) унијата од две паралелни прави; д) унијата од две прави што се сечат?

**8.** Две прави $a$ и $b$ што се сечат при транслацијата $t_{\vec{a}}$ се пресликале на правите $a_1$ и $b_1$. Во која точка се пресликал пресекот на правите $a$ и $b$ при таа транслација?

**9.** Кружницата $k(O;r)$ при транслацијата $t$ се пресликала на кружницата $k_1$. Во која точка се пресликал центарот $O$ на кружницата $k$ при таа транслација?

**10.** Дадени се две паралелни складни отсечки ($AB \parallel CD$ и $AB \cong CD$). Колку транслации постојат при кои отсечката $AB$ се пресликува на $CD$?




Црт. 123

**11.** На црт. 123 нацртани се две искршени линии $ABCDE\ldots$ со складни страни ($AB \cong BC \cong CD \cong DE$) и складни агли меѓу нејзините страни. Ако претпоставиме искршената линија неограничено да се шири и налево и надесно, постои ли транслација $t$, при која таа се пресликува сама на себе? Одреди го векторот на таа транслација!

**12.** Дадени се две: а) исто насочени; б) спротивно насочени полуправи $AB$ и $MN$. Постои ли транслација при која едната полуправа се пресликува на другата?

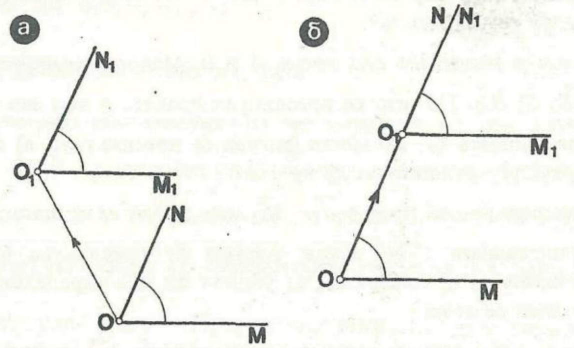
## § 26. ПРИМЕНА НА МЕТОДОТ НА ТРАНСЛАЦИЈА

Методот на транслапија наоѓа широка примена при докажувањето на повеќе теореми и решавањето на некои конструктивни задачи и други задачи во геометријата. Еве неколку примери:

*Теорема*: **Два агла со соодветно исто насочени краци, се складни.**

**Доказ:** Нека се дадени аглите $MON$ и $M_1O_1N_1$, такви што краците им се исто насочени ($OM \uparrow\uparrow O_1M_1$ и $ON \uparrow\uparrow O_1N_1$) (црт. 124).

Со транслација на аголот $MON$ за вектор $\overrightarrow{OO_1}$, очигледно е дека темето $O$ се пресликува во темето $O_1$, кракот $OM$ — на кракот $O_1M_1$, а кракот $ON$ — на кракот $O_1N_1$. Според тоа, аголот $MON$ се пресликува на аголот $M_1O_1N_1$, а тоа значи дека $\measuredangle MON \cong \measuredangle M_1O_1N_1$.

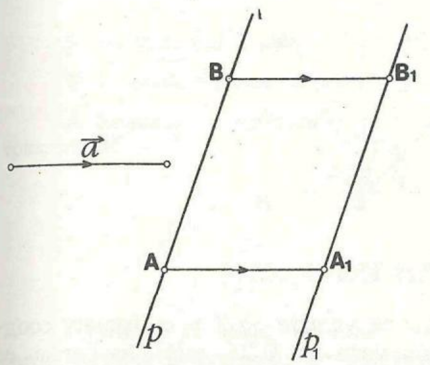



Црт. 124

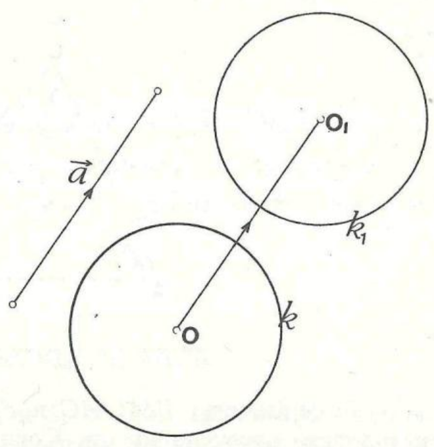
**Задача 1.** Да се конструира сликата на дадена права $p$ при транслација $t$ за вектор $\vec{a}$ (црт. 125).

**Решение:** Бидејќи при транслацијата секоја права $p$ се пресликува пак во права, тоа доволно е да ги конструираме сликите $A_1$ и $B_1$ на кои било две точки $A$ и $B$ од дадената права $p$, а потоа ја повлечеме правата $p_1$ што е определена со точките $A_1$ и $B_1$ (црт. 125).

**Забелешка:** Бидејќи при транслацијата секоја права се пресликува во права $p_1 \| p$ или $p_1 \equiv p$, тоа задачата може да се реши уште и вака: Ја конструираме сликата $A_1$ на една точка $A \in p$, потоа низ точката $A_1$ конструираме $p_1 \| p$ или $p_1 \equiv p$.




Црт. 125




Црт. 126

**Задача 2.** Да се конструира сликата на кружницата $k(O, r)$ при транслација $t$ за вектор $\vec{a}$ (црт. 126).

**Решение:** Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и вектор $\vec{a}$. Знаеме дека при транслацијата за вектор $\vec{a}$ кружницата $k(O, r)$ ќе се преслика во во складна на неа кружница $k_1(O_1, r)$, чиј центар $O_1$ е слика на центарот $O$ на дадената кружница $k$ при таа транслација. Затоа, за конструкција на кружницата $k_1$ доволно е да ја конструираме сликата $O_1$ на центарот $O$ при транслацијата $t$ за вектор $\vec{a}$, а потоа ја конструираме и бараната кружница $k_1(O_1, r)$.

## § 27. ЗБИР НА АГЛИТЕ ВО ТРИАГОЛНИКОТ

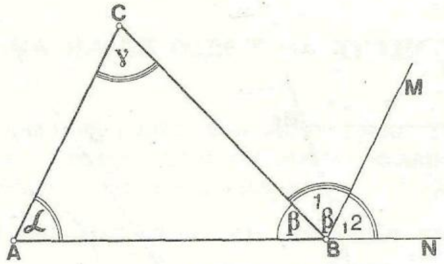
Во V одделение дојдовме до следниов заклучок, кој сега ќе го докажеме:

*Теорема 1.* **Збирот на внатрешните агли на триаголникот еднаков е на 180°**, т.е. $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

*Доказ*: Од темето $B$ на триаголникот $ABC$ да повлечеме полуправа $BM$, што е паралелна на страната $AC$ (црт. 127). Таа ќе го подели надворешниот агол $\beta_1$ на два агла: $\measuredangle 1$ и $\measuredangle 2$, така што ќе важат релациите

$$\beta_1=\widehat{1}+\widehat{2} \text{ и } \beta+\widehat{1}+\widehat{2}=180° \qquad (1)$$

Бидејќи $CA\uparrow\downarrow BM$ и $CB\uparrow\downarrow BC$, тоа аглите $\measuredangle 1$ и $\gamma$ имаат соодветно спротивно насочени краци. Затоа, согласно теоремата 2 во § 21, тие се складни, т.е. $\widehat{1}=\gamma$.




Црт. 127

Бидејќи, пак, $BM\uparrow\uparrow AC$ и $BN\uparrow\uparrow AB$, тоа аглите $\measuredangle 2$ и $\alpha$ имаат соодветно исто насочени краци. Согласно теоремата во § 26, тие два агла се складни, т.е. $\widehat{2}=\alpha$.

Ако аглите $\measuredangle 1$ и $\measuredangle 2$ во релациите (1) ги замениме соодветно со на нив складните агли $\gamma$ и $\alpha$, ќе добиеме: $\beta_1=\gamma+\alpha$ и $\beta+\gamma+\alpha=180°$.

Со тоа теоремата е докажана. Но, со горниот доказ ние истовремено ја докажавме и следнава:

*Теорема 2.* **Надворешниот агол на триаголникот еднаков е на збирот на два внатрешни несоседни со него агли**, т.е. $\beta_1=\alpha+\gamma$.

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

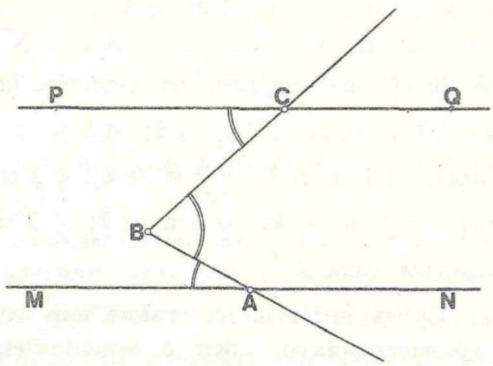
**1.** Може ли триаголникот да има: а) два прави; б) два тапи внатрешни агли?

**2.** Докажи дека збирот на острите внатрешни агли во правоаголниот триаголник е еднаков на 90°!

**3.** Може ли надворешен агол на триаголникот да биде помал од некој негов внатрешен агол?

4. Докажи дека секој надворешен агол на триаголникот е поголем од внатрешниот несоседен со него агол!

5. Докажи дека: ако два агла на еден триаголник се соодветно складни на два агла од друг триаголник, тогаш и третите агли им се складни!




Црт. 128

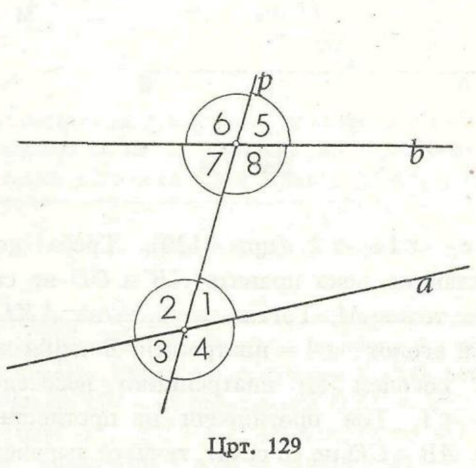
6. На црт. 128 дадено е $MN \parallel PQ$. Докажи дека $\widehat{ABC} = \widehat{MAB} + \widehat{BCP}$!

7. Колкава е големината на внатрешните агли на рамностраниот триаголник?

8. Колкава е големината на внатрешните агли на рамнокракиот правоаголен триаголник?

## § 28. АГЛИ НА ТРАНСВЕРЗАЛАТА

Правата $p$, која ги сече правите $a$ и $b$, се вика нивна *трансверзала* (црт. 129). На цртежот се означени осумте агли, што трансверзалата $p$ ги образува со правите $a$ и $b$.




Црт. 129

Гледаме дека аглите $\sphericalangle 1$; $\sphericalangle 4$; $\sphericalangle 5$ и $\sphericalangle 8$ се расположени на една страна од трансверзалата, другите четири агли $\sphericalangle 2$; $\sphericalangle 3$; $\sphericalangle 6$ и $\sphericalangle 7$ — на другата страна од неа.

Аглите $\sphericalangle 1$; $\sphericalangle 2$; $\sphericalangle 7$ и $\sphericalangle 8$, што лежат меѓу правите $a$ и $b$, се викаат *внатрешни*, а аглите $\sphericalangle 3$; $\sphericalangle 4$; $\sphericalangle 5$ и $\sphericalangle 6$ — *надворешни агли* (црт. 129).

Тие осум агли ќе ги разгледуваме во следниве парови:

*Согласни агли*: $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 5$; $\sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 6$; $\sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 7$; $\sphericalangle 4$ и $\sphericalangle 8$;

*Наизменични агли*: $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 7$; $\sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 8$; $\sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 5$; $\sphericalangle 4$ и $\sphericalangle 6$;

*Спротивни агли*: $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 8$; $\sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 7$; $\sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 6$; $\sphericalangle 4$ и $\sphericalangle 5$.

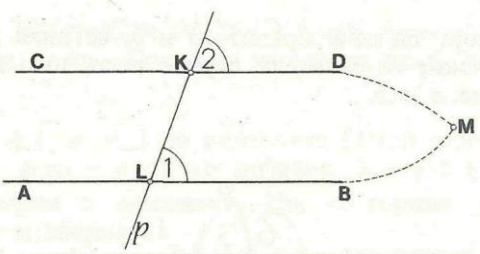
Нив ги дефинираме вака:

*Дефиниција*: а) **Согласни агли се таков пар агли, кои лежат на иста страна од трансверзалата, еден е внатрешен, а другиот надворешен;**

б) **Наизменични агли се таков пар агли, кои лежат на различни страни од трансверзалата и двата се внатрешни или и двата надворешни;**

в) **Спротивни агли се таков пар агли, кои лежат на иста страна од трансверзалата и двата се внатрешни или и двата се надворешни.**

*Теорема 1.* **Ако при пресекувањето на две прави со трета права, кои и да било согласни агли се складни, тогаш тие две прави се паралелни.**




Црт. 130

*Доказ*: Нека е $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$ (црт. 130). Треба да докажеме дека $AB \parallel CD$. Да претпоставиме дека правите $AB$ и $CD$ не се паралелни, туку се сечат во некоја точка $M$. Тогаш се образува $\triangle KLM$, кај кој аголот $\sphericalangle 2$ е надворешен, а аголот $\sphericalangle 1$ — внатрешен. Бидејќи надворешниот агол на триаголникот е поголем од внатрешниот несоседен со него агол, тоа ќе биде $\sphericalangle 2 > \sphericalangle 1$. Тоа противречи на претпоставката ($\sphericalangle 2 \cong \sphericalangle 1$). Според тоа, правите $AB$ и $CD$ не се сечат, туку се паралелни $AB \parallel CD$, штд.

Лесно можат да се докажат и следниве:

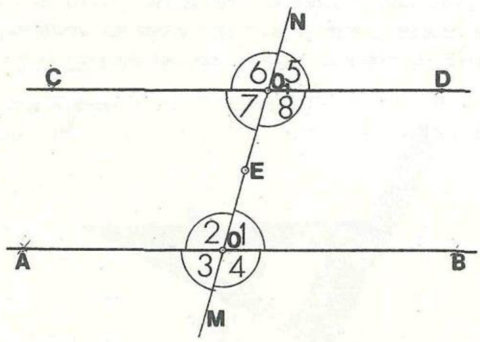
*Теорема 2.* **Ако при пресекувањето на две прави со трета, кои и да било два наизменични агли се складни, тогаш тие две прави се паралелни.**

*Теорема 3.* **Ако при пресекувањето на две прави со трета, кои и да било два спротивни агли се суплементни, тогаш тие две прави се паралелни.**

Ќе докажеме дека важат и обратните теореми на горниве три, кои заедно гласат:

*Теорема 4.* **Ако две паралелни прави се пресечат со трета права, тогаш:** а) **согласните агли се складни;** б) **наизменичните агли се складни;** в) **спротивните агли се суплементни.**

**Доказ:** Нека е $AB \parallel CD$ и правата $MN$ нивна трансверзала. Точката $E$ нека е средина на отсечката $OO_1$ (црт. 131).




Црт. 131

а) При транслацијата на правата $AB$ (и на сé што е сврзано со неа) за вектор $\overrightarrow{OO_1}$ очигледно е дека точката $O$ ќе се преслика во $O_1$, правата $AB$ — на правата $CD$, правата $MN$ — на самата себе, а со тоа и аглите $\measuredangle 1$; $\measuredangle 2$; $\measuredangle 3$ и $\measuredangle 4$ соодветно на аглите $\measuredangle 5$; $\measuredangle 6$; $\measuredangle 7$ и $\measuredangle 8$.

Според тоа: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 5$; $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$; $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 7$ и $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 8$. Значи, согласните агли се складни, штд.

б) Правата $AB$ (и сé што е сврзано со неа) при централна симетрија во однос на точката $E$ се пресликува и тоа: точката $O$ — во точка $O_1$, полуправата $OB$ — на полуправата $O_1C$, полуправата $OA$ — на полуправата $O_1D$, полуправата $OM$ — на полуправата $O_1N$, полуправата $ON$ — на полуправата $O_1M$; а со тоа и аглите $\measuredangle 1$; $\measuredangle 2$; $\measuredangle 3$ и $\measuredangle 4$ соодветно на аглите $\measuredangle 7$; $\measuredangle 8$; $\measuredangle 5$ и $\measuredangle 6$. Според тоа: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 7$, $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 8$, $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 5$ и $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 6$. Значи, наизменичните агли се складни, штд.

в) Очигледно е дека $\hat{1} + \hat{4} = 180°$, бидејќи аглите ∢1 и ∢4 се напоредни. Ако аголот ∢4 го замениме со аголот ∢8, бидејќи е $\widehat{4} = \widehat{8}$ како согласни; тогаш добиваме $\widehat{1} + \widehat{8} = 180°$. Значи, спротивните агли ∢1 и ∢8 се суплементни. Слично се докажува дека и останатите три пара спротивни агли ∢2 и ∢7; ∢3 и ∢6; ∢4 и ∢5 се суплементни.

Теоремите 1, 2, 3 и 4 често ги искажуваме заедно вака:

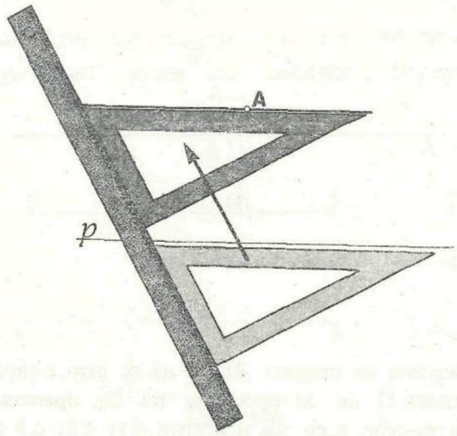
**Правите $a$ и $b$, кои се пресечени со трансверзалата $p$, се паралелни ако и само ако: а) согласните агли се складни; б) наизменичните агли се складни; в) спротивните агли се суплементни.**

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Нацртај две прави и пресечи ги со трета. Покажи кои парови агли се: согласни, наизменични, спротивни!

**2.** Дијагоналата $AC$ со страните на правоаголникот $ABCD$ гради четири агли. Има ли меѓу нив складни агли и ако има, зошто се тие складни?

**3.** На црт. 132 покажано е како со помош на триаголник и линир се повлекува права, која минува низ дадена точка $A$ и е паралелна со правата $p$. На која теорема се заснова таа конструкција? Постојат ли други начини на решавање на горнава задача?



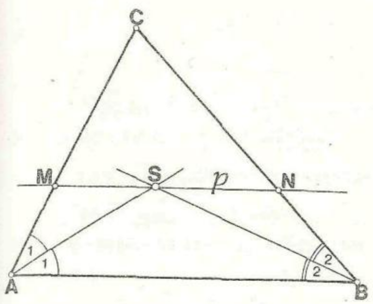

Црт. 132

**4.** Како со конструкција на прави агли можат да се конструираат паралелни прави?

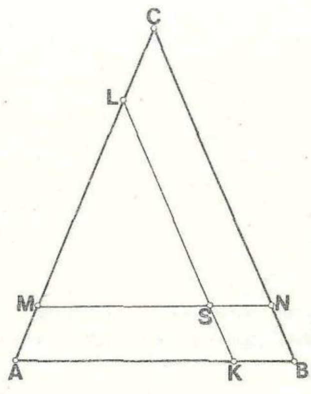
**5.** Докажи дека: два агла, чии два крака се исто насочени, а другите два крака се спротивно насочени, се суплементи!

**6.** Докажи дека: бисектрисата на надворешниот агол при врвот на рамнокрак триаголник е паралелна на основата!

**7.** Докажи дека: за секои три прави $a$, $b$ и $p$ кои лежат во иста рамнина, важи $(a \parallel b \text{ и } a \perp p) \Rightarrow b \perp p$!




Црт. 133




Црт. 134

**8.** Докажи дека: за секои три прави $a$, $b$ и $p$, кои лежат во иста рамнина, важи: $(a \perp p \text{ и } b \perp p) \Rightarrow a \parallel b$!

**9.** Низ пресекот $S$ на бисектрисите на триаголникот $ABC$ повлечена е права $p \parallel AB$ (црт. 133). Да се докаже дека: $MN \cong AM + BN$!

**10.** На црт. 134 триаголникот $ABC$ е рамнокрак ($AC \cong BC$) а $MN \parallel AB$ и $KL \parallel BC$. Да се докаже дека секој од триаголниците $\triangle MNC$, $\triangle AKL$ и $\triangle MSL$ е рамнокрак!

Глава V

# ТРИАГОЛНИК

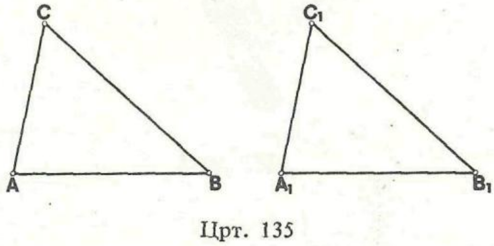
## § 29. СКЛАДНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИТЕ

### 29. 1. СКЛАДНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Во § 10 се запознавме со поимот складност (конгруентност) на две фигури. Тој поим се однесува и за триаголниците. Согласно општата дефиниција за складни фигури, ја усвојуваме и следнава:

*Дефиниција*: **За два триаголника $ABC$ и $A_1B_1C_1$ велиме дека се складни ако при поставување еден на друг тие наполно се совпаѓаат.**

При тоа совпаѓање нека темето $A$ се совпадне со темето $A_1$, темето $B$ — со $B_1$, а темето $C$ — со $C_1$. Во тој случај: двојките темиња $A$ и $A_1$, $B$ и $B_1$, $C$ и $C_1$ се викаат *соодветни (хомологни) темиња*; двојките агли $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle C_1$ се викаат *соодветни агли*, а двојките страни $AB$ и $A_1B_1$, $BC$ и $B_1C_1$, $AC$ и $A_1C_1$ се викаат *соодветни страни* на складните триаголници $ABC$ и $A_1B_1C_1$.




Црт. 135

Складноста на триаголниците ја означуваме со знакот „$\cong$", на пример: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, кое го читаме: $\triangle ABC$ е *складен* со $\triangle A_1B_1C_1$.

Записот $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ покажува уште и кои двојки темиња на двата складни триаголници се соодветни (црт. 135).

Од горнава дефиниција за складност следува следнава:

*Теорема 1.* **Два складни триаголници имаат складни соодветни страни и складни соодветни агли,** т.е.

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \begin{cases} AB \cong A_1B_1 & \sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1 \\ BC \cong B_1C_1 \quad \text{и} & \sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1 \\ AC \cong A_1C_1 & \sphericalangle C \cong \sphericalangle C_1 \end{cases}$$

Навистина, при совпаѓањето на два складни триаголници ќе дојде до совпаѓање и на нивните соодветни елементи.

Од горново заклучуваме уште и дека:

**Во два складни триаголници спроти соодветни страни лежат соодветни агли, и обратно: спроти соодветните агли лежат соодветни страни.**

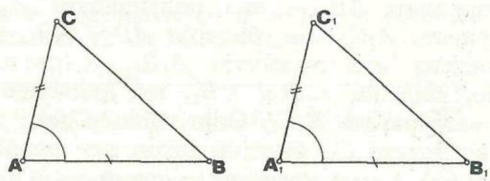
## 29. 2. ПРИЗНАЦИ ЗА СКЛАДНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИТЕ

Теоремата 1 утврдува дека: ако два триаголника се складни, тогаш нивните соодветни страни и агли се складни.

Се поставува прашањето: дали важи и обратното тврдење? Како што ќе видиме, одговорот на тоа прашање е потврден. Дури нешто повеќе, за утврдување складноста на два триаголника не е неопходно да ги споредуваме сите шест основни елементи (трите страни и трите агли) на едниот триаголник со елементите на другиот. Постојат миниум услови, кои ако се исполнети, триаголниците да се складни. Тие услови се викаат *признаци за складност на триаголниците* и важат за кои и да било триаголници.

*Прв Признак — САС (страна-агол-страна).* **Ако две страни и аголот меѓу нив од еден триаголник се соодветно складни на две страни и аголот меѓу нив од друг триаголник, тогаш тие триаголници се складни** т.е.

$$\left.\begin{aligned} AB \cong A_1B_1 \\ AC \cong A_1C_1 \\ \sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$




Црт. 136

**Доказ:** Нека се дадени триаголниците $ABC$ и $A_1B_1C_1$ и нека е $AB \cong A_1B_1$, $AC \cong A_1C_1$, $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$ (црт. 136). Бидејќи е $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$, тоа при некое движење (лизгање или превртување) аголот $A$ може да се доведе до совпаѓање со аголот $A_1$. Тоа значи дека темето $A$ може да се доведе во темето $A_1$, полуправата $AB$ — врз полуправата $A_1B_1$, а полуправата $AC$ — врз полуправата $A_1C_1$. Но, бидејќи $AB \cong A_1B_1$, затоа тоа движење отсечката $AB$ ќе ја доведе врз отсечката $A_1B_1$, т.е. темето $B$ — во темето $B_1$. Аналогно, бидејќи е $AC \cong A_1C_1$, тоа движење отсечката $AC$ ќе доведе врз отсечката $A_1C_1$, со што и темето $C$ во темето $C_1$.

Значи, тоа движење ги доведува темињата $A$, $B$ и $C$ соодветно во темињата $A_1$, $B_1$ и $C_1$; па, според тоа, ќе биде $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Со тоа горново тврдење е докажано. Од него следуваат:

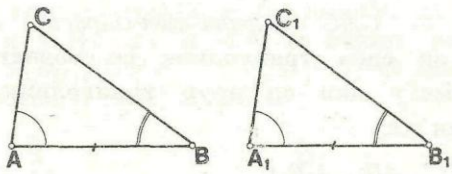
*Последица 1.* **Два правоагални триаголници се складни ако катетите на едниот се соодветно складни на катетите на другиот триаголник** (зошто?).

*Последица 2.* **Два рамнокраки триаголници се складни, ако кракот и аголот при врвот на едниот триаголник се соодветно складни на кракот и аголот при врвот од другиот триаголник.**

*Втор Признак — АСА (агол-страна-агол).* **Ако една страна и двата прилегнати агли на неа од еден триаголник се соодветно складни на едната страна и двата прилегнати агли на неа од друг триаголник, тогаш тие триаголници се складни,** т.е.

$$\left.\begin{array}{r} AB \cong A_1B_1 \\ \sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

**Доказ:** Нека се дадени триаголниците $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ и нека е $AB \cong A_1B_1$, $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1$ (црт. 137).




Црт. 137

Бидејќи $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$, тоа постои движење (лизгање или превртување), кое го доведува аголот $\sphericalangle A$ врз аголот $\sphericalangle A_1$, т.е. темето $A$ го доведува во темето $A_1$, полуправата $AB$ — врз полуправата $A_1B_1$ и полуправата $AC$ — врз полуправата $A_1C_1$. Но, бидејќи $AB \cong A_1B_1$, тоа движење отсечката $AB$ ја доведува врз отсечката $A_1B_1$, со што и темето $B$ — во темето $B_1$. Аналогно, бидејќи $\sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1$, тоа движење и полуправата $BC$ ќе ја доведе врз полуправата $B_1C_1$. Очигледно е дека тоа движење темето $C$ ќе го доведе во темето $C_1$, бидејќи штом две прави се совпаѓаат ($AC$ со $A_1C_1$ и $BC$ со $B_1C_1$), тоа и пресечните точки ($C$ и $C_1$) им се совпаѓаат. Тоа е затоа, бидејќи две прави се сечат само во една точка.

Значи, тоа движење темињата $A$, $B$ и $C$ ги доведува соодветно во темињата $A_1$, $B_1$ и $C_1$, па, според тоа, ќе биде: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, штд.

Од признакот АСА следуваат и следниве последици:

*Последица 1.* **Два правоаголни триаголника се складни ако катетата и прилегнатиот остар агол на неа од едниот триаголник се соодветно складни на катетата и прилегнатиот на неа остар агол од другиот триаголник** (зошто?).

*Последица 2.* **Два правоаголни триаголници се складни ако хипотенузата и остар агол од едниот триаголник се соодветно складни на хипотенузата и остар агол од другиот триаголник.** Образложи зошто!

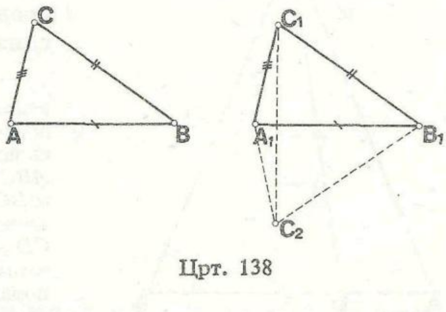
*Последица 3.* **Два рамнокраки триаголници се складни ако основата и прилегнатиот агол на неа од едниот триаголник се соодветно складни на основата и прилегнатиот агол на неа од другиот триаголник.**

*Трет Признак — ССС (страна-страна-страна).* **Ако трите страни на еден триаголник се соодветно складни на трите страни од друг триаголник, тогаш тие триаголници се складни, т.е.**

$$\left.\begin{aligned} AB &\cong A_1B_1 \\ BC &\cong B_1C_1 \\ AC &\cong A_1C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

**Доказ:** Нека се дадени триаголниците $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ и нека е $AB \cong A_1B_1$, $BC \cong B_1C_1$ и $AC \cong A_1C_1$ (црт. 138).

Бидејќи $AB \cong A_1B_1$, тоа постои некое движење (лизгање или превртување), кое отсечката $AB$ ја доведува врз отсечката $A_1B_1$, т.е. точката $A$ — во точката $A_1$, а точката $B$ — во $B_1$. Тоа движење нека $\triangle ABC$ го доведе врз $\triangle A_1B_1C_2$, така што точките $C_1$ и $C_2$ да се во различни полурамнини во однос на правата $A_1B_1$ (црт. 138). Бидејќи $\triangle A_1B_1C_2$ е добиен со движење од $\triangle ABC$, тоа ќе биде



Црт. 138

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_2 \tag{1}$$

Оттука следува дека е $B_1C_2 \cong BC$ и $A_1C_2 \cong AC$.

А кога ги земеме предвид условите во препоставката: $BC \cong B_1C_1$ и $AC \cong A_1C_1$, тогаш врз основа на транзитивноста на релацијата „$\cong$“ имаме:

$$(B_1C_2 \cong BC \text{ и } BC \cong B_1C_1) \Rightarrow B_1C_2 \cong B_1C_1$$

$$(A_1C_2 \cong AC \text{ и } AC \cong A_1C_1) \Rightarrow A_1C_2 \cong A_1C_1$$

Значи, правата $A_1B_1$ е симетрала на отсечката $C_1C_2$, а оттука следува дека: Триагалникот $A_1B_1C_2$ е симетричен со триагалникот $A_1B_1C_1$ во однос на правата $A_1B_1$, па затоа следува дека

$$\triangle A_1B_1C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1. \tag{2}$$

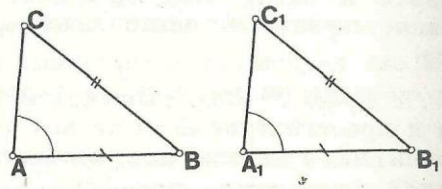
Врз основа на транзитивноста на релацијата „$\cong$", од (1) и (2) следува дека: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Со тоа признакот ССС е докажан. Од него следуваат:

*Последица 1.* **Два равнокраки триаголници се складни ако основата и кракот на едниот триаголник се соодветно складни на основата и кракот од другиот триаголник.**

*Последица 2.* **Два равнострани триаголници се складни ако страната на едниот триагалник е складна на страната од другиот триаголник.**

*Четврти Признак — ССА.* **Ако две страни и аголот спроти поголемата од нив од еден триаголник се соодветно складни на две страни и аголот спроти поголемата од нив од друг триаголник, тогаш тие триаголници се складни** (црт. 139), т.е.

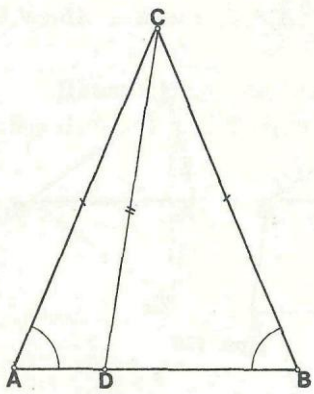



Црт. 139

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong A_1B_1;\ BC \cong B_1C_1 \\ (BC > AB);\ \sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A_1B_1C_1$$

Доказот на овој признак ќе го изоставиме, бидејќи тој е нешто покомплицуван од претходните. Од него следува следнава:

*Последица*: **Два правоаголни триаголници се складни, ако хипотенузата и една катета од едниот триаголник се соодветно складни на хипотенузата и една катета од другиот триаголник.**




Црт. 140

**Забелешка:** Ако во признакот ССА не е исполнет условот: складните агли да лежат спорти поголемите страни, триаголниците не секогаш се складни. Тоа се гледа од црт. 140. Триаголникот $ABC$ е равнокрак ($AC \cong BC$), а триаголниците $ADC$ и $BCD$ имаат соодветно складни по две страни и аголот што лежи спорти едната од нив ($AC \cong BC$; $CD \cong CD$; $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$), но тие не се складни. Тоа е затоа што складните агли $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ лежат спроти помалата страна $CD$ ($CD < AC$) а не спорти поголемите страни $AC$ и $BC$ (црт. 140).

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** За кои два триаголника велиме дека се складни?

**2.** Што покажува записот $\triangle ABC \cong \triangle MNP$? Може ли од него да се утврдат трите двојки: а) соодветни темиња; б) соодветни страни: в) соодветни агли на складните триаголници. Покажи кои се тие?

**3.** Исказот $\triangle ABC \cong \triangle PQS$ е точен. Покажи кои од следниве искази се точни: а) $\triangle ABC \cong \triangle PSQ$; б) $\triangle ABC \cong \triangle SPQ$; в) $\triangle BAC \cong \triangle QSP$; г) $\triangle BCA \cong \triangle QSP$!

4. Запиши дека складноста на триаголниците е рефлексивна, симетрична и транзитивна релација!

5. Формулирај го: а) првиот; б) вториот признак за складност на два триаголника и запиши го симболички!

6. Формулирај го: а) третиот; б) четвртиот признак за складност на два триаголника и запиши го симболички:

7. Формулирај ги и запиши ги симболички признаците за складност на два правоаголни триаголници!

8. Формулирај ги и запиши ги симболички признаците за складност на два рамнокраки триаголници.

## § 30. ПРИМЕНА НА СКЛАДНОСТА НА ТРИАГОЛНИЦИТЕ

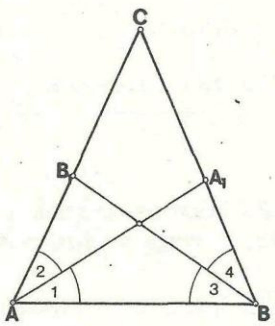
Признаците за складност на два триаголника наоѓаат разновидна примена во математиката. Еве неколку такви примери:

**Задача 1.** Да се докаже дека бисектрисите на аглите при основата на рамнокракиот триаголник се складни една на друга.

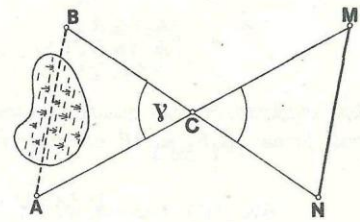
**Доказ:** Дадено е: $\triangle ABC$; $AC \cong BC$; $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ (црт. 141); $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$; $\sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4$ ($AA_1$ и $BB_1$ — бисектриси). Треба да докажеме: $AA_1 \cong BB_1$.

За да докажаме дека $AA_1 \cong BB_1$ доволно е да утврдиме дека $AA_1$ и $BB_1$ се соодветни страни на два складни триаголници. За таа цел ќе ги разгледаме триаголниците $ABA_1$ и $BAB_1$. Бидејќи е: $AB \cong BA$ (заедничка страна), $\sphericalangle B \cong \sphericalangle A$ (агли при основата), $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 3$ (половинки од складни агли), тоа, согласно вториот признак, ќе биде:

$$\triangle ABA_1 \cong \triangle BAB_1$$



Црт. 141



Црт. 142

Отсечката $AA_1$ од $\triangle ABA_1$ лежи спроти аголот $\sphericalangle B$, а спорти нему складниот агол $\sphericalangle A$ од другиот триаголник лежи отсечката $BB_1$. Значи, $AA_1$ и $BB_1$ се соодветни страни од складните триаголници $ABA_1$ и $BAB_1$, па, според тоа, тие се складни, т.е. $AA_1 \cong BB_1$, штд.

**Задача 2.** Да се одреди растојанието меѓу точките $A$ и $B$ помеѓу кои се наоѓа бара (црт. 142).

Директно мерење на растојанието $\overline{AB}$ не е можно, затоа избираме некоја трета точка $C$ на теренот, таква што да можат да се измерат растојанијата $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ (црт. 142). Точките $A$, $B$ и $C$ определрваат на теренот еден триаголник $ABC$.

Ако преку точката $C$ ги трасираме и продолжиме растојанијата $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ во истиот правец, но во спротивна насока, уште за по толку, така што да е $\overline{CM} = \overline{AC}$ и $\overline{CN} = \overline{BC}$, ќе добиеме уште еден триаголник $CMN$ (црт. 142).

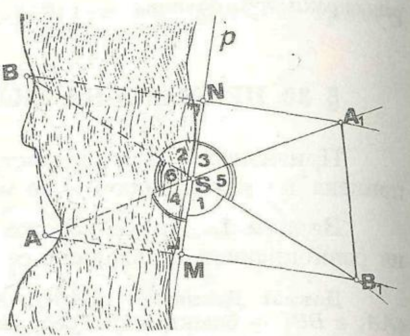
Триаголниците $MNC$ и $ABC$ се складни (зошто?). Од нивната складност следува дека бараното растојание $\overline{AB}$ е еднакво на растојанието $\overline{MN}$, кое може да се измери на теренот.

**Задача 3.** Да се одреди растојанието меѓу две видливи, но недостапни точки $A$ и $B$, кои се наоѓаат на спротивниот брег на една река (црт. 143).

Задачата можеме да ја решиме на следниов начин:

Трасираме произволна права $p$ и на неа, со помош на екер, одредуваме две такви точки $M$ и $N$, за кои е: $AM \perp p$ и $BN \perp p$. Потоа, низ средишната точка $S$ на отсечката $MN$ ($SM \cong SN$) ги повлекуваме правите $AS$ и $BS$ и ги одредуваме нивните пресечни точки $A_1$ и $B_1$ со правите $AM$ и $BN$ (црт. 143).

Ќе докажеме дека бараното растојание $\overline{AB}$ е еднакво на растојанието $\overline{A_1B_1}$. За таа цел ќе ги разгледаме двата пара правоаголни триаголници: $\triangle B_1MS$ и $\triangle BNS$; $\triangle A_1NS$ и $\triangle AMS$.



Црт. 143

$$\left.\begin{matrix} MS \cong SN \\ \sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle B_1MS \cong \triangle BNS \Rightarrow B_1S \cong BS$$

$$\left.\begin{matrix} NS \cong MS \\ \sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle A_1NS \cong \triangle AMS \Rightarrow A_1S \cong AS$$

На крајот, ги разгледуваме триаголниците $A_1B_1S$ и $ABS$ и добиваме:

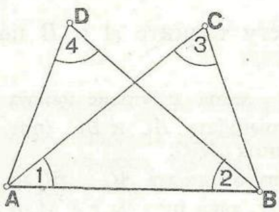
$$\left.\begin{matrix} A_1S \cong AS \\ B_1S \cong BS \\ \sphericalangle 5 \cong \sphericalangle 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle A_1B_1S \cong \triangle ABS$$

Од складноста на триаголниците $A_1B_1S$ и $ABS$ заклучуваме дека и нивните соодветни страни $A_1B_1$ и $AB$ се складни. т.е. $A_1B_1 \cong AB$, а оттука и $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$. штд

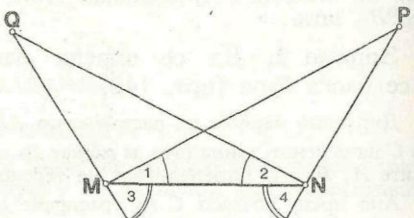
## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** На црт. 144 дадено е: $AC \cong BD$ и $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$. Да се докаже дека: $AD \cong BC$ и $\sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4$!

**2.** На црт. 145 дадено е $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4$. Да се докаже дека: $MQ \cong NP$ и $MP \cong NQ$!



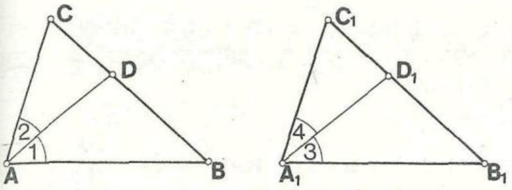
Црт. 144



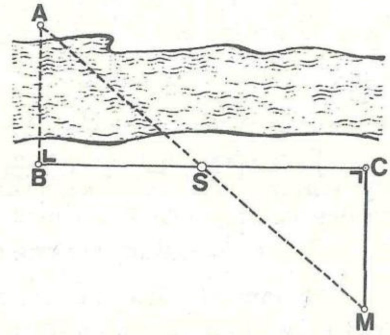
Црт. 145

**3.** За триаголниците $ABC$ и $A_1B_1C_1$ познато е: $AB \cong A_1B_1$, $\measuredangle A \cong \measuredangle A_1$ и бисектрисите $AD$ и $A_1D_1$ се складни. Да се докаже дека (црт. 146):
$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$!

**4.** Да се одреди ширината на реката $\overline{AB}$ (црт. 147), ако е: $AB \perp BC$; $BS \cong SC$; $CM \perp BC$ и $\overline{CM} = 27$ m, а точката $M \in AS$!



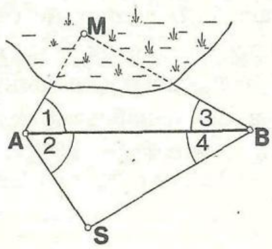

Црт. 146



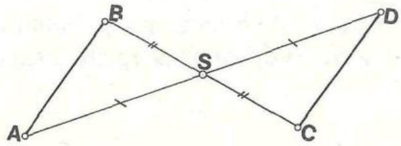

Црт. 147

**5.** Да се одредат растојанијата $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$ (црт. 148), ако е: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$; $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 3$; $\overline{AS} = 30$ m, а $\overline{BS} = 50$ m.

**6.** Дадено е: $AD \cap BC = \{S\}$, $AS \cong SD$, $BS \cong SC$ (црт. 149). Да се докаже: $AB \cong DC$!



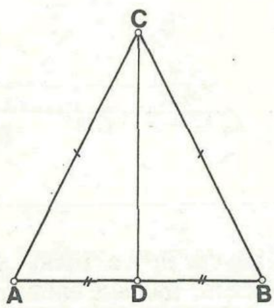

Црт. 148



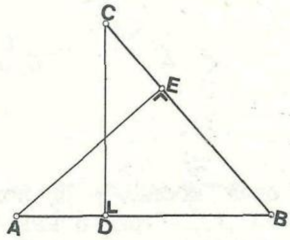

Црт. 149

**7.** Дадено е: $AC \cong BC$, $AD \cong BD$ (црт. 150). Да се докаже: $CD \perp AB$!

**8.** Дадено е: $AB \cong BC$, $AE \perp BC$, $CD \perp AB$ (црт. 151). Да се докаже: $AE \cong CD$!




Црт. 150




Црт. 151

# § 31. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ ЗА ТРИАГОЛНИК

## 31. 1. ОСНОВНИ КОНСТРУКЦИИ НА ТРИАГОЛНИК

На секој даден триаголник $ABC$ можеме да ги измериме должините на неговите страни $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$ и големините на неговите агли $\alpha=\widehat{BAC}$, $\beta=\widehat{ABC}$, $\gamma=\widehat{ACB}$.

Тоа се шест *основни елементи на триагалникот.*

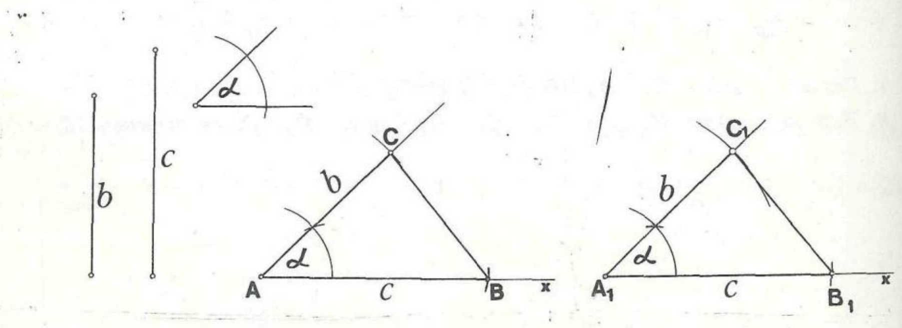
Под основни конструкции на триагалникот ќе ги подразбираме конструкциите кои се изведуваат врз основа на три дадени негови основни елементи, меѓу кои има барем една страна.

Тоа се следните конструкции:

**Задача 1.** Да се конструира триаголник $ABC$ ако се дадени две негови страни и аголот меѓу нив.

**Решение;** Нека се познати, на пример, должините на страните $b$ и $c$ што се зададени со две отсечки и аголот $\alpha$ меѓу нив (црт. 152).

Задачата ќе ја решиме на следниов начин: Од произволна точка $A$ повлекуваме полуправа $Ax$ и на неа со шестар ја пренесуваме должината на страната $c$. Така на полуправата $Ax$ добиваме точка $B$, таква што $\overline{BC}=c$. Потоа во точката $A$ го пренесуваме аголот $\alpha$, така што едниот негов крак да се совпаѓа со полуправата $Ax$. По другиот крак на аголот $\alpha$ ја пренесуваме должината на другата дадена страна $b$. Така ја добиваме точката $C$, каде што $\overline{AC}=b$. Ако ги соединиме точките $B$ и $C$, го добиваме триаголникот $ABC$, кој ги има трите дадени елементи $b$, $c$ и $\alpha$ (црт. 152).




Црт. 152

Ако оваа постапка ја повториме од некоја друга точка $A_1 \not\equiv A$, ќе конструираме друг триаголник $A_1B_1C_1$ со истите дадени елементи. Меѓутоа, според првиот признак триаголниците $ABC$ и $A_1B_1C_1$ се складни. Значи, тие се разликуваат само по својата положба.

*Дефиниција*: **Ако два или повеќе триаголници, кои можат да се конструираат врз основа на три исти дадени елементи, сите се складни, тогаш велиме дека триагалникот со тие дадени елементи е еднозначно определен.**

Ако, пак, со помош на три дадени елементи можат да се конструираат барем два нескладни триаголника, велиме дека триаголникот со тие елементи е *нееднозначно определен.*

Врз основа на горнава дефиниција и првиот признак за складност на триаголниците, заклучуваме дека:

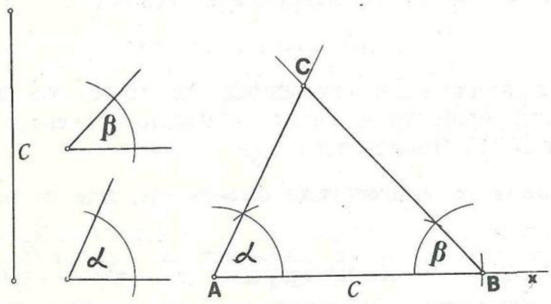
**Триаголникот е еднозначно определен, ако се дадени две негови страни и аголот меѓу нив.**

**Задача 2.** Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени: една негова страна и двата прилегнати агли на неа.

**Решение:** Нека се дадени, на пример, должината на страната $c$ и аглите $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha+\beta<180°)$ (црт. 153).

Нацртуваме една произволна полуправа $Ax$ и на наа од почетокот $A$, со шестар ја пренесуваме должината на страната $c$. Така ја добиваме точката $B$, каде што $\overline{AB}=c$. Потоа го пренесуваме аголот $\alpha$, така што темето да му падне во точката $A$, а едниот крак да му се совпадне со полуправата $Ax$. На ист начин од точката $B$ го пренесуваме и аголот $\beta$. Другите краци на аглите $\alpha$ и $\beta$ ќе се сечат во некоја точка $C$. Така го добиваме бараниот триаголник $ABC$, кој ги има трите дадени елементи: $c$, $\alpha$, $\beta$ по големина и положба.

Сите триаголници, кои можат да се конструираат врз основа на истите основни елементи, се складни еден на друг согласно вториот признак за складност на триагалниците.



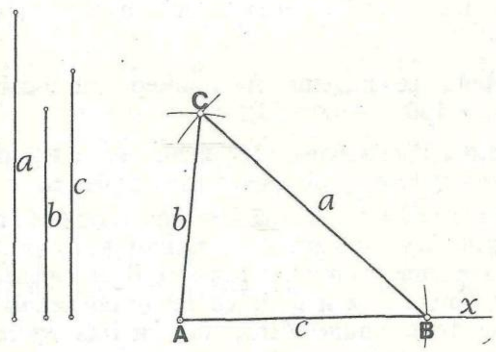

Црт. 153

Ако наместо аголот $\alpha$ (или $\beta$) е даден аголот $\gamma$ што не лежи на дадената страна $c$, тогаш од релацијата $\alpha+\beta+\gamma=180°$, лесно можеме да го одредиме конструктивно и другиот агол $\beta$ (или $\alpha$) што не е даден, а лежи на дадената страна $c$. Оттука заклучуваме дека:

**Триагалникот е еднозначно определен, ако се дадени една негова страна и кои да било два агла.**

**Задача 3.** Да се конструира триаголник $ABC$ ако се дадени должините на трите негови страни $(a, b, c)$ (црт. 154).

**Решение:** На произволна полуправа $Ax$, од почетокот $A$ ја пренесуваме страната $c$. Така ја добиваме точката $B$, каде што $\overline{AB}=c$. Потоа од точката $A$ (како центар) со радиус еднаков на страната $b$ опишуваме кружен лак. Од точката $B$ (како центар) опишуваме друг кружен лак, само сега со радиус еднаков на страната $a$. Тие два лака ќе се пресечат во некоја точка $C$. Точките А, $B$ и $C$ го определуваат бараниот триаголник.




Црт. 154

Ако кружните лаци опишани околу точките $A$ и $B$ неможат да се пресечат, тоа значи дека од дадените страни не може да се конструира триаголник, бидејќи тие не ги исполнуваат условите:

$$a+b>c \text{ и } |a-b|<c.$$

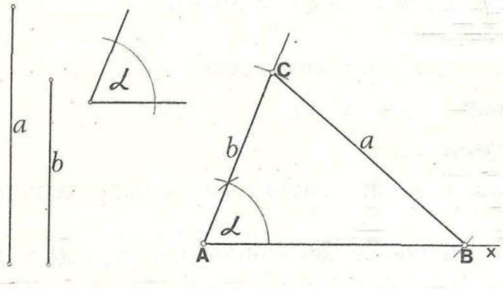
Од третиот признак за складност на триаголниците следува дека секој друг конструиран триаголник со истите елементи, ќе биде складен со триагалникот $ABC$. Според тоа:

**Триаголникот е еднозначно определен, ако се дадени трите негови страни.**

**Задача 4.** Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени две негови страни и аголот што лежи спроти поголемата од тие страни.

**Решение:** Нека се дадени, на пример, должините на страните $a$ и $b$ $(a>b)$ и аголот $\alpha$ (црт. 155). Нацртуваме полуправа $Ax$, па на неа го пренесуваме дадениот агол $\alpha$ со теме во точката $A$. Од точката $A$, по другиот крак на аголот $\alpha$, што не се совпаѓа со полуправата $Ax$ ја пренесуваме помалата дадена страна $b$. Така ја добиваме точката $C$, каде што

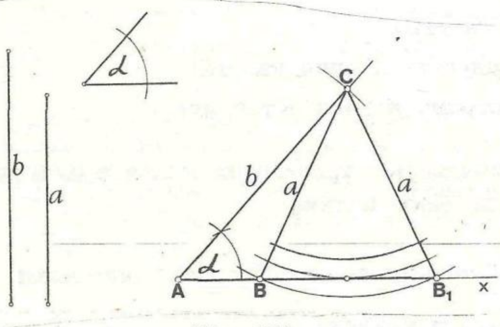
$\overline{AC}=b$. Потоа од добиената точка $C$ (како центар) со радиус што е еднаков на поголемата страна $a$, опишуваме кружен лак, кој ќе ја пресече полуправата $Ax$ во некоја точка $B$. Точките $A$, $B$ и $C$ се темињата на бараниот триаголник.




Црт. 155

Ако со истите елементи конструираме друг $\triangle A_1B_1C_1$, тој ќе биде складен со првиот триаголник $ABC$ (Зошто?). Според тоа:

**Триагалникот е еднозначно определен со кои и да било две негови страни и аголот што лежи спорти поголемата од нив.**




Црт. 156

**Забелешка:** Конструкцијата на триаголникот, кога се дадени две страни, на пример, $a$ и $b \cdot (a < b)$ и аголот $\alpha$, што лежи спроти помалата страна $a$ не е секогаш можна и триаголникот не е еднозначно определен.

Кога опишуваме кружен лак со радиус, што е еднаков на помалата страна $a$, може да случи тој лак воопшто да не ја сече полуправата $Ax$ (црт. 156). Тогаш велиме дека од дадените елементи не може да се конструира триаголник (задачата нема решение). Може, пак, да се случи лакот да ја пресече полуправата, но при тоа ќе се добијат две точки $B$ и $B_1$, а со тоа и два триаголника $ABC$ и $AB_1C$, кои не се складни. Значи, се добиваат две различни решенија, поради што и велиме: задачата е *неопределена* или поточно: задачата е *нееднозначно* определена. Многу е редок случајот кога кружниот лак од темето $C$ ќе ја допре полуправата $Ax$ во една точка. Во тој специјален случај се добива само едно решение.

## §. 31. 2. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВОАГОЛЕН, РАВНОКРАК И РАВНОСТРАН ТРИАГОЛНИК

Основните конструкции со кои се запознавме важат за секој триаголник. Видовме дека: Триаголникот е еднозначно определен ако се познати три од неговите основни елементи, и тоа:

а) две страни и аголот меѓу нив;

б) една страна и два агла;

в) трите страни, или

г) две страни и аголот спроти поголемата од нив.

Меѓутоа, кај некои триаголници изгледа дека тие можат да бидат конструирани и со помалку од три елементи. На пример:

Кај правоаголниот триаголник, бидејќи знаеме дека еден од неговите агли е прав, велиме дека тој е определен со два елемента. Но, всушност, и тука е потребно да се дадени три елементи, само што еден од нив ние веќе познат. Според тоа:

*Правоаголниот* триагалникот е еднозначно определен:

**а) со двете катети;**

**б) со хипотенузата и една катета;**

**в) со една страна и еден остар агол.**

Бидејки равнокракиот триаголник има две складни страни, а со тоа и два складни агла, затоа велиме:

*Равнокракиот* триаголник е еднозначно определен:

**а) со основата и кракот;**

**б) со една страна и еден кој да било агол.**

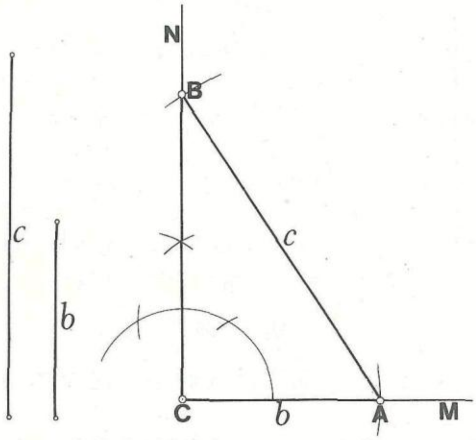
Бидејќи кај равностраниот триаголник трите страни се складни една на друга, тоа:

**Равностраниот триаголник е еднозначно определен со неговата страна.**

Конструкциите на правоаголниот, равнокракиот и равностраниот триаголник се изведуваат на сличен начин како кај разностраниот косоаголен триаголник. Тука ќе приведеме само некои од нив.

**Задача; 1.** Да се конструира правоаголен триаголник, ако се познати катетата $b$ и хипотенузата $c$.

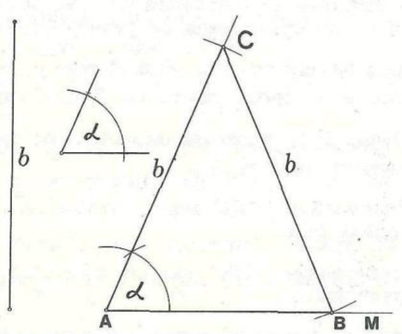
**Решение:** Нацртај прво прав агол $MCN$ (црт. 157), па по едниот негов крак $CM$ пренеси ја катетата $b$! Така се добива точката $A$, каде што $\overline{CA} = b$. Потоа од точката $A$ (како центар) со радиус еднаков на хипотенузата $c$, опиши кружен лак, кој ќе го пресече другиот крак $CN$ на правиот агол во некоја точка $B$. Точките $A$, $B$ и $C$ го определуваат бараниот правоаголен триаголник.




Црт. 157

**Задача 2.** Да се конструира рамнокрак триаголник $ABC$ ако е даден кракот $b$ и аголот $\alpha$, што лежи при основата.

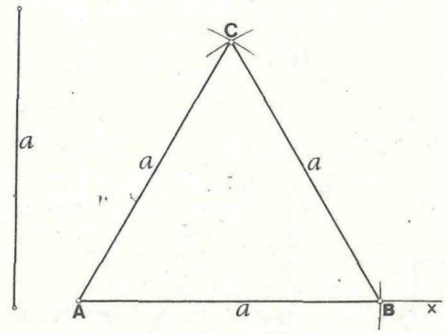
**Решение:** Го конструираме прво аголот $\alpha$ со теме во точката $A$ (црт. 158). Од точката $A$, по едниот крак $AN$ на аголот $\alpha$ го пренесуваме кракот $b$, па ќе ја добиеме точката $C$. Потоа од точката $C$ (како центар) со радиус еднаков на кракот $b$, ќе опишеме кружен как, кој ќе го пресече другиот крак $AM$ на аголот $\alpha$. Така ја добивме третата точка $B$, при што $\overline{CB} = b$. Точките $A$, $B$, и $C$ го определуваат бараниот рамнокрак триаголник.




Црт. 158

**Задача 3.** Да се конструира рамностран триаголник ако е дадена неговата страна.

**Решение:** Задачата ја решаваме на ист начин како и кога се дадени трите страни кај разностраниот триаголник. Изведи ја конструкцијата сам. (црт. 159)




Црт. 159

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Во кои случаи триаголникот е еднозначно определен?

**2.** Кај триагалникот $ABC$ познати се должините на две негови страни $a$ и $c$. Кој трет елемент е потребно да го знаеме за да го конструираме тој триаголник?

**3.** Може ли да се конструира триаголник, ако се дадени само големините на трите негови агли? Зошто?

**4.** Дадени се два агла на триагалникот, конструирај го третиот негов агол!

**5.** Конструирај триаголник $ABC$ ако се дадени: а) страните $a$ и $c$ и аголот $\beta$ што е зафатен од нив; б) страната $b$ и двата прилегнати агли $\alpha$ и $\gamma$ на неа; в) страната $c$ и аглите $\alpha$ и $\beta$; г) трите страни $a$, $b$ и $c$; д) страните $b$ и $c$ ($b < c$) и аголот $\gamma$!

**6.** Должините на страните на триаголникот $ABC$ изнесуваат: $a$=8m, $b$=12,5 m и $c$=16,5 m. Конструирај го тој триаголник во размер 1:100!

**7.** На една рамница помеѓу точките $A$ и $B$ тече река. На брегот на кој што се наоѓа точката $A$ избрана е и трета точка $C$. Траголникот $ABC$ има: $\overline{AC}$ = 150 m, $B\widehat{A}C$=86° и $A\widehat{C}B$=52°. Нацртај го триаголникот $ABC$ во размер 1:1000, па од цртежот одреди го растојанието помеѓу точките $A$ и $B$!

**8.** Конструирај триаголник $ABC$ ако се дадени: $a$ = 5 cm, $b$ = 8 cm и $\gamma$ = 65°, потоа опиши кружница околу него!

**9.** Конструирај триаголник $ABC$ ако се дадени: $b$ = 7,5 cm, $\alpha$ = 56° и $\beta$=62°, потоа впиши во него кружница!

**10.** Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени должините на: а) двете катети; б) едната катета и хипотенузата!

**11.** Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени: должината на една катета и: а) прилегнатиот остар агол; б) аголот што лежи спроти неа!

**12.** Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени хипотенузата и еден остар агол!

**13.** Две прави улици зафаќаат агол од 30°. На 500 метри од пресекот по едната улица, треба да се сврзе таа улица по најкусо растојание со другата улица. Одреди ја должината на улицата сврзница!

**14.** Конструирај равнокрак триаголник, ако се дадени должините на основата $a$ и кракот $b$!

**15.** Конструирај равнокрак триаголник, ако се дадени основата и аголот: а) при основата; б) при врвот!

**16.** Конструирај равнокрак триаголник, ако се дадени кракот и аголот: а) при основата; б) при врвот!

**17.** Конструирај равнокрак правоаголен триаголник, ако е дадена: должината на: а) катетата; б) хипотенузата!

**18.** Конструирај равностран триаголник со страна $a=7$ cm, а потоа опиши му и впиши кружница!

## § 32. ОПШТО ЗА КОНСТРУКТИВНИТЕ ЗАДАЧИ

Ако во геометриската задача се бара да се нацрта некоја геометриска фигура, што ќе ги исполнува однапред дадените услови, велиме дека е тоа *конструктивна задача*.

При решавањето на таквите задачи ги користиме некои од следниве цртачки инструменти: линир, шестар, правоаголен триаголник, агломер и др.

По традиција, останата уште од Старите Грци, решавањето на конструктивните задачи го изведуваме најчесто само со помош на линир и шестар.

*Дефиниција*: **Конструкцијата на некоја геометриска фигура само со помош на линир и шестар се вика геометриска конструкција.**

Ако, пак, конструкцијата ја изведуваме, освен со линир и шестар, и со други цртачки инструменти, тогаш таа се вика *техничка конструкција*. Во геометријата ќе изведуваме најчесто геометриски конструкции и ќе ги викаме, накратко, само конструкции.

Со помош на линир и шестар можат да се изведат само следниве *пет основни конструкции*:

1. Да се конструира права низ две дадени точки.

2. Да се конструира кружница (или кружен лак) со даден центар и даден радиус.

3. Да се одреди пресекот (ако постои) на две дадени прави.

4. Да се одредат пресечните точки (ако постојат) на дадена права и дадена кружница.

5. Да се одредат пресечните точки (ако постојат) на две дадени кружници.

Да се реши некоја конструктивна задача значи: бараната конструкција да се изведе со повторување на конечен број пати на некои од горниве пет основни конструкции; и само во тој случај сметаме дека задачата е решена, односно решлива.

Конструктивните задачи можат да бидат попрости, а некои доста сложени. Во редот на простите (основни) конструктивни задачи спаѓаат следниве досега познати задачи:

1. Да се конструира отсечка, што е складна на дадена отсечка.

2. Да се конструира симетралата на дадена отсечка.

3. Да се подели дадена отсечка на 2, 4, 8... складни делови.

4. Да се конструира агол, што е складен на даден агол.

5. Да се конструира бисектрисата на даден агол.

6. Да се подели даден агол на 2, 4, 8... складни делови.

7. Да се конструира прав агол.

8. Да се повлече нормала низ дадена точка кон дадена права.

9. Да се конструира триаголник по дадени: а) две страни и аголот меѓу нив; б) една страна и два агла; в) трите страни; г) две страни и аголот спроти поголемата од нив.

Процесот на решавање на секоја конструктивна задача, а особено на посложените, се состои од *четири етапи*: **анализа, конструкција, доказ и дискусија.**

**Анализата** е првата и најважна етапа при решавањето на конструктивната задача. Таа се состои во тоа, што претпоставуваме дека задачата е решена и ја цртаме бараната фигура како да е позната. На тој цртеж ги означуваме дадените елементи и ги испитуваме односите меѓу нив и елементите што треба да се одредат. Воедно, со тоа се утврдува и постапката (планот) на конструкцијата на бараната фигура.

**Конструкција.** Според извршената анализа и составениот план, со помош на линир и шестар ги изведуваме потребните конструкции преку кои треба да се добие бараната геометриска фигура, врз основа на дадените елементи и услови.

**Доказ.** По извршувањето на конструкцијата на бараната фигура, треба да докажеме дека таа е правилно одредена, односно дека ги содржи сите дадени елементи и ги задоволува сите поставени услови во задачата.

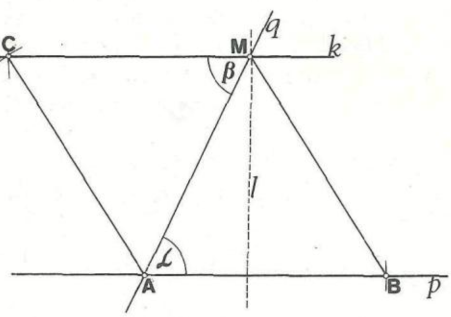
**Дискусија.** Преку неа треба да се разјасни задачата колку решенија има при секој можен избор на дадените елементи. Потоа треба да се испита дали решението на задачата е еднозначно, двозначно или повеќезначно и при кои услови задачата нема решение.

Кај попростите задачи, во кои веднаш може да се согледа решението, анализата и дискусијата обично ги изоставаме, но конструкцијата и доказот се битни компоненти на секоја конструктивна задача.

**Задача:** Дадена е права $p$ и точка $M \notin p$. Да се конструира права $k$, која минува низ точката $M$ и е паралелна со правата $p$.

**Анализа:** Нека $k$ е бараната права, т.е. нека $k \parallel p$ и $M \in k$ (црт. 160). Ако низ точката $M$ повлечеме произволна права $q$, што ќе ја сече правата $p$ во некоја точка $A$, тогаш аглите $\alpha$ и $\beta$ се складни (како наизменични). На правата $p$ постои точка $B$, таква што $AB \cong AM$; а исто така и на правата $k$ постои точка $C$, таква што $MC \cong AM$. Во тој случај имаме: $\triangle MAB \cong \triangle AMC$, а оттука следува дека: $MB \cong AC$.

**Конструкција:** Низ точката $M$ повлекуваме произволна права $q$, која ќе ја сече дадената права $p$ во некоја точка $A$. Потоа од точката $A$ по правата $p$ ја пренесуваме отсечката $AM$. Така ја добивме точката $B$ и равнокракиот триаголник $MAB$ $(MA \cong AB)$. Потоа, од точката $M$ опишуваме кружен лак со радиус $r = \overline{MA}$, а од точката $A$ — кружен лак со радиус $r_1 = \overline{MB}$. Пресекот на тие лаци ке ја даде точката $C$ — трето теме на $\triangle AMC$, што е скаден со триаголникот $MAB$. Правата што е определена со точките $M$ и $C$ е бараната права $k$.



Црт. 160

**Доказ:** Бидејќи е $AB \cong MA \cong MC$ и $MB \cong AC$, тоа триаголниците $MAB$ и $AMC$ се складни, а од нивната складност следува дека е $\beta \cong \alpha$. Но, бидејќи наизменичните агли $\alpha$ и $\beta$ се складни, тоа согласно теоремата 2 во § 28, правите $k$ и $p$ се паралелни.

**Дискусија:** Конструираната права $k$ е единствена, бидејќи согласно аксиомата за паралелност, низ точката $M \notin p$ постои само една права која е паралелна со дадената права $p$. Значи, задачата има еднозначно решение.

**Забелешка:** Горнава задача може да се реши и на следниов начин: Низ дадената точка $M$ повлекуваме нормала $l$ на правата $p$, а потоа низ точката $M$ повлекуваме друга нормала $k$ на правата $l$ (црт. 160). Нормалата $k$ е бараната права, бидејќи: $(l \perp p$ и $l \perp k) \Rightarrow k \parallel p$.

## § 33. ПОСЛОЖЕНИ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ ЗА ТРИАГОЛНИК

Конструкциите на триаголник по три дадени елементи, меѓу кои освен основни има и други негови елементи: висина, бисектриса или медијана, обично, спаѓаат во посложените конструктивни задачи за триаголник. Нивното решавање ќе го илустрираме на следниве неколку решени конструктивни задачи:

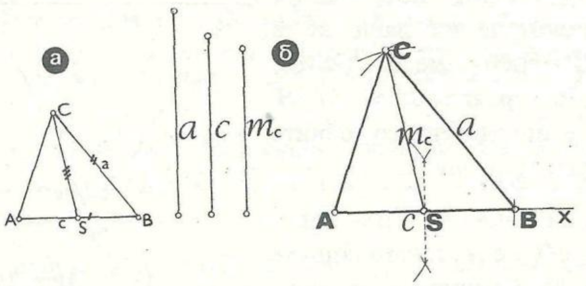
**Задача 1.** Да се конструира триаголник, ако се дадени должините на страните $a$ и $c$ и медијаната $m_c$ (црт. 161).

**Анализа:** Нека $ABC$ (црт. 161-а) е бараниот триаголник, во кој е

$$\overline{AB} = c;\ \overline{BC} = a;\ \overline{CS} = m_c.$$

Точката $S$ е средина на страната $AB$, т.е. $\overline{AS} = \overline{BS} = \frac{c}{2}$. Според тоа, познати ни се трите страни на триагалникот $BCS$. Со неговата конструкција го конструираме и бараниот триаголник $ABC$.

**Конструкција:** На произволна полуправа $Ax$ од точката $A$ ја пренесуваме страната $c$. Така ја добивме точката $B$, при што $\overline{AB} = c$. Потоа ја одредуваме средината $S$ на отсечката $AB$ и од точките $B$ и $S$ (како центри) опишуваме кружни лаци со радиуси соодветно еднакви на $a$ и $m_c$. Пресекот $C$ на опишаните кружни лаци ќе претставува трето теме на бараниот триаголник (црт. 161-б).

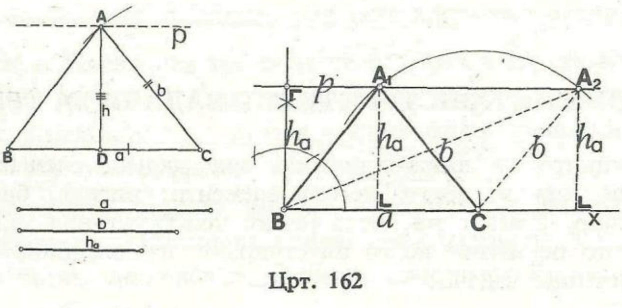



Црт. 161

**Доказ:** Конструираниот триаголник $ABC$ ги содржи сите дадени елементи по големина и положба, па, според тоа, тој е решение на задачата.

**Дискусија:** Решението на задачата е еднозначно определено, ако дадените елементи $a$, $c$ и $m_c$ го задоволуваат условот $a + m_c > \frac{c}{2}$. Ако, пак, $a + m_c \leqslant \frac{c}{2}$, тогаш задачата нема решение (зошто?).

**Задача 2.** Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени должините на страните $a$ и $b$ и висината $h_a$ (црт. 162).




Црт. 162

**Анализа:** Нека $\triangle ABC$ е бараниот триаголник, во кој $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AD} = h_a$ и $AD \perp BC$. Темето $A$ е на растојание $h_a$ од правата $BC$, т.е. тоа ќе ѝ припаѓа на некоја права $p$ ($A \in p$), која е паралелна на правата $BC$ ($p \parallel BC$) и на растојание $d = h_a$ од неа. Но темето $A$ мора да го задоволува и уловот $\overline{AC} = b$, т.е. тоа ќе лежи на кружницата $k$ ($C$, $b$). Според тоа, темето $A$ е пресек на правата $p \parallel BC$ и кружницата $k(C, b)$ (црт. 162).

**Конструкција:** Ќе нацртаме полуправа $Bx$ и на неа од почетокот $B$ ја пренесуваме дадената страна $a$; ќе ја добиеме точката $C$, при што $\overline{BC} = a$. Потоа ја конструираме права $p$, која е паралелна со правата $BC$ и на растојание $h_a$ од неа. На крајот од точката $C$ ќе опишеме кружница (кружен лак) со радиус $b$ и пресеците на таа кружница со правата $p$ ќе ги означиме со $A_1$ и $A_2$.

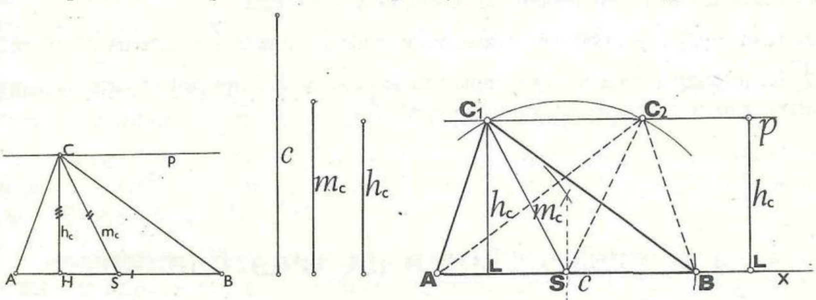
**Доказ:** Триаголниците $A_1BC$ и $A_2BC$ ги содржат сите дадени елементи и по големина и по положба; според тоа, тие се решение на задачата.

**Дискусија:** Ако $b > h_a$, кружницата $k$ и правата $p$ ќе имаат две пресечни точки $A_1$ и $A_2$. Во тој случај решението на задачата е двозначно, бидејќи триаголниците $A_1BC$ и $A_2BC$ не се складни. Ако, пак, $b = h_a$, тогаш кружницата $k$ и правата $p$ ќе имаат само една задничка точка $A$, а решението на задачата е еднозначно — тоа е правоаголен триаголник. Ако е $b < h_a$, тогаш задачата нема решение.

**Задача 3.** Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени должините на страната $c$, медијаната $m_c$ и висината $h_c$ (црт. 163)

**Анализа:** Нека $\triangle ABC$ е бараниот триаголник (црт. 163), во кој е $\overline{AB} = c$; $\overline{CS} = m_c$; $\overline{CH} = h_c$; $\overline{AS} = \overline{SB}$ и $CH \perp AB$.

Темето $C$ треба да задоволува два услова: да е на растојание $h_c$ од правата $AB$ и на растојание $m_c$ од точката $S$. Според тоа, темето $C$ претставува пресек на правата $p$, која е паралелна со правата $AB$ и на растојание $h_c$ од неа, и кружницата $k$ ($S$; $m_c$).




Црт. 163

**Конструкција:** Симболички ќе ја запишеме вака:

1. Отсечка $AB$, таква што $AB \subset Ax$ и $\overline{AB} = c$.

2. Точка $S$, таква што $S \in AB$ и $\overline{AS} = \overline{SB}$.

3. Правата $p$, таква што $p \parallel AB$ и на растојание $h_c$ од $AB$.

4. Кружница (кружен лак) $k$ $(S;\ m_c)$.

5. $C_1$ и $C_2$ — пресечни точки на правата $p$ и кружницата $k$.

6. Отсечки $C_1A$ и $C_1B$; $C_2A$ и $C_2B$.

**Доказ:** Секој од триагалниците $ABC_1$ и $ABC_2$ ги содржи дадените елементи и по големина и по положба. Значи тие се решение на задачата.

**Дискусија:** Ако $m_c > h_c$, тогаш $k \cap p = \{C_1, C_2\}$. Значи, се добиваат два триаголника $ABC_1$ и $ABC_2$. Но, може да се покаже дека тие се складни (симетрични се во однос на симетралата на страната $AB$). Според тоа, при $m_c > h_c$ решението на задачата е еднозначно. Ако $m_c = h_c$, тогаш $k \cap p = \{C\}$. Во тој случај се добива еден триаголник — рамнокрак триаголник. Ако пак $m_c < h_c$, тогаш $k \cap p = \varnothing$, па, според тоа, задачата нема решение.

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени страната $a$ висината $h_a$ и медијаната $m_a$!

**2.** Да се конструира рамнокрак триаголник, ако се дадени: аголот $\alpha$ при основата и висината што ѝ одговара: а) на основата; б) на кракот!

**3.** Конструирај рамнокрак триаголник, ако се дадени: основата $a = 4$ cm и висината $h_a = 5$ cm!

**4.** Конструирај рамнокрак триаголник ако се дадени: кракот $b$ и висината што ѝ одговара на основата $h_a$!

**5.** Конструирај рамнокрак триаголник $ABC$, ако е даден аголот при врвот $\gamma = 46°$ и висината што ѝ одговара на основата $h_a = 7{,}5$ cm!

**6.** Конструирај рамностран триаголник, чија висина е еднаква на $h = 6$ cm!

**7.** Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени должините на една катета и висината што ѝ одговара на хипотенузата!

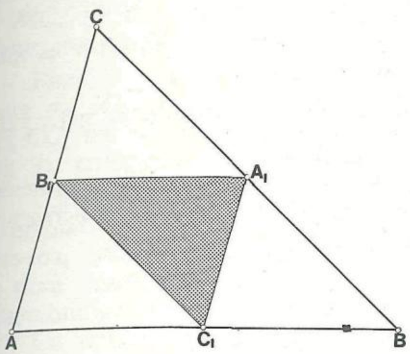
## § 34. СРЕДНИ ЛИНИИ НА ТРИАГОЛНИКОТ

*Дефиниција*: **Отсечката, која ги соединува средините на две страни на триаголникот, се вика средна линија на триаголникот.**

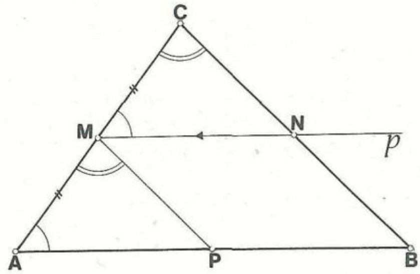
Ако со $A_1$, $B_1$ и $C_1$ ги означиме средините на страните на триаголникот $ABC$, јасно е дека тој има три средни линии: $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $A_1C_1$ (црт. 164).

*Теорема 1.* **Правата, која минува низ средината на една страна на триаголникот и е паралелна со друга негова страна, ја располовува третата страна.**

**Доказ:** Нека во $\triangle ABC$ е $AM \cong MC$ и $MN \parallel AB$ (црт. 165). Треба да докажеме дека $BN \cong NC$.




Црт. 164




Црт. 165

Ако извршиме транслација на отсечката $BN$ за вектор $\overrightarrow{NM}$, таа ќе се преслика на отсечката $PM$, при што $PM \parallel BN$, $PM \cong BN$ и $BP \cong NM$ (зошто?). Очигледно е дека $\triangle APM \cong \triangle MNC$, бидејќи е $AM \cong MC$ $\measuredangle MAP \cong \measuredangle CMN$ и $\measuredangle AMP \cong \measuredangle MCN$ (како согласни агли). Од складноста на триаголниците $APM$ и $MNC$ следува дека: $PM \cong NC$ и $PA \cong NM$.

На крајот, ако ги спoредиме заклучоците до кои доаѓаме од транслацијата $t(\overrightarrow{NM})$ и складноста на триаголниците $APM$ и $MNC$, наоѓаме:

1°. $(PM \cong BN$ и $PM \cong NC) \Rightarrow BN \cong NC$, штд и

2°. $(BP \cong NM$ и $NM \cong PA) \Rightarrow BP \cong PA \cong NM$, т.е. $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$.

Според тоа, правата $p \parallel AB$ што минува низ точката $M$ (средина на страната $AC$) минува и низ средината $N$ на страната $BC$.

Тоа значи дека отсечката $MN$ е средна линија на триаголникот. Но, бидејќи $MN$ ѝ припаѓа на правата $p \parallel AB$, тоа и таа е паралелна со страната $AB$, т.е. $MN \parallel AB$.

Од заклучокот 2° гледаме дека должината на средната линија $MN$ е еднаква на половината од должината на страната $AB$. Според тоа, со тоа е докажана и следнава:

*Теорема 2.* **Средната линија на триаголникот е паралелна со третата страна, а нејзината должина е еднаква на половината од должината на таа страна.**

Лесно може да се докаже дека:

**Трите средни линии го делат триаголникот на четири складни триаголници.**

Предлагаме ова тврдење да го докажете сами.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е средна линија на триаголникот?

**2.** Кои својства ги има средната линија на триаголникот? Докажи ги!

**3.** Даден триаголник $ABC$ има периметар $p$. Одреди го периметарот на триаголникот $A_1B_1C_1$ што го образуваат средните линии на $\triangle ABC$!

**4.** Да се конструира триаголник $ABC$ ако се познати средините на трите негови страни!

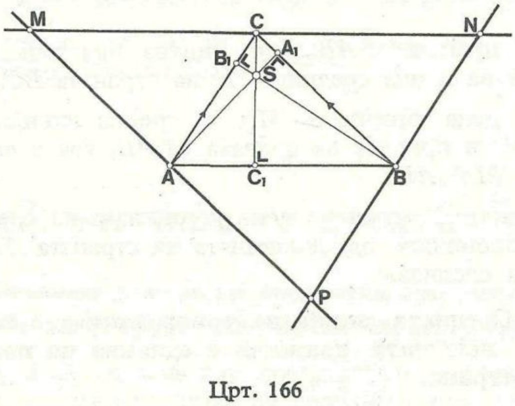
**5.** Треба да се одреди растојанието меѓу две точки на теренот што се разделени со некоја бара или друга пречка. Како во тој случај ќе се искористи својството на средната линија на триагалникот?

## § 35. ВИСИНИ НА ТРИАГОЛНИКОТ. ОРТОЦЕНТАР

Висината на триаголникот ја дефиниравме порано (види § 15). Тука ќе ја докажеме следнава:

*Теорема*: **Правите определени со висините на триаголникот се сечат во иста точка.**

*Доказ*: Нека е даден триаголникот $ABC$, чии висини се $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ (црт. 166). Ако низ темињата на триаголникот $ABC$ повлечеме прави паралелни со спротивните страни $AB$, $BC$ и $AC$ ќе го добиеме триаголникот $MNP$, при што $AB \parallel MN$; $BC \parallel MP$ и $AC \parallel PN$ (црт. 166).




Црт. 166

Може да се докаже дека страните на дадениот $\triangle ABC$ се средни линии на триаголникот $MNP$, т.е. темињата $A$, $B$ и $C$ се средини на страните на триаголникот $MNP$.

Навистина: со транслација $t(\overrightarrow{AC})$ отсечката $AB$ се пресликува на отсечката $CN$, а со транслација $t(\overrightarrow{BC})$ истата отсечка $AB$ се пресликува на $MC$. Според тоа, ќе биде: $AB \cong CN$ и $AB \cong MC$, односно $CN \cong MC$. Значи, темето $C$ е средина на страната $MN$.

Бидејќи висината $CC_1$ е нормална и на страната $AB$, а $AB$ е паралелна на $MN$, тоа $CC_1$ е нормална и на страната $MN$. Според тоа, висината $CC_1$ на $\triangle ABC$, што е повлечена од темето $C$ кон страната $AB$, ѝ припаѓа на симетралата на страната $MN$ на помошниот $\triangle MNP$ (црт. 166).

Слично на тоа, и другите две висини $AA_1$ и $BB_1$ на дадениот $\triangle ABC$ им припаѓаат (лежат) на симетралите на другите две страни на $\triangle MNP$. Меѓутоа, знаеме дека симетралите на страните на триагалникот се сечат во иста точка (види § 17). Значи, и правите на кои лежат висините на триаголникот $ABC$ се сечат во иста точка $S$ (црт. 166).

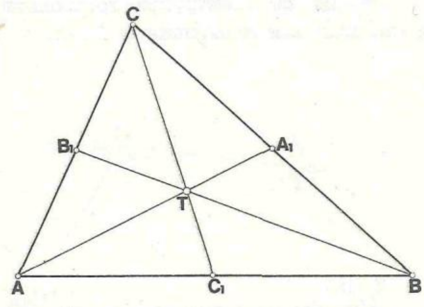
Со тоа теоремата е докажана.

Пресекот $S$ на правите определени со висините на триаголникот се вика *ортоцентар*.

## § 36. МЕДИЈАНИ НА ТРИАГОЛНИКОТ. ТЕЖИШТЕ

Согласно дефиницијата 3 во § 15, медијана на триагалникот е отсечка што го соединува кое било теме на триаголникот со средината на неговата спротивна страна.

Секој триаголник има три медијани: $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ (црт. 167). Должините на медијаните усвоивме да ги означуваме соодветно со $m_a$, $m_b$, $m_c$.



Црт. 167

Медијаните на триаголникот уште се викаат и *тежишни линии*. Ако тие правилно и точно се конструирани, ќе забележиме дека: трите медијани на триаголникот се сечат во една точка, која се вика *тежиште* на триаголникот.

Тежиштето на триаголникот, обично, го означуваме со буквата $T$. Тоа ја дели секоја медијана на по два дела. Со споредување на тие делови лесно се уверуваме дека: Делот (од медијаната) од темето до тежиштето е два пати поголем од делот што е ограничен со тежиштето и средината на спротивната страна.

Горниве заклучоци нè упатуваат дека ќе важи следнава:

*Теорема*: **Трите медијани на триаголникот се сечат во една точка, која секоја медијана ја дели на два дела, така што должината на делот до темето е два пати поголема од должината на другиот нејзин дел.**

Доказот на оваа теорема, поради неговата сложеност, тука не го даваме.

Четирите точки: центар на опишаната и центар на впишаната кружница, ортоцентарот и тежиштето, се викаат *карактеристични точки на триаголникот*.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е висина, а што медијана на триаголникот?

**2.** Што е ортоцентар, а што тежиште на триаголникот?

**3.** Кои својства ги има тежиштето на триаголникот?

**4.** Да се докаже дека височините во равнокракиот триаголник, што им одговараат на неговите краци, се складни!

**5.** Да се докаже дека висината во равнокракиот правоаголен триаголник, што ѝ одговара на хипотенузата е половина од хипотенузата!

**6.** Со примена на својството на тежиштето на триаголникот, подели ја дадената отсечка $AB$ на три складни дела!

**7.** Да се докаже дека медијаните во равнокракиот триаголник, што се повлечени кон краците, се складни!

**8.** Нацртај произволен остроаголен триаголник, потоа одреди ги четирите негови карактеристични точки. Може да се докаже дека сите тие лежат на една права. Провери го тоа на твојот цртеж!

**9.** Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени: страната $c$, прилегнатиот на неа агол $\alpha$ и медијаната $m_a$!

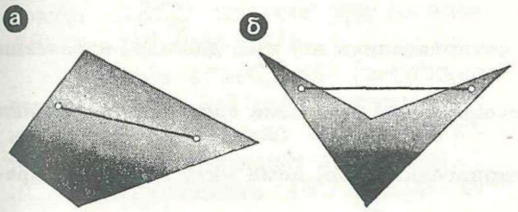
Глава VI

# ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ

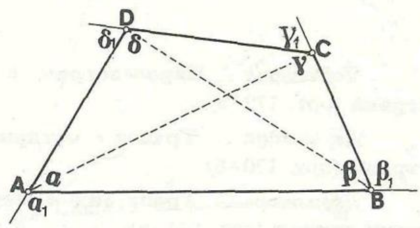
## § 37. ПОИМ И ВИДОВИ ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ (ПОВТОРУВАЊЕ)

Од V одделение познато ви е дека: **Многуаголник кој има три страни се вика триаголник; многуаголник кој има четири страни се вика четириаголник,** итн.

Четириаголникот може да биде *конвексен* (црт. 168–а) или *конкавен* (црт. 168–б) По што се разликува конвексниот четириаголник од конкавниот? Кај конвексниот четириаголник секоја отсечка што сврзува кои и да било две негови точки целата лежи на него; а кај конкавниот четириаголник тоа не е така (црт. 168). Ние ќе ги разгледуваме само конвексните четириаголници и под зборот „четириаголник“ ќе подразбираме конвексен четириаголник.




Црт. 168




Црт. 169

Познато е што се: *темиња* ($A$, $B$, $C$, $D$), *страни* ($AB$, $BC$, $CD$, $AD$), *внатрешни агли* ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$), *надворешни агли* ($\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$) и *дијагонали* на четириаголник (црт. 169).

Темињата $A$ и $C$; $B$ и $D$ се викаат *спротивни темиња.* Две страни, кои имаат еден заеднички крај (теме) се викаат *соседни страни*; а две страни кои немаат заеднички краеви се викаат *спротивни страни* на четириаголникот.

Секои две соседни страни на четириаголникот образуваат по два агла. Оној од тие два агла, на кој му припаѓа целиот конвексен четириаголник, се вика *внатрешен агол* или, кратко, само *агол* на четириаголникот.

Аглите, пак, што се напоредни на внатрешните агли на конвексниот четириаголник, се викаат негови *надворешни агли*.

Два агла чии темиња се во крајните точки на иста страна се викаат *прилегнати агли* на таа страна; а два агла чии темиња се спротивни темиња на четириаголникот се викаат *спротивни агли* на тој четириаголник.

Дијагонали на четириаголникот се отсечки ($AC$, $BD$) што сврзуваат по две спротивни негови темиња.

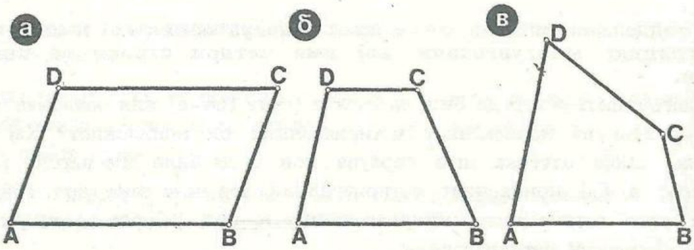
За аглите на четириаголникот знаете дека:

**1°. Збирот на внатрешните агли на четириаголникот изнесува 360°,** т.е. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

**2°. Збирот на надворешните агли на четириаголникот изнесува 360°,** т.е. $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360°$.

Поделбата на четириаголниците на видови може да се изврши на различни начини. Минатата година конвексните четириаголници ние ги разделивме на видови според заемната положба на нивните спротивни страни. Јасно е дека четириаголникот може да има најмногу два пара (спротивни) паралелни страни, или само еден пар (спротивни) паралелни страни, или ниту еден пар (спротивни) паралелни страни.

Поаѓајќи од тој факт, множеството на сите конвексни четириаголници можеме да го разделиме на три дисјунктни подмножества, кои имаат и посебни имиња: *паралелограми*, *трапези* и *трапезоиди*.




Црт. 170

*Дефиниција 1.* **Паралелограм е четириаголник кој има два пара паралелни страни** (црт. 170-а).

*Дефиниција 2.* **Трапез е четириаголник, кој има само еден пар паралелни страни** (црт. 170-б)

*Дефиниција 3.* **Трапезоид е четириаголник, кој нема ниту еден пар паралелни страни** (црт. 170-в).

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е четириаголник? Нацртај еден четириаголник и обележи го!

**2.** Кои четириаголници се викаат конвексни, а кои конкавни?

**3.** Нацртај еден конвексен четириаголник, обележи го и покажи: за страната $AB$: а) која е нејзина спротивна страна; б) кои се нејзини соседни страни; в) кои се прилегнати агли на неа!

**4.** Докажи дека збирот на внатрешните агли на конвексниот четириаголник изнесува 360°!

**5.** Докажи дека збирот на надворешните агли на конвексниот четириаголник изнесува 360°!

**6.** Можат ли внатрешните агли на четириаголникот да бидат: а) сите остри; б) сите прави? в) сите тапи?

**7.** Позната е големината на три внатрешни агли на четириаголникот $ABCD$: $\alpha = 47°$, $\beta = 125°$ и $\gamma = 82°$. Одреди ја големината на четвртиот негов внатрешен агол!

**8.** Аглите на еден четириаголник се складни еден на друг. По колку изнесува секој од нив?

**9.** Колку остри, колку прави и колку тапи внатрешни агли може да има четириаголникот? Наведи ги сите можности!

**10.** Кои четириаголници ги викаме: а) паралелограми; б) трапези; в) трапезоиди?

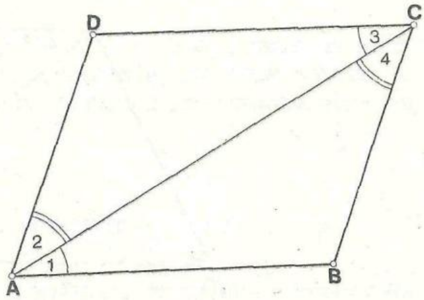
## § 38. ПАРАЛЕЛОГРАМИ

### 38. 1. СВОЈСТВА НА ПАРАЛЕЛОГРАМИТЕ

Паралелограмите ги имаат следниве својства:

*Теорема 1.* **Секоја дијагонала на паралелограмот го дели истиот на два складни триаголници.**

*Доказ*: Нека е даден паралелограмот $ABCD (AB \| DC$ и $AD \| BC)$. Дијагоналата $AC$ го дели паралелограмот $ABCD$ на два триаголника $ABC$ и $CDA$ (црт. 171).



Црт. 171

Бидејќи е: $AC \cong AC$ (заедничка страна), $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 3$ (како наизменични) и $\sphericalangle 4 \cong \sphericalangle 2$ (како наизменични), тоа, согласно признакот за складност $ACA$, триаголниците $ABC$ и $CDA$ се складни, т.е.

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$, штд.

*Теорема 2.* **Во секој паралелограм:**

а) **спротивните страни се складни;**

б) **спротивните агли се складни;**

в) **прилегнатите агли на секоја страна се суплементни;**

г) **дијагоналите се преполовуваат.**

*Доказ*: Нека е даден паралелограмот $ABCD$ ($AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$).

а) Со теоремата 1 утврдивме дека $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Оттука следува дека: $AB \cong CD$ и $BC \cong DA$, штд.

б) Складноста на спротивните агли $\measuredangle B \cong \measuredangle D$ следува од складноста на триаголниците $ABC$ и $CDA$; а додека пак, $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ како збирови од соодветно складни агли ($\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ и $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4$) (црт. 171).

в) Бидејќи секој пар спротивни страни на паралелограмот се паралелни, тоа прилегнатите агли на секоја страна во паралелограмот претставуваат по еден пар спротивни (трансверзални) агли, па, според тоа, тие се суплементни, т.е. $\widehat{A}+\widehat{B}=180°$; $\widehat{A}+\widehat{D}=180°$; $\widehat{B}+\widehat{C}=180°$ и $\widehat{C}+\widehat{D}=180°$.

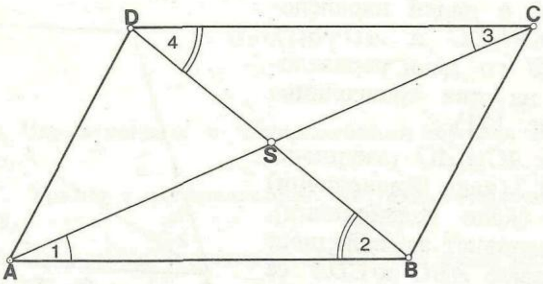
г) Да ги разгледаме триаголниците $ABS$ и $CDS$ (црт. 172). Во делот (а) на ова теорема докажавме дека е $AB \cong CD$. Бидејќи $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ и $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4$, тоа, согласно признакот за складност $ACA$, триаголниците $ABS$ и $CDS$ се складни. Од $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ следува дека е $AS \cong CS$ и $BS \cong DS$. Значи, пресекот $S$ на дијагоналите на паралелограмот е средина и на двете дијагонали $AC$ и $BD$, штд.

Со тоа теоремата 2 целосно е докажана. Од неа следуваат:

*Последица 1.* **Ако две соседни страни на паралелограмот се складни, тогаш сите негови страни се складни.**

*Последица 2.* **Ако еден од аглите на паралелограмот е прав, тогаш сите негови агли се прави.**

*Теорема 3.* **Паралелограмот е централно симетрична фигура, чиј центар на симетрија е пресекот на неговите дијагонали.**




Црт. 172

*Доказ*: Нека е даден паралелограмот $ABCD$, а $S$ нека е пресек на неговите дијагонали (црт. 172). т.е. $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$; $AS \cong SC$; $BS \cong SD$. Очигледно е дека при централната симетрија $\varphi_s$ точките $A$, $B$, $C$ и $D$ се пресликуваат соодветно во точките $C$, $D$, $A$ и $B$, т.е. паралелограмот $ABCD$ ќе се преслика сам на себе, штд.

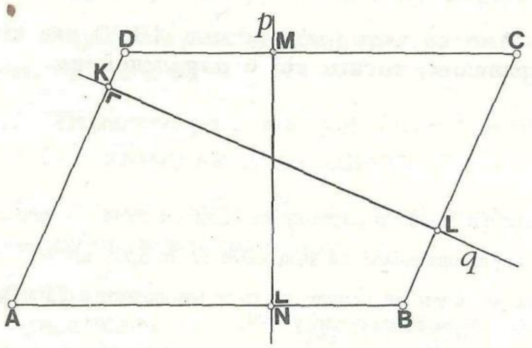
Од делот (а) на теоремата 2 следува дека спротивните страни на паралелограмот имаат еднаква должина. Затоа, должините на спротивните страни $AB$ и $CD$ на паралелограмот $ABCD$ ги означуваме со иста буква $a$, а должините на другите две спротивни страни со $b$, т.е.

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a; \ \overline{AD} = \overline{BC} = b.$$

Страната на која лежи паралелограмот, обично, се вика негова *основа.* Секоја страна на паралелограмот може да се избере за негова основа.

Ако кон секој пар спротивни паралелни страни на паралелограмот повлечеме по една нормала $p$ и $q$, ќе ги добиеме отсечките $MN$ и $KL$, кои се делови на нормалите $p$ и $q$, заклучени меѓу спротивните страни (или нивните продолженија) на паралелограмот (црт. 173).

*Дефиниција*: **Отсечката од нормалата која е повлечена кон две спротивни страни на паралелограмот и е заклучена меѓу тие страни се вика висина на паралелограмот.**




Црт. 173

Паралелограмот има две висини ($MN$ и $KL$). Должините на висините, во зависност од страните кон кои се повлечени, ги означуваме соодветно со $h_a$ и $h_b$. Тие всушност, ни го даваат растојанието меѓу парот спротивни страни на паралелограмот.

### 38. 2. ПРИЗНАЦИ НА ПАРАЛЕЛОГРАМОТ

Може да се докаже дека важи и обратната теорема на теоремата 2:

*Теорема 2-б.* **Ако во четириаголникот:**

а) **спротивните страни две по две се складни, или**

б) **спротивните агли два по два се складни, или**

в) **секои два прилегнати агли се суплементни, или**

г) **дијагоналите му се преполовуваат,**

**тогаш тој четириаголник е паралелограм.**

Од неа заклучуваме дека: ако за четириаголникот $ABCD$ е исполнет еден од условите (а), (б), (в) или (г), тогаш неговите спротивни страни се паралелни, па според тоа, тој е паралелограм. Затоа, за секое од тврдењата (а), (б), (в) и (г) во теоремата 2-б велиме дека претставува *доволен услов* или *признак* четириаголникот да е паралелограм. Тоа значи дека од секој признак (а), (б), (в) или (г) може да се добие нова дефиниција на паралелограмот. На пример, од признакот (г) ја добиваме следнава дефиниција:

**Паралелограм е четириагвлник на кој дијагоналите му се преполовуваат.**

Ако ја прифатиме ова дефиниција, тогаш тврдењето: „Спротивните страни на паралелограмот се две по две паралелни" ќе претставува теорема и треба да се докаже.

Постои уште еден признак на паралелограмот. Тоа е:

*Теорема 4.* **Ако во четириаголникот $ABCD$ две спротивни страни се складни и паралелни, тогаш тој е паралелограм.**

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Кои својства ги имаат внатрешните агли на паралелограмот?

**2.** Може ли паралелограмот да има само еден прав агол?

**3.** Големината на еден од аглите на паралелограмот е 75°. Одреди ја големината на останатите агли на тој паралелограм!

**4.** Може ли врз основа само на внатрешните агли на четириаголникот да се утврди дали тој е паралелограм, и ако може, како тоа го утврдуваме?

**5.** Кои својства ги имаат спротивните страни на паралелограмот?

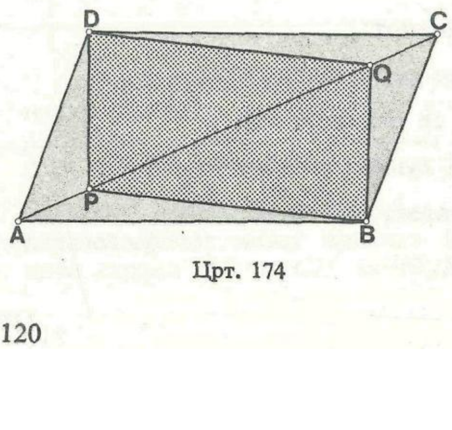
**6.** Може ли врз основа само на еден пар спротивни страни на четириаголникот да се утврди дали тој е паралелограм или не, и ако може, како тоа го утврдуваме?

**7.** Кои својства ги имаат дијагоналите на паралелограмот?

**8.** Може ли врз основа само на дијагоналите на четириаголникот да се утврди дали тој е паралелограм, и ако може, како тоа го утврдуваме?

**9.** Докажи дека паралелограмот е конвексен четириаглник!

**10.** Ако две спротивни страни на четириаголникот се паралелни, а другите две негови спротивни страни се складни, дали тој четириаголник секогаш е паралелограм?



Црт. 174

**11.** Страните на паралелограмот се долги $a=8$ cm и $b=5$ cm. Може ли една од дијагоналите на тој паралелограм да има должина: а) 15 cm; б) 13 cm; в) 9 cm; г) 3 cm?

**12.** На црт. 174 даден е паралелограм $ABCD$. Од дијагоналата $AC$ земени се две точки $P$ и $Q$ такви што $AP \cong CQ$. Докажи дека четириаголникот $PBQD$ е паралелограм!

**13.** Докажи дека бисектрисите на два спротивни агли на паралелограмот се паралелни!

**14.** Докажи дека збирот на растојанијата на која и да било внатрешна точка $M$ на паралелограмот $ABCD$ до правите определени со неговите страни е постојана величина за дадениот паралелограм.

## § 39. ВИДОВИ ПАРАЛЕЛОГРАМИ

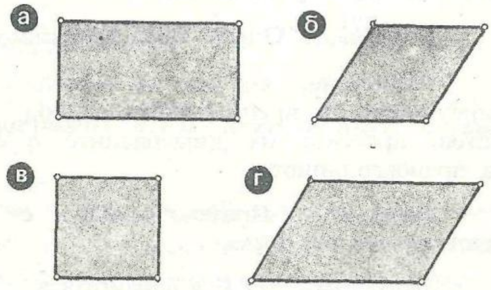
Од последиците 1 и 2 на теоремата 2 (§ 38) видовме дека: ако еден од аглите на паралелограмот е прав, тогаш сите негови агли се прави; и ако две соседни страни се складни, тогаш сите страни му се складни.

*Дефиниција 1.* **Паралелограм во кој сите агли се прави, се вика правоаголник** (црт. 175, *а и в*).

*Дефиниција 2.* **Паралелограм на кој сите страни се складни, се вика ромб** (црт. 175, б и в).

*Дефиниција 3.* **Паралелограм на кој сите агли се прави и сите страни се складни, се вика квадрат** (црт. 175, в)

Според ваквата поделба на паралелограмите, очигледно е дека: квадратот е и правоаголник (со складни страни) и ромб (ромб со прави агли). Според тоа, секој квадрат е правоаголник, но не секој правоаголник е квадрат. Исто така: секој квадрат е ромб, но не секој ромб е квадрат.



Црт. 175

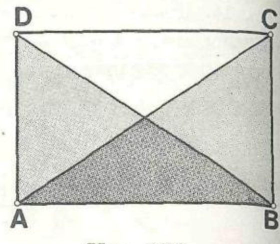
Општиот вид на паралелограм, кој не е ниту правоаголник, ниту ромб, според тоа, ќе е и ниту квадрат, се вика *ромбоид* (црт. 175, г).

### 39. 1. ПРАВОАГОЛНИК

Бидејќи правоаголникот е паралелограм, тоа сите својства на паралелограмот ќе важат и за правоаголникот. Меѓутоа, правоаголникот има и други посебни својства.

*Теорема 1-а.* **Во правоаголникот дијагоналите се складни.**

*Доказ*: Нека паралелограмот $ABCD$ е правоаголник (црт. 176). Да ги повлечеме двете дијагонали $AC$ и $BD$. Тогаш имаме: $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, бидејќи тие се правоаголни и имаат соодветно складни катети ($AB \cong BA$ и $BC \cong AD$). Од нивната складност следува дека и хипотенузите им се складни, т.е. $AC \cong BD$, штд.



Црт. 176

Ќе покажеме дека важи и обратната:

*Теорема 1-б.* **Ако во паралелограмот $ABCD$ дијагоналите се складни, тогаш тој е правоаголник.**

*Доказ*: Нека $ABCD$ е паралелограм и $AC \cong BD$ (црт. 176). Тогаш триаголниците $ABC$ и $BAD$ се складни согласно третиот признак $CCC$, а од нивната складност следува дека $\measuredangle B \cong \measuredangle A$. Меѓутоа, аглите $\measuredangle B$ и $\measuredangle A$ во паралелограмот $ABCD$ се прилегнати на страната $AB$, па затоа тие се суплементни, т.е. $\widehat{B}+\widehat{A}=180°$.

Од $\measuredangle B \cong \measuredangle A$ и $\hat{B}+\hat{A}=180°$ следува дека аглите $\measuredangle B$ и $\measuredangle A$ се прави. Според тоа, паралелограмот $ABCD$ е правоаголник, штд.

Следствено, тврдењето во теоремата *1*-б претставува доволен услов или признак паралелограмот $ABCD$ да е правоаголник.

Теоремите *1-а* и *1-б* заедно ги искажуваме вака:

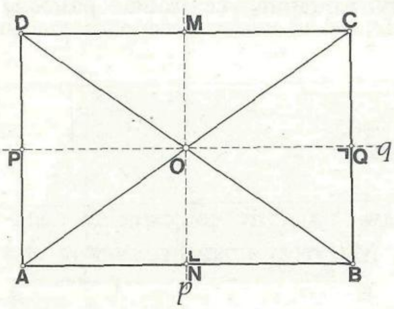
*Теорема 1.* **Паралелограмот $ABCD$ е правоаголник ако и само ако дијагоналите му се складни.**

*Последица*: **Околу правоаголникот може да се опише кружница.**

Навистина, бидејќи правоаголникот е паралелограм, тоа неговите дијагонали се преполовуваат, а од друга страна, тие се и складни. Затоа, пресекот на дијагоналите е еднакво оддалечен од сите темиња на правоаголникот.

*Теорема 2.* **Правоаголникот е осно симетрична фигура со две оски на симетријата.**

*Доказ*: Нека $ABCD$ е правоаголник, а $O$ — пресек на неговите дијагонали. Низ точката $O$ да повлечеме нормали $p$ и $q$ кон страните на правоаголникот $p \perp AB$ и $q \perp BC$ (црт. 177). Тогаш $ON$ е висина на рамнокракиот триаголник $ABO$, а воедно и негова медијана и симетрала на неговата основа $AB$. Слично на тоа, $OM$ е висина пак на рамнокракиот триаголник $CDO$ а воедно и негова медијана и симетрала на неговата основа $CD$ (црт. 177). Значи, нормалата $p$ што е повлечена низ пресекот на дијагоналите $O$, претставува заедничка симетрала на спротивните страни $AB$ и $DC$ на правоаголникот $ABCD$.



Црт. 177

Очигледно е дека при осната симетрија $S_p$ четворката темиња на правоаголникот се пресликува сама на себе:

$$A \xrightarrow{Sp} B,\ D \xrightarrow{Sp} C,\ C \xrightarrow{Sp} D,\ B \xrightarrow{Sp} A,$$

страните $AB$ и $CD$ се пресликуваат сами на себе, а страните $AD$ и $BC$ се пресликуваат една на друга. Затоа и целиот правоаголник се пресликува сам на себе. Според тоа, правата $p$ е оска на симетријата на правоаголникот $ABCD$.

Аналогно се докажува дека и правата $q$ е оска на симетријата на правоаголникот $ABCD$.

## 39. 2. РОМБ

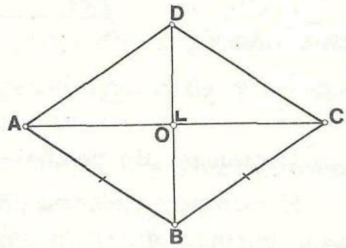
Бидејќи ромбот е паралелограм, тоа својствата на паралелограмот ќе важат и за ромбот. Меѓутоа, ромбот има и други посебни својства.

*Теорема 3-а.* **Дијагоналите на ромбот се заемно нормални.**

*Доказ*: Нека паралелограмот $ABCD$ е ромб, т.е. $AB \cong BC$ (црт. 178).

Треба да докажеме дека $AC \perp BD$.

Бидејќи $AB \cong BC$, тоа триаголникот $ABC$ е рамнокрак. Но, според својството на дијагоналите на паралелограмот, имаме $AO \cong OC$. Според тоа, $BO$ е медијана и висина на рамнокракиот триаголник $ABC$. Затоа $BO \perp AC$, т.е. $BD \perp AC$, штд.



Црт. 178

Ќе покажеме дека важи и обратната теорема:

*Теорема 3-б.* **Ако во паралелограмот $ABCD$ дијагоналите се заемно нормални, тогаш тој е ромб.**

*Доказ*: Нека $ABCD$ е паралелограм, во кој е $AC \perp BD$ (црт. 178). Тогаш имаме: $\triangle AOB \cong \triangle COB$, бидејќи тие се правоаголни и имаат соодветно складни катети ($AO \cong CO$ и $BO \cong BO$). Од нивната складност следува дека и хипотенузите им се складни, т.е. $BA \cong BC$. Значи паралелограмот $ABCD$ е ромб. штд.

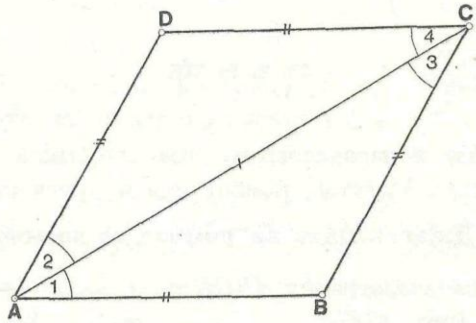
Според тоа, тврдењето во теоремата *3*-б претставува признак дека паралелограмот $ABCD$ е ромб.

Теоремите *3-а* и *3-б* заедно ги искажуваме вака:

**Паралелограмот $ABCD$ е ромб ако и само ако дијагоналите му се заемно нормални.**

*Теорема 4.* **Дијагоналите на ромбот се бисектриси на спротивните агли во него.**

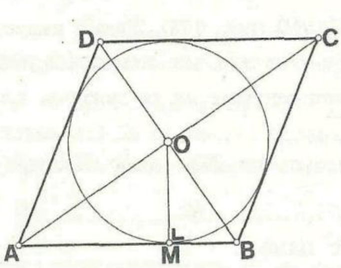
*Доказ*: Нека $ABCD$ е ромб, а $AC$ една негова дијагонала (црт. 179). Тогаш $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, бидејќи тие се рамнокраки и имаат соодветно складни краци ($AB \cong AD$; $BC \cong DC$) и заедничка основа $AC$. Од нивната складност следува дека $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3 \cong \sphericalangle 4$. Значи, дијагоналата $AC$ ги преполовува спротивните агли $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle C$ на ромбот, штд.



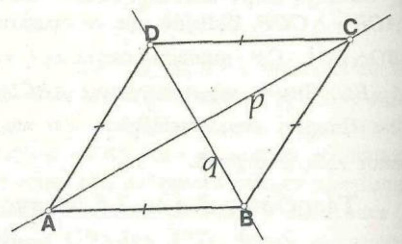

Црт. 179

*Последица*: **Во ромбот може да се впише кружница.**

Навистина, дијагоналите штом се бисектриси на спротивните агли, тогаш нивниот пресек $O$ мора да е еднакво оддалечен од краците на тие агли, т.е. од страните на ромбот (црт. 180). Радиус на впишаната кружница претставува растојанието на пресекот на дијагоналите до која било страна на ромбот, т.е. $r = \overline{OM}$.




Црт. 180




Црт. 181

*Теорема 5*. **Ромбот е оносиметрична фигура со две оски на симетријата.**

*Доказ*: Нека $ABCD$ е ромб. Да ја повлечеме правата $p$ која ја содржи дијагоналата $AC$ на ромбот (црт. 181). Бидејќи точките $A$ и $C$ се еднакво оддалечени од крајните точки на дијагоналата $BD$, тоа тие ѝ припаѓаат на нејзината симетрала $p$ (црт. 181).

Очигледно е дека при осната симетрија $S_p$ четворката темиња на ромбот се пресликува сама на себе: $A \xrightarrow{Sp} A$, $B \xrightarrow{Sp} D$, $C \xrightarrow{Sp} C$, $D \xrightarrow{Sp} B$. А страните на ромбот се пресликуваат една на друга:

$$AB \to AD, \quad BC \to DC, \quad CD \to CB \text{ и } AD \to AB.$$

Според тоа, целиот ромб се пресликува сам на себе, т.е. правата $p$ што ја содржи дијагоналата $AC$ е оска на симетријата на ромбот.

Аналогно се докажува дека и правата $q$, која ја содржи другата дијагонала $BD$ е оска на симетријата на дадениот ромб.

## 39. 3. КВАДРАТ

Бидејќи квадратот е и паралелограм, и правоаголник, и ромб, тоа тој ги има сите нивни својства. Тоа се:

1°. Секоја дијагонала го дели квадратот на складни трилголници.

2°. Дијагоналите на квадратот: а) се преполовуваат; б) се складни; в) се заемно нормални; г) се бисектриси на спротивните агли.

3°. Кај квадратот може да се опише и да се впише кружница. Пресекот на дијагоналите е заеднички центар на тие кружници.

4°. Квадратот е централно симетрична фигура, со центар на симетријата во пресекот на дијагоналите.

5°. Квадратот е основиметрична фигура со четири оски на симетријата. Оски на симетријата се заедничките симетрали на спротивните страни и правите кои ги содржат дијагоналите.

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е познато за четириаголникот ако е кажано дека тој е: а) паралелограм; б) правоаголник; в) ромб; г) квадрат?

**2.** Разгледувајќи ги само дијагоналите на четириаголниците, можеш ли да утврдиш кој од каков вид е?

**3.** Точно ли е тврдењето: ако дијагоналите на четириаголникот се складни, тој е правоаголник.

**4.** Нацртај четириаголник со складни дијагонали, но тој да не е правоаголник!

**5.** Точно ли е тврдењето: ако дијагоналите на еден четириаголник се заемно нормални, тогаш тој е ромб.

**6.** Нацртај четириаголник со заемно нормални дијагонали, но тој да не е ромб!

**7.** Колку најмалку прави агли треба да има четириаголникот, за тој да биде правоаголник?

**8.** Колку оски на симетријата има: а) правоаголникот; б) ромбот; в) квадратот?

**9.** Докажи дека: ромб со складни дијагонали е квадрат!

**10.** Одреди ги аглите на ромбот, ако едната негова дијагонала е складна со страната!

**11.** Докажи дека: средините на страните на правоаголникот претставуваат темиња на ромб, а средините на страните на ромбот претставуваат темиња на правоаголник!

**12.** Докажи дека средините на страните на квадратот претставуваат темиња пак на квадрат!

**13.** Кои од следниве искази се точни (вистинити): а) Паралелограм кој има две соседни страни складни е ромб; б) Четириаголник, кој има складни и заемно нормални дијагонали претставува квадрат; в) Четириаголник, кој има три прави агли е правоаголник; г) Ако дијагоналата на паралелограмот е бисектриса на спротивните агли тогаш тој е ромб?

**14.** Бисектрисата на еден агол на правоаголникот ја дели поголемата негова страна на отсечки долги 5 cm и 7 cm. Одреди го периметарот на тој правоаголник!

**15.** Страните на правоаголникот се долги $a = 5$ cm и $b = 3$ cm. Одреди го збирот од растојанијата на произволна внатрешна точка $M$ на правоголникот до неговите страни!

**16.** Да се докаже дека: медијаната на правоаголниот триаголник, што соодветствува на хипотенузата, е еднаква на половина на хипотенузата.

## § 40. КОНСТРУКЦИЈА НА ПАРАЛЕЛОГРАМИТЕ

Да видиме прво со колку независни елементи е определен паралелограмот. Знаеме дека дијагоналата го дели паралелограмот на два складни триаголници. Конструкцијата на еден од нив овозможува да го конструираме и другиот триаголник, а со тоа да го конструираме и паралелограмот. Бидејќи триаголникот е определен со три независни негови елементи, тоа и паралелограмот е определен со три негови независни елементи. Меѓутоа, одделните видови паралелограми определени се и со помал број елементи: правоаголникот и ромбот со два елемента, а квадратот само со еден елемент (кој не е агол). Според тоа:

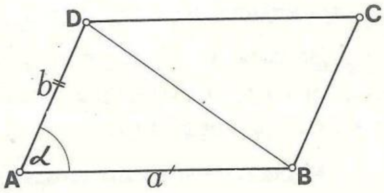
**Паралелограмот во општ случај е еднозначно определен со три независни елементи, правоаголникот и ромбот — со два елемента, а квадратот само со еден елемент.**

За конструкцијата на паралелограмите потребно е да се познаваат сите нивни својства. Тоа ќе го видиме на следниве примери:

**Задача 1.** Да се конструира паралелограм $ABCD$ ако се дадени должините на двете негови страни $a$ и $b$ и аголот $\alpha$ (црт. 182).

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот паралелограм, во кој е $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$ и $\widehat{A}=\alpha$ (црт. 182).

Од скицата очигледно е дека со дадените елементи еднозначно е определен триаголникот $ABD$. По конструкцијата на $\triangle ABD$ лесно го конструираме и триаголникот $DBC$, на кој што се познати две темиња $D$ и $B$ и двете страни $\overline{DC}=\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=\overline{AD}=b$ (црт. 182). Со конструкцијата на третото теме на $\triangle DBC$ го добиваме и бараниот паралелограм $ABCD$.

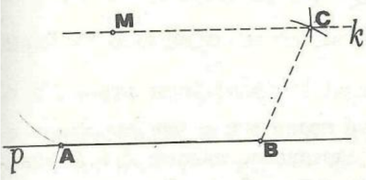


Црт. 182

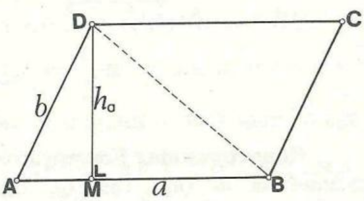
Со горната анализа задачата се сведува на конструкцијата на триаголници, па извршувањето на самата конструкција, нејзиниот доказ и дискусија, предлагаме сами да ги изведете.

**Задача 2.** Дадена е права $p$ и точка $M \notin p$. Низ точката $M$ да се повлече права $k \| p$.

**Анализа:** Ова задача ја решивме и порано (види § 32). На дадената права $p$ да избереме две произволни точки $A$ и $B$ (црт. 183). Ако точките $A$, $B$ и $M$ ни претставуваат три темиња на еден паралелограм $ABCM$, тогаш со конструкцијата на четвртото теме $C$, правецот на страната $CM$ ќе ни ја даде бараната права $k \| p$. Зашто?



Црт. 183



Црт. 184

**Задача 3.** Да се конструира паралелограм $ABCD$, ако се дадени должините на страните $a$ и $b$ и висината $h_a$ ($h_a < h_b$).

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот паралелограм, во кој $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$ и $\overline{DM}=h_a$ (црт. 184).

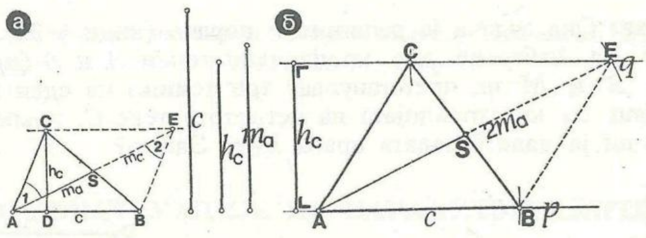
Од скицата гледеме дека со дадените елементи триаголникот $ABD$ е еднозначно определен (види зад. 2, § 33). По неговата конструкција, лесно го конструираме и триаголникот $CDB$, кој е складен со $\triangle ABD$. Зошто?

Изведувањето на конструкцијата на бараниот паралелограм, нејзиниот доказ и дискусија, предлагаме сами да ги извршите.

Својствата на паралелограмот овозможуваат решавање и на некои конструктивни задачи за триаголникот. На пример:

**Задача 4.** Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени должините на страната $c$, висината $h_c$ и медијаната $m_a$, (црт. 185).

**Анализа:** Нека $ABC$ е бараниот триаголник, во кој $\overline{AB} = c$; $\overline{CD} = h_c$ и $\overline{AS} = m_a$, а точката $S$ е средина на страната $BC$, т.е. $BS \cong SC$. На полуправата $AS$ да ја одредиме точката $E$, таква што $\overline{AE} = 2m_a$. Тогаш е $\triangle ASC \cong \triangle ESB$ бидејќи тие се централно симетрични во однос на точката $S$. Од нивната складност следува дека $AC \cong EB$ и $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$. Бидејќи наизменичните агли $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ се складни, тоа $AC \parallel EB$. Аналогно се докажува дека $AB \parallel CE$. Според тоа, четириаголникот $ABEC$ е паралелограм (црт, 185-а)




Црт. 185

**Конструкција:** Конструираме прво две паралелни прави $p$ и $q$, чие растојание е еднакво на $h_c$ (црт. 185 - б). Потоа на правата $p$ ги одредуваме точките $A$ и $B$, така што $\overline{AB} = c$, а од точката $A$ опишуваме кружен лак со радиус $2 \cdot m_a$. Ако опишаниот кружен лак ја пресече правата $q$ во точка $E$, тогаш на правата $q$ ја одредуваме и точката $C$, така што $\overline{EC} = \overline{AB} = c$. Во тој случај точката $C$ е трето теме на бараниот триаголник $ABC$.

**Доказ:** Конструираниот триаголник ги содржи сите елементи по големина и положба, па, според тоа, тој е решение на задачата.

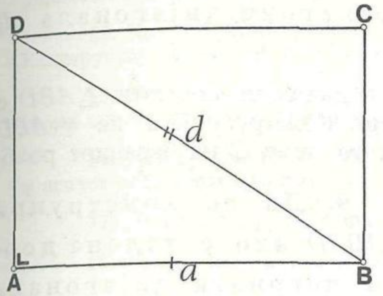
**Дискусија:** Опишаниот кружен лак (кружница) со центар во $A$ и радиус $2 \cdot m_a$ со правата $q$ може да има две заеднички точки $E$ и $E'$ (ако $2 \cdot m_a > h_c$), или само една заедничка точка $E$ (ако $2 \cdot m_a = h_c$) или да нема ниту една заедничка точка (ако $2 \cdot m_a < h_c$). Според тоа, ќе разликуваме три случаја: а) ако $2 \cdot m_a > h_c$, тогаш со дадените елементи можеме да конструираме два нескладни триаголници $ABC$ и $ABC'$. Значи, задачата не е еднозначно определена; б) ако е $2 \cdot m_a = h_c$, тогаш со дадените елементи можеме да конструираме само еден триаголник. Во тој случај задачата е еднозначно определена; в) ако, пак, $2 \cdot m_a < h_c$, тогаш задачата нема решение.

**Задача 5.** Да се конструира правоаголник $ABCD$, ако, се дадени должините на страната $a$ и дијагоналата $d$.

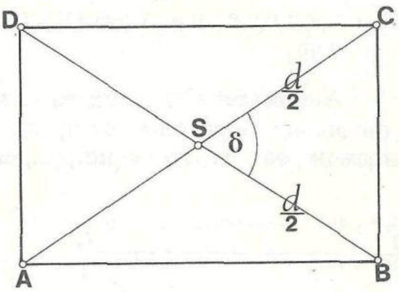
**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот правоаголник, во кој $\overline{AB}=a$ $\overline{BD}=d$ и $\widehat{A}=90°$ (стр. 186).

Гледаме дека со дадените елементи правоголниот триаголник $ABD$ е еднозначно определен. Неговата конструкција овозможува лесно да го конструираме и бараниот правоаголник.

Преостанатото оставаме да го сторите сами.



Црт. 186



Црт. 187

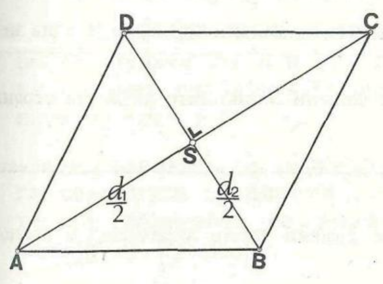
**Задача 6.** Да се конструира правоаголник, ако се дадени дијагоналата $d$ и аголот меѓу дијагоналите — $\delta$.

**Анализа:** И за оваа задача доволно е да ја извршиме само анализата.

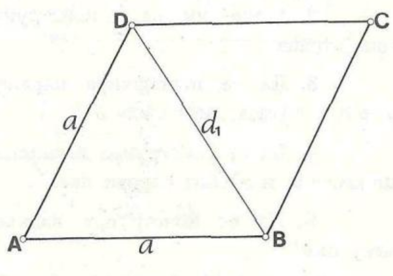
Од скицата на црт. 187 гледаме дека со дадените елементи $\triangle BCS$ е еднозначно определен со две страни $\overline{BS}=\dfrac{d}{2}$; $\overline{CS}=\dfrac{d}{2}$ и зафатениот агол $\delta$. Со неговата конструкција лесно го конструираме и бараниот правоаголник.

**Задача 7.** Да се конструира ромб $ABCD$ ако се дадени должините на двете негови дијагонали $d_1$ и $d_2$.

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот ромб, во кој е $\overline{AC}=d_1$ и $\overline{BD}=d_2$, а точката $S$ — пресек на дијагоналите (црт. 188).



Црт. 188



Црт. 189

Знаеме дека дијагоналите на ромбот се нормални една на друга и се преполовуваат при сечењето. Од скицата гледаме дека правоаголниот триаголник $ABS$ е еднозначно определен со неговите катети $\overline{AS}=\frac{1}{2}d_1$ и $\overline{BS}=\frac{1}{2}d_2$.

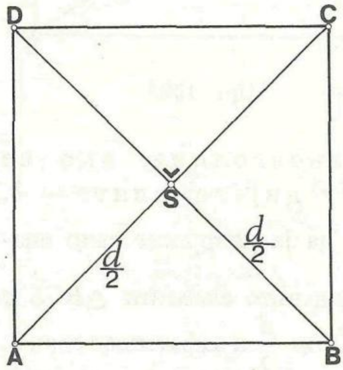
Конструкцијата на $\triangle ABS$ овозможува да ги конструираме и другите две темиња $C$ и $D$ на бараниот ромб. Како тоа го постигнуваме?

**Задача 8.** Да се конструира ромб, ако се дадени должините на страната $a$ и една негова дијагонала $d_1$ (црт. 189)

**Анализа:** Од скицата гледеме дека со дадените елементи $\triangle ABD$ е еднозначно определен со трите негови страни. Конструкцијата на $\triangle ABD$ овозможува да го конструираме и четвртото теме $C$ на бараниот ромб.

**Задача 9.** Да се конструира квадрат $ABCD$ ако е дадена должината на неговата дијагонала $d$ (црт. 190).

**Анализа:** од скицата гледаме дека правоаголниот триаголник $ABS$ е еднозначно определен со неговите катети $\overline{AS}=\frac{d}{2}$ и $\overline{BS}=\frac{d}{2}$ (црт. 190). Неговата конструкција овозможува да го конструираме и бараниот квадрат.



Црт. 190

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Со колку елементи е еднозначно определен паралелограмот?

**2.** Може ли да се конструира паралелограм ако се дадени два агла и една негова страна?

**3.** Да се конструира паралелограм ако се дадени должините на двете страни $a$ и $b$ и едната дијагонала $d_1$!

**4.** Да се конструира паралелограм ако се дадени една негова страна, поголемата дијагонала и аголот спроти неа!

**5.** Да се конструира паралелограм ако се дадени двете дијагонали и аголот меѓу нив!

**6.** Да се конструира паралелограм ако се дадени двете дијагонали и страната $a$!

7. Да се конструира правоаголник ако се дадени должините на двете негови страни $a$ и $b$!

8. Дадена е права $p$. На растојание 5 cm од неа конструирај права $q$, која да е паралелна со $p$!

9. Да се конструира ромб ако се дадени страната $a$ и аголот $\alpha$!

10. Да се конструира ромб ако се дадени страната $a$ и висината $h$!

11. Да се конструира ромб ако се дадени страната $a$ и едната дијагонала $d_1$!

12. Да се конструира ромб ако се дадени едната дијагонала $d_1$ и еден агол $\alpha$!

13. Конструирај ромб $ABCD$ и впиши во него кружница ако се дадени двете дијагонали на ромбот!

14. Кај кој ромб едната дијагонала го дели на два рамнострани триаголници? Конструирај таков ромб со страна $a = 5$ cm!

15. Да се конструира триаголник $ABC$, ако се дадени две страни $b$ и $c$ и медијаната спроти третата страна $m_a$!

16. Да се конструира паралелограм ако се дадени: една страна, една дијагонала и аголот меѓу дијагоналите!

17. Да се конструира паралелограм ако се дадени двете дијагонали и една висина!

18. Да се конструира паралелограм, ако се дадени двете висини и острииот агол!

## § 41. ТРАПЕЗИ

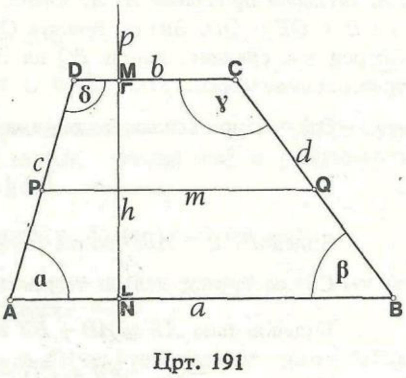
### 41. 1. ЕЛЕМЕНТИ И СВОЈСТВА НА ТРАПЕЗОТ

Усвоивме дека: трапез е конвексен четириаголник кој има само еден пар (спротивни) паралелни страни.

Паралелните страни на трапезот се викаат *основи* (долна и горна), а непаралелните страни — *краци* на трапезот. Должините на основите на трапезот, обично, ги означуваме со $a$ и $b$, а краците со $c$ и $d$ (црт. 191).

*Дефиниција*: *1.* **Отсечката** $MN$ **од нормалата** $p$ **што е повлечена кон двете основи на трапезот и е заклучена меѓу нив, се вика висина на трапезот** (црт. 191).

Должината на висината трапезот ја означуваме со $h$ и таа, всушност, ни го дава *растојанието* меѓу основите на трапезот.



Црт. 191

*Дефиниција 2.* **Отсечката која ги соединува средините на краците на трапезот, се вика средна линија на трапезот.**

Должината на средната линија на трапезот ја означуваме со $m$.

Основите, краците, аглите, висината, средната линија и дијагоналите на трапезот, се викаат негови *елементи*.

Ако еден од аглите на трапезот е прав, тогаш тој се вика *правоаголен трапез*. Во тој случај трапезот има уште еден прав агол (зошто?).

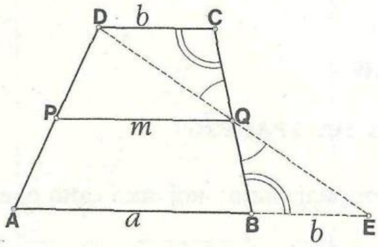
Трапезот ги има следниве својства:

*Теорема 1.* **Прилегнатите агли на секој крак во трапезот се суплементни.**

*Доказ*: Бидејќи основите на трапезот се паралелни, а секој крак е нивна трансверзала, тогаш прилегнатите агли на секој крак во трапезот претставуваат по еден пар спротивни (трансверзални) агли, па, според тоа, тие се суплементни, т.е. $\widehat{A}+\widehat{D}=180°$ и $\widehat{B}+\widehat{C}=180°$.

Отука следува: ако прилегнатите агли на иста основа во трапезот се познати, или ако се познати два спротивни агли во трапезот, тогаш со тоа се определени и останатите агли на трапезот.

*Теорема 2.* **Средната линија на трапезот е паралелна со неговите основи, а нејзината должина е еднаква на полузбирот од должините на основите.**




Црт. 192

**Доказ:** Нека $ABCD$ е трапез и нека точките $P$ и $Q$ се средини на краците $AD$ и $BC$, т.е. $AB \parallel CD$; $AP \cong PD$ и $BQ \cong QC$ (црт. 192).

Значи, $PQ$ е средна линија на трапезот $ABCD$.

Да ја продолжиме страната $AB$ преку темето $B$, а пресекот со полуправата $DQ$ да го означиме со $E$. Во тој случај ги добиваме триаголниците $QBE$ и $QCD$. Бидејќи е $QB \cong QC$; $\sphericalangle QBE \cong \sphericalangle QCD$ (како наизменични) и $\sphericalangle BQE \cong \sphericalangle CQD$ (како вкрстени), тоа, согласно признакот $ACA$, имаме $\triangle QBE \cong \triangle QCD$. Од складноста следува дека $BE \cong CD$ и $QE \cong QD$. Значи, точката $Q$ е средина на страната $ED$ на триаголникот $AED$. Според тоа, средната линија $PQ$ на трапезот $ABCD$ во исто време е средна линија и на триаголникот $AED$.

Оттука, врз основа на теоремата 2 (§ 34), следува дека:

$$PQ \parallel AE \text{ и } \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE}.$$

Бидејќи $AB \subset AE$, тоа од $PQ \parallel AE$ следува и $PQ \parallel AB$.

Со тоа првиот дел од теоремата е докажан.

Бидејќи, пак, $AE \cong AB + BE$ и $BE \cong CD$, тоа $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

Следствено: $\overline{PQ} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$, односно $m = \dfrac{a+b}{2}$.

Со тоа теоремата е целосно докажана.

## 41. 2. РАВНОКРАК ТРАПЕЗ

*Дефиниција 3.* **Трапез чии краци се складни, се вика равнокрак трапез.**

Равнокракиот трапез ги има следниве својства:

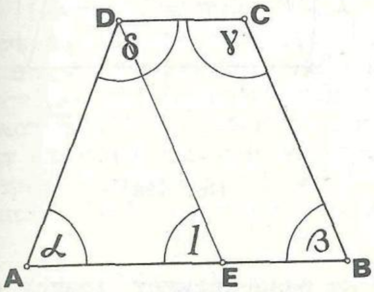
*Теорема 3-а.* **Во равнокракиот трапез:**

а) **Прилегнатите агли при секоја основа се складни;**

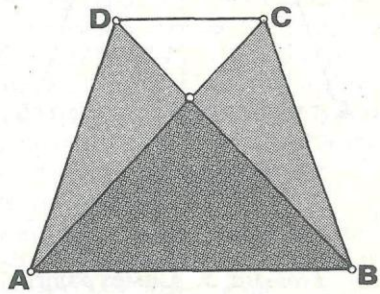
б) **Дијагоналите се складни.**

**Доказ:** а) Нека е даден равнокрак трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$ и $AD \cong BC$) (црт. 193). Ако низ темето $D$ повлечеме права паралелна со кракот $BC$, таа ќе ја пресече основата $AB$ во некоја точка $E$. Притоа го добиваме паралелограмот $BCDE$, во кој $DE \cong CB$ и $EB \cong DC$. Значи, триаголникот $AED$ е равнокрак, па според тоа, имаме $\alpha \cong \sphericalangle 1$. Но, бидејќи $\sphericalangle 1 \cong \beta$ (како согласни), ќе биде $\alpha \cong \beta$.

Ако земеме предвид дека $\alpha + \delta = 180°$ и $\beta + \gamma = 180°$, тогаш штом аглите $\alpha$ и $\beta$ при долната основа се складни, мораат да бидат складни и аглите при горната основа, т.е. $\gamma \cong \delta$, штд.



Црт. 193



Црт. 194

б) Нека $ABCD$ е равнокрак трапез, а $AC$ и $BD$ — негови дијагонали (црт. 194). Да ги разгледаме триаголниците $ABC$ и $BAD$. Тие се складни, бидејќи страната $AB$ им е заедничка, $BC \cong AD$ и $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAD$.

Од $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ следува дека $AC \cong BD$, штд.

Лесно може да се докаже дека важи и обратната теорема:

*Теорема 3-б.* **Ако во трапезот: а) прилегнатите агли на основата се складни; или б) дијагоналите се складни, тогаш тој е равнокрак трапез.**

Доказот на оваа теорема предлагаме да го изведете сами.

*Теорема 4.* **Равнокракиот трапез е осно симетрична фигура во однос на симетралата на една негова основа.**

**Доказ:** Нека правата $p$ е симетрила на основата $AB$ на равнокракиот трапез $ABCD$ и нека $AB \cap p = \{M\}$, а $DC \cap p = \{N\}$ (црт. 195). Тогаш $p \perp AB$; $p \perp DC$ и $AM \cong BM$. Ако низ темињата $D$ и $C$ повлечеме отсечки $DD_1$ и $CC_1$ такви што $DD_1 \| p \| CC_1$, тогаш добиваме два правоаголника $DD_1MN$ и $CC_1MN$, и два правоаголни триаголници $AD_1D$ и $BC_1C$.

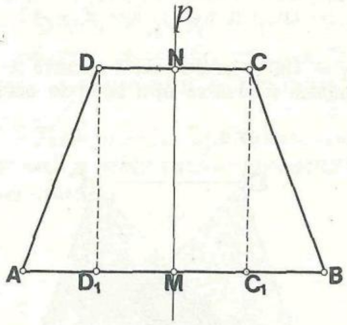
Бидејќи $\triangle AD_1D \cong \triangle BC_1C$ $(AD \cong BC$ и $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B)$, тогаш $AD_1 \cong BC_1$. Ако земеме предвид дека $AM \cong BM$, тогаш имаме дека $D_1M \cong C_1M$, односно $DN \cong CN$. Значи, симетралата $p$ на основата $AB$ е симетрала и на горната основа $DC$ на трапезот.

Во тој случај очигледно е дека при осната симетрија $S_p$ четворката темиња на трапезот се пресликува сама на себе:

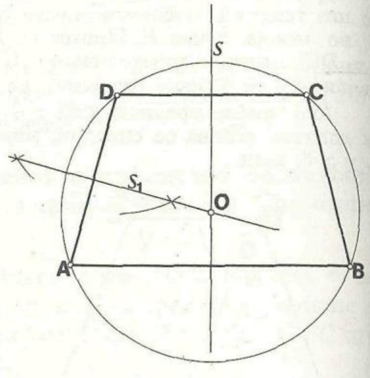
$$A \xrightarrow{Sp} B,\ B \xrightarrow{Sp} A,\ C \xrightarrow{Sp} D,\ D \xrightarrow{Sp} C,$$

основите $AB$ и $CD$ се пресликуваат сами на себе, а краците $AD$ и $BC$ се пресликуваат еден на друг. Затоа и целиот равнокрак трапез $ABCD$ се пресликува сам на себе.

Според тоа, правата $p$ е оска на симетријата на равнокракиот трапез $ABCD$, штд.




Црт. 195




Црт. 196

*Теорема 5*. **Симетралите на страните на равнокракиот трапез се сечат во една иста точка, која е и центар на опишаната кружница околу равнокракиот трапез** (црт. 196). Провери го тоа со цртање!

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Може ли трапезот да има само: а) еден; б) два; в) три прави агли?

**2.** Аглите при долната основа на трапезот изнесуваат 67° и 82°. Одреди ги другите агли на тој трапез!

**3.** Еден од аглите на равнокракиот трапез има 72°. Одреди ги другите негови агли.

**4.** Дијагоналите на равнокракиот трапез го делат истиот на четири триаголници. Испитај дали меѓу нив има складни!

**5.** Каков четириаголник определуваат средините на страните на равнокракиот трапез?

**6.** Докажи дека пресекот на дијагоналите на равнокракиот трапез ѝ припаѓа на заедничката симетрала на неговите основи.

**7.** Каква фигура се добива, ако ги продолжиш краците на равнокракиот трапез до нивното пресекување?

**8.** Висината, спуштена од темето на тапиот агол на равнокракиот трапез, ја дели поголемата основа на делови долги 3 cm и 7 cm. Да се одреди должината на средната линија на тој трапез!

**9.** Како треба да се раздели еден трапез на два дела, така што од нив да може да се образува: а) триаголник; б) паралелограм?

**10.** Докажи дека разликата на основите на трапезот е помала од збирот, а поголема од разликата на краците.

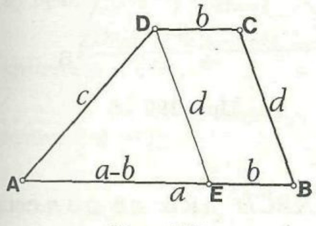
**11.** Докажи дека ако во равнокракиот трапез помалата основа е складна на кракот тогаш неговите дијагонали се бисектриси на аглите при поголемата основа?

**12.** Каков агол образуваат бисектрисите на прилегнатите агли на ист крак во трапезот?

**13.** Равнокрак трапез со крак $c$ има основи $2c$ и $c$. Да се одредат аглите на тој трапез.

## § 42. КОНСТРУКЦИЈА НА ТРАПЕЗИТЕ

Нацртајте трапез $ABCD$ (црт. 197). Ако од темето $D$ ја повлечеме отсечката $DE$, што е паралелна со кракот $BC$, трапезот $ABCD$ ќе се раздели на еден триаголник $AED$ и еден паралелограм $BCDE$. За конструкцијата на триаголникот $AED$ потребни се три елементи. И за паралелограмот $BCDE$ потребни се три елементи, што значи потребни се вкупно шест елементи. Но, бидејќи страната $DE$ е заедничка, а по конструкцијата на триаголникот и аголот $BED$ станува познат, тоа за конструкцијата на трапезот $ABCD$ потребни се само четири негови елементи.



Црт. 197

Кај равнокракиот трапез $ABCD$ триаголникот $AED$, исто така, е равнокрак ($AD \cong ED$), па затоа неговата конструкција може да се изведе со еден елемент помалку. Според тоа:

**Трапезот е еднозначно определен со четири негови елементи, а равнокракиот трапез само со три елементи.**

На следниве примери ќе се запознаеме со некои конструкции на општиот и равнокракиот трапез.

**Задача 1.** Да се конструира трапез $ABCD$, ако се дадени должините на основите $a$ и $b$, и краците $c$ и $d$.

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот трапез, во кој $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{AD}=c$, $\overline{BC}=d$ (црт. 197). Ако во него ја повлечеме отсечката $DE$ ($DE \parallel CB$), го добиваме помошниот триаголник $AED$, чии страни се: $\overline{AE}=a-b$; $\overline{DE}=d$ и $\overline{AD}=c$. Тој може да се конструира врз основа на дадените елементи. Останува да го конструираме уште темето $C$, кое е четврто теме на паралелограмот $DEBC$, чии страни се познати. При услов да е $c-d<a-b<c+d$, задачата е еднозначно определена.

Скицата и направената анализа доволно упатуваат како ќе го конструираме бараниот трапез.

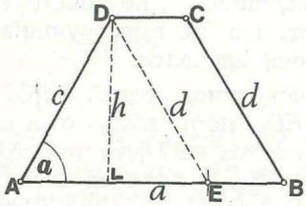
**Задача 2.** Да се конструира трапез $ABCD$ ако се дадени должините на основата $a$, краците $c$ и $d$ и аголот $\widehat{A}=\alpha$ (црт. 198).

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот трапез, во кој е $\overline{AB}=a$; $\overline{AD}=c$; $\overline{BC}=d$; $\widehat{A}=\alpha$. Тука помошниот триаголник $ADE$ е определен со две страни $\overline{AD}=c$; $\overline{DE}=d$ и аголот $\alpha$ што лежи спроти страната $DE$ (црт. 198).

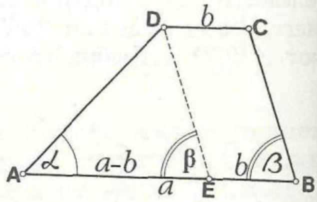
**Конструкција:** Прво го конструираме помошниот триаголник $ADE$, потоа на полуправата $AE$ од точката $A$ ја пренесуваме страната $\overline{AB}=a$, а темето $C$ го одредуваме како четврто теме на паралелограмот $DEBC$ со познати страни $DE$ и $EB$.

**Доказ:** Конструираниот трапез ги има сите дадени елементи по големина и положба, па затоа тој е бараното решение на задачата.

**Дискусија:** Бидејќи помошниот триаголник $ADE$ го конструираме по четвртата основна конструкција, затоа тој е еднозначно определен ако $d>c$. Ако $d<c$ и $d>h$, тогаш има две решенија (зошто?). А ако $d=h$, тогаш задачата има само едно решение и бараниот трапез е правоаголен ($\widehat{B}=90°$). Ако, пак, $d<h$, тогаш задачата нема решение.




Црт. 198




Црт. 199

**Задача 3.** Да се конструира трапез $ABCD$ ако се дадени основите $a$ и $b$ и аглите при долната основа $\alpha$ и $\beta$.

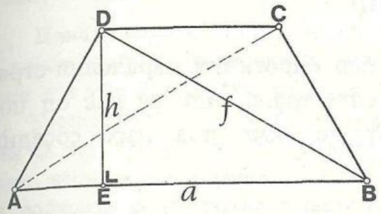
**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот трапез, во кој е $\overline{AB}=a$; $\overline{CD}=b$; $\widehat{A}=\alpha$ и $\widehat{B}=\beta$ (црт. 199). Тука помошниот триаголник $ADE$ е еднозначно определен со една страна $\overline{AE}=a-b$ и на неа прилегнатите агли $\alpha$ и $\beta$ (црт. 199). Со неговата конструкција лесно го конструираме и бараниот трапез $ABCD$.

**Задача 4.** Да се конструира рамнокрак трапез $ABCD$, ако се дадени должините на основите $a$ и $b$ и кракот $c$.

**Решение:** Конструкцијатата се изведува на ист начин како и кај обичен трапез, кога се дадени должините на четирите страни (Задача 1).

**Задача 5.** Да се конструира рамнокрак трапез $ABCD$, ако се дадени должините на основата $a$, дијагоналата $f$ и висината $h$.

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот трапез, во кој $\overline{AB}=a$; $\overline{DE}=h$ и $\overline{BD}=f$. Од скицата гледаме дека правоаголниот триаголник $BDE$ е еднозначно определен со неговата хипотенуза $\overline{BD}=f$ и катетата $\overline{DE}=h$. Со неговата конструкција ги одредуваме темињата $B$, $D$ и $E$. Потоа на полуправата $BE$ од темето $B$ ја пренесуваме основата $\overline{AB}=a$. Така ќе го добиеме и темето $A$, а со тоа го одредуваме и кракот $AD$ на бараниот рамнокрак трапез. Четвртото теме $C$ го одредуваме како трето теме на триаголникот $ABC$, чии краци се познати: $\overline{BC}=\overline{AD}$ и $\overline{AC}=\overline{BD}=f$ (црт. 200).



Црт. 200

Изведувањето на самата конструкција, нејзиниот доказ и дискусија, оставаме сами да ги извршите.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Со колку независни елементи е определен: а) трапезот; б) рамнокракиот трапез; в) правоаголниот трапез?

**2.** Да се контсруира трапез ако се дадени должините на основите $a$ и $b$ и краците $c$ и $d$!

**3.** Да се конструира трапез ако се дадени должините на основите $a$ и $b$ и аглите $\alpha$ и $\beta$!

**4.** Да се конструира трапез ако се дадени должините на основите $a$ и $b$, кракот $c$ и аголот $\beta$!

**5.** Да се конструира трапез ако се дадени должините на основите $a$ и $b$, кракот $c$ и дијагоналата $f$.

**6.** Да се конструира трапез ако се дадени должините на основите $a$ и $b$, кракот $d$ и висината $h$!

**7.** Да се конструира трапез ако се дадени должините на двете основи и двете дијагонали!

**8.** Да се конструира рамнокрак трапез ако се дадени основите $a$ и $b$ и аголот $\alpha$!

**9.** Да се конструира правоаголен трапез ($AD \perp AB$), ако се дадени должините на основите $a$ и $b$ и кракот $d$!

**10.** Да се конструира рамнокрак трапез ако се дадени: основите $a$ и $b$ и висината $h$!

**11.** Да се конструира равнокрак трапез ако се дадени: основата $a$, кракот $c$ и аголот $\alpha$.

**12.** Да се конструира равнокрак трапез ако се дадени: основата $a$, кракот $c$ и дијагоналата $f$.

## § 43. ДЕЛТОИД

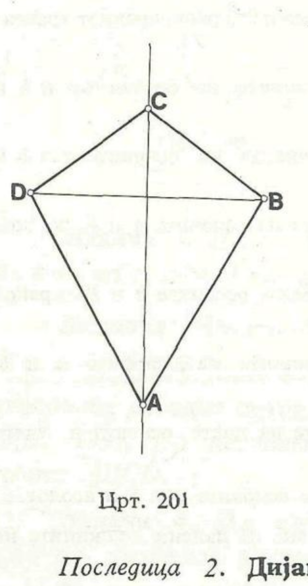
Четириаголникот, кој нема ниту еден пар спротивни паралелни страни, усвоивме да се вика трапезоид. Од сите трапезоиди за нас од посебен интерес ќе претставува трапезоидот кој има два пара соседни складни страни.

*Дефиниција*: **Трапезоид, кој има два пара соседни складни страни, се вика делтоид.**

Да се запознаеме со некои својства на детоидот. Тоа се:

*Теорема 1.* **Делтоидот е осно симетрична фигура во однос на правата, што е определена со темнњата во кои граничат складните страни на делтоидот.**

*Доказ*: Нека е даден делтоидот $ABCD$, во кој $AB \cong AD$ и $BC \cong DC$ (црт. 201). Тогаш имаме: $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{CB} = \overline{CD}$, т.е. темињата $A$ и $C$, во кои граничат складните страни на делтоидот, се еднакво оддалечени од другите две темиња $B$ и $D$ на делтоидот.



Црт. 201

Според тоа, правата $AC$ определена со темињата $A$ и $C$ е симетрала на дијагоналата $BD$ на делтоидот.

Во тој случај очигледно е дека при осната симетрија $S_{AC}$ четворката темиња на делтоидот се пресликува сама на себе:

$$A \to A,\ B \to D,\ C \to C,\ D \to B,$$

а страните $AB$ и $AD$; $CB$ и $CD$ се пресликуваат едни на други. Значи, и целиот делтоид $ABCD$ се пресликува сам на себе.

Според тоа, правата $AC$ е оска на симетријата на делтоидот, штд.

*Последица 1.* **Дијагоналите на делтоидот се заемно нормални.**

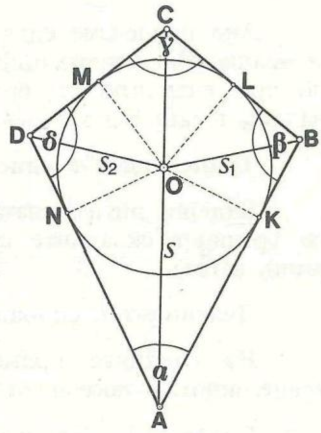
*Последица 2.* **Дијагоналата што ги соединува темињата во кои граничат нескладните страни: се преполовува од другата дијагонала на делтоидот.**

*Последица 3.* **Дијагоналата што ги соединува темињата во кои граничат складните страни:** а) **е бисектриса на аглите што лежат при тие темиња;** б) **го дели делтоидот на два складни триаголници.**

*Последица 4.* **Аглите што ги образуваат нескладните страни во делтоидот, се складни еден на друг.**

*Теорема 2.* **Бисектрисите на аглите во делтоидот се сечат во иста точка, која е и центар на впишаната кружница во делтоидот.**

**Доказ:** Нека е даден делтоидот $ABCD$, во кој дијагоналата $AC$ е заедничка **бисектриса** $s$ на аглите $\alpha$ и $\gamma$, а $s_1$ е бисектриса на аголот $\beta$ (црт. 202). Бисектрисите $s$ и $s_1$ ќе се сечат во некоја точка $O$. т.е. $s \cap s_1 = \{O\}$. Од точката $O$ да спуштиме нормали на страните $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$, чии подножја се соодветно точките $K$, $L$ $M$ и $N$' т.е. нека $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$ и $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ и $N \in AD$ (црт. 202). Бидејќи $O \in s$ тоа $\overline{OK} = \overline{ON}$ и $\overline{OL} = \overline{OM}$. Но бидејќи $O \in s_1$, тоа ќе биде и $\overline{OK} = \overline{OL}$. Од горниве равенства следува равенстввто $\overline{OK} = \overline{OL} = \overline{OM} = \overline{ON}$, од кое гледаме дека:



Црт. 202

а) $\overline{OM} = \overline{ON}$, т.е. точката $O$ ѝ припака и на бисектрисата $s_2$ на четвртиот агол $\delta$ на делтоидот. Тоа значи дека бисектрисите на сите агли во делтоидот се сечат во иста точка, штд.

б) Точката $O$ е еднакво оддалечена од сите страни на делтоидот, а тоа значи дека таа е центар на впишаната кружница во делтоидот $ABCD$, штд. Со тоа теоремата е докажана.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Кој четириаголник го викаме делтоид?

**2.** Која дијагонала го дели делтоидот на складни триаголници? Кои уште други својства ги има таа дијагонала?

**3.** Знаеме дека едната дијагонала на делтоидот е симетрала на другата дијагонала. Нацртај три делтоида, кај кои дијагоналата — симетрала е: а) поголема; б) складна; в) помала од другата дијагонала!

**4.** Може ли делтоидот да има само: а) еден; б) два; в) три прави агли?

**5.** Нацртај еден ромб и еден делтоид! Спореди ги нивните својства и одреди кои својства им се заеднички, а кои различни!

**6.** Наброј ги четириаголниците, што се осно симетрични фигури!

**7.** Околу кои изучени четириаголници може да се опише кружница?

**8.** Во кои изучени четириаголници може да се впише кружница?

**9.** Нацртај делтоид $ABCD$ и низ секое негово теме повлечи прави, што се паралелни со дијагоналите на делтоидот! Каков четириаголник ќе образуваат повлечените прави?

**10.** Нацртај делтоид $ABCD$ и одреди ги средишните точки на неговите страни. Каков четириаголник формираат тие средишни точки?

## § 44. КОНСТРУКЦИЈА НА ДЕЛТОИД

Ако повлечеме една дијагонала на трапезоидот, ќе добиеме два триаголника. За констрикцијата на секој од тие триаголници потребни ни се по три елементи, но бидејќи тие имаат една заедничка страна — дијагоналата, тогаш јасно е дека:

**Трапезоидот е еднозначно определен со пет независни елементи.**

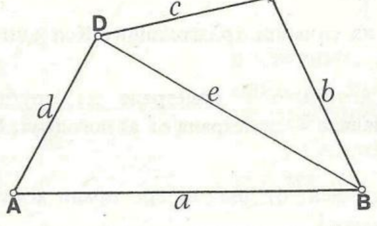
Бидејќи дијагоналата на делтоидот што ги сврзува темињата во кои се граничат складните страни го дели делтоидот на два складни триаголници, затоа:

**Делтоидот е еднозначно определен само со три негови елементи.**

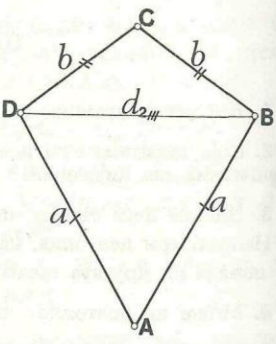
На следниве примери ќе се запознаеме со некои конструкции на трапезоидот, а посебно и на делтоидот.

**Задача 1.** Да се конструира трапезоид $ABCD$ ако се дадени страните $a$, $b$, $c$ и $d$ и едната дијагонала $e$.

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот трапезоид во кој $\overline{AB}=a$; $\overline{BC}=b$; $\overline{CD}=c$; $\overline{AD}=d$ и $\overline{BD}=e$. Неговата конструкција се сведува на конструкција на триаголниците $ABD$ и $DBC$, кои лесно можат да конструираат со помош на дадените елементи (црт. 203).




Црт. 203




Црт. 204

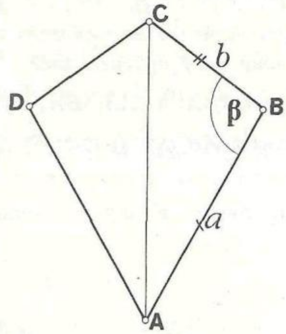
**Задача 2.** Да се конструира делтоид $ABCD$ ако се дадени должините на страните $a$ и $b$ и дијагоналата $d_2$ што не е оска на симетрија.

**Анализа:** Од скицата на црт. 204 гледаме дека конструкцијата на делтоидот со дадените елементи се сведува на конструкцијата на рамнокраките триаголници $DBA$ и $DBC$.

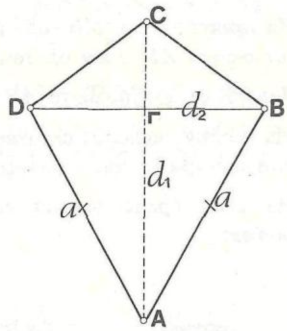
**Задача 3.** Да се конструира делтоид $ABCD$ ако се дадени должините на страните $a$ и $b$ и аголот $\beta$ што тие го зафаќаат (црт. 205).

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот делтоид во кој $\overline{AB}=a$; $\overline{BC}=b$ и $\widehat{B}=\beta$ (црт. 205). Гледаме дека $\triangle ABC$ е еднозначно определен со дадените елементи. Неговата конструкција овозможува да го одредиме и четвртото теме $D$ на бараниот делтоид.

Самата конструкција, нејзиниот доказ и дискусија оставаме да ги изведете сами.




Црт. 205




Црт. 206

**Задача 4.** Да се конструира делтоид $ABCD$, ако се дадени должините на двете дијагонали и страната $a$.

**Анализа:** Нека $ABCD$ е бараниот делтоид во кој $\overline{AB}=\overline{AD}=a$ $\overline{AC}=d_1$ и $\overline{BD}=d_2$ (црт. 206). Од скицата гледаме дека рамнокракиот триаголник $ABD$ е еднозначно определен со основата $d_2$ и кракот $a$. Четвртото теме $C$ на делтоидот лежи на симетралата на дијагоналата $BD$, а на растојание од темето $A$, што е еднакво на $\overline{AC}=d_1$.

Изведувањето на констукцијата на бараниот делтоид, нејзиниот доказ и дискусија предлагаме сами да ги извршите.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Со колку елементи е еднозначно определен трапезоидот?

2. Со колку елементи е еднозначно определен делтоидот?

3. Да се конструира трапезоид $ABCD$ ако се дадени должините на сите негови страни и една дијагонала!

4. Да се конструира трапезоид $ABCD$ ако се дадени страните $a$, $b$ и $d$ и аглите $\alpha$ и $\beta$!

**5.** Да се конструира делтоид ако се дадени страните $a$ и $b$ и аголот $\beta$ меѓу нив!

**6.** Да се конструира делтоид ако се дадени страните $a$ и $b$ и дијагоналата $d_1$ што е симетрала!

**7.** Да се конструира делтоид ако се дадени страните $a$ и $b$ и дијагоналата што не е симетрала!

**8.** Да се конструира трапезоид ако се дадени: страната $a$, прилегнатите агли на неа $\alpha$ и $\beta$ и двете дијагонали $d_1$ и $d_2$!

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

**1.** Колку прави можат да определуваат 5 различни точки?

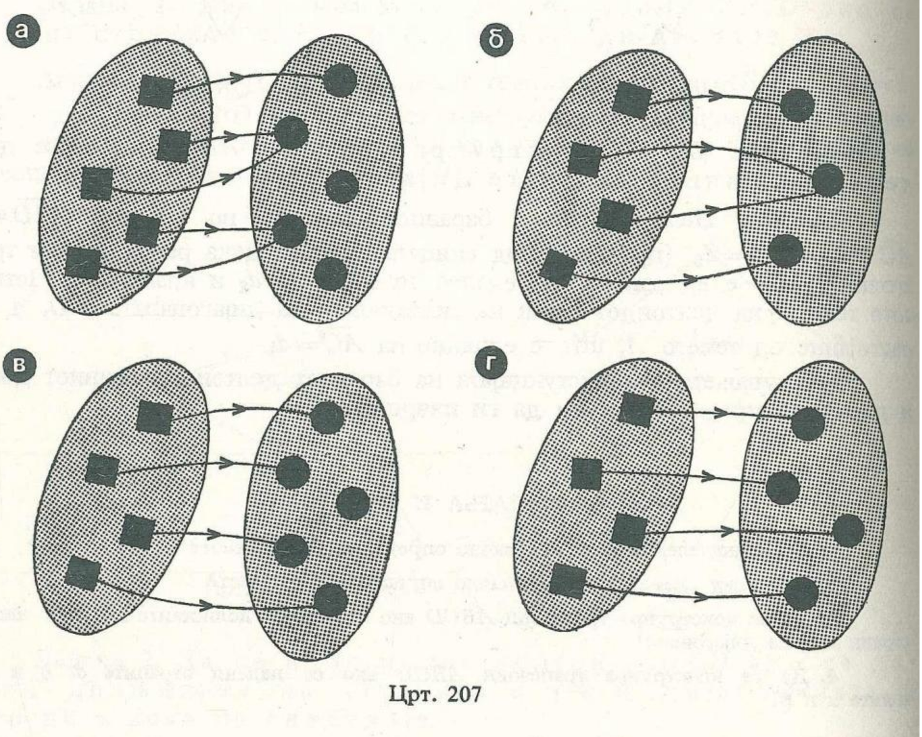
**2.** Која од точките $A$, $B$, $C$ лежи меѓу другите две, ако $C \in AB$?

**3.** На полуправата $AB$ од нејзиниот почеток пренесена е отсечка $AC$, што е помала од отсечката $AB$. Која од точките $A$, $B$, $C$ лежи меѓу другите две?

**4.** Дадени се полуправите $AB$ и $BA$. Што претставува: а) $AB \cap BA$; б) $AB \cup BA$?

**5.** На колку делови се разделува полуправата $AB$ од: а) две; б) три нејзини точки? Какви фигури се тие делови?

**6.** На една права дадени се пет различни точки. Колку различни отсечки тие определуваат?




Црт. 207

**7.** Три точки $A, B, C,$ лежат на една права и $\overline{AB}=5$ cm; а $\overline{BC}=8$ cm. Колкава е должината на отсечката $AC$, ако точката $A$ лежи меѓу $B$ и $C$?

**8.** Докажи го тврдењето: $(a \subset \pi,\ b \subset \pi,\ a \perp p$ и $b \perp p) \Rightarrow a \| b$!

**9.** На црт. 207 со стрелки покажано е пресликувањето на множествата квадрати во множествата крукчиња. Покажи во кои случаи имаме пресликување „во", а во кои пресликување „на", а кои од нив се обратно еднозначни?

**10.** Дали секое множество од три точки $\{A, B, C\}$ претставува централно симетрична фигура. Постои ли барем една таква централно симетрична фигура? Кој услов треба да го исполнуваат точките и што ќе биде нивен центар на симетријата?

**11.** Покажи дека триаголникот не е централно симетрична фигура!

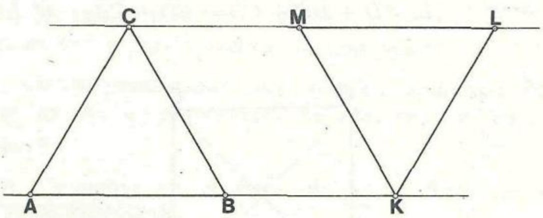
**12.** Докажи дека паралелограмот е централно симитрична фигура со центар на симетријата во пресекот на неговите дијагонали!

**13.** Кога унијата од: а) две; б) три кружници има центар на симетријата. Испитај ги сите случаи!

**14.** Докажи дека: ако $A$ и $B$, $C$ и $D$ се дијаметрално спротирни точки на две концентрични кружници, тогаш отсечките $AC$ и $BD$ се складни и паралелни или тие лежат на една иста права!

**15.** Конструирај триаголник кога се дадени трите негови медијани!

**16.** Со кое пресликување рамностраниот триаголник $ABC$ може да се преслика на рамностраниот триаголник $KLM$ (црт. 208). Точките $A, B, K$; како и $C, M, L$ лежат на една права. Одреди го центарот на симетријата!




Црт. 208

**17.** Колку оски на симетријата има: а) отсечката; б) правата; в) кругот; г) полукругот; д) унијата од две кружници; ѓ) квадратот; е) правоаголникот; ж) аголот?

**18.** Даден е правоаголник $ABCD$. Покажи дека отсечката $AB$ може да се преслика на отсечката $CD$ со помош на: а) централна симетрија; б) осна симетрија. Одреди ги центарот и оската на соодветните две симетрии. Кои точки се слики на точките $A$ и $B$ при секоја од тие две симетрии?

**19.** Правата $p$ ја сече отсечката $AB$ во точката $M$. На правата $p$ да се одреди точка $C$, таква што од неа отсечките $AM$ и $BM$ да се гледаат под складни агли!

**20.** Дадени се три точки $A, B, C$, што не лежат на една права. Конструирај точка, која е еднакво оддалечена од тие точки!

**21.** Каква фигура образува множеството на центрите на сите кружници кои минуваат низ две дадени точки $A$ и $B$, а лежат во една рамнина?

**22.** Дадена е права $p$ и две точки $A$ и $B$, што не лежат на неа. Конструирај точка од правата $p$, која е еднакво оддалечена од $A$ и $B$!

**23.** Конструирај точка, која е еднакво оддалечена од две дадени точки $A$ и $B$, а лежи на дадена кружница $k$. Разгледај ги различните можни случаи!

**24.** Дадена е права $p$ и точка $M \notin p$. Да се конструира квадрат, така што една негова страна да лежи на правата $p$, а едно негово теме да биде во точката $M$.

**25.** Дадени се права $p$ и две точки $A$ и $B$ кои се наоѓаат на различни страни од неа. На правата $p$ определи точка $M$, така што аголот $AMB$ да се располовува од правата $p$.

**26.** Низ дадената точка $M$ повлечи права која од краците на даден агол $ABC$ да отсекува складни отсечки!

**27.** Конструирај кружница со даден радиус $r$, која да се допира до краците на даден агол $\alpha$!

**28.** Даден е агол $XOY$ и точката $M$ од внатрешноста на аголот. Да се конструира права која минува низ точката $M$, а со краците на дадениот агол да гради складни агли!

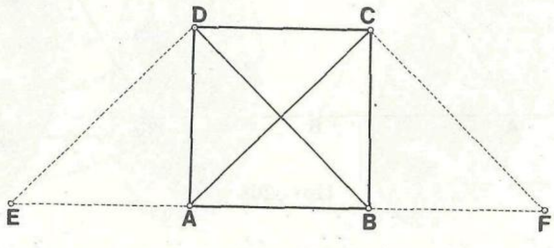
**29.** Конструирај кружница, чиј центар лежи на дадена права $p$, а да минува низ точките $A$ и $B$, кои не лежат на правата $p$!

**30.** Точките $A, B, C, D$, лежат на една права. Точно ли е тврдењето

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}?$$

**31.** Покажи дека: при секоја положба на точките $A$, $B$ и $C$ на една права векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ ја задоволуваат релацијата $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$!

**32.** На црт. 209 нацртан е квадрат $ABCD$ и $DE \parallel AC$; $CF \parallel BD$. Докажи дека: а) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BF}$!




Црт. 209

**33.** Конструирај три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, такви што:

$$\text{а) } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c}; \quad \text{б) } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{O}!$$

**34.** Дадени се три точки $A, B, M$. Докажи дека збирот на векторите $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ не зависи од положбата на точката $M$!

**35.** Дадени се два колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со спротивни насоки. Покажи дека важи релацијата $|\vec{r}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, каде што $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$!

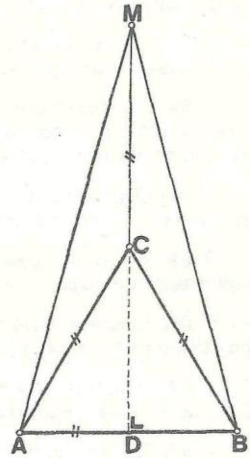
**36.** Одреди каква релација постои помеѓу векторите $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} - \vec{a}$!

**37.** Дадени се две прави $a$ и $b$ што се сечат. Постои ли транслација при која правата $a$ се пресликува на правата $b$?

**38.** Дадени се две паралелни прави $a \parallel b$. Постои ли транслација, при која правата $a$ се пресликува на правата $b$? Колку такви транслации има?

**39.** Докажи дека: ако дадена права ја сече едната од две паралелни прави, тогаш таа ја сече и другата од нив!

**40.** На црт. 210 е $AB \cong BC \cong AC \cong CM$. Да се докаже дека: $\widehat{ACB} + \widehat{AMB} = 90°$!



Црт. 210

**41.** Во триаголникот $ABC$ висината и медијаната што се повлечени од исто теме го делат аголот при него на три складни дела. Одреди ги аглите на тој триаголник!

**42.** Бисектрисата на аголот при основата го дели рамнокракиот триаголник $ABC$ ($AC \cong BC$), исто така на два рамнокраки триаголници. Одреди ги аглите на триаголникот $ABC$!

**43.** Докажи дека: во два складни триаголници соодветните бисектриси се складни!

**44.** Да се конструира правоаголен триаголник, ако се дадени: еден остар агол и висината што ѝ одговара на хипотенузата!

**45.** Да се конструира рамнокрак правоаголен триаголник, ако е даден збирот од хипотенузата и катетата!

**46.** Да се конструира правоаголен триаголник, ако се дадени една катета и медијаната што ѝ одговара!

**47.** Конструирај рамнокрак триаголник $ABC$, ако се дадени: висината што ѝ одговара на основата и аголот: а) при основата; б) при врвот!

**48.** Нацртај два складни рамнокраки триаголници и придружи ги еден до друг, така што: а) основите да им се здружат; б) по еден крак да им се здружи. Каков четириаголник ќе добиеш?

**49.** Докажи дека средините на страните на кој да било четириаголник $ABCD$ претставуваат темиња на паралелограм!

**50.** Да се докаже: од секоја права $p$ која минува низ пресекот $S$ на дијагоналите на паралелограмот $ABCD$, тој отсекува отсечка со средина во точката $S$!

**51.** Ако во паралелограмот $ABCD$ темето $A$ се сврзе со средините $M$ и $N$ на страните $BC$ и $CD$, докажи дека отсечките $AM$ и $AN$ ја делат дијагоналата $BD$ на паралелограмот на три складни делови!

**52.** Докажи дека бисектрисмте на внатрешните агли на паралелограмот образуваат правоаголник!

**53.** Докажи дека бисектрисите на аглите на правоаголникот образуваат квадрат!

**54.** Да се докаже дека правоаголник чии дијагонали се бисектриси на неговите агли, претставува квадрат!

**55.** Докажи дека: конвексен четириаголник на кој сите агли му се прави, е правоаголник;

**56.** Докажи дека висините на ромбот се складни!

**57.** Докажи дека средините на страните на рамнокракиот трапез претставуваат темиња на ромб!

**58.** Докажи дека ако сите страни на четириаголникот се складни, тогаш тој е ромб!

**59.** Да се конструира триаголник $ABC$ ако се дадени: страната $c$ аголот $\alpha$ и медијаната $m_a$!

**60.** Да се конструира правоаголник ако се дадени една страна и збирот од дијагоналите!

**61.** Докажи дека правата што минува низ средините на дијагоналите на трапезот е паралелна со неговите основи!

**62.** Да се докаже дека средната линија на трапезот ја преполовува секоја отсечка чии крајни точки лежат на двете основи!

**63.** Прилегнатите агли на една од основите на трапезот се комплементи, а основите се долги 7 cm и 3 cm. Да се одреди должината на отсечклта што ги соединува средините на основите на тој трапез!

**64.** Основите на трапезот се долги $a$ и $b$ ($a > b$). Да се одреди должината на отсечката што ги соединува средините на дијагоналите на трапезот.

**65.** Докажи дека медијаната и соодветната средна линија на триаголникот се дијагонали на паралелограм!

**66.** Докажи дека: секоја медијана во триаголникот ја преполовува соодветната средна лнниjа во него.

**67.** Дијагоналата на рамнокракиот трапез со долната основа образува агол од 45°. Под каков агол се сечат дијагоналите на трапезот?

**68.** Да се конструира трапез $ABCD$ ако е даден збирот од основите $a + b$, аголот $\alpha$, дијагоналата $\overline{AC}$ и висината $h$!

**69.** Да се конструира трапез ако е даден збирот од основите $a+b$, висината $h$ и аглите при поголемата основа!

**70.** Да се конструира трапез ако е дадена разликата од основите $a - b$, краците $c$ и $d$ и средната линија $m$!

# СОДРЖИНА

## Глава I

## ОСНОВНИ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ



## Глава II

## ПРЕСЛИКУВАЊЕ. ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА



## Глава III

## ОСНА СИМЕТРИЈА. ПРИМЕНА

Глава IV

## ВЕКТОРИ. ТРАНСЛАЦИЈА



Глава V

## ТРИАГОЛНИК



Глава VI

## ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ

РОЗТ за учебници и наставни средства „Просветно дело" – Скопје, ул. „Иво Рибар Лола" б.б. Градски ѕид, блок IV

*

За издавачот
Никола Младеновски

*

Глигор Тренчевски
ГЕОМЕТРИЈА
за VI одделение

*

Уредник
Кирил Милчев

*

Лектура
Мира Николова

*

Илустрации и корица
Петар Танчевски

*

Технички уредник
Трајко Димовски

*

Коректор
Димитар Џицев

Ракописот е предаден во печат во декември 1979 година. Печатењето е завршено во март 1980 година. Обем: 152 страни. Формат: 17 x 24 см. Тираж: 14 000 примероци. Книгава е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев" – Скопје (5715/1085)

Цената е одобрена со решение на Републичкиот завод за цени.

372.851.4

ТРЕНЧЕВСКИ Глигор

Геометрија : за VI одделение / Глигор Тренчевски ; [илустрации и корица Петар Танчевски]. – 5. изд. – Скопје : „Просветно дело“, 1980. – 148 стр. : илустр. ; 24 см

1. изд. 1964

НУБ „Кл. Охридски“ – Скопје