

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА
на ДМ на Србија во 1997/98 година

МАТЕМАТИКА И ИГРЕ

Ратко Тошић, Нови Сад

Свој живот више од игре не ценим.
В. Шекспир, Хамлет

УВОД

Два основна облика људске делатности су рад и игра. Игра осмишљава наше постојање које осигуравамо радом. Марк Твен, кроз уста свог популарног јунака Тома Сојера, каже: "Рад је оно што чиниш под морање, а игра је све оно на што ниси приморан." Мудрост живота састоји се у томе да се и рад организује и прихвати као игра.

Теорија игара примењује се у техници, економији, војним и многим другим наукама, за налажење оптималног начина извршавања задатака у конкуритивном окружењу. То је данас важна област математичких истраживања чији почетак представља књига Џон фон Нојмана и Оскара Моргенштерна "Теорија игара и економско понашање" (1944). Математичко третирање појединих игара, међутим, сеже у много дубљу прошлост.

Може се говорити о играма између два лица, као што су шах и го, и о играма више лица, као што су покер и бриц. Често се говори и о играма у којима учествује само једно лице, као што је игра солитер. За игре које разматрамо неопходна су два играча. У игри солитер, фактори вештине у игри и играчке среће (тј. случајности) могу бити од значаја. Међутим, то нема много додирних тачака са математичком теоријом конфликта, где је у питању сукоб воља више субјеката. С друге стране, ако је број играча бар три, појављује се могућност стварања коалиција, што такође није од интереса за наша разматрања. Зато се ограничавамо на игре два лица.

Друга класификација игара заснива се на присуству или одсуству елемената случајности, који су нарочито изражени у хазардним играма (са картама и коцком).

Трећи критеријум за класификацију игара полази од тога да ли играчи имају потпуну информацију о позицији игре као и о могућим потезима у свакој позицији – својим и свог противника. Шах је *игра са потпуном информацијом*, док је бриц, који је игра два "играча" (сваки "играч" је тим од две особе), интересан по томе што "играч" нема потпуну информацију чак ни о "својим" картама. Бриц је, као што је случај и са осталим карташким играма, *игра са непотпуном информацијом*. Ми ћемо разматрати само игре у којима оба играча располажу потпуном информацијом

Игра је *коначна* ако има коначан број позиција и ако свака партија те игре мора да се заврши после коначног броја потеза.

Игре које ћемо разматрати у овом чланку су коначне игре два лица са потпуном информацијом, без елемената случајности. Прецизније, игре о којима је реч, задовољавају следеће услове:

- (G1) Играју два играча, које ћемо најчешће називати Први и Други, или *A* и *B*.
- (G2) У игри постоји коначан број позиција, при чему се једна од њих истиче као *почетна позиција*.
- (G3) Игра има јасно дефинисана *правила* којима су одређени дозвољени (легални) *потези* играча у свакој позицији.
- (G4) Први и Други играч вуку потезе наизменично.
- (G5) Оба играча располажу потпуном информацијом.
- (G6) Игра је *равноправна*, што значи да у свакој позицији могући потези не зависе од тога који је играч на потезу. Шах, на пример, није равноправна игра, јер у датој позицији, бели и црни (Први и Други) играч не располажу истим опцијама.

У највећем броју случајева, захтевамо да буде испуњен и *услов коначности игре*, који формулишемо на следећи начин:

- (G7) Правила игре су таква да се свака партија игре завршава после коначног броја потеза, јер један од играча – будући на потезу, нема на располагању легалан потез. У *нормалној* игри, играч који се нађе у таквој ситуацији – губи. У *обрнутој* игри, играч који се нађе у таквој ситуацији – добија. Дакле, игра не може бити нерешена (реми) због понављања потеза.

Игре као што је шах уклапају се у оквир наше теорије на начин који није од већег интереса. У шаху нема скривене информације, сваки потез се вуче наочиглед оба играча и сваки од њих има могућност (бар теоријску) да стекне увид у све опције, своје и свог противника. Бриц и покер, с друге стране, црпу своју узбудљивост из непотпуности информације о картама противника. За коначно решење шаховске игре потребно је само да испитамо све могућности и изаберемо најбољу. Шах наставља да живи као игра само зато што у овом тренутку нисмо у стању да тај план и ефективно спроведемо.

Мада се већина игара састоји из серије потеза које наизменично вуку два играча, ми можемо редукovati серију потеза сваког играча на један једини, тражећи од њега да дефинише свој одговор у свакој од могућих позиција, тј. да дефинише своју стратегију игре. Кад су у питању сложене игре као што су шах или бриц, та редукција је у домену само теоријских а не и практичних могућности.

У многим играма, у одређеним позицијама играч долази до закључка (или бар наслућује) да је позиција за њега добијена, тј. да може да победи, без обзира на то како ће играти његов противник; другим речима, да има *победничку стратегију (ПС)*, односно начин игре који му осигурава победу.

Наш циљ је управо тај да окарактеришемо добијене (и изгубљене) позиције и да опишемо метод за налажење победничке стратегије у коначним играма.

ПРИМЕРИ ИГАРА

Размотримо прво пример игре у којој исход не зависи од начина игре Првог и Другог играча; важно је само да играчи вуку потезе у складу са правилима игре. Наведена чињеница не мора уопште да буде очигледна, па ни лако уочљива. За решење овакве игре није неопходно наводити победничку стратегију; довољно је доказати да ће један играч постићи победу, независно од избора потеза који му стоје на располагању.

Пример 1. На три гомиле налазе се жетони: на првој – 10, на другој – 15, на трећој – 20. Једним потезом дозвољено је једну гомилу разбити на две мање. Губи играч који нема на располагању потез.

Решење. После сваког потеза број гомила повећава се за 1. На почетку их је 3, на крају 45. Дакле, укупно ће бити повучена 42 потеза. Последњи, 42. (победнички) вуче Други играч. Δ

У следећем примеру долази до изражаја тзв. "симетрична" стратегија.

Пример 2. Играчи наизменично стављају по једног скакача на поља шаховске табле, тако да се скакачи узајамно не бију. Губи играч који не може да повуче потез.

Решење. Други има победничку стратегију. Он сваким потезом треба да постави скакача на поље симетрично у односу на центар табле оном пољу на које је Први поставио скакача својим претходним потезом. (Два централно симетрична поља на табли 8×8 су исте боје и скакачи на тим пољима не бију се узајамно.) На тај начин, све док Први играч има на располагању потез, има и Други.

Још једна победничка стратегија Другог састоји се у томе да он одговара на потезе Првог – симетрично у односу на праву која таблу дели на два дела 4×8 . Два скакача постављена осно симетричну један у односу на другог – не бију се. Дакле, Први ће бити тај који ће доћи у ситуацију да не може да повуче потез. Δ

У следећем примеру, победничка стратегија у игри заснива се на уочавању изгубљених и добијених (победничких) позиција.

Пример 3. На гомили се налази n жетона. Два играча наизменично узимају жетоне. Једним потезом играч може узети 1, 2 или 4 жетона. Победник је играч који узме последњи жетон. За које вредности n победу може да обезбеди Први играч, а за које Други?

Решење. Позиција игре одређена је бројем жетона на гомили. За неку позицију рећи ћемо да је *лоша* ако је број жетона дељив са 3; у противном рећи ћемо да је *добра*. Лако се види да су лоше позиције – изгубљене за играча на потезу. Заиста, из сваке такве позиције може се дозвољеним потезом доћи само у добру позицију. С друге стране, узимањем 1 или 2 жетона, увек се из добре позиције игра може превести у лошу. Завршна позиција (0 жетона на гомили) је лоша. Према томе, Први има ПС ако број n није дељив са 3, јер сваким својим потезом може да преведе игру у лошу позицију, а на потезу је увек кад је позиција добра. У противном (ако је број n дељив са 3), ПС има Други играч. Δ

Досадашњи примери наводе на помисао да се тражење победничких позиција ослања само на интуицију, и зато је, по правилу, компликовано. Зато ћемо сада

описати један општи метод, који нам омогућава налажење победничких позиција у многим играма, анализом игре од краја.

Пример 4. Имамо траку дужине $n + 1$ (са $n + 1$ поља). Поља су нумерисана слева надесно: $0, 1, 2, \dots, n$.

0	1	2	3	4	5	6	...				n
---	---	---	---	---	---	---	-----	--	--	--	-----

Слика 1

На n -том пољу постављен је жетон. Два играча наизменично померају жетон. Потез се састоји у померању жетона за 1, 2 или 3 места улево. Губи играч који не може да одигра потез (јер се жетон већ налази на првом пољу, означеном са 0). За које вредности n победничку стратегију има Први играч, а за које Други?

Решење. Почимо са анализом игре од краја. Ако се жетон налази на пољу 0, играч који је на потезу већ је изгубио. Означимо то поље знаком $-$ (сл. 1).

Ако се жетон налази на пољу са кога једним потезом може стати на поље 0, играч на потезу ће доћи са жетоном на поље 0 и победити. Означимо зато поља са којих се једним потезом доћи на поље 0 – знаком $+$. У нашем случају, то су поља 1, 2 и 3.

Претпоставимо сада да је жетон на пољу 4. Да ли играч који је на потезу у тој позицији – добија или губи? Јасно је да губи, јер сваким својим потезом долази на поље које је означено са $+$, после чега његов противник ставља жетон на поље 0. Зато ћемо поље 4 означити знаком $-$ (сл. 2).

Настављајући поступак, закључујемо да ће поља 5, 6 и 7 бити означена са $+$, поље 8 – са $-$ итд.

$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Слика 2

Закључујемо, такође, да су позиције означене са $-$, изгубљене, а оне означене са $+$, добијене за играча на потезу. Видимо да знаци $+$ и $-$ образују периодичан низ са периодом од 4 знака: $- + + +$, тј. на пољима чији је редни број дељив са 4 – стоји знак $-$, на осталима $+$. Дакле, Други играч има победничку стратегију ако је број n дељив са 4; у осталим случајевима победничку стратегију има Први играч. Δ

Да ли можемо једноставније описати правила по којима распоређујемо знаке $+$ и $-$, односно, одређујемо добијене и изгубљене позиције, не понављајући сваки пут расуђивање о томе, који играч добија? Одговор је: Да! Ево тих "златних" правила.

ЗЛАТНА ПРАВИЛА:

- (P1) Ако је позиција завршна (у којој не постоји легалан потез), означимо је са $-$.
- (P2) Ако се из посматране позиције може доћи у позицију означену са $-$, означимо је са $+$.
- (P3) Ако из посматране позиције сви потези воде у позиције означене са $+$, означимо је са $-$.

Неформалан приступ који смо до сада користили, изложићемо у строжијој форми у следећем одељку, где ћемо развити и неопходну теорију.

МАЛО ТЕОРИЈЕ

Игра је уређена четворка $G = (P, v_0, P_0, S)$, чије су компоненте:

- P – коначан skup чији су елементи *позиције игре*,
- $v_0 \in P$ – *почетна позиција игре*,
- $P_0 \subseteq P$ – *skup завршних позиција игре*,
- пресликавање $S : P \longrightarrow 2^P$, где је 2^P – партитивни skup skupa P , тј. skup свих подскупова skupa P .

Смисао уведених појмова је следећи: P је skup свих могућих позиција игре G . За $x \in P$, $S(x)$ је skup свих позиција игре G у које се може једним потезом доћи из позиције x . Ако је $y \in S(x)$, пишемо и $x \rightarrow y$, што значи да је $x \rightarrow y$ дозвољен *потез* у игри G . P_0 је skup завршних позиција, тј. $x \in P_0$ ако је $S(x) = \emptyset$. У *нормалној* игри, играч који својим потезом преведе игру у завршну позицију је победник, тј. играч који је на потезу кад је игра у завршној позицији (нема на располагању потез) – губи. У *обрнутој* игри, играч који својим потезом преведе игру у завршну позицију – губи.

Уколико друкчије не нагласимо, сва наша разматрања односиће се на нормалне игре. С друге стране, најчешће се свака обрнута игра може без већих проблема свести на њој еквивалентну нормалну игру.

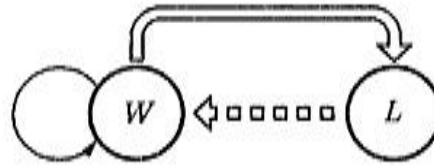
Игра може бити и без завршних позиција, тј. може бити $P_0 = \emptyset$. У том случају ниједан играч не може да победи, тј. игра се не може завршити у коначном броју потеза. Како је број позиција коначан, то значи да у игри долази до неограниченог понављања позиција. Такве игре за нас нису интересантне; зато ћемо се ограничити на изучавање игара које имају завршне позиције. И у игри са завршним позицијама може доћи до понављања потеза, тј. игра не мора да се заврши у коначном броју потеза.

Партија игре G је низ позиција у коме је први члан – почетна позиција. Ако је то коначан низ облика $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ где је v_0 почетна, а v_k нека завршна позиција, онда је партија *одлучена*, тј. један од играча је постигао победу. Користимо још и запис у облику низа потеза $v_0 \rightarrow v_1, v_1 \rightarrow v_2, \dots, v_{k-1} \rightarrow v_k$ или скраћено $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$, при чему је $v_i \rightarrow v_{i+1}$ потез Првог играча ако је i паран, а Другог – ако је i непаран број ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1$). Очигледно, ако је k непаран број, победник је Први играч, у противном – Други.

Игра је *ациклична* ако ни у једној партији не може доћи до понављања позиција. Како је број позиција коначан, свака ациклична игра се мора завршити у коначном броју потеза победом једног играча. (Лако се види да у ацикличној игри мора да постоји бар једна завршна позиција.)

Стратегија у игри $G = (P, v_0, P_0, S)$ је пресликавање $s : P \setminus P_0 \longrightarrow P$, такво да је за сваку позицију $x \in P \setminus P_0$, $s(x) \in S(x)$. Кажемо да неки играч у игри G примењује стратегију s , ако он у позицији v увек игра потез $v \rightarrow s(v)$. Кажемо да

је *s* **победничка стратегија (ПС)** за неког играча ако он примењујући стратегију *s* постиже победу без обзира на то како игра његов противник.



Слика 3

Нека су L и W подскупови скупа позиција P , такви да је $L \cup W = P$ и $L \cap W = \emptyset$. За L кажемо да је **језгро игре** (P, v_0, P_0, S) , ако важи (сл. 3):

- (L1) За било које две позиције u и v из L , не постоји потез $u \rightarrow v$;
- (L2) За сваку позицију u из W , постоји потез $u \rightarrow x$, где је x нека позиција из L .

Нема свака игра језгро. Јасно је, међутим, да важи следеће тврђење:

Теорема 1. Ако игра има језгро, онда све завршне позиције припадају језгру. $\square$

Језгро игре се може окарактерисати помоћу карактеристичне функције скупа. Нека је $X \subseteq A$, где је A произвољан скуп. Пресликавање $\kappa_X : A \rightarrow \{0, 1\}$, дефинисано са

$$\kappa_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in X \\ 0, & \text{ако } x \notin X \end{cases}$$

назива се **карактеристична функција** скупа X .

Теорема 2. Потребан и довољан услов да $L \subseteq P$ буде језгро игре (P, v_0, P_0, S) јесте да за карактеристичну функцију скупа L важи

$$\kappa_L(x) = 1 - \max_{y \in S(x)} \kappa_L(y). \quad (*)$$

(Узимамо да је $\max_{y \in S(x)} \kappa_L(y) = 0$ ако је $S(x) = \emptyset$.)

Доказ. Нека је L језгро. Тада : $\kappa_L(x) = 1 \Rightarrow x \in L \Rightarrow \max_{y \in S(x)} \kappa_L(y) = 0$, а $\kappa_L(x) = 0 \Rightarrow x \notin L \Rightarrow \max_{y \in S(x)} \kappa_L(y) = 1$. Дакле, важи (*).

Обрнуто, претпоставимо да важи (*). Тада: $x \in L \Rightarrow \kappa_L(x) = 1 \Rightarrow \max_{y \in S(x)} \kappa_L(y) = 0 \Rightarrow S(x) \cap L = \emptyset$, а $x \notin L \Rightarrow \kappa_L(x) = 0 \Rightarrow \max_{y \in S(x)} \kappa_L(y) = 1 \Rightarrow S(x) \cap L \neq \emptyset$. Дакле, испуњени су услови (L1) и (L2), што значи да је L језгро. $\square$

Напомена. Златна правила, која смо навели у 2. одељку, уствари дају поступак за налажење карактеристичне функције скупа изгубљених позиција, тј. језгра игре. Треба само заменити знак $-$ са 1 , а $+$ са 0 , да бисмо добили карактеристичну функцију језгра.

Формулирамо сада основну теорему у овом чланку.

Теорема 3. Ако игра $G = (P, v_0, P_0, S)$ има језгро L и ако $v_0 \notin L$, онда Други играч нема ПС; ако је, међутим, $v_0 \in L$, онда Први играч нема ПС.

Доказ. Ако је $v_0 \in W$, према (L2) постоји потез којим Први играч може превести игру у позицију из језгра (сл. 3). На основу (L1), Други играч, уколико уопште има на располагању потез, мора својим потезом превести игру у позицију из W . Дакле, Први је увек на потезу кад позиција не припада језгру; према томе, он никада неће доћи у ситуацију да нема на располагању потез. Придржавајући се стратегије да увек својим потезом преводи игру у позицију из језгра, он не може да изгуби.

Ако је $v_0 \in L$, онда Први играч, уколико уопште има на располагању потез, мора да преведе игру у неку позицију v_1 која не припада језгру. Наставак игре је сада уствари игра $G_1 = (P, v_1, P_0, S)$, са почетном позицијом v_1 (која не припада језгру), у којој је Први играч – Други играч из игре G . Одатле следи тврђење. $\square$

Пример 5. На гомили се налази 12 жетона. Једним потезом број жетона може се смањити или повећати за било који број који је прави делитељ броја жетона на гомили. При томе број жетона на гомили не сме да постане већи од 100. Победник је играч после чијег потеза остане тачно један жетон.

Решење. Језгро игре сачињавају непарне позиције (тј. позиције са непарним бројем жетона). Заиста, из сваке позиције са парним бројем жетона, узимањем или додавањем једног жетона (1 је делитељ сваког броја), може се стићи у непарну позицију. С друге стране, сваким потезом из позиције са непарним бројем жетона може се доћи само у позицију са парним бројем жетона (јер су сви делитељи непарног броја – непарни). Како је почетна позиција парна (број 12), тј. не припада језгру, Први играч ће увек имати на располагању потез, што значи да Други нема ПС. $\triangle$

Из Теореме 3 не следи да у игри из Примера 5 Први играч има ПС. Заиста, у овом случају и нема, јер у свакој позицији која није завршна, Други може додати 1, а ако то није могуће (у позицији 100) – одузети 1, и тиме спречити Првог да следећим потезом достигне завршну позицију.

АЦИКЛИЧНЕ ИГРЕ

Ограничићемо се на разматрање ацикличних игара, које су за нас најинтересантније. Оне имају веома важно својство, изражено следећим тврђењем.

Теорема 4. Свака ациклична игра има тачно једно језгро.

Доказ. Посматрајмо скупове

$$\begin{aligned} P_0 &= \{x | x \in P, S(x) = \emptyset\}, \\ P_1 &= \{x | x \notin P_0, S(x) \subseteq P_0\}, \\ P_2 &= \{x | x \notin P_0 \cup P_1, S(x) \subseteq P_0 \cup P_1\}, \end{aligned}$$

итд. Игра (P, v_0, P_0, S) је коначна и ациклична. Према томе, скупова P_k има коначно много, и $x \in P_k$ ако и само ако најдужи низ потеза из позиције x у

неку завршну позицију (из P_0) садржи k потеза. Дакле, скупови P_k представљају једно разбијање скупа P . Сада се могу, корак по корак, на основу Теореме 2, одредити вредности карактеристичне функције језгра, тако што се оне одређују редом у скуповима $P_0, P_1, P_2, \dots$ итд. Из конструкције разбијања јасно је да је вредност карактеристичне функције једнозначно одређена за сваку позицију. Према томе, језгро је јединствено и састоји се од позиција у којима конструисана карактеристична функција има вредност 1. $\square$

Као последицу Теореме 3, добијамо одговарајуће јаче тврђење за ацикличне игре.

Теорема 5. Ако је $G = (P, v_0, P_0, S)$ ациклична игра са језгром L и $v_0 \notin L$, онда Први играч има ПС; ако је, међутим, $v_0 \in L$, онда Други играч има ПС.

Доказ. У ацикличној игри, један од играча увек постиже победу. Ако $v_0 \notin L$, према Теорему 3, Други играч нема ПС; према томе, Први има ПС. Слично, ако је $v_0 \in L$, Други има ПС. $\square$

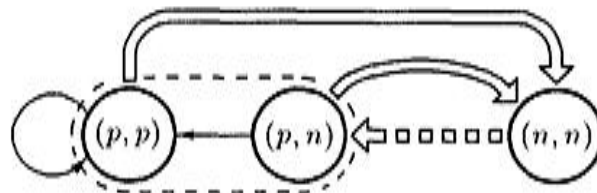
Лако се види да су све игре које смо разматрали у примерима 2. одељка – ацикличне, јер у њима, очигледно, нема понављања позиција. У свакој од тих игара, лако се уочава језгро.

У Примеру 3 језгро сачињавају позиције у којима је број жетона дељив са 3.

У Примеру 4 језгро сачињавају позиције које смо означили са $-$.

Пример 6. На једној гомили налази се M жетона, на другој – N . Играч који је на потезу једну гомилу склања а другу разбија на две. Ко не може да повуче потез (јер је на обе гомиле остао по један жетон) – губи. Који играч има ПС?

Решење. Свака позиција припада једном од следећа три типа (сл. 4):



Слика 4

(p, p) – на свакој гомили је паран број жетона;

(p, n) – на једној гомили је паран а на другој непаран број жетона;

(n, n) – на свакој гомили је непаран број жетона.

Завршна позиција $(1, 1)$ припада типу (n, n) .

Лако се уочава да се из сваке позиције типа (p, p) или (p, n) може једним потезом доћи у позицију типа (n, n) . Треба само парну гомилу поделити на две непарне, а ону другу odstrанити.

С друге стране, из позиције типа (n, n) , уколико је $n > 1$, сваки потез води у позицију типа (p, n) . Према томе, језгро сачињавају позиције типа (n, n) . Игра је, очигледно, ациклична.

Дакле, ако је бар један од бројева M и N паран, Први играч има ПС; у противном – Други. Δ

Пример 7. На гомили се налази n жетона. Играчи наизменично узимају жетоне. Једним потезом може се узети p^k жетона, где је p прост, а k ненегативан цео број. Победник је играч који покупи последњи жетон.

Решење. Језгро сачињавају позиције у којима је број жетона дељив са 6. Према томе, ако n није дељив са 6, ПС има Први играч. Он увек треба да игра тако да на гомили остане број жетона дељив са 6. То увек може постићи јер је сваки природан број мањи од 6 или прост или је степен простог броја. С друге стране, после сваког потеза Другог играча, број преосталих жетона није дељив са 6 (јер број дељив са 6 није степен простог броја). Ако је n дељив са 6, ПС има Други играч. Δ

За неке игре могуће је доказати постојање ПС за једног од играча, а да при томе не знамо да нађемо ниједну. Илустроваћемо то следећим примером:

Пример 8. Два играча наизменично исписују на табли природне бројеве не веће од n . При томе није дозвољено написати делитељ неког раније написаног броја. Који играч има ПС?

Решење. Доказаћемо да за сваки природан број n , ПС има Први играч. За мале бројеве n то се може показати непосредним навођењем неке ПС.

За $n = 10$, на пример, Први играч има ПС, која се састоји у следећем. Он прво пише број 6. Преостали бројеви који нису делитељи од 6, могу се разбити на три пара: (4, 5), (7, 9), (8, 10). Као одговор на сваки потез Другог играча, Први исписује број из истог пара.

Доказаћемо да Први играч има ПС, за сваки природан број n . Нека је G игра описана у поставци задатка. Посматрајмо нову игру G_1 , са истим правилима изузев што није дозвољено писати број 1. (У игри G јединица може да се напише само као први потез Првог играча). Ако у игри G_1 Први играч има ПС, он је примењује, јер је она, очигледно, ПС и у игри G . У противном, он прво пише број 1, а затим примењује ПС Другог играча у игри G_1 . Δ

Приметимо да доказ из претходног примера не даје и поступак за налажење ПС. У општем случају, ПС за игру из Примера 9 није до данас пронађена.

ЗАДАЦИ

1. На столу се налази 60 жетона. Једним потезом број жетона може се смањити за било који број који је делитељ броја жетона на гомили. Губи играч који узме последњи жетон.
2. На столу се налази
 - (а) 1000 жетона;
 - (б) n жетона.

Играчи наизменично узимају жетоне, при чему број жетона који се могу узети једним потезом мора бити степен двојке ($1 = 2^0$). Победник је играч који покупи последњи жетон.

3. Испитати игру из претходног примера, с том разликом што се једним потезом може узети број жетона који је
(а) степен тројке; (б) степен четворке.
4. У првој гомили налази се 50 жетона, у другој – 60 и у трећој – 70. Потез се састоји у разбијању сваке гомиле која има бар два жетона, на две мање (непразне). Победник је играч после чијег потеза је у свакој гомили само по један жетон. Који играч има ПС?
5. Дате су две гомиле жетона:
(а) 100 жетона и 201 жетон; (б) 101 жетон и 201 жетон.
Једним потезом дозвољено је смањити број жетона у једној гомили за број који је делитељ броја жетона у другој гомили. Победник је играч који покупи последњи жетон. Који играч има ПС?
6. На крајњим пољима траке 1×30 стоји по један жетон. Два играча наизменично померају сваки свој жетон за једно или два поља у било ком смеру. Противнички жетон се не сме прескакати. Губи играч који нема на располагању потез. Који играч има ПС?
7. Два играча играју следећу игру. На табли је написан број 2. Сваки играч својим потезом замењује број n написан на табли – бројем $n+d$, где је d било који прави делитељ од n (мањи од n). Губи играч који на табли напише број већи од 1997. Доказати да Први играч може да обезбеди победу.
8. На прва три поља (слева) траке 1×20 стоји по један жетон. Једним потезом дозвољено је преместити било који жетон на произвољно слободно поље удесно, не прескачући при томе друге жетоне. Губи играч који не може да повуче потез.
9. На прва три поља траке 1×20 стоји по један жетон. Једним потезом дозвољено је преместити било који жетон на десно суседно поље, уколико је оно слободно, или, ако је то поље заузето, а следеће иза њега слободно, преместити жетон на то слободно поље. Губи играч који не може да повуче потез.
10. У врсту је исписано n минуса. Два играча наизменично преправљају по један или по два суседна минуса у плус. Победник је играч који преправи последњи минус.
(а) Који играч има ПС?
(б) Који играч има ПС ако минуси нису исписани у врсту, него по кружници?
11. На кружници је дато 28 тачака. Два играча наизменично цртају тетиве са крајевима у датим тачкама, при чему две тетиве не смеју да се секу у унутрашњости кружнице. Губи играч који не може да повуче потез.
(а) Који играч има ПС?
(б) Који играч има ПС уз додатни услов да две тетиве не смеју да имају ни заједничку крајњу тачку?
12. На кружници је распоређено n тачака, нумерисаних редом бројевима 1, 2, ..., n . Играчи А (Први) и В (Други) наизменично цртају по једну тетиву која спаја две тачке означене бројевима исте парности. При томе, тетива не

сме имати заједничких тачака (ни крајњих) са раније нацртаним тетивама. Победник је играч који нацрта последњу тетиву. Који играч има ПС?

13. Два играча наизменично ломе чоколаду. Почињу од $m \times n$ -чоколаде, тј. чоколаде која је са $m - 1$ хоризонталних и $n - 1$ вертикалних жлебова подељена на $m \times n$ делова. Сваким потезом, играч преломи комад на два правоугаона дела, један део поједе, а други предаје противнику да повуче потез. Губи играч који нема шта да игра, јер је добио комад 1×1 .

14. У угаоном пољу табле $m \times n$ стоји топ. Два играча га наизменично померају по хоризонтали или по вертикали. Топ не сме доћи на неко поље нити прећи преко њега ако је раније већ био на њему или прешао преко њега (путања топа не сме бити самопресецајућа). Губи играч који не може да повуче потез.

(а) Који играч има ПС?

(б) Који играч има ПС ако топ на почетку није у угаоном пољу?

15. Два играча играју на табли

(а) 7×25 ; (б) 7×26 .

Једним потезом може се обојити једно поље или неколико необојених поља која образују квадрат. Победник је играч који обоји и последње поље.

16. У равни је дато 1999 тачака. Играчи наизменично вуку потезе. Једним потезом играч црта линију која спаја неке две дате тачке. При томе из сваке тачке могу излазити највише две линије и линије не смеју да се секу. Који играч има ПС?

17. На столу се налазе два жетона. Играчи наизменично повећавају број жетона. Једним потезом дозвољено је додати бар један жетон, али мање од укупног броја жетона који се већ налазе на столу. Победник је играч после чијег потеза се на столу нађе тачно

(а) 1000 жетона; (б) n жетона.

18. Два играча играју игру са коначним бројем позиција, при чему за сваку позицију p важи да је број позиција у које се може прећи из p једнак броју позиција из којих се може прећи у p . Губи играч који не може да повуче потез. Доказати да број позиција изгубљених за Првог играча није већи од половине броја свих позиција.

19. (Ратко Тошић) Полазећи од броја 2 играчи наизменично повећавају број, при чему се једним потезом број може повећати за 1 или удвостручити. Који играч има ПС ако

(а) губи играч који пређе дати број n ;

(б) добија играч који пређе дати број n ?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ИЗ ЧЛАНКА "МАТЕМАТИКА И ИГРЕ", (СТР. 3)

1. Позицију игре нека представља број жетона. Очигледно је да ће у овој игри победити играч који добије број 1. Дакле, дату игру можемо свести на игру у којој је победник играч после чијег потеза на гомили остане 1 жетон. Позиције представљене непарним бројем жетона изгубљене су за играча на потезу. Остале су добијене (победничке). Заиста, из сваке позиције са непарним бројем жетона може се доћи само у позицију са парним бројем жетона (јер су сви делитељи непарног броја – непарни). С друге стране, смањењем за 1 (1 је делитељ сваког природног броја), од сваког парног броја се може добити непаран. Следи да само после потеза Првог играча може настати позиција са непарним бројем жетона; према томе, и завршна позиција. Дакле, победничку стратегију има Први играч, и она се састоји у томе да сваким потезом узима тачно један жетон.
2. Лако се проверава да језгро игре сачињавају позиције које се представљају бројевима дељивим са 3. Дакле, ПС има Први играч ако број n није дељив са 3; у противном – Други.
3. (а) Ако је n непаран број, онда ће после сваког потеза Првог остати паран, а после сваког потеза Другог – непаран број жетона. Дакле, Први има ПС. Слично видимо да за паран број n , Други има ПС.
(б) Први има ПС, ако број n при дељењу са 5 даје остатак 1, 3 или 4. У том случају он, узимајући 1 или 4 жетона, после сваког свог потеза може да остави на столу број жетона који при дељењу са 5 даје остатак 0 или 2. Лако се види да Други играч, било којим својим потезом, мора да добије број који при дељењу са 5 даје остатак 1, 3 или 4.
Други има ПС ако n при дељењу са 5 даје остатак 1, 3 или 4.
4. Први. Језгро сачињавају позиције у којима најбројнија гомила садржи $2^k - 1$ жетона, где је k природан број. Према томе, Први играч може да разбије прве две гомиле било како а трећу на једну гомилу од 63 и другу од 7 жетона.
5. (а) Први. Он може постићи да после сваког његовог потеза на обе гомиле остане непаран број жетона, док Други из такве позиције може прећи само

у позицију са гомилама различите парности. Други играч ће бити принуђен да испразни једну гомилу, после чега ће Први да испразни другу гомилу.

(б) Други, јер Први играч својим првим потезом ствара позицију добијену за Другог.

6. Први. Првим потезом он треба да помери свој жетон за једно поље, тако да између жетона остане 27 слободних поља. После тога, на сваки потез Другог одговара на следећи начин: ако се Други играч приближава за једно поље, Први ће се приближити за два; ако се Други приближава за два поља, Први ће за једно. Уколико се Други играч удаљава, Први иде за њим за исти број поља, тако да је број поља између жетона увек дељив са 3.
7. Сваким потезом Први играч број написан на табли повећава за 1. (После сваког потеза Другог, на табли мора бити паран број.)
8. Претпоставимо да су поља траке нумерисана слева удесно бројевима од 1 до 20. Првим потезом Први играч премешта жетон са поља 3 на поље 20. После тога, Други играч може да игра само са жетоном који се на почетку налази на пољу 2. Сваки пут кад он премести тај жетон на поље k , Први играч премешта онај други жетон на поље $k - 1$. На тај начин Први играч постиже победу.
9. Други играч има ПС. Наиме, лако се види да он после сваког свог потеза може постићи да жетони буду на три узастопна поља траке.
10. (а) Први. Он треба да прецрта средишњи минус, ако је n непаран, а два средишња, ако је n паран број. После тога игра симетрично у односу на потезе Другог.
(б) Други, ако је $n > 2$. Први играч својим првим потезом раскида кружни ланац, после тога Други игра као Први у случају (а).
11. (а) Без умањивања општости може се претпоставити да су дате тачке темена правилног многоугла. Први играч има ПС. Он првим потезом треба да споји две дијаметрално супротне тачке, тј. тако да са једне и друге стране нацртане тетиве остане подједнако датих тачака. Затим на сваки потез Другог играча одговара симетрично у односу на центар кружнице. Описану стратегију Први играч може да примени за произвољан паран број датих тачака.
(б) Први има исту ПС као под (а).
12. Доказаћемо да ако је n непаран број или дељив са 4, ПС има Први играч, док за $n = 4k + 2$ (k цео број), ПС има Други играч.

Погодно је да узмемо да су посматране тачке у теменима правилног n -угла и да су тачке означене парним бројевима – обојене црвено, а оне друге – плаво.

У свим случајевима, основна идеја победничке стратегије је коришћење симетрије.

За $n = 4k$, Први играч првим потезом црта један пречник, а затим на сваки потез Другог играча одговара цртањем тетиве симетричне у односу на тај пречник. То је могуће, јер ће после сваког потеза Првог играча позиција бити симетрична у односу на нацртани пречник. Овде је важно то што су дијаметрално супротне тачке увек исте боје, као и тачке симетричне у односу на пречник.

За $n = 4k + 2$, ПС Другог играча састоји се у томе да на сваки потез Првог одговара цртањем тетиве симетричне у односу на центар кружнице. Овде је важно то што су две дијаметрално супротне тачке увек различито обојене.

Ако је n непаран број, онда су две суседне тачке, означене бројевима 1 и n – плаве боје. За $n = 4k + 1$, Први играч обезбеђује победу на тај начин што првим потезом споји плаве тачке означене са 1 и 3,водећи тиме игру на случај $n = 4(k-1)+2$, у којој сада Први играч игра као Други у претходном случају.

За $n = 4k + 3$, Први играч својим првим потезом спаја плаве тачке означене са $2k+1$ и $2k+3$. Ако замислимо да су преосталих $4k$ тачака распоређене на кружници као темена правилног $(4k)$ -угла, онда се лако види да ће сваке две дијаметрално супротне тачке бити различито обојене. Због тога, играч који у овој позицији почиње као Други (а то је Први играч у нашој игри) може да обезбеди победу. Сваки пут кад Други играч нацрта тетиву, Први ће нацртати њој симетричну тетиву у односу на центар замишљене кружнице.

13. Ако је $m \neq n$, ПС има Први играч. Он сваки пут ломи чоколаду на два дела, од којих је један квадратног облика. Квадратни део предаје противнику, а онај други једе.

Ако је $m = n$, ПС има Други играч.

14. (а) Први. Он треба да помери топа на други крај табле паралелно дужи страници. Ако је $m = n$, онда је свеједно у ком правцу. После тога, Други мора играти топом паралелно краћој страници табле и зауставити се на неком пољу на ивици краће стране. Први после тога поново заокреће за 90° и иде до рубног поља друге супротне краће стране. Уопште, после сваког потеза Првог, добијају се један или два правоугаоника слободних поља; Други мора да изабере један од њих и да помери топа на неко рубно поље на краћој страници. Ако је ширина тога правоугаоника једнака 1, Први добија у следећем потезу. Први увек има на располагању потез, а како се ширине правоугаоника стално смањују, Други у једном тренутку неће имати шта да игра.

(б) Први. Стратегија је иста као у претходном случају.

15. (а) Први играч има ПС. Првим потезом он боји квадрат 7×7 у центру табле, који остатак табле разбија на две табле 7×9 . Затим на сваки потез Другог играча одговара симетрично у односу на центар табле или симетрично на осу симетрије која полови дуже странице табле.

(б) Први играч има ПС. Првим потезом он боји квадрат 6×6 , који је симетричан у односу на осу симетрије која полови дуже странице табле.

Затим на сваки потез Другог играча одговара симетрично у односу на ту осу.

16. Доказаћемо индукцијом општије тврђење, тј. да Први играч има ПС за сваки природан број облика $4k + 3$.

За $k = 0$, тврђење је очигледно тачно.

Нека је $k > 0$. Први играч својим првим потезом спаја неке две тачке A и B . У наставку игре, Први и даље сваким својим потезом спаја линијом неке две изоловане тачке, све док тако поступа и Други играч. Други играч ће бити први принуђен да одступи од таквог начина игре, бирајући једну од следеће две могућности:

(а) Он спаја неку изоловану тачку C са крајњом тачком B неке раније нацртане линије AB . У том случају, Први спаја линијом тачке A и C тако да и у унутрашњости и у спољашњости криволинијског троугла ABC буде поједнако линија и поједнако изолованих тачака. Даље Први применjuje симетричну стратегију, тј. сваки пут кад Други игра у спољашњости троугла ABC , Први вуче одговарајући потез у унутрашњости, и обрнуто.

(б) Други спаја крајње тачке B и C две раније нацртане линије AB и CD . У том случају, Први спаја друге крајње тачке тих линија и на тај начин добија криволинијски четвороугао $ABCD$. При томе, он увек може постићи да се у унутрашњости тога "четвороугла" нађу све претходно нацртане линије, осим једне, а да све изоловане дате тачке остану у спољашњости. Лако се види да ће у унутрашњости криволинијског четвороугла бити паран број линија. У наставку игре, сваки пут кад Други споји крајеве неке две линије у унутрашњости "четвороугла", Први ће спојити друге крајеве истих линија и на тај начин добити нови "четвороугао"; при томе ће пазити да у унутрашњости тога четвороугла нема других линија (или да их има паран број). Како је у спољашњости првог формираног "четвороугла" број тачака облика $4k + 3$, при чему су неке две спојене, а Други играч је на потезу, Први добија по претпоставци индукције.

17. (а) Анализом утврђујемо да језгру припадају позиције: 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3. Дакле, Први играч има ПС.

(б) Позиције језгра могу се лако одредити на основу бинарног записа броја n . Наиме, бинарни записи позиција језгра добијају се из бинарног записа броја n одстрањивањем једне по једне цифре са десне стране. На пример, у случају из тачке (а), из завршне позиције $1111101000_2 = 1000_{10}$, добијамо редом позиције језгра: $111110100_2 = 500_{10}$, $11111010_2 = 250_{10}$, $1111101_2 = 125_{10}$, $111110_2 = 62_{10}$, $11111_2 = 31_{10}$, $1111_2 = 15_{10}$, $111_2 = 7_{10}$, $11_2 = 3_{10}$.

Одавде видимо да почетна позиција 2 припада језгру ако и само ако бинарни запис броја n почиње са 10, тј. ако је

$$2^k \leq n < 2^k + 2^{k-1},$$

за неки природан број k . У том случају Други играч има ПС. У противном, ПС има Први играч.

18. Нека је x број изгубљених, а y број добијених позиција за Првог играча. Претпоставимо да је $x > y$. Доказаћемо да онда постоје две изгубљене позиције p и q , такве да се из p може једним потезом прећи у q . Заиста, у противном има nx позиција суседних изгубљеним позицијама, при чему је свака рачуната највише n пута. (Овде је n константа наведена у условима задатка, тј број позиција у које се може прећи из произвољне позиције p .) Следи да је $y \leq \frac{nx}{n} = x$, што је контрадикција.
19. Означимо са I игру у случају (а), а са I' – у случају (б). Рећи ћемо да је природан број n *добар* ако је он збир различитих непарних степена двојке или је сам непаран степен двојке. Слично, за број n кажемо да је *леп* ако је он збир различитих парних степена двојке или је сам паран степен двојке.
- (а) Доказаћемо да Други има ПС ако је n добар број, у противном – Први. Ако је n непаран (у ком случају није добар), ПС Првог играча је врло једноставна. Он сваким потезом додаје јединицу и на тај начин увек добија непарне бројеве, док Други сваким својим потезом мора да добије паран број. На тај начин, све док Други има на располагању потез, има и Први.
- За парне бројеве n , доказ дајемо индукцијом по дужини њиховог бинарног записа. За првих неколико бројева лако се проверава да тврђење важи. Приметимо прво да су бројеви $4k$ и $4k + 2$ добри ако и само ако је то и број k . (Бинарни записи тих бројева добијају се тако што се бинарном запису броја k допише 00, односно 10.) Сад је довољно доказати да играч који има ПС за $n = k$, има ПС и за $n = 4k$ и $n = 4k + 2$.
- Ако је $n = 4k$ или $n = 4k + 2$, играч X који има ПС за $n = k$, увек може постићи да његов противник прескочи тај број и падне у интервал $[k + 1, 2k]$. После тога играч X удвостручавањем добија паран број из интервала $[2k + 2, 4k]$. Даље, сваким потезом играч X додаје јединицу све док тако игра и његов противник, који ће бити принуђен да пређе n , у крајњем случају након што играч X добије n .
- (б) Доказаћемо да Други има ПС ако је n леп број, у противном – Први. Лако се види да су бројеви $2k$ и $2k + 1$ лепи ако и само ако је број k добар. (Бинарни записи тих бројева добијају се тако што се бинарном запису броја k допише 0, односно 1.)
- Сада је довољно доказати да ако неки играч има ПС у игри I за $n = k$, има је и у игри I' за $n = 2k$ и $n = 2k + 1$. Претпоставимо да играч X има ПС у игри I за $n = k$. То значи да он може принудити противника да пређе број k и добије неки број из интервала $[k + 1, 2k]$, после чега играч X удвостручавањем добија број не мањи од $2k + 2$.