ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Припремна варијанта, 21. октобар 2001.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

4 **1.** Дати су трапез ABCD са основицама AD и BC и тачка K на његовом краку AB. Кроз тачку A конструисана је права l, паралелна правој KC, а кроз тачку B конструисана је права m, паралелна правој KD. Доказати да тачка пресека правих l и m лежи на краку CD.

4 **2.** Славко је помножио првих n природних бројева, а Валерије је помножио првих m парних природних бројева (n и m су већи од 1). Обојица су добили један те исти број. Доказати да је бар један од дечака погрешио.

4 **3.** У Кољиној колекцији се налазе четири царска новчића од по пет рубаља. Рекли су му да су нека два међу њима неисправна. Коља хоће да провери (да докаже или да оповргне), да ли су међу новчићима тачно два неисправна. Може ли он то да уради помоћу два мерења на теразијама без тегова? (Неисправни новчићи су једнаких тежина, исправни су такође једнаких тежина, али су неисправни лакши од исправних.)

4 **4.** По правој се у једном смеру крећу 5 једнаких куглица, а у сусрет им се крећу 5 других истих таквих куглица. Брзине свих куглица су једнаке. Приликом судара било које две куглице оне се одбију на супротне стране с истом брзином с којом су се кретале до судара. Колико ће се укупно судара десити међу куглицама?

4 **5.** Одабрано је неколико (више од три) тачака у равни. Познато је да ако се избаци произвољна тачка, преостале ће бити симетричне у односу на неку праву. Да ли је тачно да је цео скуп тачака такође симетричан у односу на неку праву?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло. Припремна варијанта, 21. октобар 2001.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
4	**1.** Назовимо висином петоугла отсечак нормале спуштене из темена на наспрамну страницу. Назовимо медијаном петоугла отсечак који повезује теме са средиштем наспрамне странице. Познато је да су дужине свих висина и свих медијана неког петоугла једнаке једном истом броју. Доказати да је тај петоугао правилан (то јест да су му странице једнаке и да су му углови једнаки).
4	**2.** Постоји 1000 узастопних природних бројева међу којима ниједан није прост (на пример: 1001!+2, 1001!+3, ... , 1001!+1001). А да ли постоји 1000 узастопних природних бројева, међу којима је тачно 5 простих?
4	**3.** По правој се у једном смеру крећу 5 једнаких куглица, а у сусрет им се крећу 5 других истих таквих куглица. Брзине свих куглица су једнаке. Приликом судара било које две куглице оне се одбију на супротне стране с истом брзином с којом су се кретале до судара. Колико ће се укупно судара десити међу куглицама?
4	**4.** На квадратној торти су распоређене ~~квадратне~~ ТРОУГЛАСТЕ чоколадице, које се међусобно не додирују. Да ли је увек могуће исећи торту на конвексне полигоне, тако да сваки полигон садржи тачно једну чоколадицу? (Сматрамо да је торта раван квадрат. Фигуру називамо конвексном, ако она са произвољне две своје тачке садржи и дуж која их повезује.)
4	**5.** У левом доњем углу шаховске табле, а такође на суседном горњем и суседном десном пољу налази се по бели топ. Дозвољено је повлачити потезе по уобичајеним правилима, али тако да после сваког потеза сваки од топова буде под заштитом неког другог топа. Могу ли се у неколико потеза преместити та три топа тако да сваки доспе на поље симетрично полазном у односу на дијагоналу која повезује десни доњи и леви горњи угао табле?

1. *У трапезу $ABCD$ са основицама AD и BC на бочној страници AB дата је тачка K. Кроз тачку A постављена је права l, паралелна правој KC, а кроз тачку B постављена је права m, паралелна правој KD. Доказати да тачка пресека правих l и m припада бочној страници CD.*

Решење. Означимо са O тачку пресека бочних страница трапеза, а са L и M тачке пресека правих l и m са страницом CD. Из паралелности правих KC и AL следи сличност троуглова COK и LOA, па је

$$\frac{OK}{OA} = \frac{CO}{LO}.$$

Аналогно, из сличности троуглова DOK и MOB добијамо

$$\frac{OK}{OB} = \frac{DO}{MO}.$$

Даље,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{DO}{CO},$$

па следи

$$LO = \frac{OA \cdot CO}{KO} = \frac{OB \cdot DO}{KO} = MO,$$

односно, тачке L и M се поклапају, па се праве l и m секу на страници CD.

2. *Славко је помножио првих n природних бројева, а Вељко је помножио првих m парних природних бројева (n и m су већи од 1), при чему су обојица добили исти резултат. Доказати да је бар један од дечака погрешио у рачунању.*

Решење. Према условима задатка, Славко је добио број $n!$, а Вељко број $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2m = 2^m \cdot m!$. Будући да су обојица добила исти резултат, закључујемо да је $n > m$, па је $2^m = (m+1)(m+2)\ldots(n-1)n$. Како су m и n већи од 1, следи да су сви чиниоци у наведеном производу узастопни бројеви већи од јединице. Њихов производ је степен двојке, па је стога $m+1 = 2^m$. Међутим, индукцијом се лако показује да је $2^m > m+1$, за $m > 1$, па следи да је једнакост задовољена само за $m = 1$, што је у супротности са условима задатка. Дакле, бар један од дечака је погрешио у рачуну.

3. *У Кољиној колекцији налазе се четири царска златника од пет рубљи. Кољи је речено да су нека два од њих фалсификати, па је он одлучио да провери (докаже или опоргне) да ли се међу његовим златницима налазе тачно два лажна. Да ли он то може да уради помоћу два мерења на теразијама без тегова?*

(Лажни златници су исте тежине, исправни такође, али су лажни лакши од правих.)

Решење. Може. Уочимо, прво, да Коља мора да стави по два златника на сваки тас при сваком мерењу. Уколико би стављао само по један златник на сваки тас могао би да дође у ситуацију да су оба лажна и оба права у равнотежи, па не би био у могућности да да било какву изјаву о броју лажних златника у његовој колекцији.

Могућа су два исхода првог мерења:

(1) Тасови су у равнотежи. То значи да се на сваком тасу налази исти број правих и лажних златника, те је довољно проверити стање на само једном тасу. Дакле, у другом мерењу упоређујемо златнике са једног таса. Ако тасови нису у равнотежи, закључујемо да се у колекцији налазе тачно два фалсификована, у супротном, број фалсификованих је 0 или 4.

(2) Тасови нису у равнотежи. То значи да се у колекцији налази најмање 1, а највише три фалсификована новчића. У другом мерењу заменимо места једног златника са левог таса и једног златника са десног таса. Уколико су након тога тасови у равнотежи, у колекцији су тачно два фалсификована златника, у супротном, број фалсификованих је 1 или 3.

4. *По правој се у једном смеру на неком међусобном растојању креће пет једнаких куглица, а њима у сусрет се креће још пет таквих куглица. Све куглице се крећу истом брзином. При судару произвољне две куглице, оне настављају да се крећу истом брзином, али у супротним смеровима. Колико судара ће бити међу куглицама?*

Решење. 25 судара.

Будући да су судари куглица потпуно еластични, сваки судар можемо посматрати као замену места две куглице које продужавају да се крећу у почетно задатом смеру. Сада је јасно да ће свака куглица заменити место са сваком од куглица које јој иду у сусрет, тј. са 5 куглица, па је укупан број замена места, тј. судара једнак $\frac{5\cdot 10}{2} = 25$ (сваки судар је рачунат два пута, јер у сваком судару учествују две куглице).

Напомена. Задатак се може уопштити. Ако се у оба смера креће по n куглица, укупан број судара ће бити n^2.

5. *У равни је уочено неколико тачака (више од три). Познато је да, ако се избаци произвољна од њих, преостале ће бити симетричне у односу на неку праву. Да ли је тачно да је цео скуп уочених тачака симетричан у односу на неку праву?*

Решење. Није тачно. Посматрајмо једнакокраки троугао ABC чији је угао $\angle ABC$ над основицом једнак 36°, а углови на основици 72°. Затим је у троуглу повучена симетрала AD угла $\angle CAB$ (где је D пресечна тачка симетрале са страницом BC). Контрапример је скуп тачака $\{A, B, C, D\}$.

Ако избацимо тачку A, добијамо три тачке на једној правој, па су оне симетричне у односу на ту праву. Ако избацимо неку од преосталих тачака добијамо једнакокраке троуглове, који су осно симетричне фигуре, па су услови задатка задовољени.

Покажимо да скуп тачака $\{A, B, C, D\}$ није осно симетричан.

Претпоставимо супротно, нека је p оса симетрије. Како се на страници BC налазе три тачке из овог скупа, следи да су бар две симетричне једна другој у односу на p, па је p нормална на BC и пресликава је на саму себе, па тачка A мора да остане на свом месту при симетрији, одакле закључујемо да $A \in p$. Тада је p висина троугла ABC, па тачка B нема одговарајућу симетричну тачку у наведеном скупу (јер би морала да се преслика на тачку праве BC), што је у супротности са нашом претпоставком.

10 - 11 РАЗРЕД

1. *Висином петоугла ћемо називати одсечак нормале из темена на наспрамну страницу, а медијаном петоугла ћемо називати дуж која спаја теме са средином наспрамне странице. Познато је да су дужине свих висина и свих медијана неког петоугла међусобно једнаке. Доказати да је тај петоугао правилан.*

Решење. Нека је дат петоугао $ABCDE$. Троуглови ABD, BCE, CDA, DEB и EAC су једнакокраки, будући да им се поклапају тежишне линије са одговарајућим висинама. Осим тога, лако се закључује да су они и међусобно подударни. Из наведене подударности следи $AB = BC = CD = DE = EA$ и $\angle ADB = \angle BEC = \angle CAD = \angle DBE = \angle ECA = \alpha$. Сада је лако израчунати углове петоугла $ABCDE$:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBE - \angle DBE = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} + 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \alpha = 180^\circ - 2\alpha.$$

Дакле, петоугао $ABCDE$ има једнаке странице и једнаке углове, па је правилан.

2. *Познато је да постоји хиљаду узастопних природних бројева, међу којима нема ниједног простог броја (нпр. 1001!+2, 1001!+3,...,1001!+1001). Да ли постоји хиљаду узастопних природних бројева међу којима је тачно 5 простих?*

Решење. Постоји. Нека је n први од 1000 узастопних природних бројева и нека је $p(n)$ број простих бројева међу посматраним. Тада међу 1000 узастопних бројева од којих је први $n+1$ има или $p(n)+1$ (ако је n сложен, а $n+1000$ прост) или $p(n)$ (ако су n и $n+1000$ или оба прости или оба сложени) или $p(n)-1$ (ако је n прост, а $n+1000$ сложен), односно, број простих бројева се мења за највише један. Како је $p(1) = 168$, а $p(1001! + 2) = 0$, на основу претходног разматрања следи да између 1 и 1001!+2 постоји 1000 узастопних бројева почевши од неког n, за које је $p(n) = 5$.

3. *По правој се у једном смеру на неком међусобном растојању креће пет једнаких куглица, а њима у сусрет се креће још пет таквих куглица. Све куглице се крећу истом брзином. При судару произвољне две куглице, оне настављају да се крећу истом брзином, али у супротним смеровима. Колико судара ће бити међу куглицама?*

Видети решење 4. задатка за 8–9. разред.

4. *На торти облика квадрата налазе се троугаоне чоколадице које се међусобно не додирују. Да ли је увек могуће разрезати торту на конвексне многоуглове, тако да сваки многоугао садржи тачно једну чоколадицу?*

Решење. Није. Сместимо торту у Декартов правоугли координатни систем, тако да су темена тог квадрата одређена тачкама (0,0), (0,10), (10,10) и (10,0) и поставимо на њу четири подударне троугаоне чоколадице са теменима у тачкама:

прва: $A(0,7)$, $B(6,9)$, $C(6,7)$;

друга: $D(7,10)$, $E(9,4)$, $F(7,4)$;

трећа: $G(10,3)$, $H(4,1)$, $I(4,3)$;

четврта: $J(3,0)$, $K(1,6)$, $L(3,6)$.

Тада тачка са координатама (5,5) (центар квадрата) не припада ниједном конвексном делу торте, јер се из ње ниједна чоколадица не види у потпуности.

5. *У левом доњем углу шаховске табле, као и на њему суседним пољима са горње и десне стране, налази се по један бели топ. Дозвољено је вући потезе по уобичајеним правилима, с тим да је након сваког потеза сваки топ под заштитом неког другог топа. Да ли је могуће помоћу*

неколико потеза поставити топове тако да се сваки нађе на пољу које је симетрично његовом почетном пољу у односу на дијагоналу која спаја десно доње и лево горње угаоно поље табле.

Решење. Није. Након сваког потеза топови се налазе у теменима правоуглог троугла чије су катете паралелне ивицама шаховске табле. Означимо топове у почетној позицији $a1$, $a2$, $b1$, редом са A, B и C. На тај начин они одређују троугао ABC код кога темена идући у смеру казаљке на сату долазе редом $A - B - C$. Сваки топ након одиграног потеза остаје у истој полуравни у односу на праву која пролази кроз тачке у којима се налазе преостала два топа тј. не мења се оријентација троугла. Дакле, када се топови нађу у горњем десном углу њихов положај ће бити $(h8, g8, h7)$, односно, троугао ABC ће променити оријентацију у $A - C - B$, што је у супротности са условима задатка.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијаната, 28. октобар 2001.
8 - 9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени задаци

4 **1.** Постоје ли такви природни бројеви $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{100}$, да је $[a_1,a_2]>[a_2,a_3]>\ldots>[a_{99},a_{100}]$?
([a,b] је најмањи заједнички садржалац бројева a и b, тј. најмањи природан број који је делив и са a и са b.)

5 **2.** N црвених и N плавих тачака, које се строго смењују, деле кржницу на 2N лукова, тако да произвољна два суседна лука имају различите дужине. При томе је дужина сваког од тих лукова једнака једном од три броја: a, b или c. Доказати да N-тоугао с црвеним теменима и N-тоугао с плавим теменима имају једнаке обиме и једнаке површине.

5 **3.** Дата је таблица $(n-2)\times n$, $n>2$, у чије је свако поље уписан цео број од 1 до n, при чему су у свакој врсти сви бројеви различити и у свакој колони сви бројеви различити. Доказати да је ту таблицу могуће допунити до квадратне таблице $n\times n$, у чије је свако ново поље такође уписан неки цео број од 1 до n, тако да као и раније у свакој врсти и свакој колони бројеви буду различити.

5 **4.** Правилан $(2n+1)$-угао је разложен дијагоналама на $2n-1$ троуглова. Доказати да су међу њима бар три једнакокраки.

6 **5.** Саша поставља топове на празну шаховску таблу: првог - где хоће, а сваког следећег поставља тако да туче непаран број раније постављених топова. Који највећи број топова он може тако да постави? (Као и обично, топови туку један другог по вертикали и хоризонтали само ако међу њима нема других топова.)

8 **6.** У врсти је записано неколико бројева. Сваке секунде робот бира неки пар бројева који стоје један до другог, у коме је леви број већи од десног, мења им места и при том оба броја множи са 2. Доказати да после неког времена неће бити могуће да се изврши следећа таква операција.

8 **7.** Познато је да број 2^{333} има 101 цифру и да почиње цифром 1. Колико бројева у низу 2, 4, 8, 16, ... , 2^{333} почиње цифром 4?

1. Да ли постоје природни бројеви $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{100}$, такви да је

$$NZD(a_1, a_2) > NZD(a_2, a_3) > \ldots > NZD(a_{99}, a_{100})?$$

Решење. Један низ који задовољава услове задатка је $a_n = 2^{100} - 2^{100-i}$. Очигледно је, наиме, да је он растући. Докажимо да је $NZD(a_n, a_{n+1}) = 2^{99-n}$. Јасно је да су и $a_n = 2^{100-n}(2^n - 1)$ и $a_{n+1} = 2^{99-n}(2^{n+1} - 1)$ дељиви са 2^{99-n}. Али бројеви $2^n - 1$ и $2^{n+1} - 1$ су узајамно прости, па је $2^{99} - 1$ и највећи заједнички делилац a_n и a_{n+1}.

2. На кружницу је постављено n црвених и n плавих тачака, строго наизменично, при чему они деле кружницу на $2n$ лукова, тако да су суседни лукови различитих дужина. Дужине лукова су једнаке једном од три броја: a, b и c. Доказати да n-угаоник са црвеним и n-угаоник са плавим теменима имају исте обиме и исте површине.

Решење. Нека међу луковима на које дате тачке деле кружницу њих k има дужину a, њих l дужину b, а њих m дужину c. Лукови на које кружницу деле црвене тачке имају дужине $a+b, a+c$ и $b+c$. Означимо бројеве лукова тих дужина редом са x, y, z. Очигледно важи $x+y = k, x+z = l$ и $y+z = m$. Дакле, бројеве x, y, z можемо изразити преко k, l, m. Потпуно аналогно, крећући од лукова на које кружницу деле плаве тачке добијамо да таквих дужине $a + b, a + c, b + c$ има редом x, y, z. Значи, n-углови са теменима у црвеним и плавим тачкама имају исте дужине страница, само у различитом редоследу. Одатле следи да су обими и површине тих многоуглова једнаки.

3. Дата је таблица $(n-2) \times n$, $n > 2$, при чему је у свако њено поље уписан цео број од 1 до n, тако да су у свакој врсти и свакој колони сви бројеви међусобно различити. Доказати да се дата таблица може допунити до квадрата $n \times n$ уписивањем неког целог броја од 1 до n у свако ново поље, тако да у

свакој врсти и свакој колони сви бројеви буду међусобно различити.

Решење. У свакој колони таблице појављује се $n-2$ елемента. Формирајмо скупове A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ тако да се у A_i налазе она два елемента која нису у i-тој колони. Приметимо да се сваки од бројева $1, 2, \ldots, n$ јавља тачно у два од тих скупова. Затим формирајмо низове $\{a_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ и $\{b_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ овако: нека је $b_1 = 1$ и a_1 индекс било којег од два скупа A_i у којем се јавља 1, b_2 други елемент из A_{a_1}, а a_2 индекс другог скупа у којем се јавља b_2 итд. Дакле, скуп A_{a_i} садржи елементе b_i и b_{i+1} (A_n садржи b_n и b_1). Сада $(n-1)$-ву врсту таблице попунимо тако што у a_i-то поље упишемо број b_i, а n-ту врсту тако што у a_i-то поље упишемо b_{i+1}.

Напомена. Ово је само специјалан случај теореме Хола. Наиме, системом различитих представника (с.р.п.) фамилије скупова $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ зовемо скуп $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ од n различитих елемената таквих да $e_i \in A_i$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Теорема Хола каже да фамилија $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ има с.р.п. акко унија било којих k скупова те фамилије има бар k елемената. Примењујући ту теорему најпре на скупове $A_1, A_2, \ldots, A_n$ из задатка, а потом и на скупове B_i које формирамо избацујући из A_i елемент уписан у i-то поље $(n-1)$-ве врсте директно добијамо доказ.

4. *Правилни $(2n+1)$-угао разбијен је дијагоналама на $2n-1$ троугао. Доказати да се међу њима налазе бар три једнакокрака троугла.*

Решење. Сваки од троуглова на које је разбијен $(2n+1)$-угао има за странице највише две странице $(2n+1)$-угла. Бар два од тих троуглова (нпр. $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A_{j-1}A_jA_{j+1}$) имају ту особину (јер имамо $2n-1$ троуглова а $2n+1$ страница) и они јесу једнакокраки. Претпоставимо да сви остали троуглови имају за странице једну страницу $(2n+1)$-угла и две његове дијагонале. Поређајмо све троуглове у низ: Нека T_1 буде $\Delta A_{i-1}A_iA_{i+1}$, T_2 троугао који с њим има једну заједничку страницу; уопште, T_{k+1} је троугао различит од T_{k-1} који са T_k има једну заједничку страницу, а T_{2n-1} је $\Delta A_{j-1}A_jA_{j+1}$. Обележимо са d_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n-2)$ заједничку страницу T_i и T_{i+1}. Очигледно је низ дужина $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ строго растући, па d_{n-1} мора бити најдужа дијагонала $(2n+1)$-угла. Како је низ $d_n, d_{n+1}, \ldots, d_{2n-2}$ строго опадајући, и d_n мора бити дијагонала највеће дужине. Дакле, $d_{n-1} = d_n$ па је и T_n једнакокраки троугао.

5. *Саша поставља топове на празну шаховску таблу на следећи начин: првог постави где хоће, а затим сваког следећег поставља тако да он туче непаран број претходно постављених топова. Одредити максималан број топова које он може да постави на таблу на описани начин.*

Решење. Свих 64 топа немогуће је поставити; заиста ако претпоставимо супротно то значи да ће у сваки од углова бити постављен топ. Међутим, последњи од та 4 топа при постављању ће тући два већ постављена топа. Контрадикција.

Докажимо да је могуће поставити 63 топа. Треба поставити топове најпре на поља $a1$, $a8$, $h8$, затим у првој хоризонтали од $b1$ до $g1$, па у последњој вертикали од $h2$ до $h7$. Затим попуњавамо вертикале од прве до седме, од доле нагоре: $a2$ до $a7$, $b2$ до $b8$, итд.

6. У врсту је записано неколико бројева. Сваке секунде робот бира пар суседних бројева у врсти, такав да је леви број већи од десног и замени им места, при чему оба броја још помножи са два. Доказати да после извесног времена робот више неће бити у стању да врши описану операцију.

Решење. Доказаћемо да два елемента врсте којима су једном замењена места, не могу опет бити замењена. Претпоставимо супротно, и нека се то први пут догодило са елементима А и Б, тј. А је био већи од Б и са његове леве стране, а затим је Б, пошто је неколико пута помножен са 2 постао већи од А. То значи да је Б био прескочен од стране неколико бројева већих од њега, који су се потом нашли између њега и А. Али, како Б треба сад да прескочи А, између њих нема више бројева. Пошто они нису могли поново да замене места са Б (јер би то значило да двострука замена А и Б није прва таква) они су морали да прескоче и А. Дакле, А је удвостручен бар онолико пута колико и Б, те Б није могао постати већи. Коначно, пошто свака два елемента могу бити замењена највише једном, број могућих замена је коначан, и робот ће морати да стане.

7. Познато је да број 2^{333} има 101 цифру и почиње са 1. Колико бројева у низу $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^{333}$ почиње са 4?

Решење. Очигледно је да за сваки природан број N постоји јединствен природан број k такав да $N \leq 2^k < 2N$. Примењујући то на бројеве $10^{n-1}, 2 \cdot 10^{n-1}, 5 \cdot 10^{n-1}$ закључујемо да за сваки природан број n:

- постоји тачно један степен двојке са n цифара који почиње цифром 1;
- постоји тачно један степен двојке са n цифара који почиње цифром 2 или 3;
- постоји тачно један степен двојке са n цифара који почиње цифром 5,6,7,8 или 9.

Следи да тачно 100 од датих бројева почињу цифром 1, 100 цифром 2 или 3, и 100 цифром 5,6,7,8 или 9. Преостају 33 броја која почињу четворком.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијанта, 28. октобар 2001.
10 - 11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

4 **1.** У равни су дате три црвене тачке, три плаве тачке и још тачка O. Познато је да тачка O лежи унутар троугла с црвеним теменима и унутар троугла с плавим теменима, при чему је растојање од O до произвољне црвене тачке мање од растојања од O до произвољне плаве тачке. Могу ли све црвене и све плаве тачке да леже на једној кружници?

5 **2.** Постоје ли такви природни бројеви $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{100}$, да је $[a_1,a_2]>[a_2,a_3]>\ldots>[a_{99},a_{100}]$?
($[a,b]$ је најмањи заједнички садржалац бројева a и b, тј. најмањи природан број који је делив и са a и са b.)

6 **3.** Поља шаховске табле су нумерисана бројевима од 1 до 64, тако да суседни бројеви леже на суседним пољима (са заједничком страницом). Која је најмања могућа сума бројева на дијагонали?

6 **4.** Нека је F_1, F_2, F_3, ... низ конвексних четвороуглова, где се F_{k+1} (за $k=1,2,3,\ldots$) добија овако: F_k се расече по дијагонали, један од делова се преврне и слепи по линији расецања с другим делом. Који највећи број различитих четвороуглова може да садржи тај низ? (Различити су они многоуглови, који се не могу пресликати кретањем један у другог.)

7 **5.** У бесконачној аритметичкој прогресији сви су бројеви природни. У сваком члану је могуће подвући једну или неколико узастопних цифара, тако да је у првом члану подвучена цифра 1, у другом - 2, и тако даље (за произволан природан број n у n-том члану су подвучене цифре које формирају број n). Доказати да је разлика прогресије степен броја 10.

7 **6.** У реду стоје 23 кутије са куглицама, при чему за произвољно n од 1 до 23 постоји кутија у којој се налази тачно n куглица. У једној операцији је могуће преместити у произвољну кутију још толико куглица колико се у њој већ налази, из било које друге кутије у којој је више куглица. Да ли је увек могуће таквим операцијама добити да се у првој кутији нађе 1 куглица, у другој - 2 куглице, и тако даље, у 23-ој - 23 куглице?

7. У координатној равни је постављен троугао, тако да се његове слике добијене транслацијама за векторе с целобројним координатама не прекривају.
3 а) Може ли површина таквог троугла бити већа од 1/2?
6 б) Наћи највећу могућу површину таквог троугла.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 24. фебруар 2002.
8 - 9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају.)

поени	задаци
4	**1.** Дато је пуно једнаких правоугаоних картона димензија $a \times b$ cm, где су a и b цели бројеви, при чему је a мање од b. Познато је да се од таквих картона могу саставити правоугаоник 49×51 cm, и правоугаоник 99×101 cm. Да ли се на основу тих података могу једнозначно одредити a и b?
5	**2.** Може ли се било који троугао разрезати на четири конвексне фигуре: троугао, четвороугао, петоугао и шестоугао?
5	**3.** За природне бројеве x и y број x^2+xy+y^2 се у декадном запису завршава нулом. Доказати да се он завршава са бар две нуле.
5	**4.** Странице AB, BC, CD и DA четвороугла ABCD додирују неку кружницу у тачкама K, L, M и N редом, S је тачка пресека дужи KM и LN. Познато је да се око четвороугла SKBL може описати кружница. Доказати да се око четвороугла SNDM такође може описати кружница.
3	**5.** а) Дато је 128 новчића двеју различитих тежина, новчића сваке од тежина подједнако много. Како да се помоћу теразија без тегова сигурно нађу два новчића различите тежине са не више од 7 мерења?
3	б) Дато је осам новчића двеју различитих тежина, новчића сваке од тежина подједнако много. Како да се помоћу теразија без тегова сигурно нађу два новчића различите тежине са два мерења?

1. [4] *Дато је много једнаких картонских правоугаоника величине $a \times b$, где су a и b природни бројеви и $a < b$. Познато је да се састављањем тих правоугаоника без преклапања може добити и правоугаоник 49×51 и правоугаоник 99×101. Да ли су на основу тога једнозначно одређени бројеви a и b?*

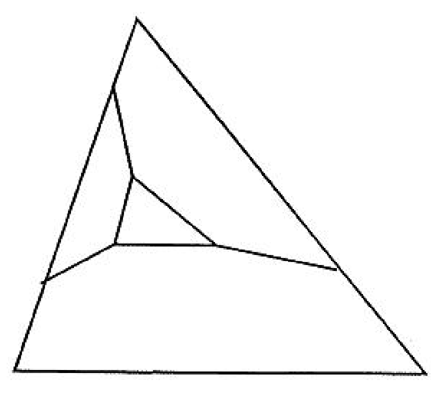
Решење. Површина картонског правоугаоника је ab, па су и површине правоугаоника 49×51 и 99×101, уколико је могуће извршити тражено поплочавање, дељиве са ab. Међутим, тада су са ab дељиви бројеви $99 \cdot 101$ и $4 \cdot 49 \cdot 51$, као и њихова разлика

$$99 \cdot 101 - 4 \cdot 49 \cdot 51 = 99 \cdot 101 - 98 \cdot 102 = 3,$$

одакле су, с обзиром да је $0 < a < b$, a и b једнозначно одређени са $a = 1$ и $b = 3$.

2. [5] *Да ли сваки троугао може да се исече на четири конвексна дела: троугао, четвороугао, петоугао и шестоугао?*

Решење. Може. Једно од решења је приказано на слици.



3. [5] *Декадни запис броја $x^2 + xy + y^2$, где су x и y природни бројеви, завршава се цифром 0. Доказати да се он онда завршава са бар две нуле.*

Решење. Из $x^2+xy+y^2=10k$ следи

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=10k(x-y)=2\cdot 5k(x-y), \qquad (*)$$

па закључујемо да су x^3 и y^3, а према томе и x и y, бројеви исте парности.

Уколико би оба била непарна, x^2+xy+y^2 би био збир три непарна броја, односно, непаран број, што је немогуће, због дељивости са 10. Следи да су x и y парни бројеви, односно $x=2m$ и $y=2n$, одакле је

$$x^2+xy+y^2=4m^2+4mn+4n^2=4(m^2+mn+n^2),$$

па је дати број дељив са 4.

Даље, из $(*)$ закључујемо и да x^3 и y^3, а самим тим и x и y дају исти остатак при дељењу са 5.

Ако су оба дељива са 5, следи $x=5p$ и $y=5q$, а

$$x^2+xy+y^2=25p^2+25pq+25q^2=25(p^2+pq+q^2),$$

па је дати број дељив са 25.

Ако оба дају остатак 1 (-1) при дељењу са 5, следи $x=5p\pm1$ и $y=5q\pm1$, а

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= 25p^2\pm10p+1+25pq\pm5p\pm5q+1+25q^2\pm10q+1= \\ &= 25(p^2+pq+q^2)\pm15(p+q)+3, \end{aligned}$$

па дати број није дељив са 5, што је у супротности са условима задатка.

Ако оба дају остатак 2 (-2) при дељењу са 5, следи $x=5p\pm2$ и $y=5q\pm2$, а

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= 25p^2\pm20p+4+25pq\pm10p\pm10q+4+25q^2\pm20q+4 \\ &= 25(p^2+pq+q^2)\pm30(p+q)+12, \end{aligned}$$

па дати број није дељив са 5, што је у супротности са условима задатка.

Из претходне анализе следи да су и x и y дељиви са 10, па је број x^2+xy+y^2 дељив са 100, односно, завршава се са бар две нуле.

4. [5] *Странице AB, BC, CD и DA четвороугла $ABCD$ додирују једну кружницу у тачкама K, L, M и N редом, тачка S је пресек дужи KM и LN. Познато је да је $SKBL$ тетивни четвороугао. Доказати да је и $SNDM$ тетивни четвороугао.*

Решење. Означимо $\angle KBL=2\alpha$ и $\angle NDM=2\beta$. Из тетивности четвороугла $SKBL$ следи да је $\angle KSL=180^\circ-2\alpha$, па је и њему унакрсан угао $\angle NSM=180^\circ-2\alpha$. Тада је $\angle KSN=2\alpha$.

Како је четвороугао $ABCD$ тангентан, следи да је $KB=BL$ (тангентне дужи), па је $\angle BKL=\angle BLK=90^\circ-\alpha$. Слично, из једнакости тангентних дужи DN и DM следи $\angle MND=\angle NMD=90^\circ-\beta$.

Применом теореме о углу између тангенте и тетиве добијамо $\angle KNS=\angle BKL=90^\circ-\alpha$ и $\angle SKN=\angle MND=90^\circ-\beta$. Посматрајмо троугао SNK. Збир његових углова је $180^\circ=90^\circ-\alpha+90^\circ-\beta+2\alpha$, одакле следи да је $\alpha=\beta$, па је $\angle NSM+\angle NDM=180^\circ$, тј. четвороугао $SNDM$ је тетиван.

5. (а) [3] *Имамо 128 новчића чије тежине имају две различите вредности, по 64 новчића сваке врсте. Како ћемо пронаћи два новчића различитих тежина са највише 7 мерења на теразијама са два таса без тегова?*

(б) [3] *Имамо 8 новчића чије тежине имају две различите вредности, по 4 новчића сваке врсте. Како ћемо пронаћи два новчића различитих тежина са највише два мерења на теразијама са два таса без тегова?*

Решење. (а) Решићемо проблем у општем случају. Нека је на почетку дато 2^{n+1} новчића, по 2^n од сваке врсте и нека нам је на располагању $n+1$ мерење на теразијама са два таса без тегова.

Мерења реализујемо тако што на сваки од тасова ставимо 2^k новчића, $k = 1, 2, \ldots, n$. У првом мерењу на сваки тас ставимо по 2^n новчића. Јасно је да при сваком мерењу може настати један од следећа два случаја:

Први случај. Тасови су у равнотежи.

- Уколико је ова ситуација настала у n–том (претпоследњем) мерењу, на сваком тасу се налазе по два различита новчића.
- Уколико је ова ситуација настала у k–том мерењу ($k \leq n-1$), узмемо са произвољног таса групу од 2^{n-k+1} новчића и поделимо на две од 2^{n-k} и ставимо на тасове.

Други случај. Тасови нису у равнотежи.

- Уколико је ова ситуација настала у $n+1$–том (последњем) мерењу, на тасовима се налази по један новчић од сваке врсте.
- Уколико је ова ситуација настала у k–том мерењу ($k \leq n$), поделимо сваку групу од 2^{n-k+1} новчића на две од 2^{n-k}. Нека је лакша група подељена на групе A и B , а тежа на групе C и D.

  Јасно, тада је $A + B < C + D$. Ставимо на тасове $A + D$ и $B + C$. Тада је могуће следеће:

  Ако је $A + D < B + C$, онда је $A < C$, па даље мерење настављамо по истом принципу са групама A и C.

  Ако је $A + D \geq B + C$, онда је $B < D$, па даље мерење настављамо по истом принципу са групама B и D.

(б) Нека су дати новчићи тежина a и b и нека је, без умањења општости, $a < b$.

Прво мерење: На сваки тас теразија ставимо по 4 новчића. Тада могу настати следећа два случаја:

Први случај: Теразије су у равнотежи.

Тада се на сваком тасу налазе по 2 новчића од сваке врсте. Одстранимо новчиће са једног таса.

Друго мерење: На сваки тас теразија ставимо по 2 новчића од преосталих 4.

- Уколико су тасови поново у равнотежи, на сваком од њих се налази по један новчић од сваке врсте, па смо пронашли два различита.

- Уколико тасови нису у равнотежи, на сваком се налазе по 2 новчића од исте врсте, па се пар различитих добија узимањем по једног новчића са сваког таса.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 24. фебруар 2002.
10 - 11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
4	**1.** За природне бројеве x и y број x^2+xy+y^2 се у декадном запису завршава нулом. Доказати да се он завршава са бар две нуле.
5	**2.** Од папира су изрезана два једнака троугла ABC и A'B'C' и положена на сто, при чему је један од њих преврнут. Доказати да средишта дужи AA', BB' и CC' леже на једној правој.
5	**3.** Дато је 6 комада сира различитих тежина. Познато је да се сир може поделити на две гомиле од по три комада, тако да обе гомиле имају једнаке тежине. Како је то могуће извести са два мерења на теразијема без тегова, ако се за свака два комада види одока који је тежи?
5	**4.** На колико је начина могуће распоредити бројеве од 1 до 100 у правоугаоник 2 × 50, тако да било која два броја који се разликују за 1 буду у пољима која имају заједничку страницу?
6	**5.** Да ли постоји правилна троугаона призма коју је могуће облепити (без преклапања) различитим једнакостраничним троугловима? (Дозвољено је превијати троуглове преко ивица призме.)

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта, 3. март 2002.
8 - 9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени задаци

4 **1.** Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати неједнакост $a^3+b^3+3abc>c^3$.

4 **2.** На шаховској табли димензија 23×23 поља стоје четири фигуре: у левом доњем и десном горњем углу табле по бела фигура, а у левом горњем и десном доњем углу табле по црна. Беле и црне фигуре се померају наизменично, почињу беле. Сваким потезом једна од фигура се помера на произвољно суседно (са заједничком страницом) слободно поље. Беле фигуре настоје да стигну на два суседна поља. Могу ли црне фигуре да их спрече у томе?

6 **3.** У конвексном четвороуглу ABCD тачке E и F су средишта страница BC и CD редом. Дужи AE, AF и EF разлажу четвороугао на четири троугла чије су површине једнаке узастопним природним бројевима. Која је највећа могућа површина троугла ABD?

7 **4.** У низ је поређано n сијалица и неке од њих су упаљене. Сваког минута после тога све сијалице које су биле упаљене протеклог минута се гасе, а угашене сијалице које су протеклог минута биле суседне са тачно једном упаљеном сијалицом се пале. За које n је могуће тако упалити неке сијалице на почетку, да после тога у сваком моменту бар једна сијалица буде упаљена?

7 **5.** Оштроугли троугао се разрезује праволинијским резом на два (не обавезно троугаона) дела, затим се један од тих делова опет разрезује на два дела, и тако даље: у сваком кораку се бира један од већ постојећих делова и разрезује се (по правој) на два дела. После неколико корака се испоставило да је полазни троугао разложен на неколико троуглова. Могу ли сви они бити тупоугли?

7 **6.** У растућем бесконачном низу природних бројева сваки број, почев од 2002-ог, је делилац збира претходних бројева. Доказати да је у том низу сваки број, почев од неког места, једнак збиру претходних бројева.

8 **7.** С низом домина, поређаним по уобичајеним правилима, дозвољено је обављати следећу операцију: бира се одсечак од неколико узастопних домина са једнаким ознакама на крајевима одсечка, обрће се и поставља на исто место. Доказати да ако два низа састављена од два једнака комплета домина имају једнаке ознаке на крајевима, онда се дозволеним операцијама може добити да поредак домина у другом низу буде једнак поретку домина у првом низу.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло. Основна варијанта, 3. март 2002.

10 – 11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
4	**1.** Тангенси углова неког троугла су цели бројеви. Наћи те тангенсе.
4	**2.** Да ли је тачно да на графику функције $y=x^3$ постоји тачка A, а на графику функције $y=x^3+\|x\|+1$ постоји тачка B, тако да растојање AB није веће од 1/100?
5	**3.** У растућем бесконачном низу природних бројева сваки број, почев од 2002-ог, је делилац збира претходних бројева. Доказати да је у том низу сваки број, почев од неког места, једнак збиру претходних бројева.
5	**4.** Група гледалаца је купила све карте у једном реду, али су тамо поседали на произвољан начин, при чему нико није сео на своје место. Разводник може да промени места произвољним суседима који не седе на својим местима, и тако више пута. Да ли је тачно да при произвољном почетном распореду разводник може, радећи тако, сваког гледаоца да смести на своје место?
6	**5.** Нека су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC; O_A, O_B и O_C – центри кругова уписаних у троуглове AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 редом; T_A, T_B и T_C – тачке додира круга уписаног у троугао ABC са страницама BC, CA и AB редом. Доказати да су све странице шестоугла $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ једнаке.
7	**6.** Шпил од 52 карте је распоређен у облику правоугаоника 4×13. Познато је да ако две карте леже једна до друге по вертикали или по хоризонтали, онда су оне исте боје или исте вредности. Доказати да су у сваком хоризонталном реду (од 13 карата) све карте исте боје.
8	**7.** Да ли постоје такви ирационални бројеви a и b, да је $a>1$, $b>1$, и да је $[a^m]$ различито од $[b^n]$ за произвољне природне бројеве m и n? ($[x]$ означава цео део броја x, то јест највећи цео број који није већи од x.)

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2001.**

1. In the quadrilateral $ABCD$, AD is parallel to BC. K is a point on AB. Draw the line through A parallel to KC and the line through B parallel to KD. Prove that these two lines intersect at some point on CD.

2. Clara computed the product of the first n positive integers and Valerie computed the product of the first m even positive integers, where $m \geq 2$. They got the same answer. Prove that one of them had made a mistake.

3. Kolya is told that two of his four coins are fake. He knows that all real coins have the same weight, all fake coins have the same weight, and the weight of a real coin is greater than that of a fake coin. Can Kolya decide whether he indeed has exactly two fake coins by using a balance twice?

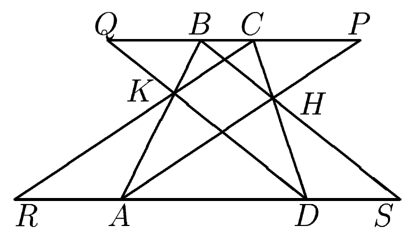
4. On an east-west shipping lane are ten ships sailing individually. The first five from the west are sailing eastwards while the other five ships are sailing westwards. They sail at the same constant speed at all times. Whenever two ships meets, each turns around and sails in the opposite direction. When all ships have returned to port, how many meetings of two ships have taken place?

5. On the plane is a set of at least four points. If any one point from this set is removed, the resulting set has an axis of symmetry. Is it necessarily true that the whole set also has an axis of symmetry?

Note: Each problem is worth 4 points.

Solutions to Junior O-Level Fall 2001

1. Let CK cut the extension of DA at R and DK cut the extension of CB at Q. Let the line through A parallel to KC cut CD at H and the extension of BC at P. Then $APCR$ is a parallelogram, so that $AR = CP$. We have to prove that BH is parallel to KC. Let the extension of BH cut the extension of AD at S. Now triangles BKQ and AKD are similar, as are triangles BKC and AKR. Hence $\frac{BQ}{AD} = \frac{BK}{AK} = \frac{BC}{AR}$. Similarly, $\frac{DS}{BC} = \frac{AD}{CP}$. Hence $BQ = \frac{BC \cdot AD}{AR} = \frac{BC \cdot AD}{CP} = DS$. It follows that $BQDS$ is also a parallelogram, so that BH is indeed parallel to KD.



2. Suppose $n! = 2^m m!$ for some $m \geq 2$). We must have $n > 3$ so that both $n!$ and $m!$ are divisible by 3. In each product, every third factor is a multiple of 3. In order for both products to be divisible by the same power of 3, $n!$ can have at most two more terms than $m!$. If $n = m + 1 = 2^m$, we have $m = 1$. If $n = m + 2$, $(m + 1)(m + 2) = 2^m$ leads to $m = 0$. Both contradicts $m \geq 2$. Hence either Clara or Valerie had made a mistake.

3. Kolya can decide as follows. Label the coins A, B, C and D. In the first weighing, put A and B on one side and C and D on the other. Suppose $A + B = C + D$. In the second weighing, put A on one side and B on the other. If $A = B$, then we have $A = B = C = D$. If $A \neq B$, exactly one of A and B is fake, and exactly one of C and D is fake.

   Suppose $A + B \neq C + D$. In the second weighing, put A and C on one side and B and D on the other. If $A + C = B + D$, then the number of fake coins is even but not 0 or 4. If $A + C \neq B + D$, the number of fake coins is odd.

4. Let us consider what happens when two ships meet. Each continues where the other would have gone. Since we are interested in the total number of meetings rather than the numbers of meetings for individual ships, we may pretend that the ships just sail on. Since there are 5 ships from each side, the total number of meetings is $5 \times 5 = 25$.

5. Let ABC be a triangle with $AB = AC$ and $\angle CAB = 36°$. Let D be a point on AC such that $BC = BD$. Then $\angle BDC = \angle BCD = \angle ABC = 72°$ so that $\angle ABD = \angle DBC = 36°$. Hence $BD = AD$. Consider the set $\{A, B, C, D\}$. It does not have an axis of symmetry. If A is removed, we have $BC = BD$. If B is removed, A, C and D are collinear. If C is removed, we have $AD = BD$. If D is removed, we have $AB = AC$. Each subset of three points has an axis of symmetry.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall, 2001.**

1. An altitude of a pentagon is the perpendicular drop from a vertex to the opposite side. A median of a pentagon is the line joining a vertex to the midpoint of the opposite side. If the five altitudes and the five medians all have the same length, prove that the pentagon is regular.

2. There exists a block of 1000 consecutive positive integers containing no prime numbers, namely, $1001! + 2$, $1001! + 3$, $\ldots$, $1001! + 1001$. Does there exist a block of 1000 consecutive positive integers containing exactly five prime numbers?

3. On an east-west shipping lane are ten ships sailing individually. The first five from the west are sailing eastwards while the other five ships are sailing westwards. They sail at the same constant speed at all times. Whenever two ships meets, each turns around and sails in the opposite direction. When all ships have returned to port, how many meetings of two ships have taken place?

4. On top of a thin square cake are triangular chocolate chips which are mutually disjoint. Is it possible to cut the cake into convex polygonal pieces each containing exactly one chip?

5. The only pieces on an 8×8 chessboard are three rooks. Each moves along a row or a column without running to or jumping over another rook. The white rook starts at the bottom left corner, the black rook starts in the square directly above the white rook and the red rook start in the square directly to the right of the white rook. The white rook is to finish at the top right corner, the black rook in the square directly to the left of the white rook and the red rook in the square directly below the white rook. At all times, each rook must be either in the same row or the same column as another rook. Is it possible to get the rooks to their destinations?

Note: Each problem is worth 4 points.

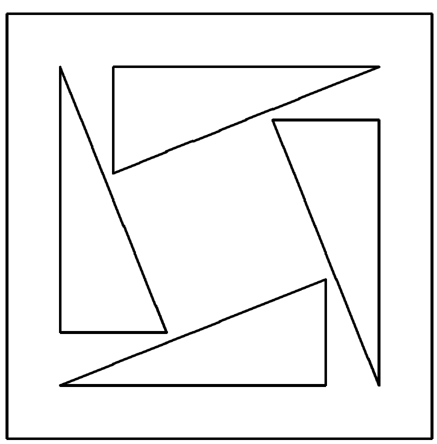
Solutions to Senior O-Level Fall 2001

1. Let the pentagon be $ABCDE$. Let A', B', C', D' and E' be the respective midpoints of CD, DE, EA, AB and BC. The median AA' is at least the length of the altitude from A, and since they have the same length, AA' is also an altitude. Similarly, every median is an altitude. Now $AA' = CC'$ and $\angle ACA' = 90° = \angle CAC'$. Hence triangles ACA' and CAC' are congruent, so that $CD = 2CA' = 2AC' = EA$. Similarly, $EA = BC = DE = AB$. Hence $ABCDE$ is equilateral. The congruency of ACA' and CAC' also yields $\angle ACD = \angle EAC$, and $\angle BCA = \angle CAB$ folllows from $AB = BC$. Hence $\angle BCD = \angle EAB$, and it follows that $ABCDE$ is equiangular also. Hence it is regular.

2. Starting with the given block, we shift it back by replacing the largest number in the block with the number 1 less than the smallest number in the block. Then the number of primes in the block changes by at most 1 in each shift. By the time we shift the block to the first 1000 positive integers, the number of primes in the block is greater than 5. Thus somewhere in between, we must have hit a block of 1000 consecutive positive integers containing exactly 5 primes.

3. Let us consider what happens when two ships meet. Each continues where the other would have gone. Since we are interested in the total number of meetings rather than the numbers of meetings for individual ships, we may pretend that the ships just sail on. Since there are 5 ships from each side, the total number of meetings is $5 \times 5 = 25$.

4. This is not always possible. The diagram below shows four congruent triangles inside a square, each with a right angle, a *blunt* angle and a *sharp* angle. The line joining the centre of the square to the vertex of any sharp angle is blocked by the blunt angle of another triangle. Thus the centre cannot belong to any convex polygon containing exactly one of the triangles.



5. The following moves will accomplish the task: b1 to h1, a1 to b1, b1 to b2, b2 to h2, a2 to g2, h2 to h8, g2 to g8 and h1 to h7.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Fall 2001.**

1. Do there exist positive integers $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$ such that for $2 \le k \le 100$, the greatest common divisor of a_{k-1} and a_k is greater than the greatest common divisor of a_k and a_{k+1}?

2. Let $n \ge 3$ be an integer. A circle is divided into $2n$ arcs by $2n$ points. Each arc has one of three possible lengths, and no two adjacent arcs have the same length. The $2n$ points are coloured alternately red and blue. Prove that the n-gon with red vertices and the n-gon with blue vertices have the same perimeter and the same area.

3. Let $n \ge 3$ be an integer. Each row in an $(n-2) \times n$ array consists of the numbers 1, 2, ..., n in some order, and the numbers in each column are all different. Prove that this array can be expanded into an $n \times n$ array such that each row and each column consists of the numbers 1, 2, ..., n.

4. Let $n \ge 2$ be an integer. A regular $(2n+1)$-gon is divided into $2n-1$ triangles by diagonals which do not meet except at the vertices. Prove that at least three of these triangles are isosceles.

5. Alex places a rook on any square of an empty 8×8 chessboard. Then he places additional rooks one rook at a time, each attacking an odd number of rooks which are already on the board. A rook attacks to the left, to the right, above and below, and only the first rook in each direction. What is the maximum number of rooks Alex can place on the chessboard?

6. Several numbers are written in a row. In each move, Robert chooses any two adjacent numbers in which the one on the left is greater than the one on the right, doubles each of them and then switches them around. Prove that Robert can make only a finite number of such moves.

7. It is given that 2^{333} is a 101-digit number whose first digit is 1. How many of the numbers 2^k, $1 \le k \le 332$, have first digit 4?

Note: The problems are worth 4, 5, 5, 5, 6, 8 and 8 points respectively.

Solutions to Junior A-Level Fall 2001

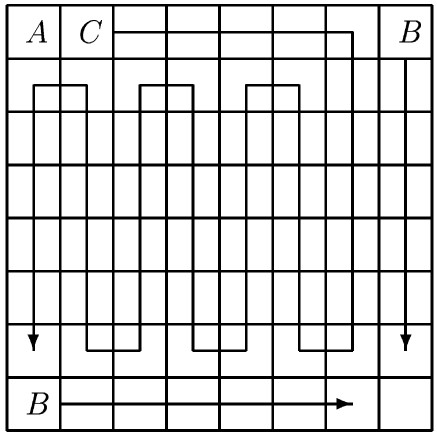
1. For $1 \le k \le 100$, let $a_k = 2^{99} + 2^{98} + \cdots + 2^{100-k}$. Then $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$. For $2 \le k \le 100$, the difference between a_{k-1} and a_k is 2^{100-k}. Since it divides both a_{k-1} and a_k, 2^{100-k} is in fact their greatest common divisor. Similarly, the greatest common divisor of a_k and a_{k+1} is $2^{100-(k+1)}$, which is less than 2^{100-k}. Thus there exist 100 positive integers with the desired properties.

2. Let a, b and c be the three arc lengths. Let there be x arcs of length a, y arcs of length b and z arcs of length c. Then $x + y + z = 2n$. Each side of the n-gon with red vertices is subtended by an arc of length $b + c$, $c + a$ or $a + b$. Of these n arcs, x of them contains an arc of length a, so that the number of arcs of length $b + c$ is $n - x$. Similarly, the number of arcs of length $c + a$ is $n - y$, and the number of arcs of length $a + b$ is $n - z$. Exactly the same thing can be said about the n-gon with blue vertices. Hence the two polygons have the same perimeter. By the same reason, the area of the part of the circle outside the n-gon with red vertices is the same as that of the n-gon with blue vertices. It follows that the two polygons also have the same area.

3. Each column is missing two of the numbers, and each number is missed by exactly two columns. Construct a graph with n vertices representing the numbers. Two vertices are joined by an edge if the numbers they represent are both missed by the same column, so that there are exactly n edges. Moreover, each vertex has degree 2. This means that the graph is a union of cycles, including degenerate cycles of length 2. In each cycle, we orient the edges so that they are all directed clockwise. Then each vertex has in-degree 1 and out-degree 1. For each column in the expanded square, locate the directed edge joining vertices representing the numbers missing from this column. Putting the number represented by the initial vertex in the $(n-1)$-st row and the number represented by the terminal vertexin the n-th row. Clearly, all the numbers in each column are distinct. Since each vertex has in-degree 1 and out-degree 1, each number appears exactly once in the $(n-1)$-st row and exactly once in the n-th row.

4. For $2 \le k \le n$, consider a path consisting of k consecutive edges of the regular $(2n+1)$-gon. The diagonal joining the endpoints of this path is said to have *span* k. Note that a diagonal of span 2 cuts off an isosceles triangle whose equal sides are sides of the original polygon. If in our triangulation, there is a triangle formed by three diagonals. This divides the remaining parts of the original polygon into three pieces, each of which must contain a diagonal of span 2. It follows that we will have at least three isosceles triangles. The only other case is that each triangle in the triangulation shares a side with the original polygon. Thus the triangles form a sequence such that each shares a diagonal with its neighbours. The first and the last triangles in this sequence are cut of by diagonals of span 2, and are isosceles. The diagonals shared by neighbouring triangles increase in span to n from both directions. Since there are $2n - 2$ diagonals, there are two diagonals of span n, which forms the third isosceles triangle with a side of the original polygon.

5. After three corner squares have been occupied, a rook at the fourth corner square will always be attacking two existing rooks. Hence at least one corner square must be empty, so that the maximum number of rooks that can be placed is sixty-three. The diagram below shows how Alex can place as many as sixty-three rooks in three stages labelled A, B and C.



6. Let the numbers be $a_1, a_2, \ldots, a_n$, and we maintain these labels even though the values of the numbers change with the doubling. We claim that two numbers can exchange places at most once. It will then follow that Robert must stop after at most $\binom{n}{2}$ moves. Assuming to the contrary that there are two numbers which exchange places at least twice. Consider such a pair of exchanges that occur the closest together. Let the numbers be a_i and a_j such that $a_i > a_j$ during the first exchange. Then $a_i < a_j$ during the second exchange. In between, a_j must have grown more than a_i. In any exchange involving a_i or a_j with a third number a_k, it must come between them after their first exchange and get out before their second exchange. If a_k gets in through one and goes out through the other, it has no effect on the relative size of a_i and a_j. The only way a_j can outgrow a_i is for it to exchange twice with some a_k in between its two exchanges with a_i. However, this contradicts the assumption that the two exchanges between a_i and a_j are the closest together. This justifies the claim.

7. The number of digits is non-decreasing along the sequence $\{2^k : 1 \le k \le 332\}$. Clearly, this number cannot increase by more than 1 at a time. Every time an increase occurs, the new power of 2 must have 1 as its first digit. Since 2^{333} is an 101-digit number, there are exactly 99 numbers in our sequence whose first digit is 1. When the number of digits does not change, the first digit changes in one of the following sequences: 1-2-4-8, 1-2-4-9, 1-2-5, 1-3-6 or 1-3-7. Now the 99 numbers above divide our sequence into 100 blocks, each of length 2 or 3. Let there be x blocks of length 2 and y blocks of length 3. Then $x + y = 100$ while $2x + 3y = 232$, which yield $x = 67$ and $y = 33$. Now each block of length 2 does not contain any number whose first digit is 4, while each block of length 3 contains exactly one number whose first digit is 4. It follows the exactly 33 numbers in our sequence whose first digit is 4.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Fall 2001.**

1. On the plane is a triangle with red vertices and a triangle with blue vertices. O is a point inside both triangles such that the distance from O to any red vertex is less than the distance from O to any blue vertex. Can the three red vertices and the three blue vertices all lie on the same circle?

2. Do there exist positive integers $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$ such that for $2 \leq k \leq 100$, the least common multiple of a_{k-1} and a_k is greater than the least common multiple of a_k and a_{k+1}?

3. An 8×8 array consists of the numbers 1, 2, ..., 64. Consecutive numbers are adjacent along a row or a column. What is the minimum value of the sum of the numbers along a diagonal?

4. Let F_1 be an arbitrary convex quadrilateral. For $k \geq 2$, F_k is obtained by cutting F_{k-1} into two pieces along one of its diagonals, flipping one piece over and then glueing them back together along the same diagonal. What is the maximum number of non-congruent quadrilaterals in the sequence $\{F_k\}$?

5. Let a and d be positive integers. For any positive integer n, the number $a + nd$ contains a block of consecutive digits which constitute the number n. Prove that d is a power of 10.

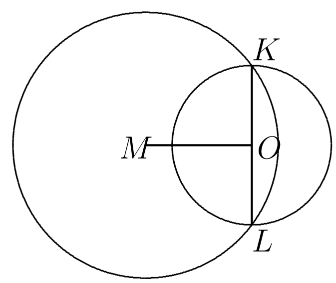
6. In a row are 23 boxes such that for $1 \leq k \leq 23$, there is a box containing exactly k balls. In one move, we can double the number of balls in any box by taking balls from another box which has more. Is it always possible to end up with exactly k balls in the k-th box for $1 \leq k \leq 23$?

7. The vertices of a triangle have coordinates (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3). For any integers h and k, not both 0, the triangle whose vertices have coordinates (x_1+h, y_1+k), (x_2+h, y_1+k) and (x_3+h, y_3+k) has no common interior points with the original triangle.
   (a) Is it possible for the area of this triangle to be greater than $\frac{1}{2}$?
   (b) What is the maximum area of this triangle?

Note: The problems are worth 4, 5, 6, 6, 7, 7 and 3+6 points respectively.

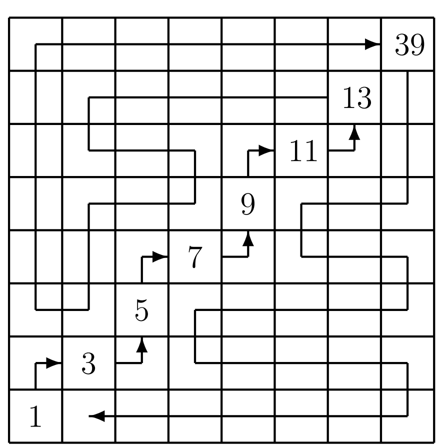
Solutions to Senior A-Level Fall 2001

1. Suppose all six vertices lie on a circle with centre M. Let the line through O perpendicular to OM cut the circle at K and L. Since M is inside the triangle with red vertices, at least one red vertex lies on the minor arc KL and at least one red vertex lies on the major arc KL. The same is true of the blue vertices. However, every point on the minor arc KL is inside the circle with diameter KL, so that its distance from O is at most OK. On the other hand, every point on the major arc KL is outside the circle with diameter KL, so that its distance from O is at least OK. This is a contradiction.



2. We use a_n to denote the n-th term, even though its value may be modified along the way. In step 1, we set $a_{99} = 9$ and $a_{100} = 10$, with $\text{lcm}(a_{99}, a_{100}) = 90$. In step $k > 1$, define $a_{100-k} = 10a_{101-k} - 1$ and then redefine a_n for each $n > 100 - k$ to be 10 times its former value. Hence in step 2, we define $a_{98} = 10a_{99} - 1 = 89$. We also redefine $a_{99} = 90$ and $a_{100} = 100$. We have $\text{lcm}(a_{98}, a_{99}) = 8010 > 900 = \text{lcm}(a_{99}, a_{100})$. We continue until step 99 has been completed. Note that once we have $\text{lcm}(a_{n-1}, a_n) > \text{lcm}(a_n, a_{n+1})$, this remains true thereafter since in all subsequent modifications, each of a_{n-1}, a_n and a_{n+1} is multiplied by the same number. We only have to check this inequality when a_{n-1} is first introduced. At this point, $a_{n-1} = a_n - 1 = a_{n+1} - 11$. Now $10a_{n-1} > a_{n-1} + 11 = a_{n+1}$ since $a_{n-1} > 1$. Hence $\text{lcm}(a_{n-1}, a_n) = a_{n-1}a_n > \frac{1}{10}a_n a_{n+1} = \text{lcm}(a_n, a_{n+1})$.

3. Since consecutive numbers occupy sqaures of opposite colours, we may assume that all numbers on black squares are odd and all numbers on white squares are even. The diagram below shows that the sum may be as small as 1+3+5+7+9+11+13+39=88.



Suppose it is possible to improve on this. Clearly, the diagonal in question should contain odd numbers, and the largest would have to be at most 37. Once this number is put down, we must remain on the same side of this diagonal. There are exactly 16 black squares and 12 white squares on each side. Hence that largest number is 37 and only one square on the largely empty side of the diagonal has been filled. However, there are 13 odd numbers from 38 to 64 but we have at most 12 white squares to accommodate them. Hence improvement over 88 is impossible.

4. Let $F_1 = ABC_1D_1$ and let $F_2 = ABC_1D_2$ be obtained from F_1 by reflecting D_1 to D_2 across the perpendicular bisector of AC_1. Reflecting alternately across the two diagonals, we obtain $F_3 = ABC_2D_2$, $F_4 = ABC_2D_3$, $F_5 = ABC_3D_3$, $F_6 = ABC_3D_4$ and $F_7 = ABC_4D_4$. This sequence of transformations permutes the sides while preserving the sum of the opposite angles. We have $\angle ABC_1 + \angle C_1D_1A = \angle ABC_4 + \angle C_4D_4A$, $BC_1 = BC_4$, $C_1D_1 = C_4D_4$ and $D_1A = D_4A$. If $AC_1 > AC_4$, then $\angle ABC_1 > \angle ABC_4$ and $\angle C_1D_1A > \angle C_4D_4A$. We also have a contradiction if $AC_1 < AC_4$. Hence $AC_1 = AC_4$ and it follows that F_1 and F_7 are congruent. Thus the sequence $\{F_k\}$ consists of at most six non-congruent quadrilaterals. If F_1 has sides of distinct lengths and the sum of neither pair of opposite angles is $180°$, we indeed have six non-congruent quadrilaterals.

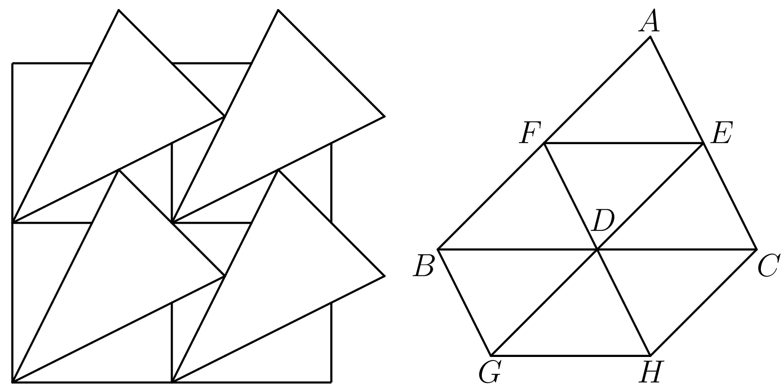
5. Let the number of digits of d be k, and that of a be m. Consider the term $a + 10^t d$ where t is an integer such that $t > \max\{k, m\}$. It must contain a 1 followed by at least m zeros, so that $k > m$. The next term $a + (10^t + 1)d$ must contain two 1's separated by exactly $t - 1$ zeros. Since $t > k$, this can only happen if the first digit of d is 1 and the remaining digits are 0's, which means that d is a power of 10.

6. We shall prove by induction on the number n of boxes that the task is always possible. This is clearly true for $n = 1$. Suppose it is true for some $n \geq 1$. Consider the next case where we have $n + 1$ boxes. Line up the boxes from left to right in increasing order of the number of balls in them, without regard to the box numbers. Transfer balls from each box to the next one to its left, starting with the rightmost one which contains $n + 1$ balls.

1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$
					$2n$	1
				$2n-2$	$n+1$	
			$\cdots$	n		
		6	$\cdots$			
	4	4				
2	3					
2	3	4	$\cdots$	n	$n+1$	1

This sequence of moves results in a cyclic permutation of the numbers of the balls. We perform this a number of times until the $(n+1)$-st box contains $n+1$ balls. The rest of the boxes can be sorted out by the induction hypothesis.

7. (a) The tiling on the left of the figure below shows that the area of the triangle may be $\frac{2}{3}$. The coordinates of the vertices of a copy of the triangle are (0,0), $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ and $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.



(b) Let ABC be any triangle with the desired properties. Let D, E and F be the midpoints of BC, CA and AB respectively. Extend ED to G and FD to H so that $ED = DG$ and $FD = DH$, as shown on the right of the figure above. We claim that integral translates of the hexagon $BGHCEF$ do not have common interior points. It will then follow that its area is at most 1, and that the area of ABC is at most $\frac{2}{3}$. This maximum is attained by the example in (a). Suppose to the contrary that $BGHCEF$ has a common point with an integral translate $B'G'H'C'E'F'$. We may assume that either E' or F' is inside the quadrilateral $BGHC$. There are three cases. If E' is inside triangle DBG, then B will be inside the integral translate $A'B'C'$ of ABC. Similarly, if F' is inside triangle DCH, then C will be inside $A'B'C'$. Finally, if either E' or F' is inside triangle DGH, then A' will be inside ABC. Since we have a contradiction in each of the three cases, the claim is justified.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper (Grades up to 10) **Spring 2002.**

1 [**4**] There are many $a \times b$-rectangular cardboard pieces (a and b are positive integers, and $a < b$). It is given that by putting such rectangles together (without overlapping) one can make 49×51-rectangle, and 99×101-rectangle. Can one uniquely determine values of a and b from these conditions?

2 [**5**] Can any triangle be cut into four convex figures: a triangle, a quadrilateral, a pentagon, and a hexagon?

3 [**5**] The last digit of the number $x^2 + xy + y^2$ is zero (where x and y are positive integers). Prove that two last digits of this number are zeroes.

4 [**5**] Quadrilateral $ABCD$ is circumscribed about some circle and K, L, M, N are points of tangency of sides AB, BC, CD and DA respectively, S is an intersection point of the segments KM and LN. It is known that the quadrilateral $SKBL$ is cyclic. Prove that the quadrilateral $SNDM$ is also cyclic.

5

a) [**3**] There are 128 coins of two different weights, 64 of each. How can one always find two different coins by performing no more than 7 weightings on a regular balance?

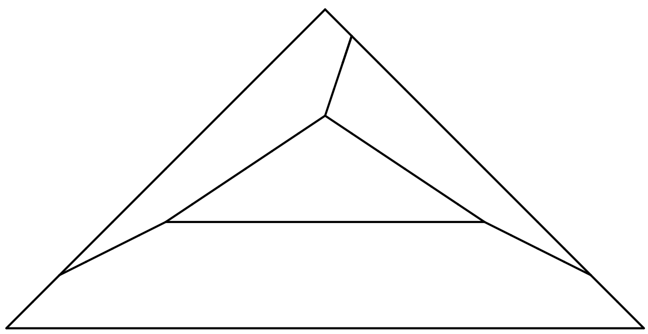
b) [**3**] There are eight coins of two different weights, four of each. How can one always find two different coins by performing two weightings on a regular balance?

Solution to Junior O-Level Spring 2002

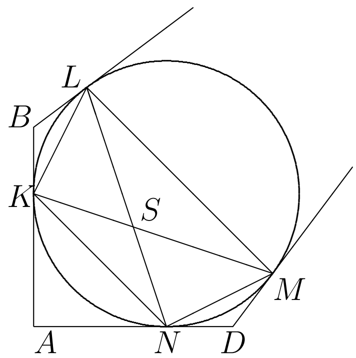
1. The only common divisors of $49 \times 51 = 3 \times 7^2 \times 17$ and $99 \times 101 = 3^2 \times 11 \times 101$ are 1 and 3. Since $a < b$, $ab > 1$. So $ab = 3$ and we must have $a = 1$ and $b = 3$.

2. If either x or y is odd, $x^2 + xy + y^2$ is also odd. Hence they are both even. If one is a multiple of 10 and the other is not, $x^2 + xy + y^2$ is not a multiple of 10. Suppose both x and y are not multiples of 10. Then x^2 and y^2 end in 4 or 6, while xy cannot end in 0. So we cannot have one ending in 4 and the other in 6. If x^2 and y^2 both end in 4 or both end in 6, then xy must also end in 4 or 6. It follows that the only possibility is for both x and y to be multiples of 10, so that $x^2 + xy + y^2$ will indeed be a multiple of 100.

3. One such dissection is shown in the diagram below.



4. Since BK and BL are tangents, $\angle BKL = \angle KML = \angle BLK$. Denote their common value by θ. Then $\angle BKL = 180^\circ - 2\theta$. Similarly, $\angle DMN = \angle MLN = \angle DNM$. Denote their common value by ϕ. Then $\angle MDN = 180^\circ - 2\phi$. Now $\angle KSL = \angle SLM + \angle SML = \theta + \phi$. Similarly, $\angle MSN = \theta + \phi$. Since $SKBL$ is cyclic, $\angle KBL + \angle KSL = 180^\circ$, which implies that $\theta = \phi$. Then $\angle MDN + \angle MSN = 180^\circ$, which implies that $SMDN$ is cyclic.



5. (a) Weigh 64 of the coins against the other 64. If they balance, discard one set. Weigh 32 of the remaining ones against the other 32, and continue. If they always balance, then after 6 weighings, we are down to 2 coins which must consist of a heavy one and a light one. Suppose balance is not achieved somewhere along the way. We may as well assume that it occurs at the first weighing. In the second weighing, weigh 32 coins from the heavier side against 32 coins from the lighter side. If they balance, discard this 64 coins. If not, discard the 64 coins not involved in the second weighing. Continuing this way, we will be down to 2 coins after 7 weighings. They must consist of a heavy one and a light one.

   (b) Weigh 4 of the coins against the other 4. If they balance, discard one set. Weigh 2 of the remaining 4 coins against the other 2. If they balance, take both coins from one side. If not, take 1 coin from each side. Suppose one side is heavier in the first weighing. Weigh 2 of these coins against the other 2. If they balance, all 4 are heavy. Take 1 of them and 1 from the lighter side in the first weighing. If they do not balance, then the heavier side consists of 2 heavy coins while the lighter side consists of 1 heavy and 1 light coin. We can accomplish the task by taking the 2 coins on the lighter side.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper (Grades 11-OAC) **Spring 2001.**

1 [4] The last digit of the number $x^2 + xy + y^2$ is zero (where x and y are positive integers). Prove that two last digits of this number are zeroes.

2 [5] Triangle ABC and its mirror reflection $A'B'C'$ are arbitrarily placed on the plane. Prove that the midpoints of the segments AA', BB' and CC' lie on the same straight line.

3 [5] There are 6 pieces of cheese all of different weight. For any two of them one can determine, just by looking at them, which of them is the heaviest.

Given that it is possible to divide them into two groups of equal weights (three pieces in each group) demonstrate how to find these groups by performing two weightings on the regular balance.

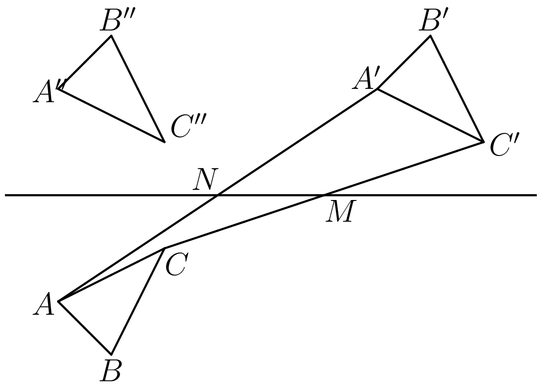
4 [5] In how many ways can one place the numbers from 1 to 100 in a 2×50-rectangle (divided into 100 little squares) so that any two consecutive numbers are always placed in squares with a common side?

5 [6] Does there exist a regular triangular prism that can be covered (without overlapping) by different equilateral triangles? (One is allowed to bend the triangles around the edges of the prism.)

Solution to Senior O-Level Spring 2002

1. If either x or y is odd, x^2+xy+y^2 is also odd. Hence they are both even. If one is a multiple of 10 and the other is not, x^2+xy+y^2 is not a multiple of 10. Suppose both x and y are not multiples of 10. Then x^2 and y^2 end in 4 or 6, while xy cannot end in 0. So we cannot have one ending in 4 and the other in 6. If x^2 and y^2 both end in 4 or both end in 6, then xy must also end in 4 or 6. It follows that the only possibility is for both x and y to be multiples of 10, so that x^2+xy+y^2 will indeed be a multiple of 100.

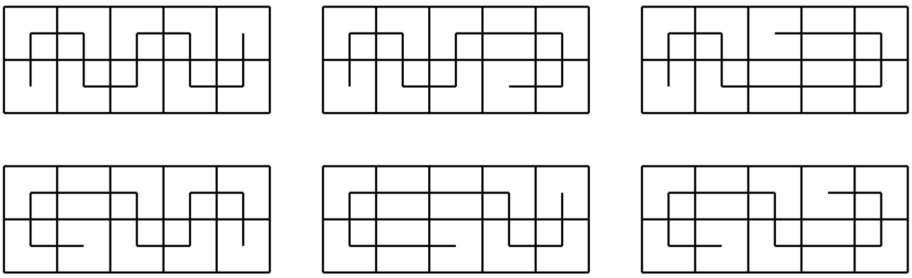
2. Let M be the midpoint of AA' and N be the midpoint of CC'. Then A and A' are equidistant from MN, as are C and C'. Let $A''B''C''$ be the reflection of ABC across MN. Then A and A'' are equidistant from MN, as are C and C''. Hence $A'A''$ and $C'C''$ are both parallel to MN. Now $A''B''C''$ is congruent to ABC and opposite in orientation. Hence it is congruent to $A'B'C'$ and in the same orientation. It follows that $A'B'C'$ and $A''B''C''$ may be obtained from each other by a translation in the direction parallel to MN. Hence B' and B'' are equidistant from MN. It follows that so are B and B', so that the midpoint of BB' indeed lies on MN.



3. The only possible groupings are (126,345), (136,245), (146,235), (156,234) and (236,145). First weigh 146 against 235. If they balance, the task is accomplished. If 146 is heavier, then 156 will be heavier than 234. Then we weigh 136 against 245. If they balance, the task is accomplished. If 136 is heavier, then 236 will be heavier than 145. Hence 126 must balance 345. If in the first weighing 146 is lighter, then 136 will be lighter than 245, 126 will be lighter than 345 and 145 will be lighter than 236. Hence 156 must balance 234.

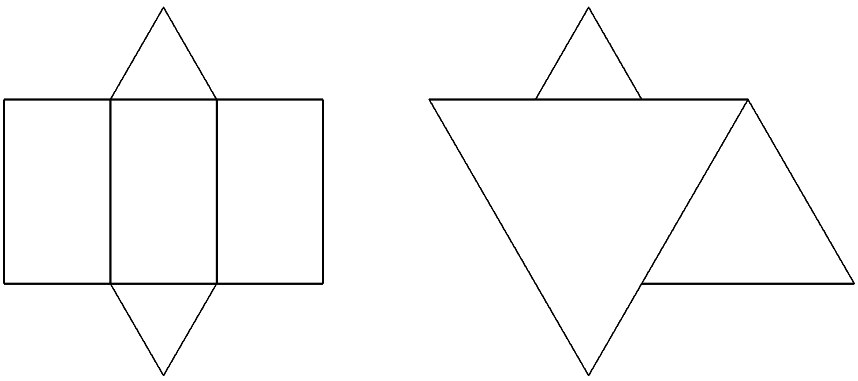
4. We first solve the problem for a 2×5 table. Each successful placement of the numbers is replaced with a continuous path from one number to the next. Suppose first that 1 and 10 are also adjacent, so that the path could have linked up to form a cycle. The cycle could be broken up in any of 10 places. Hence there are 10 paths of this kind. Suppose now that 1 and 10 are not adjacent, so that we have an open path. We classify them according to whether the vertical segments are in one, two or three groups, where vertical segments on adjacent columns are considered to be in the same group. Note that apart from a path obtained from the cycle, each end column must contain a vertical segment.

For paths in which all the vertical segments are in one group, this means that each column must contain a vertical segment. This path, shown in the first figure below, is unique if we assume for now that the left endpoint must be on the bottom row. For paths in which the vertical segments are in two groups, we cannot have each groups containing at least two segments. On the other hand, if each contains exactly one segment, then we have a path obtainable from the cycle. Hence exactly one group contains exactly one segment. Continuing to assume that the left endpoint is on the bottom row, we have four paths as shown in the next four figures. Finally, for paths in which the vertical segments are in three groups, each end group must contain exactly one segment. This unique path is shown in the last figure. Lifting the restriction that the left endpoint be on the bottom row, we have 12 paths. Along with the 10 obtained from the cycle, we have a total of 22. Since each path may be traversed in either direction, there are 44 different placements of the numbers.



We now solve the given problem. There are 100 paths obtainable frmo the cycle. Among the others, there are 2 in which all vertical segments are in one group. For those in two groups, the larger group may consist of 2 to 48 segments. Since the larger group may be on either end, and the left endpoint may be on either row, there are $4 \times 47 = 168$ paths of this type. Finally, for those in three groups, the middle group may consist of 1 to 46 segment. For $1 \le k \le 46$, these segments may have $46 - k$ possible locations. Since the left endpoint may be on either row, the total number of paths of this type is $2(46 + 45 + \cdots + 1) = 2162$. Thus the total number of paths is $100 + 2 + 168 + 2162 = 2432$, and the total number of different placements of the number is $2 \times 2432 = 4864$.

5. The diagram below shows a regular triangular prism covered without overlap by three equilateral triangles of different sizes.



International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring 2002.**

1. Let a, b and c be the sides of a triangle. Prove that $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

2. A game is played on a 23×23 board. The first player controls two white chips which start in the bottom-left and the top-right corners. The second player controls two black ones which start in the bottom-right and the top-left corners. The players move alternately. In each move, a player can move one of the chips under control to a vacant square which shares a common side with its current location. The first player wins if the two white chips are located on two squares sharing a common side. Can the second player prevents the first player from winning?

3. Let E and F be the respective midpoints of sides BC and CD of a convex quadrilateral $ABCD$. Segments AE, AF and EF cut $ABCD$ into four triangles whose areas are four consecutive positive integers. Determine the maximal area of triangle BAD.

4. There are n lamps in a row, some of which are on. Every minute, all the lamps already on will go off. Those which were off and were adjacent to exactly one lamp that was on will go on. For which n can one find an initial configuration of which lamps are on, such that at least one lamp will be on at any time?

5. An acute triangle was dissected by a straight cut into two pieces which are not necessarily triangles. Then one of the pieces was dissected by a straight cut into two pieces, and so on. After a few dissections, it turned out that all the pieces are triangles. Can all of them be obtuse?

6. In an increasing infinite sequence of positive integers, every term starting from the 2002-th term divides the sum of all preceding terms. Prove that every term starting from some term is equal to the sum of all preceding terms.

7. Some domino pieces are placed in a chain according to the standard rules. In each move, we may remove a sub-chain with equal numbers at its ends, turn the whole sub-chain around, and put it back in the same place. Prove that for every two legal chains formed from the same pieces and having the same numbers at their ends, we can transform one to the other in a finnite sequence of moves.

Note: The problems are worth 4, 4, 6, 7, 7, 7 and 8 points respectively.

Solution to Junior A-Level Spring 2002

1. We have

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+3abc-c^3 &= a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c)\\
&= (a+b+9-c))(a^2+b^2+(-c)^2-b(-c)-(-c)a-ab)\\
&= \frac{1}{2}(a+b-c)((b+c)^2+(c+a)^2+(a-b)^2).
\end{aligned}$$

   This is positive since $a+b-c>0$ in a non-degenerate triangle.

2. Initially, the four chips determine a rectangle, with chips of the same colour at opposite corners. After a move by the first player from such a position, there is no victory since the two white chips are in different rows and different columns. Moreover, the four chips will no longer determine a rectangle. However, the second player can restore this position in his move. Thus there is no victory for the first player.

3. Denote the area of the polygon P by $[P]$. Then

$$[BAD]=[ABEFD]-[BEFD]=[ABE]+[AEF]+[AFD]-3[BCD].$$

   In order to maximize $[BAD]$, BCD must have the smallest area among the four triangles whose area are four consecutive integers. The maximum value of $[BAD]$ is $[BCD]+1+[BCD]+2+[BCD]+3-3[BCD]=6$.

4. Denote by 0 a lamp which off and by 1 a lamp which is on. The following diagram shows that for $n=1$ or 3, there are no initial configurations which lead to perpetual light.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1} \rightarrow \boxed{0} & \boxed{000} & \boxed{111} \arrow[l] \\
\boxed{011} \arrow[d] & \boxed{101} \arrow[u] & \boxed{110} \arrow[d] \\
\boxed{100} \arrow[r] & \boxed{010} \arrow[u] & \boxed{001} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

   For even n, the initial configuration 1001100110... will work since it will alternate with 0110011001.... For odd $n>3$, just add 010 to the previous configuration. It will alternate with 100 since the third light will not go on because of the fourth. Hence this part will alternate with 100, independent of the second part. In conclusion, perpetual light is possible for all n except 1 and 3.

5. Consider a convex n-gon. It is potentially $n-2$ triangles. Suppose it is cut into a convex a-gon and a convex b-gon. Then the number of potential triangles is $a-2+b-2$. There are essentially three way of cutting the convex n-gon: through two vertices, through one vertex or through no vertices. In the first case, we have $a+b=n+2$, so that the number of potential triangles is $n-2$ as before. No new obtuse angles can be created since no angle of the convex n-gon can be divided into two obtuse angles. In the second case, we have $a+b=n+3$, so that the number of potential triangles is $n-1$, an increase of 1. As before, the end of the cut through a vertex cannot create a new obtuse angle, but the other end which ends on a side can create one, but no more than one, new obtause angle. In the third case, we have $a+b=n+4$ so that the number of potential triangles is n, an increase of 2. Each end of the cut can create one, but no more than one, new obtuse angle. It follows that an increase in the number of potential triangles is at best matched by an increase in the number of new obtuse angles. Since there is one triangle with no obtuse angles initially, this will remain the case throughout. Thus the task is not possible.

6. Let the sequence be $\{a_n\}$ and let S_n denote the sum of all the terms up to but not including a_n. For $n \geq 2002$, a_n is a divisor of S_n. Hence there exists a positive integer d_n such that $a_n = \frac{S_n}{d_n}$. Then $S_{n+1} = S_n + a_n = \frac{(d_n+1)S_n}{d_n}$. If $d_{n+1} \geq d_n + 1$, then $a_{n+1} \leq \frac{S_n}{d_n} = a_n$, and this contradicts the hypothesis that $\{a_n\}$ is strictly increasing. Hence $\{d_n\}$ is non-decreasing for $n \geq 2002$. However, this sequence cannot maintain a value $k > 1$ indefinitely as otherwise $\{S_n\}$ becomes a geometric progression with common ratio $\frac{k+1}{k}$ starting from some term. However, k and $k+1$ are relatively prime, and we can only divide the first term of the geometric progression by k finitely many times. It follows that $d_n = 1$ eventually.

7. We use induction on the number n of domino pieces in the chain. For $n=1$ and 2, the result holds trivially. Consider the general case where the first number is a. Let the first piece in the initial chain be (a,b) and that in the final chain be (a,c). If $b=c$, we can appeal to the induction hypothesis. Assume therefore that $b \neq c$. Then the piece (a,b) is now further down the chain. If it has been reversed to (b,a), we simply take the sub-chain from (a,c) to (b,a) and reverse it. Then we appeal to the induction hypothesis. Assume therefore that (a,b) has not been reversed. The proof will be complete if we can show that (a,b) can be reversed. In the initial chain, let (d,e) be the first piece which does not appear after (a,b) in the final chain. Let the piece before (d,e) in the initial chain be (f,d). Then this piece appears in the final chain after (a,b), possibly reversed. On the other hand, the piece (d,e) appears in the final chain before (a,b), also possibly reversed. We consider four possible configurations of the final chain, and verify that in each case, (a,b) is reversed.
   Case 1. $(a,c),\dots,(d,e),\dots,(a,b),\dots,(f,d),\dots$.
   We reverse the sub-chain from (d,e) to (f,d).
   Case 2. $(a,c),\dots,(d,e),\dots,(a,b),\dots,(d,f),\dots$.
   We reverse the sub-chain from (d,e) to (g,d), where (g,d) is the piece right before (d,f).
   Case 3. $(a,c),\dots,(e,d),\dots,(a,b),\dots,(f,d),\dots$.
   We reverse the sub-chain from (d,h) to (f,d), where (d,h) is the piece right after (e,d).
   Case 4. $(a,c),\dots,(e,d),\dots,(a,b),\dots,(d,f),\dots$.
   We reverse the sub-chain from (d,i) to (j,d), where (d,i) is the piece right after (e,d) and (j,d) is the piece right before (d,f).

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2002.**

1. In triangle ABC, $\tan A$, $\tan B$ and $\tan C$ are integers. Find their values.

2. Does there exist a point A on the graph of $y = x^3$ and a point B on the graph $y = x^3 + |x| + 1$ such that the distance between A and B does not exceed $\frac{1}{100}$?

3. In an increasing infinite sequence of positive integers, every term starting from the 2002-th term divides the sum of all preceding terms. Prove that every term starting from some term is equal to the sum of all preceding terms.

4. The spectators are seated in a row with no empty places. Each is in a seat which does not match the spectator's ticket. An usher can order two spectators in adjacent seats to trade places unless one of them is already seated correctly. Is it true that from any initial arrangement, the usher can place all the spectators in their correct seats?

5. Let AA_1, BB_1 and CC_1 be the altitudes of an acute triangle ABC. Let O_A, O_B and O_C be the respective incentres of triangles AB_1C_1, BA_1C_1 and CA_1B_1. Let T_A, T_B and T_C be the points of tangency of the incircle of ABC with sides BC, CA and AB respectively. Prove that $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ is an equilateral hexagon.

6. The 52 cards in a standard deck are placed in a 13×4 array. If every two adjacent cards, vertically or horizontally, have either the same suit or the same value, prove that all 13 cards of the same suit are in the same row.

7. Do there exist irrational numbers a and b such that $a > 1$, $b > 1$ and $\lfloor a^m \rfloor$ differs $\lfloor b^n \rfloor$ for any two positive integers m and n?

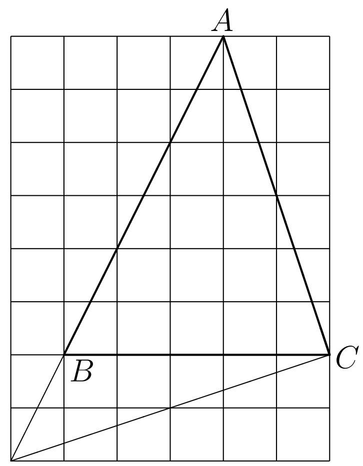
Note: The problems are worth 4, 4, 5, 5, 6, 7 and 8 points respectively.

Solution to Senior A-Level Spring 2002

1. First, note that we have

$$\begin{aligned}\tan A+\tan B+\tan C &= \tan A+\tan B-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\\ &= (\tan A+\tan B)\left(1-\frac{1}{1-\tan A\tan B}\right)\\ &= -\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\tan A\tan B\\ &= \tan A\tan B\tan C.\end{aligned}$$

Let $\tan A=a,\ \tan B=b$ and $\tan C=c$ where $a,\ b$ and c are integers such that $a+b+c=abc$. ABC cannot be a right triangle. Suppose $\angle A$ is obtuse. Then a is negative while b and c are positive. If $b=c=1$, then $abc=a<a+2=a+b+c$. Any increase in the values of b or c will increase that of $a+b+c$ while decrease that of abc. It follows that ABC is an acute triangle, so that $a,\ b$ and c are all positive. We may assume that $a\le b\le c$. Then $abc=a+b+c\le 3c$, so that $ab\le 3$. We cannot have $a=b=1$. Hence $a=1,\ b=2$ and $c=3$. Finally, the diagram below shows a triangle ABC with $\tan A=1,\ \tan B=2$ and $\tan C=3$.



2. Consider the points $A(a,a^3)$ and $B(b,b^3+b+1)$ where $a>b>0$. We wish to choose a and b such that $a-b<\frac{1}{100}$ while $a^3=b^3+b+1$. Let $t=a-b>0$. ¿From $(b+t)^3=b^3+b+1$, we have $3tb^2-(1-3t^2)b-(1-t^3)=0$. If $t<\frac{1}{100}$, the constant term of this quadratic equation is negative, so that it has one positive root and one negative root. Thus a and b can be chosen so that $AB<\frac{1}{100}$.

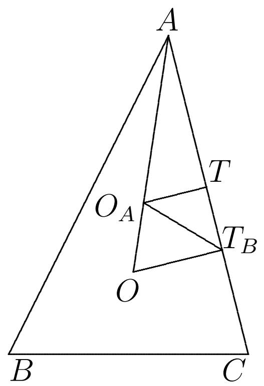
3. Let the sequence be $\{a_n\}$ and let S_n denote the sum of all the terms up to but not including a_n. For $n\ge 2002$, a_n is a divisor of S_n. Hence there exists a positive integer d_n such that $a_n=\frac{S_n}{d_n}$. Then $S_{n+1}=S_n+a_n=\frac{(d_n+1)S_n}{d_n}$. If $d_{n+1}\ge d_n+1$, then $a_{n+1}\le\frac{S_n}{d_n}=a_n$, and this contradicts the hypothesis that $\{a_n\}$ is strictly increasing. Hence $\{d_n\}$ is non-decreasing for $n\ge 2002$. However, this sequence cannot maintain a value $k>1$ indefinitely as otherwise $\{S_n\}$ becomes a geometric progression with common ratio $\frac{k+1}{k}$ starting from some term. However, k and $k+1$ are relatively prime, and we can only divide the first term of the geometric progression by k finitely many times. It follows that $d_n=1$ eventually.

4. We use induction on the number n of spectators. The case $n = 2$ holds as a single switch fixes the derangement. Suppose the result holds from 1 to n for some $n \geq 1$. Consider the next case with $n+1$ spectators. Let S_k be the spectators with the ticket k. Suppose S_{n+1} is in seat m for some $m \leq n$. If the spectators in seats m to $n+1$ constitute a derangement among themselves, we can appeal to the induction hypothesis. Otherwise, there exists a seat ℓ which is the first after seat m to be occupied by some S_x where $x \neq \ell - 1$. This means that for $m < k < \ell$, seat k is occupied by S_{k-1}. We perform a chain of switches from seat ℓ back to seat $m+1$, we still have a derangement since S_k is now in seat $k+2$ for $m < k < \ell$. This brings S_x to seat $m+1$ and we can now switch her with S_{n+1}, bringing the latter one seat closer to her correct place. We can now repeat the above process until S_{n+1} is in seat $n+1$, and then appeal to the induction hypothesis.

5. Since BCB_1C_1 is cyclic, triangles ABC and AB_1C_1 are similar. Tthe ratio of similarity is $\cos\alpha$ where $\alpha = \angle CAB$, since $AB_1 = AB\cos\alpha$. Let O be the incentre and r the inradius of ABC, and let T be the point of tangency of the incircle of AB_1C_1 with AC. Now $OT_B = r$, $O_AT = r\cos\alpha$, $AT = AT_B\cos\alpha$, $AT_B = r\cot\frac{\alpha}{2}$ and

$$TT_B = AT_B - AT = AT_B(1-\cos\alpha) = r\cot\frac{\alpha}{2}\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = r\sin\alpha.$$

Hence $O_AT_B = \sqrt{O_AT^2 + T_BT^2} = r$. By symmetry, the other sides of the hexagon are also equal to r.



6. If two adjacent cards are of the same suit, we say that there is a suit bond between them. If they are of the same rank instead, we say that there is a rank bond between them. By hypothesis, there is either a suit bond or a rank bond between two adjacent cards, and it cannot be both since each card is unique within a deck. So we have twelve columns each consisting of four horizontal bonds, and three rows each consisting of thirteen vertical bonds. We claim that in each row and each column, the bonds are of the same type. Assuming to the contrary that there are both suit bonds and rank bonds in a column. Then there is one of each kind in two adjacent rows. Of the four cards in question, let the top two be the Ace and King of Hearts. The bottom two are of the same rank. If this rank is Ace, then there is no bond between the King of Heart and the card below. Similarly, this rank cannot be King. Now not both cards at the bottom can be Hearts. Hence one of them will not have a bond with the card above. This justifies our claim. Considering the types of bonds for each of the three rows of vertical bonds, we have eight cases.

(i) All three rows are rank bonds. This yields the desired conclusion.

(ii) All three rows are suit bonds. This means that the 52 cards are in 13 groups of 4, with cards in the same group being of the same suit. This is impossible since 13 is not a multiple of 4.

(iii) Only the top and bottom rows are suit bonds. This means that we have 26 disjoint pairs of cards of the same suit. This is impossible since 13 is not a multiple of 2.

(iv) Only the top and bottom rows are rank bonds. Consider the 13 inside pairs of cards in the second and the third rows, with a suit bond between each pair. We may assume that the first pair are Spades. There must be a first pair which are not Spades, say Hearts. Consider first the case where the two outside cards in the first column are of the same suit, which cannot be Hearts. We may assume it is Clubs. Then the two outside cards on the column with Hearts inside must be Diamonds. When the inside pair change suits again, it must go from Hearts to either Spades or Clubs. It follows that each column of 4 cards have the same colour. However, there are 26 red cards and 26 is not a multiple of 4. Consider now the case where the two outside cards in the first column of different suits. Then they must be Diamonds and Clubs. Then the two outside cards on the column with Hearts inside must be Clubs and Diamonds. It follows that all the Spades and Hearts form 13 inside pairs, but there are 13 Spades and 13 is not a multiple of 2.

(v) Only the top two rows are suit bonds. We may assume that the top three cards in the first column are Spades and that the bottom card is Clubs. This remains the case until we encounter the first column of horizontal suit bonds. Then the four cards in the next column must all be red. It follows that the four cards in each column are of the same colour. However, there are 26 red cards and 16 is not a multiple of 4.

(vi) Only the bottom two rows are suit bonds. This is analogous to Case (v).

(vii) Only the top two rows are rank bonds. This means that there are 3 cards of the same rank in each column. Since there are only 4 cards of each rank, all 13 columns consist of different ranks. Hence the first row of horizontal bonds are are suit bonds, so that all columns of horizontal bonds are suit bonds. This forces all the vertical bonds in the bottom row to be rank bonds too, contrary to our assumption.

(viii) Only the bottom two rows rae rank bonds. This is analogous to Case (vii).

7. Let $a = \sqrt{6}$ and $b = sqrt3$. Suppose $\lfloor a^m \rfloor = \lfloor b^n \rfloor$ for some positive integers m and n. Denote their common value by k. Then $k^2 \leq 6^m < k^2 + 2k + 1$ and $k^2 \leq 3^n < k^2 + 2k + 1$. It follows that $2k \geq |6^m - 3^n| = 3^m |2^m - 3^{n-m}|$. Clearly, $n > m$ so that $|2^m - 3^{n-m}| \geq 1$. Hence $2k \geq 3^m$ so that $\frac{9^m}{4} \leq k^2 \leq 6^m$. Now the only positive integral values of m for which $\frac{1}{4} \leq (\frac{2}{3})^m$ holds are 1, 2 and 3. We have $\lfloor a \rfloor = 1$, $\lfloor a^2 \rfloor = 6$ and $\lfloor a^3 \rfloor = 14$. On the other hand, $\lfloor b \rfloor = 1$, $\lfloor b^2 \rfloor = 3$, $\lfloor a^3 \rfloor = 5$, $\lfloor a^4 \rfloor = 9$ and $\lfloor a^5 \rfloor = 15$. It follows that $\lfloor a^m \rfloor \neq \lfloor b^n \rfloor$ for any positive integers m and n.