Елена Михајлова, Скопје

МАТЕМАТИКА НА ЕДНА ИГРА

1. Позната е играта, "игра на стрпливост", или како што уште се нарекува, "игра 16". На квадратна табла од $4\times4=16$ полиња разместени се 15 жетони нумерирани со броевите од 1 до 15, така што едно поле останува празно (на пример, како на црт. 1 а) и 1 б) каде броевите $a_1, a_2, \ldots, a_{15}, a_{16}=16$ се броевите од 1 до 15 запишани во некој редослед). Се поставува прашањето: Дали е можно со постапни поместувања на жетоните од дадената почетна позиција да се дојде до "стандардната" позиција како на цртеж 2? Дозволени се само такви поместувања, при кои на празното поле од таблата доаѓа еден од соседните жетони со "паралелно" поместување. На примерот на црт. 1 а прв чекор може да биде една од овие четири можности: 1° поместување на жетонот 1 надолу; 2° поместување на жетонот 13 на десно; 3° поместување на жетонот 7 на лево и 4° поместување на жетонот 6 нагоре.

2	4	5	9
3	1	15	8
13		7	10
14	6	11	12

Црт. 1 а)

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_6	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	

Црт. 1 б)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Црт. 2

Пред да поминеме на "математичка анализа" на проблемот и на формулација и доказ на неговото решение, потребно е да научиме малку ***комбинаторика***, имено да запознаеме некои својства на таканаречените ***пермутации***.

2. Секој распоред на n меѓусебно различните објекти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ во низа е една нивна *пермутација*.

На пример една пермутација на објектите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е

$$a_1\ a_2 \cdots a_{n-1}\ a_n.$$

Друга пермутација на објектите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е

$$a_2\ a_1 a_3 \cdots a_n\ a_{n-1}.$$

Од 3 објекти a, b, c постојат овие 6 пермутации: abc, acb, bac, bca, cab и cba.

Ќе покажеме во општ случај дека бројот на пермутации од од n различни елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$.

Својство. Бројот на пермутации од n различни меѓу себе објекти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$.

Доказ. Дадената формула сигурно е точна за $n=1$, затоа што од еден елемент a_1 постои само пермутацијата a_1. Да претпоставиме сега дека формулата е точна за некое $n=k$, $k\geq1$ и да видиме колку пермутации има од $k+1$ елементи $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Бројот на пермутации за кои објектот a_{k+1} е на i-то место, за $i=1,2,\ldots,k+1$, броејќи редоследно од лево на десно, е $k!$. (преостанатите k-елементи ги распоредуваме на k-те преостанати места).

Бидејќи a_{k+1} може да е поставен на $(k+1)$-но место, добиваме дека бројот на пермутации од $k+1$ елемент е $(k+1)\cdot k! = (k+1)!$.

Според принципот на математичка индукција бројот на пермутации од n елементи е $n!$. ⌛

Во иднина ќе не интересираат само пермутациите од природни броеви, па објектите $a_1, a_2, \dots, a_n$ ќе бидат по ред броевите 1, 2, 3, ..., n. Пермутацијата 1 2 3 4 .... n ќе ја нарекуваме ***основна пермутација*** на тие броеви.

Ако во пермутацијата $m_1\ m_2 \dots m_n$ на броевите 1, 2, 3, ... , n два броја m_j и m_k, за кои $m_j > m_k$, се така распоредени што m_j е лево од m_k, ќе велиме дека парот броеви (m_j, m_k) во дадената пермутација е во *инверзија*.

На пример, во пермутацијата 5 2 4 1 3 во инверзија се овие парови броеви: (5, 2); (5, 4); (5, 1); (5, 3); (2, 1); (4, 1); (4, 3).

Ако во некоја пермутација има ***парен*** број парови на елементи во инверзија таа се вика ***парна***; во спротивно, пермутацијата се вика ***непарна***.

На пример, горе разгледаната пермутација 5 2 4 1 3 е непарна, затоа што содржи 7 инверзии. Основната пермутација која содржи 0 (нула) инверзии (т.е. воопшто ги нема), според тоа е парна.

За две пермутации кои се или двете парни, или двете непарни, велиме дека се со ***иста парност***; ако пак едната од нив е парна, а другата непарна, велиме дека се со ***спротивна парност***.

Да ги замислиме напишани сите $n!$ пермутации на броевите 1, 2, 3, ..., n. Ако во секоја од нив ја замениме меѓусебно положбата на првите два броја, ќе ги добиеме повторно сите тие $n!$ пермутации, само во поинаков распоред на испишување во однос на почетниот. При тоа, секоја парна пермутација ќе помине во некоја непарна и обратно. Имено, ако некоја пермутација од првичниот запис била $P = m_1\ m_2\ m_3 \dots m_n$ во новиот запис ќе и одговара пермутација $P' = m_2\ m_1\ m_3 \dots m_n$, при што m_1 ќе биде во P и P' во инверзија со истите елементи од $m_3, \dots, m_n$; истото важи за m_2. Инверзиите на двојките елементи од $m_3, \dots, m_n$ исто така во P и P' ќе бидат исти. Меѓутоа, ако во P елементот m_1 бил во инверзија со m_2, во P' тој тоа нема да биде, и обратно. P' значи, ќе содржи или една инверзија повеќе од P, или една инверзија помалку од P, што значи дека во секој случај ќе биде со спротивна парност од P.

Нека A е множеството од сите парни пермутации а B е множеството од сите непарни пермутации на елементите $1, 2, 3, \dots, n$ и $f: A \to B$ е пресликување определено со $f(P) = P'$ каде $P \in A$ и $P' \in B$ определени како ве претходниот дел. Докажи дека f е биекција.

Оттука, можеме да заклучиме: Ако меѓу $n!$ пермутации на n броеви 1, 2, 3, ..., n, a se парни и b непарни, тогаш $a = b$. Значи, како парни, така и непарни пермутации од n елементи има $n!/2$.

Со слично расудување, можеме да го заклучиме дека е точно и следново својство.

Својство. Ако во некоја пермутација P два соседни броја си ги сменат местата, добиваме пермутација P' со спротивна парност. ⌛

Во натамошниот тек ќе го користиме следното својство:

Својство. Ако во некоја пермутација P меѓусебно им го смениме местото на било кои два броја, новата пермутација P' ќе биде со спротивна парност од првата.

Доказ. За *соседниѿе* елементи веќе знаеме дека тврдењето е точно. Да земеме, значи, дека меѓу тие два броја m_j, m_k кои ќе си ги сменат местата, лежат $s=k-j-1$ други броеви $(s \geq 1)$. Тогаш од P до P' можеме да дојдеме со помош на повеќе последователни замени на по два соседни броја: најнапред m_k го поместуваме за по едно место кон m_j се додека не дојде на местото m_j, при што се прават последователно $(s+1)$ - на замена на соседни елементи, а потоа, m_j го поместуваме во спротивна насока, додека не дојде на местото каде што порано стоел бројот m_k - тоа дава уште s смени на соседните елементи. Вкупно, значи, од P на P' сме дошле со помош на $(s+1)+s=2s+1$ последователни смени на соседните елементи. При тоа, значи, парноста на пермутацијата се сменила непарен број пати, па на крајот, во P' е спротивна од онаа на почетокот во P. ⌛

На пример, ако во $P=152634$ ја смениме положбата на броевите 5 и 3 и со тоа добиваме $P'=132654$, можеме тоа да го спроведеме (овде е $k=2$) во пет чекори, со замена на соседните елементи, на следниот начин:

$$P=152634, 125634, 126534, 126354, 123654, 132654=P'.$$

3. Да се вратиме сега, "вооружени" со малку знаење за пермутациите, на "играта 16".

Дадениот распоред на жетони на црт. 1 а) лесно можеме да го преведеме во распоред кај кој празното поле е на истото место како на црт. 1 б) и црт. 2. Доволно е, на пример, жетонот 6 да го поместиме нагоре, потоа жетонот 11, а по него и жетонот 12 на лево. Така го добиваме распоредот од црт. 3.

2	4	5	9
3	1	15	8
13	6	7	10
14	11	12	

Црт. 3

Јасно е дека овој распоред од црт. 3 ќе може да се доведе на оној од црт. 2 тогаш и само тогаш ако тоа може да се направи со распоредот на црт. 1. Имено, "ако го вратиме филмот" на премин од црт. 1 на црт. 3 "наназад", ќе го добиеме преминот од црт. 3 на црт. 1, и т.н.

Секој распоред на жетоните на таблата можеме еднозначно да го окарактеризираме со определена пермутација на броевите 1, 2, 3,...,16, на пример, да ги испишеме броевите на жетоните со ред, како што доаѓаат во првиот, па во вториот, па во третиот и конечно, во четвртиот ред на таблата, со тоа што на празното поле да му го придружиме бројот 16. На пример, на распоредот на црт. 1 а) одговара пермутацијата

$$2\ 4\ 5\ 9\ 3\ 1\ 15\ 8\ 13\ 16\ 7\ 10\ 14\ 6\ 11\ 12$$

а за распоредот на црт. 1 б) одговара пермутацијата

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}.$$

Сега, конечно можеме да го формулираме и да го докажеме решението на проблемот на "играта 16".

4. *Зададениоѿ расѿоред на жеѿониѿе сѿоред црѿ. 1 б) може да се ѿреведе во сѿандарден расѿоред сѿоред црѿ. 2 ѿогаш и само ѿогаш, ако се ѿермуѿациите ѿридружени на расѿоредиѿе сѿоред црѿ.1 б) и црѿ. 2 со исѿа* *парност (со други зборови, ако пермутацијата придружена на распоредот според црт.1 б) е парна).*

Доказот ќе го изведеме во два дела: ќе покажеме дека поклопувањето на парноста е 1° потребен и 2° доволен услов за да се реализира преведување.

1° *Условот е потребен, т.е. ако преведувањето е можно, пермутациите кои одговараат на распоредот според црт. 1б) и црт. 2 е со иста парност.*

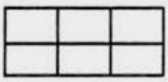
Доказ. За полесно изразување, можеме понекогаш да зборуваме за "поместување на празното поле", наместо за поместување на жетоните.

На пример, ако во распоредот според црт. 1 жетонот 6 го поместуваме нагоре, наместо тоа можеме да кажеме дека празното поле сме го поместиле надолу.

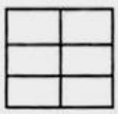
Да претпоставиме сега дека распоредот според црт. 1б) може да се преведе во распоредот според црт. 2. Во тек на поместувањето на жетоните празното поле патувало сигурно исто толку чекори на лево колку и на десно, и исто толку чекори нагоре колку и надолу. (Инаку, на крајот на патувањето не би било на истото место на таблата како и на почетокот). Значи, вкупниот број на поместувања на жетоните од положбата според црт.1 б) до положбата според црт. 2 бил *парен*. На секое поединечно поместување на жетоните одговара во придружените пермутации меѓусебна замена на местата на бројот 16 со некој од броевите 1, 2, 3,..., 15. Значи, според претходното, при секој чекор придружената пермутација ја менува парноста. Значи, после парен број чекори парноста е иста како на почетокот. Со тоа 1° е докажано.

2° *Условот е доволен, т.е. ако пермутациите кои одговараат на распоредот според црт.1б) и црт. 2 се со иста парност, тогаш преведувањето на распоредот од црт.1б) во распоред според црт. 2 е можно.*

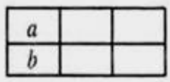
Доказ. Лема. Ако на полињата на "подтабла" во облик според црт. 4а, односно 4б, се наоѓаат жетони со броеви a и b, како и празно поле, можно е со поместување на жетоните само во таа подтабла да се преведат жетоните a и b во положбата според црт. 5а, односно 5б.



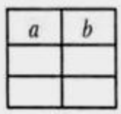
Црт. 4а



Црт. 4б



Црт. 5а



Црт. 5б

Провери сам. Стави ги a и b на произволно место и на произволно место избери го празниот квадрат и определи го редоследот на чекори за да дојдеш до бараниот распоред. Разгледај ги сите можности.

Од лемата исто така произлегува дека распоредот според црт. 1 б) сигурно може да се преведе во распоред каде што броевите на жетоните на сите полиња, *освен* на оние што се заеднички на последните два реда и последните две колони од табелата, ќе се поклопуваат со стандардниот; значи, распоредот според црт. 1 б) може сигурно да се преведе во распоред според црт. 6, каде што $xyzw$ е некоја пермутација на броевите 11, 12, 15, 16, т.е. жетоните 11, 12, 15 и празното поле. Со натамошно поместување на жетоните само во таа подтабла

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	x	y
13	14	z	w

Црт. 6

зафатена со x, y, z, w, може сигурно да се постигне празното поле да дојде во долниот десен агол на целата табла. Со тоа, делот на таблата во црт. 6 што е исполнет со x, y, z, w, ќе добие еден од облиците според црт. 7а или 7б (затоа што за трите елементи 11, 12, 15 постојат $3! = 6$ можности за распоред на трите дадени полиња).

Сега непосредно може да се провери:

а) Секоја од шемите според 7а може да се преведе во секоја друга од шемите 7а, а не може да се преведе ниту во една од шемите 7б и секоја од шемите 7б може да се преведе во секоја друга од 7б, а не може да се преведе во ни една од шемите 7а. Провери сам.

б) На шемата на црт. 6 надополнета со било која од шемите од 7а одговара *парна* пермутација; на шемата на црт. 6 надополнета со било која од шемите 7б одговара *непарна* пермутација.

Оттука, се завршува и доказот 2°. Имено, ако на распоредот според црт. 1б) одговара парна пермутација, таа од иста причина како во доказот 1° и заради б) не може да води на црт. 6 кон некоја варијанта од 7б, па мора да води на црт. 6 кон некоја варијанта од 7а, а тогаш таа, според а) може да се преведе и на првата од нив, т.е. целата табла на распоред според црт. 2.

11	12
15	16

15	11
12	16

12	15
11	16

Црт. 7а

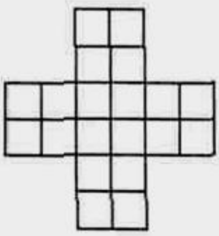
11	15
12	16

12	11
15	16

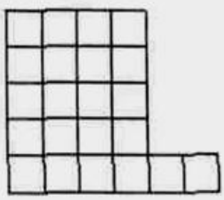
15	12
11	16

Црт. 7б

5. Од доказите 1° и 2° лесно го гледаме и тоа дека, воопштено, *два различни распореди* на жетони кај кои празното поле е на исто место *ќе може да се преведат еден во друг* тогаш и само тогаш ако им одговараат пермутации со *иста парност*. За конкретниот случај на распоредот од црт. 3, можеме да најдеме дека соодветната пермутација содржи 28, значи парен број инверзии, па тој распоред *може* да се преведе во стандардниот според црт. 2.



Црт. 8



Црт. 9

Исто така, може да се увиди дека истата теорема важи и за ваква генерализација на "играта 16": Таблата може да има $m (m \geq 2)$ редови и $n (n \geq 2)$ колони, а не мора да биде токму $m = n = 4$. Понатаму, таблата може да има и поинаков облик, не мора да е правоаголна, на пример според цртеж 8. Од друга страна, дел од доказот 2° не би можел да се спроведе за табла со облик на пример како на црт. 9. Не е тешко да се најде пример на два распореда со ист паритет на таква табла кои *не може* да се преведат еден во друг.

Најди еден таков распоред.

Статијата прв пат е објвена во списанието СИГМА на сојузот на математичарите на Македонија