EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 2-10

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe

Mehmed Nurkanović[a], Zehra Nurkanović[a]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se, nakon razmatranja osnovnih osobina eksponencijalne funkcije, detaljnije razmatraju eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe, s i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednadžbi i nejednadžbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Slično kako je to pokazano u [5], u slučaju iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi, eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe su također poprilično nezgodne za ispitivanje. I za njih naravno ne postoji opći postupak rješavanja. Tako smo u mogućnosti riješiti samo neke relativno jednostavne tipove eksponencijalnih jednadžbi i nejednadžbi. U ovom radu bit će date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednadžbama i nejednadžbama s i bez parametara. Budući da se eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe vrlo često pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola, to nam daje razlog više za motivaciju pri pisanju ovog rada. Poseban problem je, kao i kod drugih jednadžbi elementarne matematike, kad se zahtijeva diskusija rješenja eksponencijalne jednadžbe ili nejednadžbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

Kako bi kvalitetno mogao pratiti naredno izlaganje, čitatelj treba dobro da poznaje teoriju i primjene kvadratnih jednadžbi i nejednadžbi, kao i iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi (v. [1–6]). Prije nego pristupimo detaljnijem proučavanju ovih jednadžbi i nejednažbi, upoznajmo se prvo s eksponencijalnom funkcijom i njenim osobinama, koje će nam biti od velike koristi kasnije.

Definicija 1.1. *Funkcija* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$, $f(x)=a^{x}$, $0<a\neq 1$, *naziva se* ***eksponencijalnom funkcijom.***

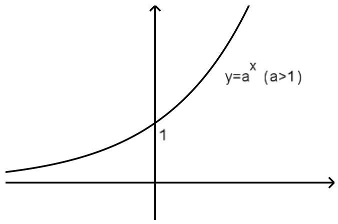
Osobine eksponencijalne funkcije:

a) Funkcija $y=a^x$ je definirana za svako x u skupu realnih brojeva.

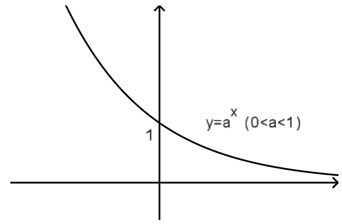
b) Funkcija $y=a^x$ je pozitivna za svako realno x $\quad (a^x>0\,,\quad x\in\mathbb{R})$.

c) Ako je $a>1$, tada $x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$, tj. funkcija je monotono rastuća. Ako je $0<a<1$, tada $x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$, to jest funkcija je monotono opadajuća. Međutim, uočimo sljedeće: ako je $a=1$, tada je $a^x=1^x=1$ za svako x, tj. funkcija ima konstantnu vrijednost, pa nije zanimljiva za ispitivanje zbog činjenice da nije injekcija, tj. nema inverznu funkciju. To je razlog zbog čega je u definiciji eksponencijalne funkcije nametnuto ograničenje $a\neq 1$.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: eksponencijalna funkcija, eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe
Rad preuzet: *Rad preuzet:* 30. septembar 2020.
Kategorizacija: *Stručno-metodički rad*



(a)



(b)

Slika 1: Grafici eksponencijalnih funkcija: (a) $a > 1$, (b) $0 < a < 1$.

d) Ako je $x = 0$, tada je $a^x = 1$ za sve $a > 0$.

e) Za $a > 1$ u intervalu $(-\infty, 0)$ je $0 < a^x < 1$, a za $0 < a < 1$ je $a^x > 1$.

U intervalu $(0, +\infty)$ za $a > 1$ je $a^x > 1$, a za $0 < a < 1$ je $0 < a^x < 1$.

2. Eksponencijalne jednadžbe i nejednažbe - teorijski osvrt

Definicija 2.1. *Jednadžbu kod koje se nepoznanica nalazi u eksponentu nazivamo **eksponencijalnom jednadžbom**.*

Naravno, u općem slučaju eksponencijalnu jednadžbu nije moguće riješiti. To se može učiniti samo s jednostavnijim oblicima tih jednadžbi.
Budući da je eksponencijalna funkcija bijektivna, to vrijedi

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad (0 < a \neq 1) \iff x_1 = x_2.$$

Na ovoj činjenici je zasnovano rješavanje najjednostavnijih eksponencijalnih jednadžbi. Naime, datu eksponencijalnu jednadžbu je najčešće moguće svesti na oblik

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (0 < a \neq 1)\,, \tag{1}$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$f(x) = g(x)\,,$$

vodeći, naravno, računa i o definicionim područjima funkcija f i g.
Međutim, često se u zadacima pojavljuju eksponencijalne jednadžbe, gdje se nepoznanica nalazi i u bazi stepena. Najjednostavniji oblik takve jednadžbe je

$$[a(x)]^{f(x)} = [a(x)]^{g(x)} \quad (a(x) > 0)\,. \tag{2}$$

Uočimo prvo da je definiciono područje ove jednadžbe ustvari presjek definicionih područja funkcija f, g i a, tj. $DP = D(f) \cap D(g) \cap D(a)$. Tada vrijedi

$$(2) \iff \{x \in DP \ \wedge\ [a(x) = 1 \ \vee\ (0 < a(x) \neq 1 \ \wedge\ f(x) = g(x))]\}\,.$$

Definicija 2.2. *Nejednadžbu kod koje se nepoznanica nalazi u eksponentu nazivamo **eksponencijalnom nejednadžbom**.*

Eksponencijalne nejednadžbe se u općem slučaju ne mogu riješiti. Naime, moguće je riješiti samo neke jednostavnije klase nejednadžbi i tada su postupci slični kao prilikom rješavanja eksponencijalnih jednadžbi. Na osobini **c)** eksponencijalne funkcije zasnovano je rješavanje najjednostavnijih eksponencijalnih nejednadžbi. Naime, data eksponencijalna nejednadžba najčešće se može svesti na oblik:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

i) Ako je $a > 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) < g(x).$$

ii) Ako je $0 < a < 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) > g(x).$$

Pri tome, naravno, moramo voditi računa o definicionom području date nejednadžbe kao presjeku definicionih područja funkcija f i g

Razmotrimo sada i eksponencijalne nejednadžbe gdje se nepoznanica nalazi i u bazi stepena:

$$[a(x)]^{f(x)} < [a(x)]^{g(x)} \qquad (a(x) > 0) \tag{3}$$

i

$$[a(x)]^{f(x)} \leq [a(x)]^{g(x)} \qquad (a(x) > 0)\,. \tag{4}$$

Definiciono područje u slučaju obje nejednadžbe je presjek definicionih područja funkcija f, g i a, to jest $DP = D(f) \cap D(g) \cap D(a)$. Vrijedi

$$(3) \iff \left\{ x \in DP \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} (\ a(x) > 1 \ \wedge \ f(x) < g(x) \ ) \\ \vee \\ (\ 0 < a(x) < 1 \ \wedge \ f(x) > g(x) \ ) \end{array} \right] \right\} \tag{5}$$

i

$$(4) \iff \left\{ x \in DP \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} (\ a(x) > 1 \ \wedge \ f(x) \leq g(x) \ ) \\ \vee \\ (\ 0 < a(x) < 1 \ \wedge \ f(x) \geq g(x) \ ) \\ \vee \\ a(x) = 1 \end{array} \right] \right\}. \tag{6}$$

2.1. Primjeri zadataka bez parametara

Primjer 2.3. *Riješiti jednadžbu*

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Rješenje: Data se jednadžba može napisati u obliku

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 6^{2x}.$$

Nakon dijeljenja sa 6^{2x}, dobijamo

$$3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{9}{6}\right)^{2x} = 5 \iff 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 5.$$

Uvedimo smjenu: $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$. Imamo

$$3t + 2 \cdot \frac{1}{t} = 5 \iff 3t^2 - 5t + 2 = 0 \iff \left(t = \frac{2}{3} \vee t = 1\right).$$

$R : x = \frac{1}{2} \vee x = 0.$ □

Primjer 2.4. *Riješiti jednadžbu*

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1}. \qquad (7)$$

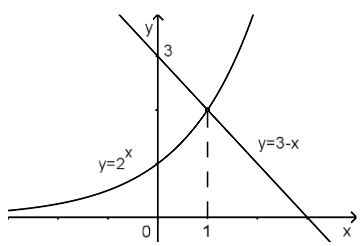
Rješenje: $DP : x \geq 0$. Uz ovaj uvjet, imamo

$$\begin{aligned}
(7) \iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} - 3^{\sqrt{x}+x} + 9 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 9^x = 0 \\
\iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} + 9 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}+x} - 3^{2x} = 0 \\
\iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right) - 3^x \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right) = 0 \\
\iff & \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right)\left(9 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^x\right) = 0 \\
\iff & 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^x = 0 \text{ (jer je } 3^x + 3^{\sqrt{x}} > 0) \\
\iff & 3^{2+\sqrt{x}} = 3^x \iff 2 + \sqrt{x} = x \\
\iff & \left(x \geq 2 \ \wedge \ x = (x-2)^2\right) \iff x = 4,
\end{aligned}$$

a to je rješenje date jednadžbe, budući da zadovoljava uvjet DP. □

Primjer 2.5. *Riješiti jednadžbu* $2^x = 3 - x$.

Rješenje: Ovo je primjer eksponencijalne jednadžbe koja se ne može svesti na oblik (1), te iako se čini vrlo jednostavnom ne može biti riješena na standardan način. Međutim, jednadžba se može riješiti grafički: u istom koordinatnom sistemu konstruirajmo grafike funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 3 - x$ (v. Sliku 2).



Slika 2: Grafici funkcija $y = 2^x$ i $y = 3 - x$.

Sa Slike 2 je jasno da ti grafici imaju jednu jedinu tačku zajedničku, što znači da data jednadžba ima jedinstveno rješenje. To rješenje je jednostavno uočiti: $x = 1$. □

Primjer 2.6. *Riješiti jednadžbu* $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

Rješenje: Nakon uvođenja smjene $y = \frac{x}{2}$, data jednadžba poprima oblik

$$1 + 3^y = 4^y \iff \left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y = 1.$$

Iskoristit ćemo sada osobine monotonosti eksponencijalne funkcije (u slučaju kad je baza manja od 1 funkcija je opadajuća, v. osobinu c)).
Za $y<1$ vrijedi $\left(\frac{1}{4}\right)^y>\frac{1}{4}$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^y>\frac{3}{4}$, pa imamo $\left(\frac{1}{4}\right)^y+\left(\frac{3}{4}\right)^y>1$, tj. u ovom slučaju jednadžba nema rješenja.
Za $y>1$ vrijedi $\left(\frac{1}{4}\right)^y<\frac{1}{4}$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^y<\frac{3}{4}$, pa imamo $\left(\frac{1}{4}\right)^y+\left(\frac{3}{4}\right)^y<1$, te ni u ovom slučaju jednadžba nema rješenja. Jasno je da je transformirana jednadžba zadovoljena za $y=1$, to jest $x=2$ je jedino rješenje date jednadžbe. □

Primjer 2.7. *Riješiti jednadžbu*

$$\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}=1.$$

Rješenje: DP: $x\in\mathbb{R}$, pa imamo

$$\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}=1 \iff \left\{\begin{array}{c} x^2-x-1=1 \\ \vee \\ \left(0<x^2-x-1\neq 1\wedge x^2-1=0\right)\end{array}\right\}.$$

$R: x=-1\vee x=2.$ □

Primjer 2.8. *Riješiti nejednadžbu*

$$\left(4x^2-10x+7\right)^{x^2-x}\geq 1.$$

Rješenje: Na osnovu (6) imamo (imajući na umu da je DP: $x\in\mathbb{R}$)

$$\left(4x^2-10x+7\right)^{x^2-x}\geq 1 \iff \left\{\begin{array}{c} 4x^2-10x+7>1\ \wedge\ x^2-x\geq 0 \\ \vee \\ 0<4x^2-10x+7<1\ \wedge\ x^2-x\leq 0 \\ \vee \\ 4x^2-10x+7=1 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x\in\langle-\infty,1\rangle\cup\left\langle\frac{3}{2},+\infty\right\rangle\ \wedge\ x\in\langle-\infty,0]\cup[1,+\infty\rangle \\ \vee \\ x\in\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle\ \wedge\ x\in[0,1] \\ \vee \\ x=1\ \vee\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right\}.$$

$R: x\in\langle-\infty,0]\cup\{1\}\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right\rangle.$ □

Primjer 2.9. *Riješiti sljedeću nejednadžbu*

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x\leq 62.$$

Rješenje: S obzirom da je

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4-\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}=\frac{16-15}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}=\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}},$$

data nejednadžba je ekvivalentna s

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x} \le 62.$$

Uvođenjem smjene: $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = t$, dobijamo

$$\begin{aligned} t+\frac{1}{t} \le 62 \quad &\Longleftrightarrow \quad t^2-62t+1 \le 0 \Longleftrightarrow 31-8\sqrt{15} \le t \le 31+8\sqrt{15} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(4-\sqrt{15}\right)^2 \le \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x \le \left(4+\sqrt{15}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(4+\sqrt{15}\right)^{-2} \le \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} \le \left(4+\sqrt{15}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad -2 \le \frac{x}{2} \le 2 \Longleftrightarrow -4 \le x \le 4. \end{aligned}$$

Rezultat: $-4 \le x \le 4$. □

2.2. Primjeri zadataka s parametrima

Primjer 2.10. *Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba*

$$|x+2| - |2x+8| = a^x \quad :$$

a) ima tačno jedno rješenje,
b) ima više od jednog rješenja,
c) nema rješenja?

Rješenje: Jasno je da mora biti $a > 0$, pa zbog $a^x > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, lijeva strana date jednadžbe mora biti pozitivna, to jest

$$|x+2| > |2x+8| \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)^2 > (2x+8)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2+28x+60 < 0,$$

odakle slijedi

$$x \in \left\langle -6, -\frac{10}{3} \right\rangle. \tag{8}$$

Dakle, ako data jednadžba ima rješenja, ona moraju pripadati intervalu (8). Zadatak ćemo riješiti grafičkim putem. Na slici 3 predstavljeni su grafici funkcija $y = |x+2| - |2x+8|$ (u intervalu (8)) i $y = a^x$ (za različite vrijednosti a).

a) Da bi jednadžba imala tačno jedno rješenje, grafik funkcije $y = a^x$ mora prolaziti tačkom $M(-4, 2)$ (jer on ne može prolaziti tačkama $A(-6, 0)$ ili $B\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$, tj. biće $a^{-4} = 2$, odnosno $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

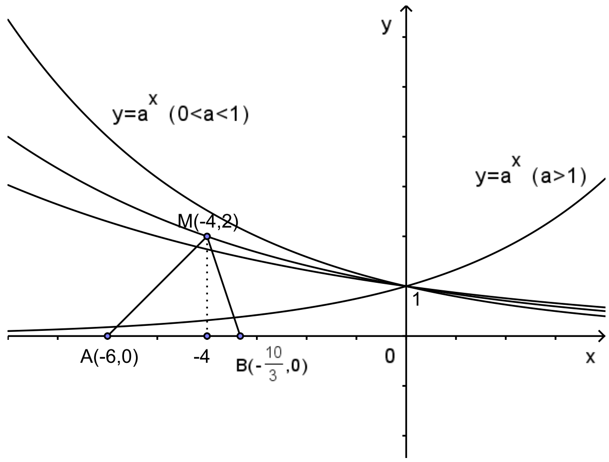
b) Za $a > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, grafik funkcije $y = a^x$ siječe liniju AMB u dvije tačke, pa jednadžba ima dva rješenja.

c) Za $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, grafik funkcije $y = a^x$ nema zajedničkih tačaka s linijom AMB, pa jednadžba nema rješ enja. Jednadžba nema rješenja ni kada je $a \le 0$. □

Primjer 2.11. *Naći sve vrijednosti realnog parametra a za koje nejednakost*

$$a \cdot 9^x + 4(a-1) \cdot 3^x + a > 1$$

vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$.



Slika 3: Grafici funkcija $y = |x+2| - |2x+8|$ i $y = a^x$ (za razne vrijednosti a).

Rješenje: Uvedemo li smjenu $t = 3^x > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$, problem se svodi na iznalaženje svih vrijednosti realnog parametra a tako da vrijedi

$$f(t) = at^2 + 4(a-1)t + a - 1 > 0 \text{ za svako } t > 0.$$

Kako je $f(t)$ kvadratna funkcija njen znak je najlakše ispitivati znajući položaj njenog grafika, odnosno odgovarajuće parabole, koji zavisi od znaka koeficijenata a uz t^2 i od znaka njene diskriminante $D = 4(a-1)(3a-4)$. Zbog toga ćemo razmatrat sljedeće slučajeve.

1. $a \leq 0$

   Tada za $t > 0$ vrijedi $at^2 \leq 0$, $4(a-1)t < 0$ i $a - 1 < 0$, što implicira $f(t) < 0$ za sve $t > 0$, pa ove vrijednosti parametra a ne dolaze u obzir.

2. $a > 0$ (grafik funkcije $f(t)$ je otvorom okrenut prema gore)

   i) Ako je $D < 0$, to jest $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$, tada se grafik funkcije $f(t)$ nalazi u cijelosti iznad Ot-ose, pa je $f(t) > 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$. To znači da u obzir dolaze sve razmatrane vrijednosti od a, odnosno $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$.

   ii) Ako je $D \geq 0$, to jest $a \in \langle 0, 1] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right\rangle$, tada da bi bilo $f(t) > 0$ za sve $t > 0$, grafik funkcije $f(t)$ za sve $t > 0$ mora biti u cijelosti iznad Ot-ose. To je moguće samo ako je veća nula funkcije $f(t)$ nepozitivna. Kako je, za $a > 0$, ta veća nula oblika $t_2 = \frac{2(1-a)+\sqrt{(a-1)(3a-4)}}{a}$, to znači da mora vrijediti

   $$\frac{2(1-a) + \sqrt{(a-1)(3a-4)}}{a} \leq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{(a-1)(3a-4)} \leq 2(a-1).$$

   Uočimo da je za $a \in \langle 0, 1]$, desna strana posljednje nejednakosti nepozitivna, dok je lijeva nenegativna, što je moguće samo ako je $a = 1$. S druge strane, za $a \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right\rangle$ imamo da je (nakon kvadriranja) posljednja nejednakost zadovoljena za sve pozitivne vrijednosti od a, što znači da u obzir dolaze sve vrijednosti $a \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right\rangle$.

   Dakle, u slučaju $a > 0$, zaključujemo da je $f(t) > 0$ za sve $t > 0$ ako je $a \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle \cup \{1\} \cup \left[\frac{4}{3} + \infty\right\rangle = [1, +\infty\rangle$, a što ujedno predstavlja rješenje zadatka.

$\square$

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

1. Ispitati tok i konstruisati grafike sljedećih funkcija:

a) $y = 3^x$, b) $y = 2^{-x+1}$, c) $y = 2^x - 1$, d) $y = \begin{cases} 2^x, & x < -1, \\ 2^{-1}, & -1 \le x \le 1, \\ 2^{-x}, & x > 1. \end{cases}$

2. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Definirajmo realne funkcije s, c, t sljedećim formulama:

$$s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, \quad c(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad t(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}.$$

Dokazati da vrijedi:

a) $c^2(x) - s^2(x) = 1$, b) $s(2x) = 2s(x)c(x)$,

c) $c(2x) = c^2(x) + s^2(x)$, d) $t(2x) = \dfrac{2t(x)}{1 + t^2(x)}$,

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Riješiti sljedeće jednadžbe (**3-11**):

3. a) $2^{x-1} = 4^5$, b) $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$, c) $4^x - 4^{x-2} = 240$.

4. a) $\sqrt{32^{4x-6}} = 0,25 \cdot 128^{2x-3}$, b) $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$.

5. a) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$, b) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$.

6. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

7. a) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$, b) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

8. a) $0,5^{x^2-20x+61,5} = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$, b) $5^x - 5^{3-x} = 20$.

9. a) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$, b) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

10. a) $x^x + 27 \cdot x^{-x} - 28 = 0$, b) $|x|^{x^2-2x} = 1$.

11. $(x-3)^{x^2-x} = (x-3)^2$, b) $|x-1|^{10x^2-20x+9} = |x-1|^{3x+3}$.

12. Odrediti broj $t \in R$ takav da je $f(t) = t$ ako je $f(x)$ dato sa

$$f(x) = 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 4^{x+\sqrt{x^2-2}} + 6 + x.$$

13. Za koje vrijednosti parametara a i m jednadžba

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = m$$

ima rješenje?

Riješiti sljedeće nejednadžbe (**14-19**):

14. a) $2^{2x^2}+25^{\frac{x^2-1}{2}}>5^{x^2}$, b) $21\cdot 3^x+100\cdot 5^x-3^{x+4}>0$.

15. a) $4^x\le 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x}+4^{\sqrt{x}+1}$, b) $4^{\sqrt{x-2}}+16\ge 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

16. a) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}-3^{x+\frac{1}{2}}+2^{2x-1}<0$, b) $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$.

17. a) $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$, b) $\left(9+6x+x^2\right)^{-x-5}<1$.

18. a) $\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-3x}\le 1$, b) $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$.

19. $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{x+\sqrt{x^2-1}}\le\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{x-\sqrt{x^2-1}}$.

20. Odrediti broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe

$$2^{4x-2}\cdot 4^{-(x-1)^2}-3\cdot 2^{4x-1-x^2}+8\le 0.$$

21. Za koje je vrijednosti a trinom $x^2-2^{a+2}\cdot x-2^{a+3}+12$ pozitivan za sve realne vrijednosti promjenljive x?

22. Za koje pozitivne vrijednosti p jednadžba

$$9^{x+1}+3x+2=9p^2-3p-2$$

ima nenegativne korijene?

23. U koordinatnoj ravni odrediti skup tačaka (uz grafičku ilustraciju) čije koordinate (x,y) zadovoljavaju nejednakosti:

a) $x^{x^2+y^2}<x^9\quad(x>0)$,

b) $x^y>x^{\cos x}\quad(x>0)$.

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin: *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.
[2] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.
[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.
[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.
[5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe, *Evolventa*, 2(1), 21-33, 2019.
[6] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.