Vektori pomažu trigonometriji i algebri

Milan Šarić, Kneževo

U srednjoj školi uglavnom primjenjujemo vektore pri rješavanju planimetrijskih zadataka. Ovdje ćemo pokazati kako se pomoću vektora rješavaju i neki zadaci iz trigonometrije i algebre. Preporučujemo čitaocu da sve primjere pokuša riješiti bez primjene vektora, kako bi još bolje uočio efikasnost vektorske metode.

Zadatak 1. Neka je:

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0 \quad \text{i} \quad \cos x + \cos y + \cos z = 0.$$

Dokaži da je:

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0 \quad \text{i} \quad \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0.$$

Rješenje. Uvedimo vektore

$$\vec{a} = (\cos x, \sin x), \quad \vec{b} = (\cos y, \sin y), \quad \vec{c} = (\cos z, \sin z).$$

Tada je

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1.$$

Iz uvjeta slijedi

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\cos x + \cos y + \cos z, \quad \sin x + \sin y + \sin z) = 0.$$

Dakle, vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su stranice nekog jednakostraničnog trokuta. Kako je kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, $\vec{a}$ i $\vec{c}$ jednak $\frac{2\pi}{3}$, slijedi

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y),$$

ili $x - y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. Analogno:

$$y - z = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \quad x - z = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi, \quad k, l, m \in Z.$$

Tada je

$$2x - 2y = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi, \text{ odnosno}$$

$$2y - 2z = -\frac{2\pi}{3} + 2l_1\pi,$$

$$2x - 2z = -\frac{2\pi}{3} + 2m_1\pi, \quad k_1, l_1, m_1 \in Z.$$

Uvedimo vektore:

$$\vec{a}_1 = (\cos 2x, \sin 2x), \quad \vec{b}_1 = (\cos 2y, \sin 2y), \quad \vec{c}_1 = (\cos 2z, \sin 2z).$$

Kako je $|\vec{a}_1| = |\vec{b}_1| = |\vec{c}_1| = 1$, i kako je kut među vektorima $\vec{a}_1$ i $\vec{b}_1$, $\vec{a}_1$ i $\vec{c}_1$, $\vec{b}_1$ i $\vec{c}_1$ jednak $\frac{2\pi}{3}$, slijedi da su vektori $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ stranice nekog jednakostraničnog trokuta, pa je

$$\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1 = 0, \text{ ili}$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0,$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Dokaži nejednakost

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z),$$

ako su a, b, c, x, y, z realni brojevi.

Rješenje. Uvedimo vektore:

$$\vec{u} = (x, y, z); \quad \vec{v} = (a, b, c); \quad \vec{w} = (1, 1, 1).$$

Imamo

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad |\vec{w}| = \sqrt{3},$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \quad (\alpha \text{ je kut među } \vec{u} \text{ i } \vec{v}), \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = ax + by + cz$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\beta \quad (\beta \text{ je kut među } \vec{u} \text{ i } \vec{w}), \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = x + y + z$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\gamma \quad (\gamma \text{ je kut među } \vec{v} \text{ i } \vec{w}), \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = a + b + c.$$

Ako je jedan od vektora $\vec{u}$ ili $\vec{v}$ nul-vektor ($a = b = c = 0$ ili $x = y = z = 0$), jednakost je očigledna.

Pretpostavimo da vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nisu nul-vektori. Tada polaznu nejednakost možemo napisati u obliku

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} + 1 \geqslant 2 \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \cdot \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|},$$

ili

$$\cos\alpha + 1 \geqslant 2\cos\beta\cos\gamma,$$

što sada treba dokazati.

Moguća su dva slučaja:

1) Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su nekomplanarni.
Ako su vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nekomplanarni, tada su α, β, γ vršni kutovi triedra, a za njih vrijedi

$$\alpha < \beta + \gamma, \quad \alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$

Tada je

$$\alpha < \min(\beta + \gamma, 2\pi - (\beta + \gamma)) \leqslant \pi, \text{ pa je}$$

$$\cos\alpha > \cos(\beta + \gamma) = \cos(2\pi - (\beta + \gamma)), \text{ tj.}$$

$$\cos\alpha + 1 > \cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma) = 2\cos\beta\cos\gamma,$$

jer je $1 > \cos(\beta - \gamma)$. Time je nejednakost dokazana.

2) Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su komplanarni.
Tada je

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi.$$

Kako je

$$\cos\alpha = \cos(2\pi - (\beta + \gamma)) = \cos(\beta + \gamma),$$

slijedi da je

$$\cos\alpha + 1 \geqslant \cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma) = 2\cos\beta\cos\gamma,$$

pa je i u ovom slučaju nejednakost dokazana. Jednakost vrijedi za $\cos(\beta - \gamma) = 1$, tj. $\beta = \gamma$, $\alpha = 2\gamma$.

Zadatak 3. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$x^2 - 4x + 6 = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}.$$

Rješenje. Uvedimo vektore:

$$\vec{m} = (1, 1), \quad \vec{n} = \left(\sqrt{x - 1}, \sqrt{3 - x}\right).$$

Tada je:

$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{x - 1 + 3 - x} = \sqrt{2},$$
$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{3-x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}.$$

Napišimo lijevu stranu jednadžbe u obliku

$$x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Kako je

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{3-x} \leqslant \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{x - 1 + 3 - x} = 2,$$

slijedi da je

$$x^2 - 4x + 6 = 2,$$
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2.$$

Rješavanjem ovog sustava ekvivalentnih jednadžbi, uz uvjet $x - 1 \geqslant 0$ i $3 - x \geqslant 0$, dobivamo rješenje $x = 2$.

Zadatak 4. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$2\sqrt{x+1} + 3x = \sqrt{(x^2+4)(x+10)}.$$

Rješenje. Neka su dani vektori:

$$\vec{m} = (2, x), \quad \vec{n} = \left(\sqrt{x+1}, 3\right), \quad (x + 1 \geqslant 0). \tag{1}$$

Tada je

$$|\vec{m}| = \sqrt{x^2+4}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{x+10}, \quad \vec{m} \cdot \vec{n} = 2\sqrt{x+1} + 3x.$$

Dakle, prema (1) imamo

$$2\sqrt{x+1} + 3x \leqslant \sqrt{(x^2+4)(x+10)},$$

Ova nejednakost prelazi u jednakost ako su vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ kolinearni. Prema tome,

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{x}{3} \quad \text{(uvjet kolinearnosti vektora } \vec{m} \text{ i } \vec{n}\text{)}, (x + 1 \neq 0).$$

Kvadriranjem ove jednadžbe i sređivanjem dobivamo

$$x^3 + x^2 = 36 \quad \text{ili} \quad (x-3)(x^2 + 4x + 12) = 0.$$

Jedino realno rješenje je $x = 3$.

Neposrednom provjerom utvrđujemo da je $x = 3$ rješenje jednadžbe.

Zadaci za vježbu

1. Dokaži jednakost $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \sin 80^\circ + \ldots + \sin 329^\circ = 0$.

2. Riješi jednadžbu $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

3. Riješi jednadžbu $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.