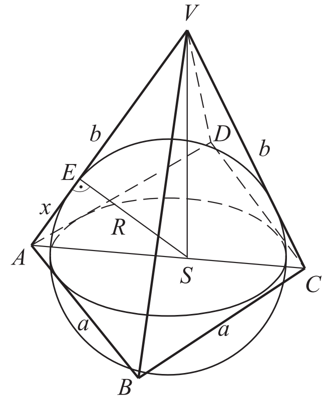
S razredbenog ispita u Japanu

Roko Pešić, Zagreb

U jednom američkom časopisu objavljen je sljedeći zadatak koji se pojavio na razredbenom ispitu na jednom sveučilištu u Tokiju, ali bez rješenja. Zadatak mi se sviđao, a nadam se će i vama biti interesantan.

Zadatak. Zadana je pravilna četverostrana piramida i kugla sa središtem koje leži u bazi piramide. Ona dira sve njezine bridove, a brid osnovice je duljine a. Nađite:
a) visinu v piramide;
b) obujam V dijela koji je zajednički kugli i piramidi.



Slika 1.

Rješenje. a) Iz uvjeta zadatka se vidi da središte S kugle mora biti u središtu baze piramide (baza je kvadrat sa stranicom duljine a), a to znači da je polumjer kugle jednak polovici duljine stranice a,

$$R = \frac{a}{2}. \tag{0}$$

Promotrimo pravokutni trokut ASV: $|AS|^2 + |SV|^2 = |AV|^2$, gdje je $|AS| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $|SV| = v$ (visina piramide), $|AV| = b$ (bočni brid piramide), pa je

$$v^2 = b^2 - \frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

Također iz uvjeta zadatka slijedi da je visina $|SE|$ trokuta ASV jednaka polumjeru R kugle, $|SE| = R$. Označimo li $|AE| = x$, tada je $|EV| = b - x$.

S obzirom da su trokuti ASV, ASE i ESV pravokutni, vrijede ove jednakosti:

$$R^2 = x(b - x), \tag{2}$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = bx \implies x = \frac{a^2}{2b}. \tag{3}$$

Uvrstivši jednakosti (0) i (3) u (2) dobivamo $a = b$, i to je piramida kojoj su svi bridovi jednake duljine (polovica oktaedra). Iz jednakosti (1) tada dobivamo visinu piramide

$$v = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

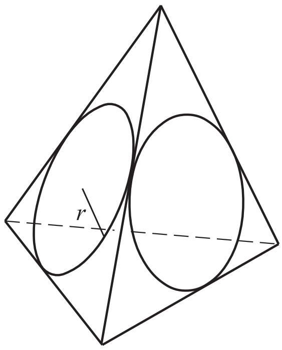
b) Zajedničkom dijelu obujma pripada gornja polukugla umanjena za četiri kuglina odsječka koji ne pripadaju piramidi – po jedan nad svakom pobočkom piramide. Ti odsječci su određeni četirima ravninama u kojima leže pobočke piramide jer njih, (odsječke) te ravnine odsijecaju od gornje polukugle.

Obujam kuglinog odsječka je

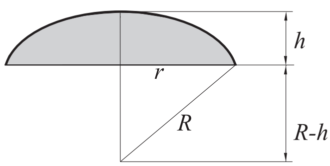
$$\boxed{V_o = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2),} \tag{4}$$

gdje je r polumjer baze, a h visina kuglinog odsječka. Baza kuglinog odsječka je krug omeđen kružnicom polumjera r. Ta kružnica dira bočne bridove piramide, a kako je ova jednakostranični trokut stranice duljine a, ta kružnica je upisana u jednakostranični trokut pa za nju vrijedi jednakost $a = 2r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, gdje je α središnji kut jednakostraničnog trokuta. Kako je $\alpha = 360^\circ : 3$ tj. $\alpha = 120^\circ$, uvrštavanjem te vrijednosti u prethodnu jednakost dobivamo da je $a = 2r\operatorname{tg}60^\circ$, tj. $a = 2r\sqrt{3}$ odnosno

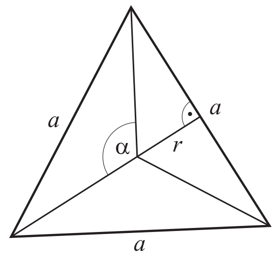
$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}. \tag{5}$$



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

Za odsječak kugle polumjera R, visine h i polumjera baze r (vidi sliku 3) vrijedi jednakost:

$$r^2 = h(2R - h), \tag{6}$$

što lako slijedi iz Pitagorinog poučka. Uvrstivši (0) i (5) u (6), nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu u varijabli h, $h^2 - ah + \frac{a^2}{12} = 0$. Njezina rješenja su:

$$h = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 0.9a, \tag{7a}$$

$$h = a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 0.1a. \tag{7b}$$

Rješenje (7a) nije ispravno, jer iz (0) bi slijedilo $h > R$, što ne može biti. Rješenje (7b) zadovoljava uvjet $h < R$, pa je to rješenje ispravno.

Uvrstivši izraze (5) i (7b) u formulu (4) za obujam kuglinog odsječka konačno dobivamo:

$$V_o = \frac{a^3\pi}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{7\sqrt{6}}{36}\right). \tag{8}$$

Zajednički obujam ćemo dobiti ako od obujma polukugle oduzmemo ukupni obujam četiriju kuglinih odsječaka:

$$V = \frac{V_1}{2} - 4V_o = \frac{2}{3}R^3\pi - 4\cdot\frac{a^3\pi}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{7\sqrt{6}}{36}\right).$$

Nakon sređivanja dobivamo zajednički obujam kugle i piramide

$$V = \frac{a^3\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{2}\right).$$