Двоструко пребројавање

прва-4 верзија: 4.12.2014.

Душан Ђукић

Под двоструким пребројавањем подразумевамо пребројавање неке величине на два начина у циљу добијања неке релације (или контрадикције). Ево једног "баналног" примера.

Задатак 1. У неком друштву, трећина свих пензионера су шахисти, а четвртина свих шахиста су пензионери. Да ли у том друштву има више шахиста или пензионера?

Решење. Нека има p пензионера и c шахиста. Одредимо број пензионера-шахиста. С једне стране, он је једнак трећини броја пензионера, тј. $\frac{1}{3}p$, а с друге стране, једнак је четвртини броја шахиста, тј. $\frac{1}{4}c$. Одавде је $\frac{1}{3}p = \frac{1}{4}c$, тј. $c = \frac{4}{3}p > p$: више има шахиста. $\triangle$

Често је корисна *матрица инциденције* - бинарна таблица која показује релације између две класе објеката.

Тако нпр. јединице у матрици инциденције можемо пребројати на два начина: по врстама или по колонама; резултат ће наравно бити исти.

Задатак 2. Интервал $(0, 20)$ је покривен са 13 отворених подинтервала, тако да ниједан није подскуп уније осталих. Доказати да бар један од ових подинтервала има дужину не већу од 3.

Решење. Претпоставимо да су сви подинтервали дужине веће од 3. Означимо подинтервале са $I_1, \dots, I_{13}$. Направимо таблицу 19×13 у којој врсте одговарају бројевима $1, 2, \dots, 19$, а колоне подинтервалима $I_1, \dots, I_{13}$; у пресеку i-те врсте и j-те колоне уписујемо 1 ако $i \in I_j$, и 0 у супротном.

Ако нека три подинтервала имају заједничку тачку, онда је један од њих подскуп уније друга два (проверите!), противно услову задатка. Према томе, свака целобројна тачка је у највише два подинтервала, тј. у свакој врсти се налазе највише две јединице. Следи да у таблици има највише 38 јединица. С друге стране, по претпоставци, сваки подинтервал садржи бар 3 целобројне тачке, тј. у свакој колони су бар три јединице, па тако у таблици има бар $3 \cdot 13 = 39$ јединица, контрадикција. $\triangle$

Док је репертоар задатака који се решавају једноставним бројањем јединица по врстама и колонама релативно ограничен, бројање *парова* (или k-торки) је прилично распрострањена идеја. Следећи пример је карактеристичан.

Задатак 3. Посматрајмо све фамилије $\mathcal{F}$ трочланих подскупова скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ међу којима никоја два немају више од једног заједничког елемента. Ако са $f(n)$ означимо највећу могућу кардиналност $\mathcal{F}$, доказати да је $\frac{n^2-4n}{6} \leqslant f(n) \leqslant \frac{n^2-n}{6}$.

Решење. Парова (x, y) елемената скупа $\{1, \dots, n\}$ има $\frac{n^2-n}{2}$; сваки подскуп у $\mathcal{F}$ садржи три пара, и ниједан пар није садржан у два подскупа, одакле следи $3f(n) \leqslant \frac{n^2-n}{2}$.

С друге стране, фамилија $\mathcal{F} = \{\{a, b, c\} : n \mid a+b+c,\ a \neq b \neq c \neq a\}$ задовољава услов задатка и има $\frac{n^2-3n+6}{6}$ елемената. $\triangle$

Задаци

1. Дато је n тачака унутар троугла T, међу којима нема колинеарних. Ове тачке и темена троугла T су повезане међусобно непресецајућим дужима, и деле T на троуглове. Одредити број ових троуглова.

2. Означимо са p_k број пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ са тачно k фиксних тачака. Доказати да је $p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = n!$. *(ММО 1987.1)*

3. На такмичењу је 200 ученика решавало 6 задатака. Сваки задатак је решило бар 120 ученика. Доказати да постоје два ученика таква да је сваки задатак решио бар један од њих.

4. На такмичењу учествује a такмичара и b судија, при чему је $b \geqslant 3$ непаран природан број. Сваки судија оцењује сваког такмичара или са „прошао“ или са „пао“. Нека је k број такав да се за сваку двојицу судија њихове оцене поклапају код највише k такмичара. Доказати да је $\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$. *(ММО98.2)*

5. У правоугаоној таблици $n \times n$, бар $n(\sqrt{n} + \frac{1}{2})$ поља је обојено. Доказати да постоје четири обојена поља чији центри су темена правоугаоника.

6. Скуп $\mathcal{S}$ који се састоји од n тачака у равни задовољава услове:

   (i) никоје три тачке у $\mathcal{S}$ нису на истој правој;

   (ii) за сваку тачку $P \in \mathcal{S}$ постоји бар k тачака у $\mathcal{S}$ које су на истом растојању од P.

   Доказати да је $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. *(ММО 1989.3)*

7. На универзитету има 10001 студената. Неки од њих су учлањени у неке клубове. Такође, неки од клубова припадају неким удружењима. Удружења има k. Колико може бити k, ако важи:

   (i) свака два студента су у тачно једном клубу;

   (ii) сваки студент је члан тачно једног клуба унутар датог удружења;

   (iii) сваки клуб има непаран број чланова, и при том се клуб са $2m + 1$ чланова налази у тачно m друштава?

8. Нека је $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ фамилија подскупова скупа $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ који задовољавају следеће услове:

   (i) свака два различита скупа из $\mathcal{F}$ имају тачно један заједнички елемент;

   (ii) сваки елемент S је садржан у тачно k скупова из $\mathcal{F}$.

   Може ли n да буде једнако 1996?

9. Нека је n паран број. Поља табле $n \times n$ обојена су са $n^2/2$ боја, по два сваком бојом. Доказати да се може поставити n топова на поља у n различитих боја тако да се никоја два не нападају.

10. У једном разреду школе има 90 ученика, од којих се сваки дружи са бар 30 других ученика. Доказати да се они могу поделити у три одељења од по 30 ученика тако да свако има бар једног друга у свом одељењу.

11. Све стране полиедра су троуглови. Темена полиедра обојена су једном од три боје. Доказати да је број страна на којима се појављују све три боје паран.

12. У равни је дато n јединичних троуглова који образују повезан скуп. Доказати да пресечних тачака ових кругова (тј. тачака које леже на бар два круга) има бар n.

13. Подскупови $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ су такви да је $|A_i \cap A_j| = 1$ за све $i \neq j$. Доказати да је $k \leqslant n$.

14. У групи од n људи сваки познаје тачно k других. Свака два човека који се познају имају тачно l заједничких познаника, а свака два који се не познају имају тачно m заједничких познаника. Одредити везу између k, l, m, n.

15. Дати су r-елементни подскупови $S_1, S_2, \dots, S_k$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$. Доказати да постоје i, j такви да је $|A_i \cap A_j| \geqslant r - \frac{nk}{4(k-1)}$.

16. Нека је n природан број и S скуп свих тачака (x, y) са $x, y \in \{1, 2, \dots, n\}$. Нека је T скуп свих квадрата чија темена припадају скупу S. Означимо са a_k ($k \geqslant 0$) број парова тачака из S које су темена тачно k квадрата из T. Доказати да је $a_0 = a_2 + 2a_3$.

17. Дати су природни бројеви $r \leqslant n$. Посматрајмо све n-торке $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ненегативних целих бројева за које је $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$ и $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. За сваку такву n-торку израчунајмо количник $\frac{1}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$. Доказати да је сума свих ових количника једнака $\frac{(n-1)!}{(n-r)! r! (r-1)!}$.

18. Нека је n природан број. На конференцији учествује $15n$ особа које комуницирају на 5 језика. Испоставило се да сваким паром различитих језика може разговарати тачно $6n$ учесника, а да сваком тројком различитих језика може разговарати тачно $3n$ учесника. Доказати да се свака два учесника могу споразумети на неком од ових језика, као и да постоји језик којим говори бар $10n$ учесника.

19. На математичком такмичењу ученицима је дато 6 задатака. Показало се да је сваки пар задатака решило више од $\frac{2}{5}$ учесника и да нико није решио свих 6 задатака. Доказати да постоје бар два ученика таква да је свако од њих решио тачно 5 задатака. *(ММО 2005.6)*

20. Правилан шестоугао странице 3 је подељен на 54 једнакостранична троугла странице 1. Добијених 37 темена троуглова означени су бројевима $1, 2, \dots, 37$ произвољним редом. Јединични троугао се зове "сатни" ако су његова три броја у растућем поретку распоређена у смеру казаљке на сату. Доказати да има бар 19 сатних троуглова.

21. За дати цео број $n \geqslant 3$, свако поље таблице $n \times n$ је обојено једном од $\left[\frac{(n+2)^2}{3}\right]$ боја, при чему је свака боја употребљена бар једном. Доказати да постоји правоугаоник 1×3 или 3×1 који се састоји од три поља међусобно различитих боја.

22. Претпоставимо да за природан број n постоји пресликавање $f : \{0, 1\}^n \to \{1, 2, \dots, n\}$ са следећим својством: кад год се низови $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n$ разликују на тачно два места, важи $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$. Доказати да је $n = 2^k$ за неко k.

23. За скуп правих у равни кажемо да су *у општем положају* ако никоје две нису паралелне и никоје три не пролазе кроз исту тачку. Скуп правих у општем положају дели раван на области; *ограниченим* областима у подели зовемо оне које имају коначну површину. Доказати да је, за свако довољно велико n, у сваком скупу n правих у општем положају могуће обојити у плаво бар $\sqrt{n/2}$ правих тако да ниједна од ограничених области у подели нема потпуно плаву границу. *(ММО 2014.6')*

Решења

1. Означимо број троуглова са t. Збир углова у свих t троуглова је $t \cdot 180°$. С друге стране, у свакој од n унутрашњих тачака збир углова је $360°$, а у теменима T укупно $180°$. Следи да је $180t = 360n + 180$, па је $t = 2n + 1$.

2. Збир $p_1+2p_2+\cdots+np_n$ представља број парова (π, i), где је π пермутација $\{1,2,\ldots,n\}$ и i њена фиксна тачка.

   С друге стране, број пермутација π које фиксирају тачку i једнак је $(n-1)!$. Следи да је број парова (π, i) једнак $n(n-1)! = n!$, што доказује тврђење.

3. Претпоставимо супротно, да за свака два ученика постоји задатак који ниједан од њих није решио. Бројимо тројке (u_1, u_2, z) ученика u_1, u_2 који нису решили задатак z.

   С једне стране, оваквих тројки има бар онолико колико има парова ученика, дакле $200\cdot 199 = 39800$. С друге, за сваки задатак z, постоји највише 80 ученика који га нису решили, дакле највише $80\cdot 79$ тројки. То укупно даје највише $6\cdot 80\cdot 79 = 37920$ тројки, и то је контрадикција.

4. Нека је $b = 2r+1$. Пошто се сваки од $\binom{b}{2}$ парова судија слаже код највише k такмичара, укупан број поклапања није већи од $k\binom{b}{2}$.

   С друге стране, ако за i-тог такмичара x_i судија гласа за пролаз, а $b-x_i$ за пад, број поклапања на овом такмичару износи
$$\binom{x_i}{2}+\binom{n-x_i}{2} = \frac{x_i^2+(b-x_i)^2-b}{2} \geqslant \frac{r^2+(b-r)^2-n}{2} = \frac{(b-1)^2}{4}.$$
   Према томе, укупно има бар $\frac{a(b-1)^2}{4}$ поклапања, одакле следи $k\binom{b}{2} \geqslant \frac{a(b-1)^2}{4}$, што се своди на $\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$.

5. Претпоставимо да таква поља не постоје. Нађимо број N парова обојених поља који се налазе у истој врсти. За сваки пар колона K_1, K_2 постоји највише једна врста у чијим се пресецима са обе колоне налазе обојена поља (ако постоје две такве врсте, њихови пресеци са K_1 и K_2 одређују правоугаоник). Парова колона има $\binom{n}{2}$, дакле $N \leqslant \binom{n}{2}$.

   Сада бројимо по врстама. Нека у i-тој врсти има a_i обојених поља: $a_1+a_2+\cdots+a_n = M = n(\sqrt{n}+\frac{1}{2})$. У i-тој врсти има $\binom{a_i}{2}$ парова обојених поља, дакле $N = \sum_i \binom{a_i}{2}$. Користећи неједнакост између аритметичке и квадратне средине добијамо
$$\binom{n}{2} \geqslant N = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2-a_i}{2} \geqslant \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{M^2-nM}{2n} = \frac{n(4n-1)}{8} > \binom{n}{2},$$
   што је контрадикција.

6. Претпоставимо да је $k \geqslant \frac{1}{2}+\sqrt{2n}$. За сваку тачку $P \in \mathcal{S}$ постоји бар k тачака у $\mathcal{S}$ на истом растојању од P, што даје бар $k(k-1)$ парова тачака A, B са $AP = BP$. То укупно даје бар $nk(k-1) \geqslant 2n(n-\frac{1}{8})$ тројки тачака (A, B, P) са $AP = BP$.

   С друге стране, за сваки од $n(n-1)$ парова тачака $A, B \in \mathcal{S}$ постоје највише две тачке P са $AP = BP$, јер се све такве тачке P налазе на симетрали дужи AB. Дакле, укупно може бити највише $2n(n-1) < 2n(n-\frac{1}{8})$ тројки (A, B, P), и то је контрадикција.

7. Писаћемо $n = 10001$. Пребројмо тројке (a, C, S) на два начина, где је a студент, C клуб и S удружење тако да $a \in C \in S$. Нека је $\mathcal{T}$ скуп таквх тројки. За сваког студента a и удружење S, по (ii), постоји тачно један клуб C са $(a, C, S) \in \mathcal{T}$. Парова (a, S) има nk, дакле $|\mathcal{T}| = nk$.

   Сада фиксирајмо клуб C. По (iii), C је у тачно $\frac{|C|-1}{2}$ удружења, што даје $\frac{|C|(|C|-1)}{2}$ тројки из $\mathcal{T}$ које укључују C. Одавде је $|\mathcal{T}| = \sum_C \frac{|C|(|C|-1)}{2}$ (сума по свим клубовима). На основу (i) је $\sum_C \frac{|C|(|C|-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, па добијамо $\frac{n(n-1)}{2} = nk$, тј. $k = \frac{n-1}{2} = 5000$.

   За $k = (n-1)/2$, систем са само једним клубом C у коме су сви студенти и k истих удружења са клубом C као јединим чланом задовољава услове.

8. Пребројаћемо на два начина уређене тројке (x, A_i, A_j) где је x елемент подскупова A_i и A_j $(i \neq j)$. Сваки елемент x је садржан у k подскупова, па подскупове A_i и A_j можемо да изаберемо на $k(k-1)$ начина. Следи да тројки (x, A_i, A_j) има $nk(k-1)$.

С друге стране, за свака два подскупа A_i и A_j елемент x је једнозначно одређен, па оваквих тројки има $n(n-1)$. Према томе, $n(n-1) = nk(k-1)$, одакле добијамо $n = k^2 - k + 1$. Како за $n = 1996$ овакво k не постоји, одговор је *не*.

9. Укупан број постављања n (различитих) топова тако да се никоја два не нападају је $n!^2$ (први може да се постави на n^2 начина, други на $(n-1)^2$ итд.).

   За сваку боју B, број начина на које се топови могу поставити без међусобног нападања тако да су два топа на пољима боје B једнак је $n(n-1)\cdot(n-2)!^2$, што укупно даје $\frac{n^2}{2}\cdot n(n-1)\cdot(n-2)!^2$ недозвољених начина, што је мање од $n!^2$. Зато остаје бар један дозвољен начин.

10. Означимо одељења са A, B и C. Одељење A се може формирати на $\binom{90}{30}$ начина, а потом одељење B на $\binom{60}{30}$ начина, што даје укупно $M = \binom{90}{30}\binom{60}{30}$ начина да се формирају сва три одељења.

    Одредимо сада број начина да се то учини тако да неки ученик нема ниједног друга у свом одељењу. За сваког ученика X, број начина при којим X нема другова у свом одељењу је $\binom{59}{29}\binom{60}{30}$. То укупно даје највише $N = 90\binom{59}{29}\binom{60}{30}$ неодговарајућих начина. При том је $N < M$ јер је $\frac{M}{N} = \frac{1}{90}(\frac{90}{59}\cdot\frac{89}{58}\cdots\frac{61}{30}) > \frac{1}{90}(\frac{3}{2})^{30} > 1$. Према томе, бар један начин формирања одељења је одговарајући.

11. Ивицу полиедра зовемо "шареном" ако су њени крајеви различитих боја. Нека је a_i број троуглова у којима се појављује тачно i боја: такав троугао садржи тачно k_i разнобојних страница, где је $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 3$. Како свака разнобојна страница лежи у два троугла, укупан број разнобојних страница помножен са 2 је $k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 \equiv a_3 \pmod 2$. Следи да је број a_3 паран.

12. Нека су $A_1, \dots, A_k$ све пресечне тачке. За тачку A_i и круг $k_j \ni A_i$, пару (A_i, k_j) доделимо $a_{ij} = \frac{1}{n_i}$, где је n_i број кругова који садрже A_i.

    Посматрајмо збир свих бројева a_{ij}. За сваку тачку A_i, збир $\sum_j a_{ij}$ је једнак $n_i \cdot \frac{1}{n_i} = 1$, дакле $\sum_{i,j} a_{ij} = k$.

    С друге стране, нека на кругу k_j лежи m_j тачака и нека је $A_i \in k_j$. Сваки од $n_i - 1$ кругова кроз A_i различитих од k_j поново сече k_j у некој тачки, при чему су све те тачке различите; следи да на k_j лежи бар n_i тачака, тј. $m_j \geqslant n_i$. Одавде је $a_{ij} \geqslant \frac{1}{m_j}$, па је $\sum_i a_{ij} \geqslant m_j \cdot \frac{1}{m_j} = 1$, што сабирањем по свим j даје $k = \sum_{i,j} a_{ij} \geqslant n$.

13. Претпоставимо да је $k > n$. Пару (i, j) за $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant k$ додељујемо $a_{ij} = 0$ ако $i \in A_j$ и $a_{ij} = \frac{|A_j|}{n - |A_j|}$ у супротном.

    За фиксирано j је $\sum_i a_{ij} = |A_i|$, па је $\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_j |A_j|$.

    Нека је сада n_i број подскупова који садрже i. Ако $i \notin A_j$, онда сваки од тих n_i скупова сече A_j у тачно једној тачки различитој од i, при чему су све те тачке различите. Дакле, A_j садржи бар n_i елемената, тј. $n_i \leqslant |A_j|$, одакле по претпоставци $k > n$ добијамо $\frac{n_i}{k - n_i} < \frac{|A_j|}{n - |A_j|}$. Зато за фиксирано i у суми $\sum_j a_{ij}$ има $k - n_i$ ненула сабирака који су сви већи од $\frac{n_i}{k - n_i}$, па је $\sum_j a_{ij} > n_i$. Одатле је $\sum_{i,j} a_{ij} > \sum_i n_i = \sum_j |A_j|$, контрадикција.

14. Пребројаћемо на два начина тројке темена (a, b, c) у којима a познаје b и c, али b не познаје c.

    Особа a се може одабрати на n начина, а особа b на k начина. Међу познаницима особе a, једна је b, l њих познаје b, а преосталих $k - l - 1$ особа не познаје b, тј. за c има $k - l - 1$ могућности. Тако је укупан број тројки (a, b, c) једнак $nk(k - l - 1)$.

    С друге стране, b се може одабрати на n начина, c на $n - k - 1$ начина (толико има непознаника особе b), а a као заједнички познаник људи b и c на m начина. Одавде је укупан број тројки (a, b, c) једнак $nm(n - k - 1)$.

    Следи да је $k(k - l - 1) = m(n - k - 1)$.

15. Довољно је показати да постоје i, j такви да је $|S_i \setminus S_j| \leqslant \frac{nk}{4(k-1)}$. Претпоставимо супротно. Тада за сваки од $k(k-1)$ уређених парова i, j $(i \neq j)$ постоји више од $\frac{nk}{4(k-1)}$ тројки (x, S_i, S_j) у којима $x \in S_i$ и $x \notin S_j$. Укупно, оваквих тројки (x, S_i, S_j) има више од $k(k-1)\frac{nk}{4(k-1)} = \frac{1}{4}nk^2$.

    С друге стране, за дато x, ако се x налази у тачно k_x подскупова, S_i и S_j се редом могу одабрати на k_x и $k - k_x$ начина, што даје $k_x(k-k_x) \leqslant \frac{1}{4}k^2$ тројки. Следи да укупан број тројки не прелази $\frac{1}{4}nk^2$, што је контрадикција.

16. Број парова различитих тачака из S је $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \binom{n^2}{2}$.

    Пребројмо квадрате из T. Око сваког квадрата $t \in T$ може се описати тачно један квадрат $\bar{t}$ са страницама паралелним координатним осама. За $i = 1, \dots, n-1$, квадрата $\bar{t}$ странице i има тачно $(n-i)^2$. За сваки такав квадрат $\bar{t}$, квадрат t има темена на страницама $\bar{t}$ и може се одабрати на тачно i начина. Према томе, укупан број квадрата t је $\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)^2 = n^2 \sum_i i - 2n \sum_i i^2 + \sum_i i^3 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

    Сваки квадрат из T одређује 6 парова тачака, што даје $6 \cdot \frac{n^2(n^2-1)}{12} = \binom{n^2}{2}$ парова. У овај број се, међутим, сваки од a_k парова тачака које су темена тачно k квадрата рачуна тачно k пута. Дакле, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \binom{n^2}{2} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, одакле следи $a_0 = a_2 + 2a_3$.

17. Укупан број разлагања броја n на r природних сабирака је $\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$.

    С друге стране, ако у таквом разлагању има тачно k_i сабирака једнаких i, онда је управо $\sum k_i = r$ и $\sum ik_i = n$. За дате k_i таквих разлагања има тачно $\frac{r!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$, па је укупан број разлагања такође једнак $r! \sum \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$; дакле, то је једнако $\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$.

18. Означимо са a_i број учесника конференције који говоре i од 5 поменутих језика $(0 \leqslant i \leqslant 5)$. Тада је $a_0 + a_1 + \cdots + a_5 = 15n$. Како особа која говори i језика зна $\binom{i}{2}$ парова језика, имамо $\binom{2}{2}a_2 + \binom{3}{2}a_3 + \binom{4}{2}a_4 + \binom{5}{2}a_5 = \binom{5}{2}6n$, тј. $a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 60n$. Слично, посматрајући тројке језика, добијамо $a_3 + 4a_4 + 10a_5 = 30n$. Елиминацијом a_3 и a_4 у ове три једначине добијамо $2a_0 + 2a_1 + a_2 + 2a_5 = 0$, одакле је $a_0 = a_1 = a_2 = a_5 = 0$, и даље $a_3 = 10n$ и $a_4 = 5n$. Одавде следи прво тврђење.

    Такође, ако са b_i број учесника који знају i-ти језик, имамо $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 50n$, па је $b_i \geqslant 10n$ за неко i.

19. Нека је било n такмичара, од којих је a_i решило тачно i задатака: тада је $a_0 + \cdots + a_5 = n$. Одредимо број N парова (C, P), где је C такмичар који је решио пар задатака P. Сваки од 15 парова задатака је решило бар $\frac{2n+1}{5}$ такмичара, одакле је $N \geqslant 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3$. С друге стране, a_i такмичара је решило $\frac{i(i-1)}{2}$ парова, па је $6n + 3 \leqslant N \leqslant a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 6n + 4a_5 - (3a_3 + 5a_2 + 6a_1 + 6a_0)$. Према томе, $a_5 \geqslant 1$.

    Претпоставимо да је $a_5 = 1$. Тада мора бити $N = 6n + 4$, што је могуће само ако је 14 парова задатака решило тачно $\frac{2n+1}{5}$ такмичара, а преостали пар $\frac{2n+1}{5} + 1$ такмичара, при чему су сви осим победника решили тачно 4 задатка. Задатак t који победник није решио зваћемо *тешким*, а пар задатака који је решило $\frac{2n+1}{5} + 1$ такмичара *посебним*.

    Сада нађимо број M_p парова (C, P) у којима P садржи дати задатак p. Нека је b_p број такмичара који су решили p. Тада је $M_t = 3b_t$ (сваки од b_t такмичара је решио три пара задатака који садрже t) и $M_p = 3b_p + 1$ за $p \neq t$ (победник је решио четири таква пара). С друге стране, сваки од пет парова који укључују p је решило $\frac{2n+1}{5}$ или $\frac{2n+1}{5} + 1$ такмичара, па је $M_p = 2n + 2$ ако посебни пар садржи p, односно $M_p = 2n + 1$ у супротном. Овако је $M_t = 3b_t = 2n + 1$ или $2n + 2$, значи $2n + 1 \equiv 0$ или $2 \pmod 3$. Али ако је $p \neq t$ задатак који није у посебном пару, имамо $M_p = 3b_p + 1 = 2n + 1$, па је $2n + 1 \equiv 1 \pmod 3$, што је контрадикција.

20. На добијеној слици има 90 страница малих троуглова, од чега 18 на обиму шестоугла и 72 унутар њега. Посматрајмо парове (T, a), где је T троугао и a једна од његових

страница: тих парова има 162. Пар (T, a) зовемо "добрим" ако кретање дуж a од мањег броја ка већем значи кретање у смеру казаљке на сату у T; у супротном, пар је лош. Ако је страница a унутрашња и припада троугловима T_1, T_2, тачно један од парова (T_1, a) и (T_2, a) је добар, што даје 72 добра пара. Још бар један од парова (T, a) са a на обиму шестоугла је добар, дакле укупно има бар 73 добра пара.

Ако је троугао сатни, он одређује тачно два добра пара; у супротном одређује тачно један. Тако, ако има a сатних троуглова, број добрих парова је $2a+(54-a)=54+a \geqslant 73$; дакле, $a \geqslant 19$.

21. У таблици има $2n(n-2)$ правоугаоника 1×3 или 3×1. Пребројаћемо оне у којима се иста боја појављује бар двапут.

    Означимо са t_B број поља боје B, а са p_B број правоугаоника 3×1 или 1×3 који садрже бар два поља боје B. Лако се показује индукцијом (докажите!) да у колони или врсти која садржи $s > 0$ поља боје B, таквих правоугаоника има највише $\frac{3s}{2}-1$. Сабирањем по свим врстама и колонама у којима се појављује B добијамо $p_B \leqslant 3t_B - u - v$, где су u и v редом бројеви врста и колона које садрже B. За $u+v \geqslant 3$ је $p_B \leqslant 3(t_B-1)$, а ово важи и за $u+v=2$ јер је тада $t_B=1$ и $p_B=0$.

    Ако су $B_1, B_2, \dots, B_r$ дате боје ($r=[\frac{(n+2)^2}{3}]$), имамо $t_{B_1}+\dots+t_{B_r}=n^2$, па је на основу претходног $p_{B_1}+\dots+p_{B_r} \leqslant 3(t_{B_1}-1)+\dots+3(t_{B_r}-1)=3n^2-3r \leqslant 3n^2-(n+2)^2+1 = 2n^2-4n-3 < 2n(n-2)$. Дакле, постоји правоугаоник у коме се ниједна боја не појављује двапут.

22. Одредимо број парова $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ низова из $\{0,1\}^n$ таквих да се $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ разликују на тачно једном месту и $f(\mathbf{y})=1$.

    Како се за свако $\mathbf{y}$ са $f(\mathbf{y})=1$ низ $\mathbf{x}$ може одабрати на n начина, број парова $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ је дељив са n. С друге стране, за свако $\mathbf{x}$ и $i=1,2,\dots,n$, посматрајмо низ $\mathbf{x}^i$ који се од $\mathbf{x}$ разликује само на i-том месту. По услову задатка, сви $f(\mathbf{x}^i)$ су различити за $i=1,2,\dots,n$, па је $f(\mathbf{x}^i)=1$ за тачно једно i. Према томе, за свако $\mathbf{x}$, низ $\mathbf{y}$ се може одабрати на тачно један начин, па следи да је број парова $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ једнак 2^n. Одавде $n \mid 2^n$, што значи да је $n=2^k$ за неко k.

23. Назовимо пресечну тачку две плаве праве *плавом*. Претпоставимо да смо обојили k правих и да више ниједна права не може да се обоји без нарушавања услова задатка. То значи да за сваку необојену праву ℓ постоји ограничена област $\mathcal{R}_\ell$ чија једина необојена страна лежи на ℓ. Доделимо правој ℓ ма које плаво теме области $\mathcal{R}_\ell$. Свакој плавој тачки одговарају највише 4 праве. Како плавих тачака има $\binom{k}{2}$, а необојених правих $n-k$, следи да је $n-k \leqslant 4\binom{k}{2}$, тј. $k \geqslant \sqrt{(n+k)/2} > \sqrt{n/2}$.

Београд, 2012-2014