СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 13 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4

1. Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

Алексей Воропаев

4

2. Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P.

Артемий Соколов

4

3. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 3 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

Егор Бакаев

5

4. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма любых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{1000}$ делится на 41?

Борис Френкин

5

5. У Васи есть неограниченный запас брусков $1 \times 1 \times 3$ и уголков из трёх кубиков $1 \times 1 \times 1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m \times n \times k$, где m, n и k — целые числа, большие чем 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками.

Михаил Евдокимов

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 13 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса? *Алексей Воропаев*
4	2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ такой, что $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K. Докажите, что $BK \parallel AE$. *Егор Бакаев*
4	3. Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[\frac{x}{2}]$ (наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{x}{2}$). Докажите, что если вначале написано 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число. *Владислав Новиков*
5	4. Дан многоугольник, у которого любые две соседние стороны перпендикулярны. Назовем две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно. *Михаил Скопенков*
5	5. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *Егор Бакаев*

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Назовём *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые (например, сложность чисел 4 и 6 равна 2). Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

2 а) не больше, чем у n;

2 б) меньше, чем у n?

Борис Френкин

7 2. Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 лежит внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 — соответственно площади этих треугольников. Докажите, что

$$\frac{S}{AB + AC} > \frac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}.$$

Наири Седракян, Илья Богданов

7 3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

Владислав Новиков

7 4. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

Артемий Соколов

8 5. Назовём пару (m, n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m+1)(n+1)$ — точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n > m$, что пара (m, n) хорошая.

Юрий Маркелов

8 6. У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке дорогой книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке дешёвой (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало — сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5 тысяч рублей?

Татьяна Казицына

10 7. В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?

Александр Грибалко

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Многочлен $P(x,y)$ таков, что для всякого целого $n \geqslant 0$ каждый из многочленов $P(n,y)$ и $P(x,n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x,x)$ иметь нечётную степень?

Борис Френкин

5 2. Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P — точка пересечения высот треугольника ABC.

Григорий Гальперин

6 3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

Владислав Новиков

10 4. Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k — наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, ..., либо с некоторого момента постоянна.

Иван Митрофанов

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

6 а) вписанный;

6 б) описанный.

Наири Седракян

6. Куб, состоящий из $(2N)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2N$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

6 а) Докажите, что можно выбрать такие $2N^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

6 б) Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

Никита Гладков, Александр Зимин

12 7. Некоторые из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b-c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше, чем $\varphi(n)$ (количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n).

Александр Семенов

41-й Международный математический Турнир городов
Решения задач, младшие классы
Базовый вариант

1. [4] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

(Алексей Воропаев)

Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

Стратегия 2. Пусть зритель всегда угадывает номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

2. [4] Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P. *(Артемий Соколов)*

Решение. Так как $YH \perp OX \perp AP$, то $YH \parallel AP$, а прямая YH содержит среднюю линию треугольника APC. Аналогично, прямая XH содержит среднюю линию этого треугольника. Эти средние линии пересекаются в точке H – середине стороны AC.

3. [4] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *(Егор Бакаев)*

Ответ. За 50 рублей.

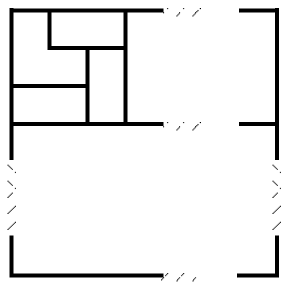
Решение. *Оценка*. Каждая фишка должна поменять чётность своего номера. Бесплатная операция не меняет чётность, а платная меняет её у двух фишек. Поэтому потребуется хотя бы 50 рублей.

Пример. Занумеруем фишки по порядку числами от 0 до 99. Покрасим клетки в четыре цвета: $abcdabcd\ldots d$. Бесплатная операция меняет фишки в соседних одноцветных клетках. Поэтому в клетках одного цвета фишки можно бесплатно переставить в любом порядке. Поменяем фишки во всех парах bc и da – это 49 платных операций. В клетках цвета b и c фишки уже можно расставить нужным образом бесплатно. В клетках цвета a и d сделаем так, чтобы фишки 0 и 99 встали рядом. Поменяем их последней платной операцией и дорасставим все фишки в нужном порядке.

4. [5] Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма каждых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{1000}$ делится на 41? *(Борис Френкин)*

Ответ: верно. **Решение**. Из условия следует, что $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ (индексы считаем зацикленными, то есть за 1000 следует 1). Значит, $a_{k+41n}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ при любом n. Так как числа 41 и 1000 взаимно просты, то квадраты всех чисел на круге дают при делении на 41^2 один и тот же остаток. Следовательно, $41a_k^2$ делится на 41^2, поэтому a_k^2 делится на 41, а поскольку 41 – простое число, то и a_k делится на 41.

5. [5] У Васи есть неограниченный запас брусков 1×1×3 и уголков из трёх кубиков 1×1×1. Вася целиком заполнил ими коробку $m \times n \times k$, где m, n и k – целые числа, большие 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками. *(Михаил Евдокимов)*



Решение. Так как mnk делится на 3, то один из множителей делится на 3; пусть это высота k. Достаточно заполнить коробку $m \times n \times 3$. Из двух уголков можно сложить *кирпич* 1×2×3. Если mn чётно, то основание коробки можно разбить на доминошки 2×1 и поставить на них по кирпичу, заполнив тем самым коробку. Иначе разобьём основание коробки на квадрат 3×3 и два прямоугольника (возможно пустых), см. рис. Прямоугольники разобьём на доминошки, а квадрат – как на рисунке. На доминошки поставим по кирпичу, а в оставшееся место положим три уголка. Коробка заполнена уголками.

Сложный вариант

1. Назовём *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые. Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

а) [2] не больше, чем у n; **б**) [2] меньше, чем у n? *(Борис Френкин)*

Ответ. **а**) Для $n = 2^k$; **б**) таких чисел нет. **Решение**. **а**) Очевидно, 2^k – наименьшее число сложности k. Поэтому все числа между 2^k и 2^{k+1} имеют сложность не больше k. Пусть n – не степень двойки. Тогда между n и $2n$ есть степень двойки (можно взять наибольшую степень двойки, меньшую n, и удвоить её). Очевидно, её сложность больше, чем у n.

б) В силу пункта а), достаточно рассмотреть случай $n = 2^k$, где k натуральное. Но число $3 \cdot 2^{k-1}$ имеет такую же сложность, как и n, и находится между n и $2n$.

Для знатоков. Утверждение **б**) следует из *постулата Бертрана*: если p – простое число, то следующее простое меньше $2p$. Действительно, представим n в виде pr, где p – простое, r – натуральное. Пусть q – следующее за p простое число. Тогда $n < qr < 2n$, а сложность qr равна сложности n.

2. [7] Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 – внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 – соответственно площади этих треугольников. Докажите, что $\dfrac{S}{AB+AC} > \dfrac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}$. *(Наири Седракян, Илья Богданов)*

Решение. Пусть точки D и D_1 симметричны точкам A и A_1 относительно BC. Проведём биссектрисы AK и A_1K_1 наших треугольников. Заметим, что K и K_1 – центры окружностей, вписанных в четырёхугольники $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$, а требуемое неравенство превратилось в очевидное неравенство $r > r_1$, где r и r_1 – радиусы указанных окружностей.

3. [7] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание? (*Владислав Новиков*)

Решение 1. (*А. Шаповалов*) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k + 1$ взвешивание и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v = z - 1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b > a$ и одна монета C веса $c \neq b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c = a$. Сравним B с $A+C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b = 3$, $a = 1$ (если $b > 2a$); $b = 2$, $a = 1$ ($b = 2a$); $b = 3$, $a = 2$ ($b < 2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v = z + 1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c \neq a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены ($c > b > a$, $b > c > a$ или $b > a > c$), поэтому определены однозначно. При этом $v = z$ – ситуация победная.

Замечание. Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если C тяжелее B, то уже $c > b > a$; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса a, её можно взять за C.

Решение 2. (*А. Рябичев*) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k – 1$ взвешивание.

База. Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k – 1$ монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A+a$ и $B+b$. Если веса пар равны, то $A=B$ и $a=b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a), и воспользоваться предположением индукции для $k – 2$ монет.

Пусть веса пар различны, для определённости, $A+a > B+b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса (2,1), либо (2,2), либо (3,2). Итак, сравнив $A+b$ с $B+a$, мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k – 4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

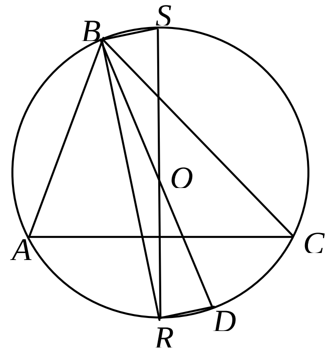
Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, *за k взвешиваний*.

База. Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k – 1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$ и воспользуемся утверждением 1.

Замечание. Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [7] Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB. (*Артемий Соколов*)



Решение. Проведём гомотетию с центром B и коэффициентом 2. Точка O перейдёт в точку D, диаметрально противоположную вершине B на описанной окружности Ω, точка P – в точку R пересечения биссектрисы угла B с Ω, точка Q – в диаметрально противоположную R точку S, «отрезок, соединяющий…» – в сторону AC. Осталось заметить, что диаметр RS проходит через середину стороны AC, так как R – середина дуги AC.

5. [8] Назовём пару (m, n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m + 1)(n + 1)$ – точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n>m$, что пара (m, n) хорошая. (*Юрий Маркелов*)

Решение. Пара $(m, m(4m + 3)^2)$ хорошая. Действительно,
$(m + 1)(m(4m + 3)^2 + 1) = (m + 1)(16m^3 + 24m^2 + 9m + 1) = (m + 1)^2(16m^2 + 8m + 1) = ((m + 1)(4m + 1))^2$.

Путь к решению. Естественно попытаться найти такое n, что оно есть квадрат, умноженный на m, и при этом $n+1$ есть квадрат, умноженный на $m+1$. Тогда $n+1$ имеет вид $k^2(m+1)$. Так как n, поделённое на m, тоже квадрат, имеем: $(k^2(m+1) – 1)/m = k^2 + (k^2 – 1)/m$ – квадрат. Самый простой способ это обеспечить – положить $(k^2 – 1)/m$ равным $4k+4$, тогда $(k – 1)/m = 4$, откуда $k = 4m+1$.

6. [9] У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке *дорогой* книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке *дешёвой* (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало – сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5000 рублей? *(Татьяна Казицына)*

Решение 1. Посмотрим, сколько мелочи Петя мог получить.

Рассмотрим самую последнюю дешёвую покупку, которая увеличила количество мелочи. Пусть стоимость этой покупки x, тогда перед этим было не более $x-1$ рублей мелочи, а значит, после этого её станет не больше чем $x-1+100-x=99$ рублей. Так как дорогие покупки количество мелочи не уменьшают, то все предыдущие покупки вместе с рассмотренной дали в сумме не более 99 руб. мелочи. Тем более все *дешёвые* покупки в сумме принесли не более 99 рублей.

Пусть было n покупок дороже 100 рублей. Каждая из них добавляет не более 99 рублей мелочи. Если бы других покупок совсем не было, то на дорогие было бы потрачено не менее $2n$ сотен, а сдача составила бы не более $99n$ – меньше половины потраченного. Поэтому другие покупки есть. Но тогда у Пети было не менее $2n+1$ сторублёвки, а мелочи в конце стало не больше $99n+99$. Значит, $(2n+1)50 \leq 99n+99$, откуда $n \leq 49$. Таким образом, мелочи останется не более $99 \cdot 49+99<5000$ руб. Значит, и потрачено менее 5000 рублей.

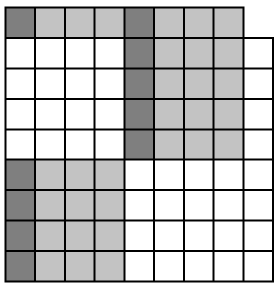
Решение 2. Пусть какой-то товар куплен за x рублей мелочью. Эта мелочь появилась как сдача при предыдущих покупках. Увеличим стоимость этих покупок на соответствующие величины, в сумме составляющие x рублей, а данную покупку отменим. Аналогично избавимся от всех покупок за мелочь. На каждом шаге количество мелочи уменьшается, поэтому новых покупок за мелочь не появится.

Имеется покупка стоимостью не больше 50 рублей (*маленькая*), иначе осталось бы меньше половины всех денег. Маленькая покупка только одна, так как вторая маленькая покупка была бы сделана на сдачу за первую, а покупок за мелочь теперь нет.

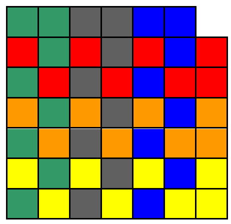
Разность между сдачей за маленькую покупку и её ценой не больше $99-1=98$ руб. Для каждой другой покупки эта разность отрицательна, и она чётна (так как сумма цены и сдачи кратна 100, то есть чётна). Значит, эта разность не меньше -98 и не больше -2. Поэтому остальных покупок не больше $98:2=49$, и за каждую из них отдано не больше двух сторублёвок (иначе указанная разность не больше $99-201<-98$). Следовательно, всего сторублёвок было не больше $1+2 \cdot 49=99$, а половина от этой суммы не больше $9900:2=4950<5000$.

7. [10] В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные? (*Александр Грибалко*)

Ответ. Мог. **Решение**. Покажем, что любой квадрат $(2N+1) \times (2N+1)$ без угловой клетки можно получить, $2N$ раз приложив печать из $2N+2$ клеток. Для пояснения приведём рисунок для $N=4$.



Квадрат без правого верхнего угла представим как квадрат $2N \times 2N$ с двумя приклееными сверху и справа полосками $1 \times 2N$. Разобьём квадрат $2N \times 2N$ на четыре квадратика $N \times N$. Покрасим левый нижний и правый верхний квадратики $N \times N$ и верхнюю полоску в серый цвет. Теперь белая часть получается из серой поворотом на 90° по часовой стрелке (относительно центра квадрата $2N \times 2N$). Левый край каждого серого квадратика $N \times N$ и две клетки серой полоски на тех же вертикалях сделаем тёмными. Это будет первый отпечаток. Сдвинув его вправо на одну клетку, сделаем второй отпечаток, и т.д. Тогда N отпечатков покроют в точности серую область. Развернув печать на 90°, N отпечатками покроем белую область.



Замечание. Есть и другие варианты печатей. Например, такой (для простоты рассмотрен случай $N=3$):

41-й Международный математический Турнир городов
Решения задач, старшие классы
Базовый вариант

1. [3] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса? (*Алексей Воропаев)*

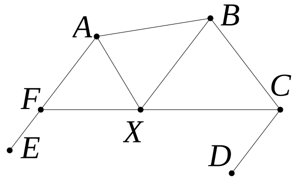
Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель всегда называет номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

Стратегия 2. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

2. [4] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K. Докажите, что $BK \parallel AE$. *(Егор Бакаев)*



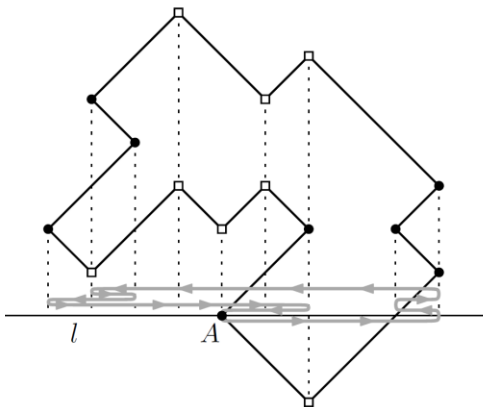
Решение. Пусть биссектриса угла C пересекает прямую AE в точке F, а прямая, проходящая через B параллельно AE , пересекает отрезок CF в точке X. Тогда $\angle BXC = \angle DCX = \angle BCX$. Отсюда $BX = BC = BA$. Значит, $\angle BAX = \angle BXA = \angle FAX$. Следовательно, AX – биссектриса угла A, поэтому X совпадает с K и $BK \parallel AE$.

Замечание. На рисунке точка F лежит на стороне AE, но в решении это не используется. Можно, впрочем, доказать, что биссектриса угла C не может пересекать сторону AB (а сторону ED – может).

3. [4] Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[{}^{x}/_{2}]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число. *(Владислав Новиков)*

Решение. Индукция. Число 1 написано. Покажем, как получить натуральное $n > 1$, если умеем получать все меньшие числа. Число n представимо в одном из трёх видов: $3k - 1$, $3k$ или $3k + 1$, где k – натуральное. 1) $2k - 1 \rightarrow 6k - 2 \rightarrow 3k - 1$; 2) $2k \rightarrow 6k + 1 \rightarrow 3k$; 3) $k \rightarrow 3k + 1$.

4. [5] Дан многоугольник, у которого каждые две соседние стороны перпендикулярны. Назовём две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно. *(Михаил Скопенков)*



Решение 1. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Пусть вертикальных сторон k, тогда горизонтальных сторон тоже k. Все вершины многоугольника делятся на 4 типа: ┌ , ┐, └ , ┘. Пусть вершина A имеет тип 2 (без ограничения общности). Тогда не дружные с ней – вершины типа 1 и 4.

Рассмотрим любую горизонтальную сторону. Её левый конец может быть только типа 1 или 3. Всего левых вершин у горизонтальных сторон столько же, сколько левых сторон, то есть k, откуда суммарное число вершин типа 1 и 3 равно k. Пусть вершин типа 1 всего x, тогда вершин типа 3 всего $k - x$. Рассматривая нижние концы вертикальных сторон, получаем аналогично, что вершин типа 3 и 4 всего k, откуда вершин типа 4 всего $k - (k - x)$, то есть x. Но тогда вершин типа 1 и 4 всего $2x$ (чётное число), а это и есть вершины, которые не дружны с A.

Решение 2. Расположим многоугольник так, чтобы биссектриса l данной вершины A была горизонтальна. Пусть некая точка движется по периметру многоугольника с постоянной скоростью, начав и закончив в вершине A. Тогда её проекция на l также движется с постоянной скоростью, причём проекция меняет направление движения ровно в те моменты, когда точка проходит через вершину, дружную с A, или через саму A. Учитывая, что всего вершин чётное число, получаем требуемое.

Решение 3. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Поскольку они чередуются, число вершин чётно (пусть их $2n$). При этом угловой коэффициент биссектрисы равен 1 или –1.

Занумеруем вершины против часовой стрелки числами от 1 до $2n$ и поставим в i-й вершине число a_i, равное 1, если угол в ней равен 90°, и –1, если угол в ней равен 270°. Обходя многоугольник по контуру против часовой стрелки, в каждом угле в 90° мы поворачиваем на 90° против часовой стрелки, а в каждом угле в 270° – на 90° по часовой. Вернувшись в исходное положение после полного обхода, мы повернулись в итоге на 360° против часовой стрелки, откуда количество углов в 270° на 4 меньше, чем в 90°, то есть равно $(2n - 4)/2 = n - 2$, поэтому $a_1a_2...a_{2n} = (-1)^{n-2}$.

Заметим, что направления биссектрис в соседних вершинах совпадают тогда и только тогда, когда углы в них разные. Можно считать, что угловой коэффициент биссектрисы в первой вершине равен a_1. Тогда для каждого i знак b_i углового коэффициента биссектрисы в i-й вершине совпадает с a_i, если i нечётно, и совпадает с $-a_i$, если i чётно. Поэтому $b_1b_2...b_{2n} = a_1a_2...a_{2n}(-1)^n = (-1)^{2n-2} = 1$. Следовательно, число «отрицательных» (а потому и «положительных») биссектрис чётно.

5. [5] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *(Егор Бакаев)*

Ответ. За 61 рубль. **Решение**. Занумеруем фишки и клетки по порядку от 0 до 99. Бесплатная операция не меняет остаток номера клетки при делении на 5.

Оценка. Мысленно расположим кучки фишек по кругу. Сначала кучка фишек с остатком 0, потом – с 1, и так далее до 4. Платная операция переставляет пару фишек из соседних кучек. Фишки из нулевой кучки должны участвовать хотя бы в одной такой замене, чтобы добраться до четвёртой кучки. Аналогично для фишек из четвёртой кучки. Фишки из первой кучки должны участвовать хотя бы в двух заменах, чтобы добраться до третьей кучки. Аналогично для третьей кучки. Значит, потребуется хотя бы $(20 + 20 + 40 + 40):2 = 60$ рублей. Но если будет потрачено только 60 рублей, то фишкам из первой кучки придётся идти через вторую кучку, поэтому хотя бы одна фишка из второй кучки будет участвовать в заменах. Следовательно, необходимо больше 60 рублей.

Алгоритм. Ясно, что бесплатными операциями можно расставить фишки внутри кучки в любом порядке. Поэтому правильно расставить все фишки из нулевой и четвёртой кучек можно за 20 рублей. Рассмотрим оставшиеся три кучки. Мысленно оставим только одну фишку A во второй кучке. Поменяем её с фишкой из первой кучки. Каждый раз будем передвигать дальше фишку, пришедшую во вторую кучку, за счёт новой фишки. Тогда за 40 рублей мы перетащим все фишки из первой кучки в третью, а из третьей – в первую кроме одной: она останется во второй кучке, не дойдя до первой. Поменяем ее с A, и все фишки окажутся в нужных кучках.

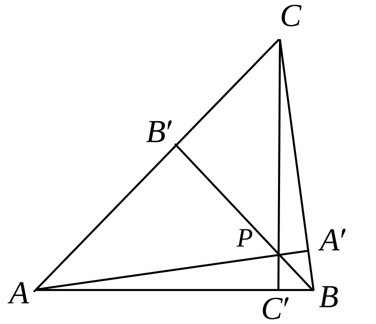
Сложный вариант

1. [5] Многочлен $P(x, y)$ таков, что для всякого целого $n \geq 0$ каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x, x)$ иметь нечётную степень? (*Борис Френкин*)

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть наибольшая степень, в которой встречается x, равна m, а наибольшая степень, в которой встречается y, равна n, Для определенности положим $n \ge m$. Запишем многочлен $P(x, y)$ в виде $A(x)y^n + B(x)y^{n-1} + \dots$, где $A(x), B(x), \dots$ – многочлены от x. Поскольку при всех целых $0 \le k < n$ степень многочлена $P(k, y) = A(k)y^n + B(k)y^{n-1} + \dots$ меньше n, то $A(0) = A(1) = \dots = A(n-1) = 0$. У многочлена $A(x)$ есть n различных корней, поэтому его степень не меньше n. Но она не больше m, значит, $m = n$. При этом одночлен x^ny^n заведомо встречается в произведении $A(x)y^n$ и не встречается в остальных произведениях, поэтому $\deg P(x, x) = 2n$.

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют все многочлены следующего вида и только они: $c_0 + xy(c_1 + (x-1)(y-1)(c_2 + \dots + (c_k + ((x-k)(y-k)c_{k+1})\dots)$, где k – неотрицательное целое число, $c_0, \dots, c_{k+1}$ – константы.

2. [5] Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P – точка пересечения высот треугольника ABC. (*Г. Гальперин*)



Решение. Пусть $2x$ – длина указанных хорд. По теореме о произведении отрезков хорд $x^2 = AP{\cdot}A'P = BP{\cdot}B'P = CP{\cdot}C'P$. По обратной теореме точки A, A', B и B' лежат на одной окружности. Значит, $\angle AA'B = \angle AB'B$.

Аналогично $\angle AA'C = \angle AC'C$, $\angle BB'C = \angle BC'C$. Следовательно, $\angle AA'B = \angle AB'B = 180° - \angle BB'C = 180° - \angle BC'C = \angle AC'C = \angle AA'C$, то есть AA' – высота. Аналогично BB' и CC' – высоты.

3. [6] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание? (*Владислав Новиков*)

Решение 1. (*А. Шаповалов*) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k + 1$ взвешивание и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v = z - 1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b > a$ и одна монета C веса $c \ne b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c = a$. Сравним B с $A+C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b = 3$, $a = 1$ (если $b > 2a$); $b = 2$, $a = 1$ ($b = 2a$); $b = 3$, $a = 2$ ($b < 2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v = z + 1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c \ne a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены ($c > b > a$, $b > c > a$ или $b > a > c$), поэтому определены однозначно. При этом $v = z$ – ситуация победная.

Замечание. Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если C тяжелее B, то уже $c > b > a$; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса a, её можно взять за C.

Решение 2. (*А. Рябичев*) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k - 1$ взвешивание.

База. Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k-1$ монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A+a$ и $B+b$. Если веса пар равны, то $A=B$ и $a=b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a), и воспользоваться предположением индукции для $k-2$ монет.

Пусть веса пар различны, для определённости, $A+a > B+b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса (2,1), либо (2,2), либо (3,2). Итак, сравнив $A+b$ с $B+a$, мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k-4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, *за k взвешиваний*.

База. Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k-1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$ и воспользуемся утверждением 1.

Замечание. Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [10] Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k – наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, ..., либо с некоторого момента постоянна. *(Иван Митрофанов)*

Решение. Очевидно, что $b_1=1$, а при $k > 1$ отношение из условия меньше k, поэтому $b_k \le k$ при всех натуральных k. Если последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ не совпадает с натуральным рядом, то $b_k \le k-1$ при некотором k. Тогда $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+k-1} \le (k-1)a_{i+k-1}$ для каждого целого i, откуда $ka_i < (k-1)a_{i+k-1}$. Обозначив $t = \frac{k-1}{k} < 1$, получаем $a_i < ta_{i+k-1} < ta_{i+k}$ при всех целых i. Следовательно,

$$a_i < t\cdot a_{i+k} < t^2\cdot a_{i+2k} < \ldots < t^q\cdot a_{i+qk} < \ldots \qquad (*)$$

Фактически (так как (a_i) возрастает) мы доказали, что если есть два номера m и n, где $m > n$, то отношение $\frac{a_n}{a_m}$ меньше 1, когда $m-n < k$; $\frac{a_n}{a_m} < t$, когда $m-n < 2k$; $\frac{a_n}{a_m} < t^2$, когда $m-n < 3k$, и т.д. Чтобы оценить сверху произвольное b_n, оценим сверху отношение

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} = \frac{a_{i+n}}{a_{i+n}} + \frac{a_{i+n-1}}{a_{i+n}} + \ldots + \frac{a_{i+1}}{a_{i+n}}.$$

В этой сумме первые k слагаемых не превосходят 1, следующие k не превосходят t, следующие k не превосходят t^2 и т.д. Итак,

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} < k(1 + t + t^2 + \ldots) = \frac{k}{1-t} = k^2.$$

Это значит, что $b_n \le k^2$ при любом натуральном n. Поскольку последовательность (b_n), очевидно, не убывает, то она стабилизируется на числе, не большем k^2.

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $MA\cdot MC + MB\cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

а) [6] вписанный; **б**) [6] описанный. *(Наири Седракян)*

Решение. **а**) Опустим перпендикуляры MP, MQ, MR, MT на прямые AB, BC, CD, DA соответственно. Тогда $S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{DMA} \le (S_{AMP} + S_{BMP}) + (S_{BMQ} + S_{CMQ}) + (S_{CMR} + S_{DMR}) + (S_{DMS} + S_{AMT}) = (S_{AMP} + S_{CMR}) + (S_{BMP} + S_{DMR}) + (S_{BMQ} + S_{DMT}) + (S_{CMQ} + S_{AMT})$. Заметим, что прямоугольные треугольники AMP и CMR имеют равные катеты MP и MR, поэтому из них можно сложить треугольник Δ, две стороны которого равны MA и MC, а значит, $S_{AMP} + S_{CMR} = S_\Delta \le ½\, MA{\cdot}MC$. Аналогично $S_{BMP} + S_{DMR} \le ½\, MB{\cdot}MD$, $S_{BMQ} + S_{DMS} \le ½\, MB{\cdot}MD$, $S_{CMQ} + S_{AMS} \le ½\, MA{\cdot}MC$. Следовательно, $S_{ABCD} \le MA{\cdot}MC + MB{\cdot}MD$. Из условия видно, что все предыдущие неравенства на самом деле являются равенствами. Это значит, что, во-первых, точки P, Q, R, T лежат на соответствующих сторонах четырёхугольника и, во-вторых, треугольник Δ прямоугольный, то есть $\angle MAP + \angle MCR = 90°$. Аналогично $\angle MAD + \angle MCQ = 90°$, откуда $\angle BAD + \angle BCD = (\angle MAP + \angle MCR) + (\angle MAT + \angle MCQ) = 180°$, то есть четырёхугольник вписанный.

б) Из прямоугольного треугольника Δ (см. **а**) видно, что $AP + RC = \sqrt{MA^2 + MC^2}$. Аналогично $BP + RD = \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Тогда $AB + CD = \sqrt{MA^2 + MC^2} + \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Вычисляя похожим образом сумму $BC + DA$, мы получим тот же результат.

Замечание. Можно доказать, что площадь любого вписано-описанного четырёхугольника $ABCD$ равна $MA{\cdot}MC + MB{\cdot}MD$, где M – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$.

6. Куб, состоящий из $(2n)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2n$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

а) [6] Докажите, что можно выбрать такие $2n^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

б) [6] Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

(Никита Гладков, Александр Зимин)

Решение. (*А. Шаповалов*) Пусть ребра куба параллельны осям координат.

а) Разобьём куб на слои толщиной 1, параллельные плоскости Oxy. Рассмотрим только спицы направлений Ox и Oy. В каждом слое найдём максимум числа таких спиц, идущих в одном направлении. Точно также найдём максимумы числа спиц для каждого слоя параллельного Oxz и параллельного Oyz. Пусть k – минимум из $6n$ этих максимумов.

Рассмотрим слой K, где максимум равен k. В слое можно выбрать $2n - k$ строк и $2n - k$ столбцов, через которые не проходят спицы слоя. На пересечении выбранных рядов есть $(2n - k)^2$ кубиков, их протыкают $(2n - k)^2$ спиц, перпендикулярных K. Покрасим эти $(2n - k)^2$ спиц в синий цвет. Выберем грань P куба, перпендикулярную слою K. Рассмотрим слои, параллельные P и не содержащие синих спиц. Их ровно k. В каждом таком слое можно выбрать не менее k спиц одного направления, всего не менее k^2 спиц. Добавим к ним синие спицы. По известному неравенству

$$k^2 + (2n - k)^2 \ge ½\,(k + (2n - k))^2 = 2n^2.$$

б) Ответ. $2n^2$ спиц. Выделим в нашем кубе два меньших куба со стороной n, примыкающие к противоположным вершинам. Они состоят из $2n^3$ единичных кубиков. Проткнём каждый выделенный кубик тремя перпендикулярными спицами. Тогда и все невыделенные единичные кубики тоже проткнуты. Заметим, что каждая спица протыкает ровно n выделенных кубиков. Значит, если спицы выбраны так, что никакой кубик не проткнут дважды, то спиц не более чем $2n^3 : n = 2n^2$.

7. [12] Некоторые из чисел 1, 2, 3, ..., n покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b - c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше чем $\varphi(n)$. (*Александр Семенов*)

Лемма. Пусть D – некоторое множество различных простых делителей числа n. Количество натуральных чисел, не превосходящих n и не кратных ни одному числу из D, равно $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Доказательство. Раскрыв скобки, получаем формулу включений-исключений. □

Пусть красных чисел больше $\varphi(n)$. Тогда некоторые красные числа имеют с n общий простой делитель. Пусть q – наибольшее из таких простых и a – красное число, кратное q. Для противоречия достаточно найти различные красные числа b и c, сравнимые по модулю $\frac{n}{q}$, а для этого достаточно показать, что $\varphi(n)$ больше количества возможных остатков красных чисел по модулю $\frac{n}{q}$.

По лемме, $\varphi(n) = n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$, где D – множество всех простых делителей у n, а указанное количество остатков не больше, чем $\frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Достаточно доказать, что $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Сокращая на n и на скобки, в которых $p>q$, получаем

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\prod_{p\in D,\, p<q}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{1}{q}, \quad \text{что равносильно неравенству} \quad q-1 \geq \prod_{p\in D,\, p<q}\frac{p}{p-1}.$$

Оно верно, поскольку $q-1 = \frac{q-1}{q-2}\cdot\frac{q-2}{q-3}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}$.

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 16 февраля 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка — либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?

Михаил Евдокимов

4 2. Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

Егор Бакаев

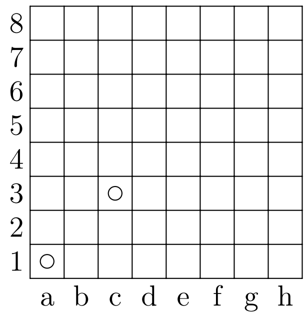
4 3. На диагонали AC ромба $ABCD$ построен параллелограмм $APQC$ так, что точка B лежит внутри него, а сторона AP равна стороне ромба. Докажите, что B — точка пересечения высот треугольника DPQ.

Егор Бакаев

5 4. Целое число n таково, что уравнение $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=n$ имеет решение в целых числах x, y, z. Докажите, что тогда и уравнение $x^2+y^2-xy=n$ имеет решение в целых числах x, y.

Александр Юран

5 5. На доске 8×8 в клетках a1 и c3 стоят две одинаковые фишки. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок выбирает любую фишку и сдвигает её либо по вертикали вверх, либо по горизонтали вправо на любое число клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в клетку h8. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? В одной клетке может стоять только одна фишка, прыгать через фишку нельзя.



Владимир Ковальджи

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 16 февраля 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Можно ли в каждую клетку таблицы 40×41 записать по целому числу так, чтобы число в каждой клетке равнялось количеству тех соседних с ней по стороне клеток, в которых написано такое же число?

Александр Грибалко

4 — 2. Обсуждая в классе зимние каникулы, Саша сказал: «Теперь, после того как я слетал в Аддис-Абебу, я встречал Новый год во всех возможных полусферах Земли, кроме одной!» В каком минимальном количестве мест встречал Новый год Саша? Места, где Саша встречал Новый год, считайте точками на сфере. Точки на границе полусферы считаются не принадлежащими этой полусфере.

Илья Думанский, Роман Крутовский

5 — 3. По кругу стоят буквы A и B, всего 41 буква. Можно заменять ABA на B и наоборот, а также BAB на A и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква?

Максим Дидин

4. Существует ли непостоянный многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, который можно представить в виде суммы $a(x)+b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ — квадраты многочленов с действительными коэффициентами,

2 — а) ровно одним способом;

3 — б) ровно двумя способами?

Способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

Сергей Маркелов

5 — 5. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Произвольная прямая ℓ, проходящая через Q, повторно пересекает окружности в точках A и B. Прямые, касающиеся окружностей в точках A и B, пересекаются в точке C, а биссектриса угла CPQ пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что все точки D, которые можно так получить, выбирая по-разному прямую ℓ, лежат на одной и той же окружности.

Алексей Заславский

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 1 марта 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Существует ли число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ..., 9 поровну? *Михаил Евдокимов*
5	2.	Три богатыря бьются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает Змею половину всех голов и ещё одну, Добрыня Никитич — треть всех голов и ещё две, Алёша Попович — четверть всех голов и ещё три. Богатыри бьют по одному в каком хотят порядке, отрубая каждым ударом целое число голов. Если ни один богатырь не может ударить (число голов получается нецелым), Змей съедает всех троих. Смогут ли богатыри отрубить все головы 41!-головому Змею? (Напомним, что $41! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 41$.) *Алексей Заславский*
	3.	Существует ли вписанный в окружность N-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если
4	а)	$N = 19$;
3	б)	$N = 20$? *Михаил Малкин*
8	4.	Для каких N можно расставить в клетках квадрата $N \times N$ действительные числа так, чтобы среди всевозможных сумм чисел на парах соседних по стороне клеток встречались все целые числа от 1 до $2(N-1)N$ включительно (ровно по одному разу)? *Максим Дидин*
9	5.	Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Её основание AB в 3 раза больше основания CD. Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что угол KDA прямой. *Александр Юран*
9	6.	У Пети есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Он выбирает из неё половину карт, какие хочет, и отдаёт Васе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди выкладывают на стол по одной карте (по своему выбору, в открытом виде); начинает Петя. Если в ответ на ход Пети Вася смог выложить карту той же масти или того же достоинства, Вася зарабатывает 1 очко. Какое наибольшее количество очков он может гарантированно заработать? *Михаил Евдокимов*
12	7.	Глеб задумал натуральные числа N и a, где $a < N$. Число a он написал на доске. Затем Глеб стал проделывать такую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число и полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных на доске чисел была больше $100N$? *Иван Митрофанов*

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 1 марта 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. На плоскости даны две параболы: $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$. Пусть U — множество всех точек плоскости, лежащих между параболами (включая точки на самих параболах). Существует ли отрезок длины более 10^6, целиком содержащийся в U? *Алексей Толпыго*
5	2. Алёша задумал натуральные числа a, b, c, а потом решил найти такие натуральные x, y, z, что $a = \text{НОК}(x, y)$, $b = \text{НОК}(x, z)$, $c = \text{НОК}(y, z)$. Оказалось, что такие x, y, z существуют и определены однозначно. Алёша рассказал об этом Боре и сообщил ему только числа a и b. Докажите, что Боря может восстановить c. *Борис Френкин*
8	3. Может ли в сечении какого-то тетраэдра двумя разными плоскостями получиться два квадрата: один — со стороной, не большей 1, а другой — со стороной, не меньшей 100? *Михаил Евдокимов*
9	4. К Ивану на день рождения пришли $2N$ гостей. У Ивана есть N чёрных и N белых цилиндров. Он хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или несколько) так, чтобы в каждом хороводе было хотя бы два человека и люди в цилиндрах одного цвета не стояли в хороводе рядом. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(2N)!$ различными способами. (Цилиндры одного цвета неразличимы; все гости различимы.) *Глеб Погудин*
9	5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке. *Максим Дидин*
10	6. На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел. *Александр Грибалко*
12	7. Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в чёрный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k чёрных клеток, либо вовсе не было чёрных клеток? *А. Динев, К. Гаров и Н. Белухов*

41-й Международный математический Турнир городов

2019/20 учебный год

Решения задач

(*под редакцией Л. Медникова и А. Семенова*)

Весенний тур

Базовый вариант

Младшие классы

1. [4] Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка – либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: может.

Решение. На рисунках приведены примеры Квадрландий. Пустые клетки – королевства, а цифра в клетке бозначает, сколько королевств претендует на эту спорную территорию).

0	2				3
1	4				
	5				
	6				
	7		8		

0	2				
1	3			8	
	5	6			
			7		
		4			

0	2				
1	4			8	
	5				
3					
	6	7			

0	2				
1	4		8		
	5				
		6	7		
3					

2. [4] Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

(*Е. Бакаев*)

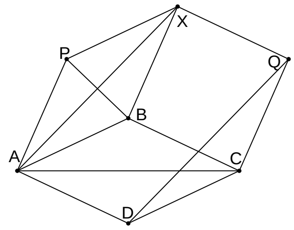
Ответ: 22 числа.

Решение. *Оценка*. Предположим, что получилось выписать такие различные числа x_1, …, x_{23}, что сумма каждых 11 подряд идущих равна A или B. Пусть $S_k = x_k + \ldots + x_{k+10}$. Заметим, что $S_k \neq S_{k+1}$ (иначе $x_k = x_{k+11}$). Значит, $S_k = S_{k+2}$. Поскольку $x_1 + S_2 + S_{13} = S_1 + S_{12} + x_{23}$, то $x_1 = x_{23}$. Противоречие.

Пример. Выберем 10 натуральных чисел с шагом 3, а одиннадцатое – дополняющее их сумму до 100. Тогда ряд x_1, …, x_{11}, $x_1 + 1$, $x_2 - 1$, $x_3 + 1$, $x_4 - 1$, …, $x_{11} + 1$ будет искомым. Например, так: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, –35, 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26, – 34.

3. [4] На диагонали AC ромба $ABCD$ построен параллелограмм $APQC$ так, что точка B лежит внутри него, а сторона AP равна стороне ромба. Докажите, что B – точка пересечения высот треугольника DPQ.

(*Е. Бакаев*)



Решение. Построим ромб $APXB$. Тогда четырёхугольник $CBXQ$ – тоже ромб, а $ADQX$ – параллелограмм. Поэтому $PB \perp AX \parallel DQ$, то есть прямая PB содержит высоту треугольника DPQ. Аналогично, прямая QB содержит высоту треугольника DPQ, что и требовалось.

4. [5] Целое число n таково, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$ имеет решение в целых числах. Докажите, что тогда и уравнение $x^2 + y^2 - xy = n$ имеет решение в целых числах.

(*А. Юран*)

Решение следует из тождества

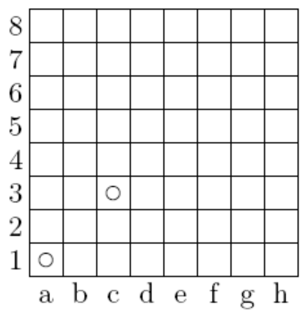
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x - z)^2 + (y - z)^2 - (x - z)(y - z).$$

Два пути к решению. **1**. Естественное желание – умножить левую часть на 2 и разложить в сумму квадратов разностей. Получим $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2n$, что после переобозначения примет вид $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = 2n$ или $a^2 + b^2 + ab = n$. Осталось поменять знак у a.

2. Заметим, что увеличение всех переменных на одно и то же число не меняет выражения. Так давайте вычтем из всех переменных по z и получим требуемое.

5. [5] На доске 8×8 в клетках a1 и c3 стоят две одинаковые фишки. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок выбирает любую фишку и сдвигает её либо по вертикали вверх, либо по горизонтали вправо на любое число клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в клетку h8. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? В одной клетке может стоять только одна фишка, прыгать через фишку нельзя.

(*В. Ковальджи*)



Ответ: Вася.

Решение. Вася сделает так, что Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию. Как только это произойдёт, Вася сдвинет эту фишку в h8 и победит. До этого Вася придерживается следующей стратегии.

Изначально фишки стоят на диагонали a1 – h8, не соседствуя. Петя сбегает с неё, а Вася, если может, возвращает эту фишку на диагональ, сохранив указанную ситуацию. Вася не сможет это сделать только тогда, когда фишки окажутся в одной или соседних линиях. Тогда Вася сделает такой ход, что фишки образуют доминошку. Ясно, что это возможно. После этого Вася будет сохранять доминошку, то есть повторять ход Пети другой фишкой. В конце концов, Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию.

Старшие классы

1. [4] Можно ли в каждую клетку таблицы 40×41 записать по целому числу так, чтобы число в каждой клетке равнялось количеству тех соседних с ней по стороне клеток, в которых написано такое же число?

(*А. Грибалко*)

Ответ: можно.

Пример 1. Сделаем это для произвольной таблицы. Разобьём её сеткой на прямоугольники так, что ширина полос по каждому направлению чередуется: 1, 2, 1, 2.... Ясно, что это возможно. Тогда таблица разобьётся на квадраты 2×2, домино 1×2 и квадратики 1×1. В квадраты впишем двойки, в домино – единицы, в квадратики – нули. Условие будет выполнено, поскольку фигурки одного вида не имеют общих сторон.

Пример 2. Разобьём таблицу на чередующиеся прямоугольники 1×41 и 3×41. В больших окантовку заполним двойками. Оставшиеся полоски $1\times n$ разобьём на чередующиеся доминошки (с единицами) и квадратики (с нулями).

Замечание. Есть и другие примеры, но все они состоят из 0, 1 и 2.

2. [4] Обсуждая в классе зимние каникулы, Саша сказал: «Теперь, после того как я слетал в Аддис-Абебу, я встречал Новый год во всех возможных полусферах Земли, кроме одной!» В каком минимальном количестве мест встречал Новый год Саша? Места, где Саша встречал Новый год, считайте точками на сфере. Точки на границе полусферы не считаются принадлежащими этой полусфере.

(*И. Думанский, Р. Крутовский*)

Ответ. В четырёх местах.

Решение. *Оценка*. Предположим, что хватило трёх точек. Они определяют плоскость. Если она проходит через центр сферы, то Саша не бывал в двух полусферах, высекаемых этой плоскостью. Противоречие.

Если не проходит, то параллельной плоскостью отсечём полусферу, в которой Саша не бывал. Во всех полусферах, получаемых из неё малым шевелением, Саша тоже не бывал. Снова противоречие.

Пример. Возьмём на некоторой большой окружности три точки, образующие остроугольный треугольник, и любую точку вне её (это можно сделать так, что одной из точек будет город, в котором живёт Саша, а другой – Аддис-Абеба). Из двух полусфер, высекаемых этой окружностью, Саша не бывал ровно в одной. Если же провести через центр Земли другую плоскость, то она высечет диаметр в исходной окружности, по каждую сторону от которого будет точка, в которой Саша бывал.

Замечание для придир. Диаметрально противоположная к Аддис-Абебе точка находится в Тихом океане, и Саша там жить не может.

3. [5] По кругу стоят буквы A и B, всего 41 буква. Можно заменять ABA на B и наоборот, а также BAB на A и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква?

(*М. Дидин*)

Ответ: верно.

Решение. Разобьём все буквы на группы одинаковых подряд идущих. Количество букв нечётно, поэтому найдётся «нечётная» группа. Заменами AA ↔ BABA ↔ BB сделаем из неё однобуквенную группу, после чего будем удалять соседей этой буквы, пока это возможно. Действуя таким образом, оставим только одну букву.

4. Существует ли непостоянный многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, который можно представить в виде суммы $a(x) + b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – квадраты многочленов с действительными коэффициентами,

а) [2] ровно одним способом?

б) [3] ровно двумя способами?

Способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

(*С. Маркелов*)

Ответ: не существует.

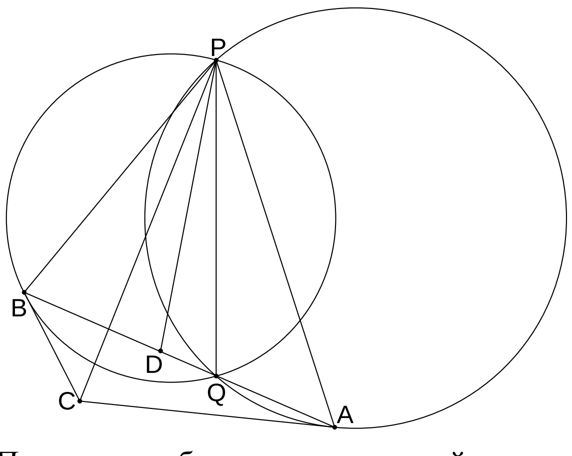
Решение. Пусть ненулевой многочлен P представим в виде суммы квадратов двух многочленов, то есть $P = F^2 + G^2$. Заметим, что $F^2 + G^2 = (cF + sG)^2 + (sF - cG)^2$, где $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$. Полагая $0 \le \alpha < {}^{\pi}/_{2}$, получим бесконечно много представлений.

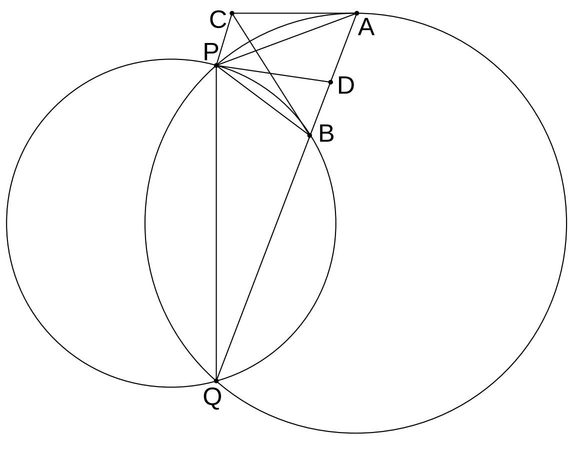
Допустим, какие-то два из них совпадут. То есть $(c_1F + s_1G)^2 = (c_2F + s_2G)^2$ или $(c_1F + s_1G)^2 = (s_2F - c_2G)^2$. Перенося влево и раскладывая на множители, получим, что какая-то из скобок равна нулю в бесконечном числе точек, следовательно, в ней стоит нулевой многочлен. Посмотрим на коэффициенты перед F и G в этой скобке. Хотя бы один из них не равен нулю, так как числа $c_1 + c_2$, $c_1 - c_2$, $c_1 + s_2$, $s_1 + c_2$ ненулевые. Значит, F и G линейно зависимы. Можно считать, что $G = tF$ для некоторого числа t. Тогда $P = (1 + t^2)F^2$. Поскольку F – ненулевой, то, по-разному раскладывая $1 + t^2$ в сумму квадратов двух чисел, получим бесконечное число представлений многочлена P.

5. [5] Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Произвольная прямая l, проходящая через Q, повторно пересекает окружности в точках A и B. Прямые, касающиеся окружностей в точках A и B, пересекаются в точке C, а биссектриса угла CPQ пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что все точки D, которые можно так получить, выбирая по-разному прямую l, лежат на одной и той же окружности.

(*А. Заславский*)

Решение. Пусть A лежит на одной окружности, B – на другой. Два различных случая расположения приведены на рисунках. Решение годится для всех случаев.





По теореме об угле между хордой и касательной получаем равенство ориентированных углов *(AC,AP)=(AQ,QP)=(BC,BP)*. Следовательно, точка C лежит на описанной окружности треугольника APB. Тогда *(CP,PB)=(CA,AB)=(AP,PQ),* т.е биссектрисы неориентированных углов CPQ и BPA совпадают или перпендикулярны.

Если точка Q лежит между A и B, то $APBC$ – выпуклый четырехугольник. Если же, например, B лежит между Q и A, то $PBAC$ – выпуклый четырехугольник. В обоих случаях PD – биссектриса треугольника PAB. Нетрудно видеть, что все эти треугольники подобны друг другу и одинаково ориентированы. Значит, все треугольники PAD также подобны друг другу и при движении точки A по окружности D также движется по окружности.

Сложный вариант

Младшие классы

1. [4] Существует ли число, кратное 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ... , 9 поровну?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: существует.

Решение. 2020 = 20·101, поэтому, например, число 10198987676545432320 подходит.

Замечания. Можно использовать и другие идеи. Так, поскольку 1111 делится на 101, подходит число 111122223333…99990000. Так как 10^{10} + 1 делится на 101, то подходит 12345679801234567980.

Также есть подходящие числа, в которых каждая цифра повторяется по одному разу, например, 1237548960. В подборе этих чисел может помочь признак делимости на 101, который аналогичен признаку делимости на 11: если разбить запись числа на блоки по две цифры (начиная с конца), то знакопеременная сумма полученных двузначных чисел должна быть кратна 101 (например, $12 - 37 + 54 - 89 + 60 = 0$).

2. [5] Три богатыря бьются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает Змею половину всех голов и ещё одну, Добрыня Никитич – треть всех голов и ещё две, Алёша Попович – четверть всех голов и ещё три. Богатыри бьют по одному в каком хотят порядке, отрубая каждым ударом целое число голов. Если ни один богатырь не может ударить (число голов получается нецелым), Змей съедает всех троих. Смогут ли богатыри отрубить все головы 41!-головому Змею?

(*А. Заславский*)

Ответ: смогут.

Решение. Если число голов чётно, богатыри могут уменьшить его, сохранив чётность. Действительно, если голов $4n - 2$, то после удара Ильи их станет $2n - 2$.

Если же голов $4n$, то после удара Алёши их станет $3n - 3$, а после следующего за ним удара Добрыни их станет $2n - 4$.

Богатыри могут так действовать, пока не останется четыре или две головы, для которых хватит одного удара Алёши или Ильи соответственно.

Замечание. Если число голов нечётно, но делится на 3, то богатыри также справятся со Змеем. А вот если оно не кратно ни 2, ни 3, то богатыри гибнут сразу.

3. Существует ли вписанный в окружность N-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если

а) [4] $N = 19$;

б) [3] $N = 20$?

(*М. Малкин*)

а) **Ответ:** не существует.

Решение. Пусть такой 19-угольник существует. Рассмотрим вписанные углы, опирающиеся на его последовательные стороны. Все они разные, и сумма каждых двух углов, соответствующих соседним сторонам, целая (она дополняет один из углов 19-угольника до 180°). Рассмотрим два случая.

1) Все эти вписанные углы выражаются целым числом градусов. Тогда их сумма не меньше $1° + 2° + ... + 19° > 180°$, что невозможно.

2) Есть угол с ненулевой дробной частью ε. Тогда у соседнего угла дробная часть равна 1 – ε, у следующего – снова ε и т.д. Поскольку 19 – нечётное число, то ε = ½. Но тогда сумма углов, опирающихся на все стороны, не меньше $(½° + 1½° + 2½° + ... + 18½°) = ½\,(1° + 3° + 5° + ... + 37°) = ½·361° > 180°$. Снова противоречие.

б) **Ответ:** существует.

Пример. Пусть вписанные углы, опирающиеся на последовательные стороны 20-угольника, равны $4^1/_3°$, $4^2/_3°$, $5^1/_3°$, $5^2/_3°$, ..., $13^1/_3°$, $13^2/_3°$. Сумма этих чисел равна $2(4° + 5° + ... + 13°) + 10° = 180°$. Каждый угол 20-угольника равен 180° минус сумма двух соседних из указанного списка углов, а все эти суммы целые.

4. [8] Для каких N можно расставить в клетках квадрата $N\times N$ действительные числа так, чтобы среди всевозможных сумм чисел на парах соседних по стороне клеток встречались все целые числа от 1 до $2(N-1)N$ включительно (ровно по одному разу)?

(*М. Дидин*)

Ответ: для всех $N > 1$.

Решение. Ниже приведены примеры для $N = 4$ и $N = 5$. Аналогично строятся примеры для всех чётных (нечётных) N: в первом столбце реализуюся все суммы от 1 до $N – 1$, на стыке первого и второго столбцов – от N до $2N – 1$, во втором столбце – от $2N$ до $2N – 2$ и т.д.

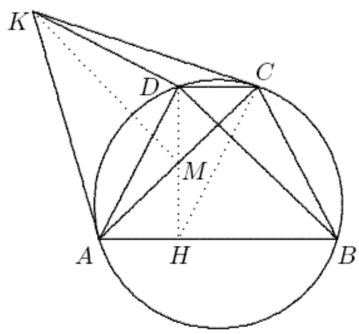
0	4	7	11
1	4	8	11
1	5	8	12
2	5	9	12

0	5	9	14	18
1	5	10	14	19
1	6	10	15	19
2	6	11	15	20
2	7	11	16	20

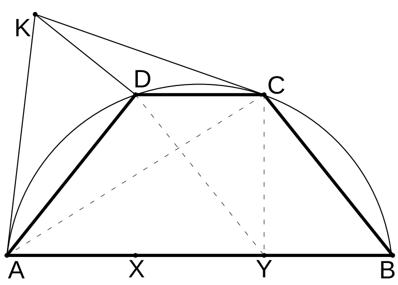
5. [9] Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Её основание AB в 3 раза больше основания CD. Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что угол KDA прямой.

(*А. Юран*)

Решение 1. Пусть DH – высота трапеции, тогда $ADCH$ – параллелограмм. Пусть M – его центр. Тогда KM – серединный перпендикуляр к диагонали AC. По теореме об угле между хордой и касательной $\angle KAD = \angle ABD = \angle BAC = \angle KMD$ (последние два угла – углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Значит, точки A, K, D и M лежат на одной окружности, откуда $\angle KDA = \angle KMA = 90°$.



Решение 2. Проведём высоту CY. Треугольники ADY и AKC равнобедренные и подобны (угол KAC, как угол между касательной и хордой, равен углу DAY, опирающемуся на такую же дугу). Тогда подобны и треугольники ADK и AYC (аналогично, равны углы KAD и CAY, а $KA : AC = DA : AY$ в силу первого подобия). Следовательно, $\angle ADK = 90°$.



6. [9] У Пети есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Он выбирает из неё половину карт (какие хочет) и отдаёт Васе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди выкладывают на стол по одной карте (по своему выбору, в открытом виде); начинает Петя. Если в ответ на ход Пети Вася смог выложить карту той же масти или того же достоинства, Вася зарабатывает 1 очко. Какое наибольшее количество очков он может гарантированно заработать?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: 15 очков.

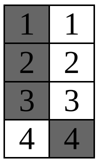
Решение 1. Если Петя возьмёт себе все черви, все тузы, короли и дамы, то Вася не сможет набрать очки на тузе, короле и даме червей, т.е. наберёт не больше 15 очков.

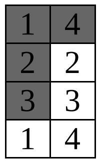
Переформулируем задачу. Рассмотрим доску 4×9. Петя закрашивает чёрным 18 клеток. Докажем, что Вася сможет выделить не менее 15 непересекающихся *хороших* пар: в каждой паре две клетки разного цвета, находящиеся в одной строке или одном столбце.

Назовём *весом* столбца количество чёрных клеток в нём. Сначала Вася рассматривает столбцы типа 2 (если они есть). Каждый из них, очевидно, разбивается на две хорошие пары.

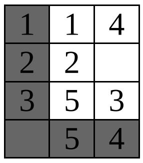
Далее Вася рассматривает пары столбцов типа 0 и 4. Каждая такая пара, очевидно, разбивается на четыре хорошие пары клеток.

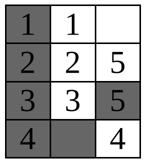
Далее Вася рассматривает пары столбцов типа 1 и 3. Каждая такая пара тоже разбивается на четыре хорошие пары клеток (см. рисунки).





Когда указанные пары столбцов закончатся, в силу симметрии можно считать, что «необработанными» останутся только столбцы типов 4 и 1. Если это a столбцов типа 4 и b столбцов типа 1, то $4a + b = 3b$, то есть $b = 2a$. В тройке из столбца типа 4 и двух столбцов типа 1 Вася сможет выделить не менее пяти хороших пар клеток (см. рисунки).





Так как $3a = a + b \le 9$, то на всей доске останется не более трёх нехороших пар, т.е. Вася «потеряет» не больше 3 очков.

Решение 2 (для знатоков). Мы воспользуемся известной леммой Холла о сватовстве.

Лемма. Пусть есть n юношей. Известно, что для каждой группы из k юношей ($k = 1, 2, ..., n$) имеется по крайней мере k девушек, имеющих знакомых среди этой группы юношей. Тогда каждого юношу можно женить на знакомой девушке.

Доказательство и обсуждение см., например, в статьях: М. Большаков, «Паросочетания и транспортные сети («Квант» №4 за 1970 год); А. Романов, «Задачи и теоремы о представителях» («Квант» №1 за 2015 год); М. Шевцова, «Многократная лемма Холла в задачах про мудрецов» («Квант» № 7 за 2019 год)

В терминах решения 1 объявим чёрные клетки юношами (при этом $n = 18$), белые – девушками, а знакомыми – клетки, находящиеся в одном ряду. Мы докажем, что для каждой группы из k юношей ($k = 4, 2, ..., 18$) имеется по крайней мере $k - 3$ девушки, имеющих знакомых среди этой группы юношей. Добавив трёх *виртуальных* девушек, знакомых со всеми юношами, мы окажемся в условиях леммы Холла. Переженив всех юношей и отбросив не более чем троих, которым достались виртуальные девушки, получим не менее 15 хороших пар.

Пусть есть группа X из k юношей (чёрных клеток). Переставим столбцы, их содержащие, влево, а строки – вниз. Пересечение этих строк и столбцов – прямоугольник площади S_1 – содержит X, а дополнение к их объединению – прямоугольник площади S_2 – содержит всех *незнакомых* с ними девушек. Значит, $k \le \min(S_1, 18)$, а количество *знакомых* с ними девушек не меньше $18 - \min(S_2, 18)$.

Нам достаточно доказать, что $18 - \min(S_2, 18) \ge \min(S_1, 18) - 3$, т.е. что $\min(S_1, 18) + \min(S_2, 18) \le 21$.

Выражение $F = \min(S_1, 18) + \min(S_2, 18)$ симметрично, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда общая вершина A построенных прямоугольников лежит в верхней половине доски. Тогда $S_2 \le 18$.

Отбросим очевидный случай, когда A лежит на границе доски (тогда $S_1 = 0$ или $S_2 = 0$). Если $S_1 < S$, то можно сдвинуть A вправо, чтобы стало $S_1 = 18$ (поскольку 18 делится как на 2, так и на 3), при этом $F = S_1 + S_2$ не уменьшится. Если $S_1 > S$, то можно сдвинуть A влево, чтобы стало $S_1 = 18$, при этом $F = 18 + S_2$ увеличится.

Остался единственный случай $S_1 = 18$, $S_2 = 3$, а в нём неравенство выполнено.

7. [12] Глеб задумал натуральные числа N и a, где $a < N$. Число a он написал на доске. Затем Глеб стал проделывать такую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число и полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных на доске чисел была больше $100N$?

(*И. Митрофанов*)

Ответ: мог.

Решение. Как известно, найдётся такое m, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m+2}>100$ [1].

Положим $N = a + a_1 = 2a_1 + a_2 = 3a_2 + a_3 = \ldots = ma_{m-1} + a_m = (m + 2)a_m$. Тогда $a > \frac{N}{2}$,

$a_1 > \frac{N}{3}, a_2 > \frac{N}{4}, \ldots, a_{m-1} > \frac{N}{m+1}, a_m > \frac{N}{m+2}$, и $a + a_1 + a_2 + \ldots + a_m > 100N$.

Осталось найти решение указанной системы в целых числах. Заметим, что $a = a_1 + a_2$, $a_1 = a_2 + \frac{a_3}{2}$, $a_1 = a_2 + \frac{a_4}{3}$, …, $a_{m-2} = a_{m-1} + \frac{a_m}{m-1}$, $a_{m-1} = \frac{(m+1)a_m}{m}$. Поэтому при $a_m = m!$ все числа $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_1, a, N$ будут целыми. Действительно, a_{m-1} делится на $(m-1)!$, a_{m-2} – на $(m-2)!$, a_{m-3} – на $(m-3)!$ и т.д.

[1] См. задачу 34918 на сайте problems.ru.

Старшие классы

1. [4] На плоскости даны две параболы: $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$. Пусть U – множество всех точек плоскости, лежащих между параболами (включая точки на самих параболах). Существует ли отрезок длины более 10^6, целиком содержащийся в U?

(*А. Толпыго*)

Ответ: существует.

Решение. Касательная к первой параболе в точке (a, a^2) имеет уравнение $y = 2a(x - a) + a^2$. Точки пересечения этой прямой со второй параболой – это $A(a - 1, (a - 1)^2 - 1)$ и $B(a + 1, (a + 1)^2 - 1)$. Отрезок AB целиком лежит в U, а квадрат его длины, равный $2^2 + 16a^2$, может быть сколь угодно велик.

2. [5] Алёша задумал натуральные числа a, b, c, а потом решил найти такие натуральные x, y, z, что $a = \text{НОК}(x, y)$, $b = \text{НОК}(x, z)$, $c = \text{НОК}(y, z)$. Оказалось, что такие x, y, z существуют и определены однозначно. Алёша рассказал об этом Боре и сообщил ему только числа a и b. Докажите, что Боря может восстановить c.

(*Б. Френкин*)

Решение. Пусть произвольное простое p входит в x, y, z в степенях $k \geq l \geq m$. Если $l > 0$, то можно изменить m в пределах от 0 до l, не меняя a, b, c. Поэтому x, y, z попарно взаимно просты. Значит, $a = xy$, $b = xz$, $c = yz = \dfrac{\text{НОК}(a,b)}{\text{НОД}(a,b)}$.

Замечание. Если для произвольных попарно взаимно простых k, l, m задумать числа kl, lm, mk, то x, y, z действительно найдутся единственным образом.

3. [8] Может ли в сечении какого-то тетраэдра двумя разными плоскостями получиться два квадрата: один – со стороной, не большей 1, а другой – со стороной, не меньшей 100?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: может.

Решение. Рассмотрим ромб $ABCD$ со стороной длины 200, в который можно вписать квадрат $1{\times}1$ со сторонами, параллельными диагоналям ромба (такой ромб, очевидно, существует). Построим прямую призму $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$, боковые грани которой – квадраты. Тетраэдр $AB'D'C$ по построению имеет в горизонтальном сечении квадрат $1{\times}1$. С другой стороны, $AB' \parallel DC' \perp CD'$ и $AB' = CD' > 200$, поэтому сечение плоскостью, проходящей через середины четырёх рёбер и параллельной AB' и CD', – квадрат со стороной, равной $\frac{1}{2} AB' > 100$.

4. [9] К Ивану на день рождения пришли $2N$ гостей. У Ивана есть N чёрных и N белых цилиндров. Он хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или несколько) так, чтобы в каждом хороводе было хотя бы два человека и люди в цилиндрах одного цвета не стояли в хороводе рядом. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(2N)!$ различными способами. (Цилиндры одного цвета неразличимы; все гости различимы.)

(*Г. Погудин*)

Решение 1. Занумеруем людей числами от 1 до $2N$. Есть как раз $(2N)!$ способов расставить этих людей в ряд, поэтому достаточно установить взаимно-однозначное соответствие между такими расстановками и разбиениями на хороводы.

Возьмём любую расстановку, наденем всем цилиндры в порядке ЧБЧБ...ЧБ слева-направо. Мысленно разделим людей на пары соседних. В первый хоровод берём подряд всех людей от начала и до той пары включительно, где стоит человек 1 (и замыкаем в хоровод); во второй хоровод берём следующие пары подряд до той включительно, где стоит человек с наименьшим из оставшихся номеров (и замыкаем в хоровод), и т.д.

Обратно, по набору хороводов легко восстановить расстановку: берём хоровод, где стоит человек 1, находим пару ЧБ, в которой он находится, «разрезаем» хоровод сразу за этой парой, вытягиваем в линию и ставим в начало расстановки. Далее берём человека с наименьшим номером из оставшихся, так же разрезаем хоровод за его парой и подсоединяем к расстановке, и т.д.

Решение 2. «Белых» гостей можно выбрать C_{2N}^{N} способами. Для каждого из них разбить «белых» гостей на циклы (длины от 1 до N) можно $N!$ Способами (так как каждая перестановка однозначно разбивается в произведение независимых циклов). Для каждого из них вставить между «белыми» гостями «чёрных» можно $N!$ способами. В итоге получаем $C_{2N}^{N} \cdot N!{\cdot}N! = (2N)!$ различных балов. Ясно, что все балы рассмотрены.

5. [9] Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке.

(*М. Дидин*)

Решение. Наряду с каждой точкой M будем рассматривать её радиус-вектор $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{OM}$, где O – центр описанной окружности четырёхугольника $ABCD$.

Радиус-вектор центра окружности Ω_{AB}, построенной на отрезке AB как на диаметре, равен $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, а её радиус равен $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$. Степень точки S с радиус-вектором $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})$ относительно Ω_{AB} равна $\frac{1}{4}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})^2 - \frac{1}{4}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (поскольку $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{d}|$). Очевидно, степень точки S относительно Ω_{CD} будет такой же. Значит, S лежит на радикальной оси X_1Y_1 этих окружностей.

Аналогично S лежит на X_2Y_2 и X_3Y_3, что и требовалось.

Вариация. Пусть K, L – середины сторон AB и CD, а точка S симметрична центру O относительно центра тяжести вершин A, B, C, D. Тогда $KOLS$ – параллелограмм (см. решение 2). Значит, $KS^2 - KA^2 = OL^2 - (OA^2 - OK^2) = OK^2 - (OC^2 - OL^2) = LS^2 - LC^2$. Это значит, что степени точки относительно окружностей Ω_{AB} и Ω_{CD} равны, поэтому S лежит на радикальной оси X_1Y_1 этих окружностей.

Аналогично S лежит на X_2Y_2 и X_3Y_3, что и требовалось.

Решение 2.

Теорема Монжа. Перпендикуляры, опущенные из середин сторон вписанного четырёхугольника $ABCD$ на противоположные стороны и из середин его диагоналей на противоположные диагонали, проходят через одну и ту же точку (*точку Монжа*).

Доказательство. Докажем, что точка Монжа совпадает с точкой G, симметричной центру O описанной окружности относительно центра тяжести S вершин A, B, C, D (S является общей серединой двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, и отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника $ABCD$).

В самом деле, если M_{AB} и M_{CD} – середины сторон AB и CD соответственно, то в четырёхугольнике $M_{AB}GM_{CB}O$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, он – параллелограмм. Так как $OM_{AB} \perp AB$ и $OM_{CD} \perp CD$, то $M_{CD}G \perp AB$ и $M_{AB}G \perp CD$, то есть два перпендикуляра из условия проходят через G. Аналогично через G проходят остальные четыре перпендикуляра. (Случаи, когда O и S совпадают, или какие-то из указанных параллелограммов вырождаются в отрезки, очевидны.) □

Перейдём к решению задачи. Если в четырёхугольнике $ABCD$ есть пара параллельных сторон, то утверждение очевидно, так как в силу симметрии две из прямых будут срединными перпендикулярами к этим параллельным сторонам, то есть совпадут, а третья прямая будет им перпендикулярна. Поэтому далее считаем, что параллельных сторон нет.

Пусть Ω – описанная окружность четырёхугольника $ABCD$, Ω_{AB} – окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, и т.д., M_{AB} – середина AB, и т.д., K – точка пересечения прямых AB и CD. Тогда K – радикальный центр окружностей Ω_{AB}, Ω_{CD} и Ω. Радикальная ось X_1Y_1 окружностей Ω_{AB} и Ω_{CD} перпендикулярна их линии центров, то есть содержит высоту треугольника $M_{AB}KM_{CD}$. Значит, X_1Y_1 проходит через точку пересечения высот этого треугольника – точку Монжа G. Аналогично через эту точку проходят прямые X_2Y_2 и X_3Y_3.

6. [10] На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел.

(*А. Грибалко*)

Решение.

Лемма. Сумма квадратов $2^k m$ последовательных целых чисел ($k > 0$, m нечётно) делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k.

Доказательство. Индукция по k. *База* ($k = 1$). Сумма двух последовательных квадратов нечётна, значит, сумма $2m$ последовательных квадратов – сумма нечётного числа нечётных слагаемых, то есть нечётна.

Шаг индукции. Пусть $k \geq 2$, $n = 2^{k-1}m$, $a_1, \ldots, a_n$ – первые n из $2n$ последовательных чисел. Тогда $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + (a_1 + n)^2 + \ldots + (a_n + n)^2 = 2(a_1^2 + \ldots + a_n^2) + 2n(a_1 + \ldots + a_n) + n^3$.

Каждое из трёх слагаемых делится на 2^{k-1} (первое – по предположению индукции). При этом первое слагаемое не делится на 2^k, а остальные два делятся. □

Замечание. Другое доказательство леммы можно получить, воспользовавшись формулой для суммы квадратов натуральных чисел от 1 до N.

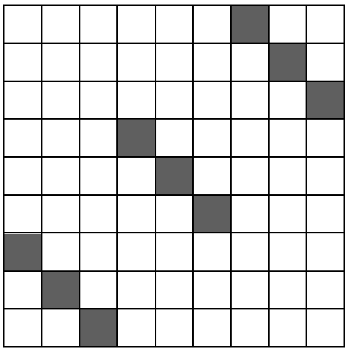
Вернёмся к задаче. Заметим, что $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Следовательно, на каждом шаге сумма квадратов $2n$ чисел на доске удваивается. По лемме она никогда не сможет являться суммой $2n$ последовательных квадратов.

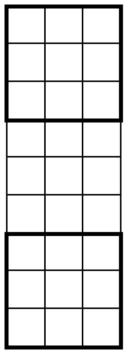
7. [12] Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько (конечное число, большее нуля) клеток в чёрный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k чёрных клеток, либо вовсе не было чёрных клеток?

(*А. Динев, К. Гаров, Н. Белухов*)

Ответ: для всех натуральных k.

Решение 1. Закрасим чёрным сначала k клеток, стоящих подряд вдоль одной из диагоналей, идущей вправо-вниз. Затем сдвинем эту картинку по диагонали вправо-вверх на k, $2k$, $3k$, ..., $(k-1)k$ клеток. Получится множество A из k^2 чёрных клеток, которое каждая горизонталь и вертикаль пересекает не более чем по одной клетке, а каждая диагональ имеет с A либо 0, либо k общих клеток (см. рисунок слева для $k = 3$). При этом всё множество A лежит в квадрате $k^2 \times k^2$.





Заметим, что если квадрат $n \times n$ сдвинуть на $2n$ клеток по вертикали, то не существует диагонали, пересекающей оба эти квадрата (см. рисунок справа для $n = 3$). Поэтому, сдвинув множество A на $2k^2$, $4k^2$, ..., $2(k-1)k^2$ вверх, мы получим множество B из k^3 чёрных клеток, которое каждая горизонталь пересекает не более чем по одной клетке, а каждая вертикаль и диагональ имеет с B либо 0, либо k общих клеток. При этом все множество B лежит в квадрате $2k^3 \times 2k^3$.

Теперь, сдвинув множество B на $4k^3$, $8k^3$, ..., $4(k-1)k^3$ вправо, мы получим искомое множество из k^4 чёрных клеток.

Замечание. Другими словами, построенное множество состоит из клеток с «координатами» $(-i + kj + 4mk^3, i + kj + 2nk^2)$, $0 \le i, j, m, n < k$.

Решение 2. Есть 4 вида линий. Линии, на которых есть чёрные клетки, назовём *покрываемыми*. Требуется, чтобы на каждой покрываемой линии было ровно по k чёрных клеток.

Набор чёрных клеток, для которого на каждой покрываемой линии содержится ровно k клеток, назовём *k-набором*. Из k-набора можно получить $2k$-набор. Для этого вырежем квадрат, содержащий k-набор, и разместим его копии в квадратах, отмеченных буквами на рисунке.

	X		Y	
Y				X
X				Y
	Y		X	

Назовём k-набор *супернабором*, если его можно разбить на 1-наборы с тем же множеством покрываемых линий у каждого. Указанный выше метод из k-супернабора строит $2k$-супернабор. Действительно, разобьём k-супернабор на 1-наборы. Возьмём один из них. Его копии на однобуквенных местах образуют 1-набор, который покрывает то же множество линий, что и $2k$-набор. Весь $2k$-набор разобьётся на такие 1-наборы, значит, это $2k$-супернабор.

В k-супернаборе легко выделить l-набор для любого $l \le k$: взять в нём l разных 1-наборов с тем же множеством покрывающих линий у каждого.

Осталось заметить, что 1-супернабор существует: он состоит, например, из одной клетки. Тогда для каждого k мы сможем создать сначала N-супернабор с $N > k$, а затем получить из него нужный нам k-набор.

Замечание. В решении 1 получается k^4 клеток в квадрате со стороной порядка $4k^4$. В решении 2 – менее $4k^3$ клеток, порядок стороны – менее k^3.

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 15 марта 2020 г.

1. В строку записано 2020 натуральных чисел. Каждое из них, начиная с третьего, делится и на предыдущее, и на сумму двух предыдущих. Какое наименьшее значение может принимать последнее число в строке?

А. Грибалко

2. На высотах AA_0, BB_0, CC_0 остроугольного неравностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

Е. Бакаев

3. На клетчатой плоскости отметили 40 клеток. Всегда ли найдётся клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 20 отмеченных клеток?

М. Евдокимов

4. Для бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ её *первая производная* — это последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ (где $n = 1, 2, \ldots$), а её *k-я производная* — это первая производная её $(k-1)$-й производной ($k = 2, 3, \ldots$). Назовём последовательность *хорошей*, если она и все её производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — хорошие последовательности, то и $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots$ — хорошая последовательность.

Р. Салимов

5. На сфере радиуса 1 дан треугольник, стороны которого — дуги трёх различных окружностей радиуса 1 с центром в центре сферы, имеющие длины меньше π, а площадь равна четверти площади сферы. Докажите, что четырьмя копиями такого треугольника можно покрыть всю сферу.

А. Заславский

6. Дан бесконечный запас белых, синих и красных кубиков. По кругу расставляют любые N из них. Робот, став в любое место круга, идёт по часовой стрелке и, пока не останется один кубик, постоянно повторяет такую операцию: уничтожает два ближайших кубика перед собой и ставит позади себя новый кубик того же цвета, если уничтоженные одинаковы, и третьего цвета, если уничтоженные двух разных цветов. Назовём расстановку кубиков *хорошей*, если цвет оставшегося в самом конце кубика не зависит от того, с какого места стартовал робот. Назовём N *удачным*, если при любом выборе N кубиков все их расстановки хорошие. Найдите все удачные N.

И. Богданов

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 15 марта 2020 года.

Предварительные решения задач.

У-1. *В строку записано 2020 натуральных чисел. Каждое из них, начиная с третьего, делится и на предыдущее, и на сумму двух предыдущих. Какое наименьшее значение может принимать последнее число в строке?* *(А. Грибалко)*

Ответ: 2019!. **Решение.** *Пример.* Условию задачи, очевидно, удовлетворяют числа 1, 1, 2!, 3!, ..., 2019!, так как при любом натуральном k число $(k+2)!$ делится как на $(k+1)!$, так и на $(k+1)!+k! = k!(k+2)$.

Оценка. Пусть a, b, c — три подряд идущих числа в строке, но не первые три числа. Докажем, что $\frac{c}{b} \geqslant \frac{b}{a}+1$. По условию, $\frac{b}{a} = x$, $\frac{c}{b} = y$, где x и y натуральные. Тогда $c = by = axy$, причём c делится на $b+a = ax+a = a(x+1)$. Получаем, что axy делится на $a(x+1)$, откуда xy делится на $x+1$, и так как x и $x+1$ взаимно просты, y делится на $x+1$, то есть $y \geqslant x+1$, что и требовалось.

Заметим, что первые два числа не меньше 1 каждое. Третье число больше второго (так как делится на сумму второго и первого), а значит, хотя бы в два раза больше второго (так как делится на него и не равно ему). По доказанному выше, четвёртое число тогда хотя бы в 3 раза больше третьего, пятое — хотя бы в 3 раза больше четвёртого, и так далее, откуда по индукции получаем, что k-е число не меньше, чем $(k-1)!$ при всех натуральных k.

У-2. *На высотах AA_0, BB_0, CC_0 остроугольного неравностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.* *(Е. Бакаев)*

Решение. Заметим, что если O — центр описанной окружности, то $\angle ACO = \angle C_0CB = \pi/2 - \angle B$. Следовательно, точки O и C_1 симметричны относительно биссектрисы угла C и $IC_1 = IO$, где I — центр вписанной окружности. Аналогично $IO = IA_1 = IB_1$, то есть I — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

У-3. *На клетчатой плоскости отметили 40 клеток. Всегда ли найдётся клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 20 отмеченных клеток?* *(М. Евдокимов)*

Ответ. Нет. **Решение 1.** Рассмотрим клетчатый квадрат размером 11×11 и удалим из него внутренний центральный квадрат 9×9, оставив только рамку толщиной 1. В рамке будет как раз 40 клеток. Докажем, что на плоскости нет клетчатого прямоугольника, содержащего ровно 20 из этих 40 клеток.

Допустим, такой прямоугольник есть. Пусть в нём есть клетки из обеих вертикальных сторон рамки. Тогда каждая горизонтальная сторона рамки либо полностью включена в прямоугольник, либо вовсе не включена. Если включена ровно одна горизонтальная сторона, число клеток в прямоугольнике нечётно, если обе — клеток 40 (слишком много), а если ни одной — клеток максимум 9+9=18 (слишком мало).

Значит, в прямоугольнике могут быть клетки лишь из одной вертикальной стороны рамки, и, аналогично, лишь из одной горизонтальной стороны рамки. Но эти стороны соседние, и суммарно в них максимум 19 клеток — слишком мало. Противоречие.

Решение 2. Рассмотрим клетчатый прямоугольник $[1, 14] \times [1, 3]$, и удалим из него клетки $(7, 1)$ и $(7, 3)$. Останется ровно 40 клеток. Предположим, что нашёлся клетчатый прямоугольник, в котором ровно 20 отмеченных клеток. Он может затрагивать одну, две или три горизонтали с номерами $1, 2, 3$.

Если он затрагивает одну горизонталь, то в нём не более 14 отмеченных клеток.

Если он задевает 2 горизонтали (одна из них — вторая), то он задевает вертикаль с номером 7 (иначе в нём не более 14 клеток). Тогда эта вертикаль вносит в прямоугольник нечётное число отмеченных клеток, а остальные – чётное. Поэтому общее число отмеченных клеток в прямоугольнике нечётно.

Если он задевает все три горизонтали, то число отмеченных клеток в нём либо кратно 3 (если он не задевает 7-й вертикали), либо имеет остаток 1 при делении на 3 (иначе).

В каждом из случаев получаем противоречие.

Замечание. Возможны другие решения. Например, подходит квадрат 7×7 с вырезанным центральным квадратом 3×3, но доказательство более длинное.

У-4. *Для бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ её* первая производная *— это последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ (где $n = 1, 2, \ldots$), а её k-я* производная *— это первая производная её $(k-1)$-й производной $(k = 2, 3, \ldots)$. Назовём последовательность* хорошей*, если она и все её производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — хорошие последовательности, то и $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots$ — хорошая последовательность.* *(Р. Салимов)*

Решение. Пусть $c_n = a_n \cdot b_n$. Тогда $c'_n = a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n = a_{n+1} \cdot (b_{n+1} - b_n) + b_n \cdot (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} \cdot b'_n + b_n \cdot a'_n$. Так как в сумме все слагаемые положительны, первая производная у c_n (и у произведения любых двух хороших последовательностей) состоит из положительных чисел. Кроме того, мы представили c'_n в виде суммы двух произведений хороших последовательностей. Далее по индукции, пользуясь тем, что производная суммы — это сумма производных и первая производная произведения хороших последовательностей положительна, получаем, что и все производные у c_n состоят из положительных чисел.

У-5. *На сфере радиуса 1 дан треугольник, стороны которого — дуги трёх различных окружностей радиуса 1 с центром в центре сферы, имеющие длины меньше π, а площадь равна четверти площади сферы. Докажите, что четырьмя копиями такого треугольника можно покрыть всю сферу.* *(А. Заславский)*

Решение 1. Пусть O — центр сферы, а ABC — данный сферический треугольник. По формуле площади сферического треугольника $\pi = S_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$, то есть $\angle A + \angle B + \angle C = 2\pi$. (Доказательство формулы площади заключается в применении формулы включений-исключений к трем полусферам, пересечением которых является данный треугольник.)

Построим на сфере точку D, лежащую с C в разных полуплоскостях относительно OAB, и такую, что $\angle DAB = \angle CBA$ и $\angle DBA = \angle CAB$ (имеются в виду сферические углы; иначе говоря, точка D получена из C композицией симметрии относительно OAB и симметрии относительно серединного перпендикуляра к AB). Тогда треугольники ABC и BAD равны. Значит, $BD = AC$ и $AD = BC$. Но из условия имеем $\angle DAC = \angle DBC = \angle ACB$, следовательно, сферические треугольники CDA и DCB также равны треугольнику ABC. Четыре полученных треугольника покрывают сферу.

Решение 2. Пусть A, B, C — вершины данного треугольника. Покажем, что треугольник ABC остроугольный. Действительно, пусть $\angle ACB \geqslant \pi/2$. Если плоскость $\alpha = ABC$ содержит центр O сферы, то сферический треугольник ABC вырожден, и его площадь не такая, как надо. Иначе α отрезает от сферы «шапочку» площади меньше полусферы. Далее, прямая AB (нестрого) разделяет C и проекцию O на ABC; значит, часть шапочки, отсекаемая плоскостью OAB и содержащая C, не больше её половины. Наконец, сферический треугольник ABC лежит в этой области, площадь которой меньше четверти площади сферы — противоречие.

Итак, треугольник ABC остроугольный; тогда существует равногранный тетраэдр $ABCD$ (точки D и O лежат в одной полуплоскости относительно ABC). Пусть O' — центр этого равногранного тетраэдра. Тогда телесные углы $O'ABC$, $O'BCD$, $O'CDA$, $O'DAB$ разбивают пространство, то есть каждый из них равен четверти площади единичной сферы. Однако, если O' ближе в ABC, чем O, то этот телесный угол больше, чем $OABC$, а если O' дальше — то меньше. Оба случая невозможны; значит, $O = O'$, и упомянутые телесные углы дают требуемое разбиение сферы на 4 части.

У-6. *Дан бесконечный запас белых, синих и красных кубиков. По кругу расставляют любые N из них. Робот, став в любое место круга, идёт по часовой стрелке и, пока не останется один кубик, постоянно повторяет такую операцию: уничтожает два ближайших кубика перед собой и ставит позади себя новый кубик того же цвета, если уничтоженные одинаковы, и третьего цвета, если уничтоженные двух разных цветов. Назовём расстановку кубиков* хорошей*, если цвет оставшегося в конце кубика не зависит от места, с которого стартовал робот. Назовём N* удачным*, если при любом выборе N кубиков все их расстановки хорошие. Найдите все удачные N.* *(И. Богданов)*

Ответ. Степени двойки. **Решение 1.** Присвоим цветам остатки $0, 1, 2$ от деления на 3 произвольным образом. Все операции с ними также будем производить по модулю 3. Тогда операция, производимая роботом, такова: если уничтожаются кубики цветов a и b, то появляется кубик цвета $-a-b$.

Если $N = 2^k$, то после каждого прохода полного круга количество кубиков уменьшается вдвое, а их сумма меняет знак. Значит, в конце получится кубик цвета $(-1)^k(a_1 + \ldots + a_N)$, вне зависимости от места старта. Мы доказали, что степени двойки удачны.

Если $N = 2^k + d$, где $1 \leqslant d \leqslant 2^k - 1$, то рассмотрим расстановку из одного красного кубика и $N-1$ белого. Если робот стартует перед красным кубиком, то после d ходов останутся один синий кубик и $2^k - 1$ белых. Если робот стартует непосредственно после красного кубика, то через d ходов останутся один красный кубик и $2^k - 1$ белых. Вышеприведённые аргументы для степени двойки показывают, что в этих двух ситуациях итоговые цвета будут разными, то есть N неудачно.

Решение 2. Заметим сразу, что, если чётное число N удачно, то и $N/2$ тоже. Действительно, если в расстановке N кубиков робот будет начинать только с чётных позиций, то после $N/2$ ходов он будет получать одну и ту же расстановку, в которой он стоит на всевозможных позициях. Поскольку каждая расстановка $N/2$ кубиков может быть получена таким образом, получаем требуемое.

Рассмотрим две расстановки, отличающиеся ровно в одном месте. Запустим в них по роботу параллельно; тогда получающиеся расстановки всегда будут отличаться ровно в одном месте. В частности, итоговые цвета будут различны.

Отсюда уже следует, что все нечётные $N = 2k+1 > 1$ (а значит, по замечанию, и все N, кроме степеней двойки) неудачны. Действительно, начнём с расстановки с одним красным и $2k$ белыми кубиками. Если робот стоял перед красным кубиком, через $k+1$ ход останутся один красный и $k-1$ белый кубик, робот стоит после красного. Если же робот стартует непосредственно после красного, через $k+1$ ход останутся один синий и $k-1$ белых кубиков, робот стоит непосредственно после синего. Как показано выше, итоговые цвета в этих двух ситуациях будут разными.

Покажем теперь, что, если N — степень двойки, то итоговый цвет не зависит от места старта. Для этого сделаем ещё одно наблюдение по поводу замены цвета. Если цвет одного кубика в расстановке сменить на следующий в циклическом порядке Б→К→С→Б, то после одного использования цвет сдвинется в *противоположную* сторону. Значит, если $N = 2^k$, любая такая замена исходного кубика приведёт к сдвигу цвета итогового кубика в одну и ту же сторону. Осталось заметить, что две расстановки, отличающиеся поворотом, получаются из расстановки всех белых кубиков за одинаковое количество замен «вперёд по циклу».