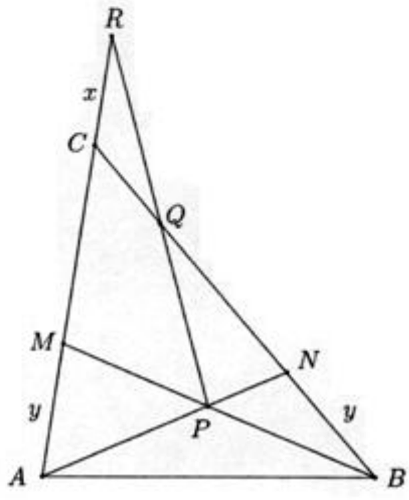
Ристо Малчески
Скопје

ТЕОРЕМА НА МЕНЕЛАЈ (ВТОР ДЕЛ)

Во статијата [2] е докажана теоремата на Менелај и како последици од истата се докажани теоремите на Паскал и Дезарг. Во оваа статија, за која може да се каже дека е продолжение на статијата [2], ќе разгледаме неколку задачи во чие решавање се користат теоремите на Менелај и Паскал. Притоа, да забележиме дека скоро сите разгледани задачи се задавани на национални математички олимпијади во одделни држави или на престижни математички турнири.

1. На страните AC и BC на $\triangle ABC, (\overline{AC} < \overline{BC})$ соодветно се земени точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{BN}$. Нека P е пресечната точка на правите AN и BM, а Q е точка на отсечката BC, за која $\overline{BQ} = \overline{AC}$. Докажи дека правата PQ е паралелна со симетралата на $\measuredangle ACB$.

Решение. Нека $y = \overline{BN} = \overline{AM}, \overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$. Тогаш $\overline{CM} = \overline{NQ} = b - y$ и $\overline{NC} = a - y$. Ако $PQ \| AC$, тогаш $\frac{\overline{PQ}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}$, т.е. $a = \frac{b(b-y)}{\overline{PQ}}$ и аналогно $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NC}}$, т.е. $a - y = \frac{b(b-y)}{\overline{PQ}}$. Значи, $a = a - y$, што не е можно.



Нека правата PQ ја сече правата AC во точка R и $x = \overline{CR}$. Од теоремата на Менелај за $\triangle ANC$ и правите PR и BM соодветно следува

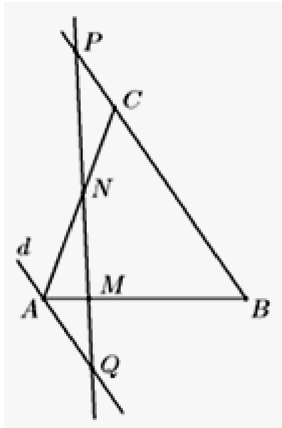
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{NQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1, \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1.$$

Од последните две равенства, ако искористиме дека $\overline{CM} = \overline{NQ}$ и $\overline{BN} = \overline{AM}$, добиваме $\frac{1}{a-b} \cdot \frac{x}{x+b} = \frac{1}{a}$. Оттука $x = a - b$, т.е. $\overline{CQ} = \overline{CR}$. Значи, $\measuredangle CRQ = \frac{\gamma}{2}$ и правата PQ е паралелна со симетралата на $\measuredangle ACB$.

2. Даден се триаголник ABC и реален број $k \neq 0$. Точките M и N се движат истовремено соодветно по страните AB и AC така што

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}-\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=k.$$

Докажи дека правата MN минува низ постојана точка.



Решение. Нека d е правата низ A која е паралелна со BC. Со P и Q да ги означиме пресечните точки на правата MN соодветно со правите BC и d. Од теоремата на Менелај применета за $\triangle ABC$ и правата PQ добиваме $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$. Од ова равенство, равенството од условот на задачата и од $\overline{PC}=\overline{PB}-\overline{BC}$ добиваме

$$1-\frac{\overline{BC}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot(\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}-k)=1-k\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}},$$

па затоа $\overline{BC}=k\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\overline{PB}$. Од сличноста на $\triangle MAQ$ и $\triangle MBP$ добиваме $\overline{AQ}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\overline{PB}$. Сега од последните две равенства следува $\overline{BC}=k\overline{AQ}$, што значи дека точката Q е постојана.

3. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ги допира страните BC, CA и AB во точките D, E и F, соодветно. Правата EF ги сече правите BI, CI, BC и DI во точките K, L, M и Q, соодветно. Правата низ M и средината на CL ја сече CK во точката P. Докажи дека

$$\overline{PQ}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{KQ}}{\overline{BI}}.$$

Решение. Бидејќи $\overline{BD}=\overline{BF}$ и BI го полови $\measuredangle DBF$, заклучуваме дека правите DF и BI се заемно нормални. Аналогно, правите DE и CI се заемно нормални. Оттука $\measuredangle BKD=\measuredangle BKF=90^\circ-\measuredangle DFK$ и $\measuredangle CED+\measuredangle ECI=90^\circ$. Бидејќи AC е тангента на опишаната кружница околу $\triangle DEF$, имаме $\measuredangle DFK=\measuredangle CED$, па значи $\measuredangle BKD=90^\circ-\measuredangle CED$. Тогаш $\measuredangle BKD=\measuredangle ECI=\measuredangle DCI$, од каде следува дека точката K лежи на кружницата опишана околу четириаголникот $CEID$. Според тоа, $\measuredangle BKC=90^\circ$. Аналогно, $\measuredangle BLC=90^\circ$.

Од теоремата на Менелај за $\triangle CKL$ и правата MP следува $\frac{\overline{KP}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{CJ}}{\overline{JL}}\cdot\frac{\overline{LM}}{\overline{MK}}=1$ и бидејќи $\overline{CJ}=\overline{JL}$, добиваме $\frac{\overline{KP}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{MK}}{\overline{LM}}$. Бидејќи DI и DM се симетрали на внатрешниот и надворешниот агол во темето D на $\triangle DKL$ добиваме $\frac{\overline{KQ}}{\overline{QL}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{DL}}=\frac{\overline{MK}}{\overline{LM}}$.

Според тоа, $\frac{\overline{KP}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{KQ}}{\overline{QL}}$, па затоа правите PQ и CL се паралелни.

Со A' да ја означиме пресечната точка на правите BL и CK. Притоа точката I е ортоцентар за $\triangle A'BC$. Лесно се гледа дека $\measuredangle BA'D=\frac{1}{2}\measuredangle ACB$ и $\measuredangle CA'D=\frac{1}{2}\measuredangle ABC$, па затоа $\measuredangle BA'C=\frac{1}{2}(\measuredangle ABC+\measuredangle ACB)$. Според тоа,

$$\measuredangle KPQ=\measuredangle A'CL=90^\circ-\measuredangle BA'C=\frac{1}{2}\measuredangle BAC=\measuredangle IAB.$$

Точките A', L, C, D лежат на една кружница, па затоа $\measuredangle A'KD=\measuredangle A'BC$ и тогаш $\measuredangle PKQ=90^\circ+\frac{1}{2}\measuredangle ACB=\measuredangle AIB$. Сега, од

$$\measuredangle KPQ=\measuredangle IAB \text{ и } \measuredangle PKQ=\measuredangle AIB$$

следува дека $\triangle KPQ \sim \triangle IAB$, па затоа

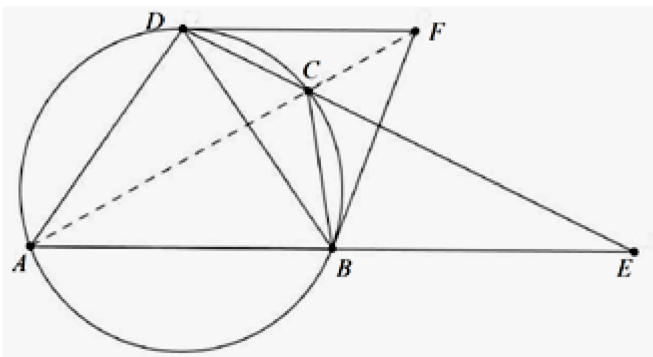
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{KQ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BI}},$$

што и требаше да се докаже.

4. Нека кружницата k е опишана околу четриаголникот $ABCD$. Правите AB и CD се сечат во точката E и важи $\overline{AB}=\overline{BE}$. Нека точката F е пресек на тангентите на кружницата k повлечени во точките B и D. Ако правите AB и DF се паралелни, докажи дека точките A, C, F се колинеарни.

Решение. *Прв начин.* Од $DF \parallel AB$ следува дека D е средина на лакот AB, па затоа $\overline{AD}=\overline{BD}$. Од степенот на точката E на кружницата k добиваме

$$2\overline{AB}^2=\overline{EB}\cdot\overline{EA}=\overline{EC}\cdot\overline{ED}. \qquad (1)$$



Од друга страна, бидејќи $\measuredangle DCB=180^\circ-\measuredangle DAB=180^\circ-\measuredangle ABD=\measuredangle DBE$, триаголниците DCB и DBE се слични, па затоа $\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$, т.е.

$$\overline{DB}^2=\overline{DC}\cdot\overline{DE}. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува

$$\frac{2\overline{AB}^2}{\overline{DB}^2}=\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}. \tag{3}$$

Но, бидејќи $\measuredangle FDB=\measuredangle DAB$, заклучуваме дека рамнокраките триаголници ABD и DBF се слични, па затоа $\frac{\overline{DA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DB}}$, т.е. $\overline{DB}^2=\overline{AB}\cdot\overline{DF}$. Сега со замена во (3) добиваме $\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}=\frac{2\overline{AB}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DF}}$, па како $\measuredangle AEC=\measuredangle CDF$, заклучуваме дека триаголниците AEC и DCF се слични, што значи дека $\measuredangle ACE=\measuredangle DCF$, од каде следува дека точките A,C,F се колинеарни.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање заклучуваме дека $\overline{AD}=\overline{BD}$ и $\frac{\overline{DA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DB}}$, т.е. $\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$. Понатаму, од сличноста на триаголниците ACE и DBE следува

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}.$$

Покрај тоа важи

$$\measuredangle ADF=180^\circ-\measuredangle BAD=180^\circ-\measuredangle ABD=180^\circ-\measuredangle ACD=\measuredangle ACE,$$

па затоа триаголниците ACE и ADF се слични. Значи, $\measuredangle CAE=\measuredangle DFC$, од каде што следува дека точките A,C,F се колинеарни.

Трет начин. За да докажеме дека точките A,C,F се колинеарни, доволно е да докажеме дека $\frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\measuredangle DAC}=\frac{\sin\measuredangle BAF}{\sin\measuredangle DAF}$. Имаме, $\frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\measuredangle DAC}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$. Од друга страна од синусната теорема за триаголниците BAF и DAF следува

$$\frac{\sin\measuredangle BAF}{\sin\measuredangle ABF}=\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{AF}}=\frac{\sin\measuredangle DAF}{\sin\measuredangle ADF}, \text{ т.е. } \frac{\sin\measuredangle BAF}{\sin\measuredangle DAF}=\frac{\sin\measuredangle ABF}{\sin\measuredangle ADF}.$$

Бидејќи

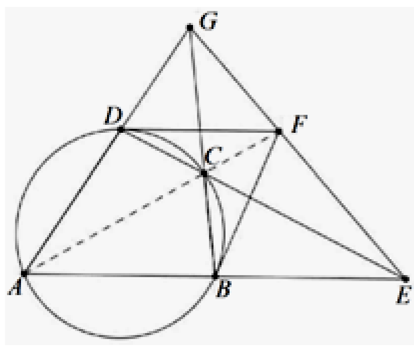
$$\measuredangle ABF=\measuredangle ABC+\measuredangle CBF=\measuredangle ABC+\measuredangle BAC=180^\circ-\measuredangle ACB=180^\circ-\measuredangle ADB$$

и $\measuredangle ADF=180^\circ-\measuredangle DAB$, добиваме

$$\frac{\sin\measuredangle ABF}{\sin\measuredangle ADF}=\frac{\sin\measuredangle ADB}{\sin\measuredangle DAB}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}.$$

Сега треба да докажеме дека $\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$, што следува од сличноста на триаголниците DCB и DBE, која е докажана во првиот начин на решавање.

Четврт начин. Со примена на теоремата на Паскал на дегенерираниот шестаголник $ABBCDD$ добиваме дека правите AD, BC и EF се сечат во една точка или се паралелни (бидејќи $AB\cap CD=\{E\}$ и $BB\cap DD=\{F\}$). Ако се сечат во една точка, нека тоа е точката G. За да A,C,F се колинеарни,



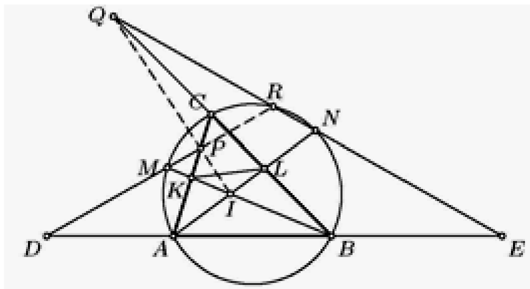
доволно е да се докаже дека правите AF, GB и ED се сечат во една точка, т.е. дека важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} \cdot \frac{\overline{GD}}{\overline{DA}} = 1$ (според теоремата на Чева). Последното равенство е исполнето бидејќи $\overline{AB} = \overline{BE}$ и $\frac{\overline{GD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FE}}$ (теорема на Талес).

5. Во триаголникот ABC точките D и E на правата AB се такви што $D-A-B-E$ и $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$. Со M и N соодветно да ги означиме средините на лаците AC и BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кои не го содржат третото теме на триаголникот. Правите DM и CA се сечат во точката P, а правите EN и CB се сечат во точката Q. Докажи дека центарот на впишаната кружница I на $\triangle ABC$ лежи на правата PQ.

Решение. Нека BM и AN ги сечат спротивните страни на триаголникот во точките K и L, соодветно. Од

$$\measuredangle BMC = \measuredangle BAK,$$
$$\measuredangle CBM = \measuredangle KBA,$$

следува дека триаголниците BCM и BKA се слични, па затоа $\overline{BK} \cdot \overline{BM} = \overline{BA} \cdot \overline{BC}$



Освен тоа, бидејќи $CD \| AL$ важи $\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}$. Според тоа, $\overline{BK} \cdot \overline{BM} = \overline{BL} \cdot \overline{BD}$, што заедно со $\measuredangle DBM = \measuredangle KBL$ дава $\triangle BDM \sim \triangle BKL$. На потполно аналоген начин добиваме дека $\triangle AEN \sim \triangle ALK$.

Нека DM и EN се сечат во R. Од добиените сличности следува

$$\measuredangle RDE = \measuredangle MDB = \measuredangle LKB \text{ и } \measuredangle DER = \measuredangle AEN = \measuredangle ALK,$$

па затоа со разгледување на ориентирани агли добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle NRM &= 180^\circ - \measuredangle RDE - \measuredangle DER = 180^\circ - \measuredangle LKB - \measuredangle ALK \\ &= \measuredangle KIL = \measuredangle BIA = 180^\circ - \measuredangle IAB - \measuredangle ABI \\ &= 180^\circ - \measuredangle CAN - \measuredangle MBC = \measuredangle NCM.\end{aligned}$$

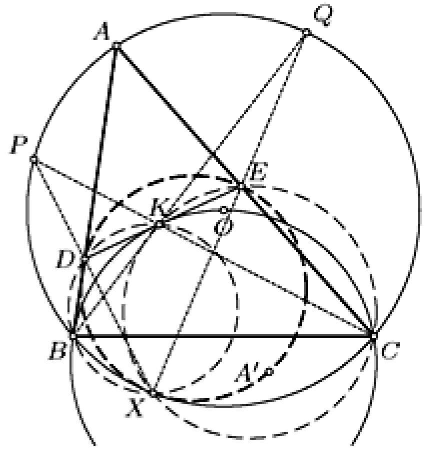
Според тоа, R припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Сега колинеарноста на точките I, P, Q следува од теоремата на Паскал за шестаголникот $ACBMRN$.

6. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Правата t ја допира опишаната кружница околу $\triangle BOC$ и ги сече страните AB и AC во точките D и E, соодветно ($D, E \not\equiv A$). Точката A' е симетрична на точката A во однос на правата t. Докажи дека кружниците опишани околу $\triangle A'DE$ и

$\triangle ABC$ се допираат.

Решение. *Прв начин*. Со K да ја означиме допирната точка на правата t и кружницата BOC. Нека кружниците опиашни околу $\triangle BDK$ и $\triangle CEK$ по втор пат се сечат во точката X. Бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle BXC &= \measuredangle BXK + \measuredangle KXC \\ &= \measuredangle ADK + \measuredangle KEA \\ &= 180^\circ - \measuredangle CAB,\end{aligned}$$



точката X припаѓа на опишаната кружница k околу $\triangle ABC$. Уште повеќе,

$$\begin{aligned}\measuredangle DXE &= \measuredangle DXK + \measuredangle KXE \\ &= \measuredangle DBK + \measuredangle KCE \\ &= \measuredangle CKB - \measuredangle CAB \\ &= \measuredangle CAB = \measuredangle DA'E,\end{aligned}$$

па затоа X припаѓа на опишаната k_1 околу $\triangle A'DE$. Ќе докажеме дека кружниците k и k_1 се допираат во точката X.

Ако правите CK и XD се сечат во точката P, тогаш важи

$$\measuredangle XPC = \measuredangle XDE - \measuredangle CKE = \measuredangle XBK - \measuredangle CBK = \measuredangle XBC,$$

што значи дека P лежи на кружницата k. Аналогно, правите BK и KE се сечат во точка Q на кружницата k. Конечно, од $\measuredangle XPQ = \measuredangle XBQ = \measuredangle XDK$ следува дека $PQ \parallel DE$. Според тоа, триаголниците XDE и XPQ се хомотетични со центар на хомотетија X, па затоа нивните опишани клружници се допираат во X.

Втор начин. Нека правите BK и CK повторно ја сечат опишаната кружница околу $\triangle ABC$ соодветно во точките Q и P. Од $\measuredangle CPQ = \measuredangle CBQ = \measuredangle CKE$ следува $PQ \parallel DE$. Нека правите DP и EQ се сечат во точката X. Бидејќи точките $D = PX \cap AB,\ K = PC \cap QB$ и $E = AC \cap QX$ се колинеарни, од обратната теорема на теоремата на Паскал следува дека точката X лежи на иста кружница со точките A, B, C, P, Q. Според тоа, $\triangle XDE$ и $\triangle XPQ$ се хомотетични со центар на хомотетија X, па затоа нивните опишани клружници се допираат во X. Конечно, точката A' припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle DXE$ бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle DXE &= \measuredangle PXQ = \measuredangle PCA + \measuredangle ABQ \\ &= \measuredangle BKC - \measuredangle BAC = \measuredangle BAC = \measuredangle DA'E.\end{aligned}$$

7. Даден е разностран $\triangle ABC$. Точките $D \in AB$ и $E \in AC$ се такви што опишаните кружници околу $\triangle ACD$ и $\triangle ABE$ се допираат до BC. Нека F е пресечната точка на BC и DE. Докажи дека правата AF е нормална на Ојлеровата права во $\triangle ABC$.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и D' и E' се симетричните точки на A во однос на висините CH и BH, соодветно (направи цртеж). Тогаш D' лежи на AB, E' лежи на AC и H е центар на кружницата опишана околу $\triangle AD'E'$. Значи, доволно е да докажеме дека AF е радикална оска на кружниците опишани околу $\triangle ABC$ и $\triangle AD'E'$, бидејќи нивните центри лежат на Ојлеровата права за $\triangle ABC$.

Јасно, A лежи на оваа радикална оска, како заедничка точка на двете кружници. Понатаму, од

$$\measuredangle BD'C' = \measuredangle BAC = \measuredangle BE'C$$

следува дека точките B, C, E', D' лежат на иста кружница. Сега, од

$$\measuredangle BCD = \measuredangle BAC = \measuredangle BD'C$$

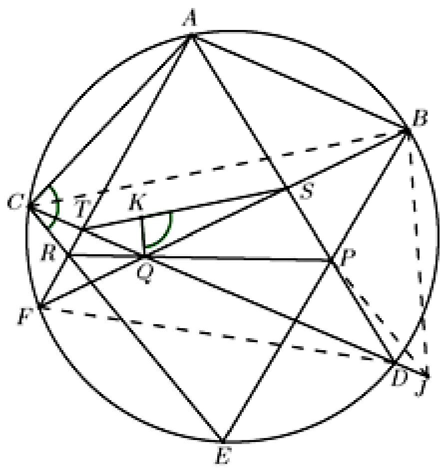
и аналогното равенство $\measuredangle CBE = \measuredangle CE'B$ следува дека BE и CD се тангенти на таа кружница. Сега од теоремата на Паскал следува дека D, E и пресечната точка на BC и $D'E'$ лежат на една права, па затоа D', E' и F лежат на една права. Според тоа, F е радикален центар на $\triangle ABC$, $\triangle AD'E'$ и $BCD'E'$, од што следува тврдењето на задачата.

8. Точките A, B, D, E, F и C лежат на една кружница (во овој редослед), при што $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека $P = AD \cap BE$, $R = AF \cap CE$, $Q = BF \cap CD$, $S = AD \cap BF$ и $T = AF \cap CD$. Точката $K \in ST$ е таква што $\measuredangle QKS = \measuredangle ECA$. Докажи дека

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}.$$

Решение. Од равенството $\overline{AB} = \overline{AC}$ следува $\measuredangle ADC = \measuredangle AFB$, што значи дека точките S, D, F и T лежат на една кружница (види цртеж), па затоа

$$\measuredangle QSK = \measuredangle TDF = \measuredangle RAC.$$



Ако се земе предвид условот $\measuredangle QKS = \measuredangle ECA$, добиваме дека $\triangle QSK \sim \triangle RAC$. Аналогно се добива дека $\triangle QTK \sim \triangle PAB$. Според тоа,

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{KQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CR}} \text{ и } \frac{\overline{KQ}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BA}},$$

па ако ги помножиме двете равенства и искористиме дека $\overline{AB}=\overline{AC}$, добиваме

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{KT}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CR}}.$$

Понатаму, од теоремата на Паскал за $ABDEFC$ следува дека точките P,Q,R се колинеарни. Нека точката J припаѓа на полуправата CD, при што $\triangle BCJ \sim \triangle BAP$. Бидејќи $\frac{\overline{BP}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$ и

$$\measuredangle ABC=\measuredangle PBA-\measuredangle PBC=\measuredangle JBC-\measuredangle PBC=\measuredangle JBP,$$

добиваме $\triangle BPJ \sim \triangle BAC$, а оттука $\overline{PB}=\overline{PJ}$ (заради $\overline{AB}=\overline{AC}$). Уште повеќе, имаме $\measuredangle DPE=\measuredangle BPA=\measuredangle BJC$, што значи дека точките B,J,D и P се конциклични и

$$\measuredangle PJQ=\measuredangle DBE=\measuredangle DCE,$$

од што следува $PJ \parallel CR$. Според тоа,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CR}}=\frac{\overline{PJ}}{\overline{CR}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$$

што заедно се $\frac{\overline{SK}}{\overline{KT}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CR}}$ го дава бараното равенство.

Литература

1. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: *Geometrija za* I *razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998
2. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма/Математички талент, Скопје