Primjena Jensenove nejednakosti u trigonometriji

Marko Valčić, Zadar

Ovaj se članak sadržajno oslanja na članak [1] u kojem je J. Pečarić iznio značenje i primjenu konveksnosti funkcija pri dokazivanju raznih nejednakosti. Mi ćemo se ovdje zadržati samo na jednoj takvoj nejednakosti i upoznati njenu vrlo veliku i efikasnu primjenu u trigonometriji. Budući je njena formulacija usko povezana s konveksnim funkcijama, prethodno ćemo precizirati pojam konveksnosti neke funkcije na zadanom intervalu.

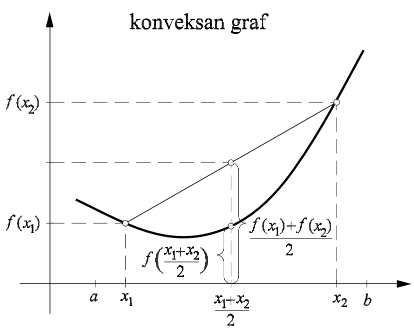
Definicija 1. Funkcija f je konveksna na intervalu $[a, b]$ ako za svaki x_1, $x_2 \in [a, b]$ vrijedi

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{1}$$

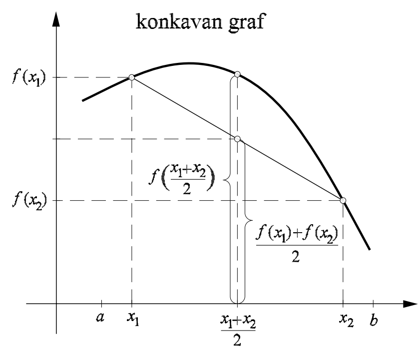
Definicija 2. Funkcija f je konkavna na intervalu $[a, b]$ ako za svaki x_1, $x_2 \in [a, b]$ vrijedi

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{2}$$

Definicije 1. i 2. možemo zgodno interpretirati geometrijski na sljedeći način.



Sl. 1.



Sl. 2.

Funkcija f je konkavna na intervalu $[a, b]$ ako je $-f$ konveksna na intervalu $[a, b]$. Vrijedi i obrat tvrdnje.

Jensenova nejednakost

Iz navedenih definicija možemo naslutiti da vrijedi i sljedeći

Teorem 1. Ako je f konveksna funkcija na intervalu $[a, b]$, te $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ onda vrijedi nejednakost

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \tag{3}$$

Ukoliko u (1) vrijedi $x_1 = x_2$, tada u (3) vrijedi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Donosimo samo skicu dokaza kojeg provodimo indukcijom. Iz pretpostavke da (3) vrijedi za $n > 2$ dokažimo da vrijedi i za $n-1$. Neka je

$$x_n = \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

Po pretpostavci je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$
$$\leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f\Big(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\Big)}{n}.$$

Sredimo li lijevu stranu, dobivamo

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\Big) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})]+\frac{1}{n}f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\Big),$$

odakle slijedi tražena relacija.

Originalni dokaz u cjelosti sadržava i induktivni dokaz za $n = 2^k$ kojeg ovdje ispuštam i prepuštam vama da ga dokažete.

Teorem 2. Ako je f konkavna funkcija na intervalu $[a, b]$, te $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ onda vrijedi nejednakost

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\Big) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \tag{4}$$

Konveksne i konkavne funkcije

Prvi radovi s područja konveksnih funkcija potječu od nekoliko značajnijih matematičara prošlog i pretprošlog stoljeća. Tako se smatra da je austrijski matematičar O. Stolz (1842. – 1905.) u svom članku iz 1893. godine prvi uveo pojam konveksne funkcije. Čak je četiri godine ranije, 1889. godine, njemački matematičar O. Hölder (1859. – 1937.) dokazao nejednakost (3) uz uvjete da za funkciju f postoji f'' i $f''(x) \geqslant 0$. Kasnije ćemo vidjeti da je upravo to kriterij konveksnosti neke funkcije. Međutim, pravo značenje konveksnih funkcija iznio je tek danski matematičar J. L. W. V. Jensen (1859. – 1925.) u svojim člancima iz 1905. i 1906. godine, u kojima je definirao konveksne funkcije pomoću nejednakosti (1), te dokazavši teorem 1 ponio počast po kojoj i danas nejednakost (3) nazivamo *Jensenova nejednakost*.

Iz svega što smo dosad naveli lako zaključujemo da Jensenovu nejednakost možemo primijeniti kako na konveksne tako i na konkavne funkcije. No, postavlja se pitanje kako odrediti kad je funkcija konveksna, a kad konkavna. Najlakše poimanje i shvaćanje konveksnosti dano je upravo kroz nejednakost (1) i sl. 1, no učenicima koji su upoznati s nekim osnovnim elementima matematičke analize (neprekidnost, limes, derivacija) dan je jednostavniji način kroz svojevrsni kriterij konveksnosti, tj. konkavnosti u sljedećem teoremu.

Teorem 3. Ako postoji neprekidna druga derivacija funkcije f na intervalu $[a, b]$ onda vrijedi:

$$\begin{array}{lll} f'' > 0 & \Longrightarrow & \text{funkcija je konveksna na } [a, b], \\ f'' < 0 & \Longrightarrow & \text{funkcija je konkavna na } [a, b]. \end{array}$$

Budući da dokaz uključuje neke temeljne teoreme s područja matematičke analize, to ga ovdje ne navodimo, ali zainteresiraniji učenik može više o tome naći u [3].

Na kraju ovog teoretskog dijela ipak je važno naglasiti da konveksna funkcija na nekom intervalu nije nužno i derivabilna. Drugim riječima to znači da na graf konveksne funkcije u nekoj točki možda nećemo moći povući tangentu što za posljedicu povlači da u toj točki ne možemo definirati konveksnost. Slično vrijedi i za konkavnost.

Konveksnost i konkavnost trigonometrijskih funkcija

Kad je riječ o trigonometrijskim funkcijama onda zbog njihove periodičnosti ne možemo govoriti općenito o konveksnosti ili konkavnosti. Međutim, na pojedinim intervalima možemo promatrati konveksnost ili konkavnost trigonometrijskih funkcija. Tako imamo

Posljedica 1. Funkcija $f(x) = \sin x$ je konkavna na intervalu $[0, \pi]$.

Tvrdnja posljedice nam je lako razumljiva sjetimo li se sl. 2 i grafa sinusoide. Strogi dokaz nam daje teorem 3 prema kojem za $f(x) = \sin x$ dobivamo $f''(x) = -\sin x < 0$, $x \in [0, \pi]$. Konkavnost smo elementarno mogli dokazati, ukoliko dokažemo nejednakost

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}, \qquad x_1,\ x_2 \in [0, \pi]. \tag{5}$$

Posljedica 2. Funkcija $f(x) = \cos x$ je konkavna na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Slično kao kod posljedice 1.

Posljedica 3. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ je konveksna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Prema teoremu 3 dobivamo $f''(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x} > 0$, za $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Kod većine težih i složenijih nejednakosti navedene posljedice nam ne mogu osigurati konveksnost ili konkavnost određene funkcije, jer se najčešće radi o kompoziciji funkcija ili kombinaciji različitih trigonometrijskih funkcija. Međutim, uvijek vrijede teoremi 1, 2 i 3 pa njihovom upotrebom bez većih teškoća možemo riješiti širok spektar zadataka.

Rješavanje trigonometrijskih pomoću Jensenove nejednakosti

Kao direktna posljedica Jensenove nejednakosti proizlaze mnoge danas poznate nejednakosti kao npr. Cauchyeva, Čebiševljeva, Hölderova, Minkowskijeva, Bunjakovski-Cauchyeva, Aczelova, itd. no mi ćemo se ovdje ograditi samo na tehnike dokazivanja trigonometrijskih nejednakosti koje proizlaze iz teorema 1 i 2.

Zadatak 1. Neka su $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \frac{\pi}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dokaži nejednakosti

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant n \cdot \sin\Big(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big),$$
$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \leqslant \sin^n\Big(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big).$$

Rješenje. Za funkciju $f(\alpha_i) = \sin\alpha_i$, $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi $f''(\alpha_i) = -\sin\alpha_i < 0$ (posljedica 1) pa prva nejednakost proizlazi ako na funkciju $f(x) = \sin x$ primijenimo teorem 2. Za drugu nejednakost, također prema teoremu 2 imamo

$$\ln(\sin\alpha_1) + \ln(\sin\alpha_2) + \ldots + \ln(\sin\alpha_n) \leqslant n \cdot \ln\Big(\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big),$$

tj.

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \leqslant \sin^n\Big(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big),$$

jer je za $f(x) = \ln\sin x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f''(x) = \Big(\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\Big)' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

Uočimo da za $n = 3$, tj. kad je riječ o trokutu dobivamo sljedeće nejednakosti

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

Zadatak 2. Dokaži da u šiljastokutnom trokutu vrijedi

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\Big).$$

Rješenje. Kutovi α, β, γ su iz intervala $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Promotrimo funkciju

$$f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x, \qquad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle. \tag{6}$$

Budući da je $f''(x) = \frac{2 - \cos^3 x}{\cos^3 x}\sin x > 0$, $\forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, to je funkcija (6) strogo konveksna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Prema teoremu 1 imamo

$$\frac{(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha) + (\sin\beta + \operatorname{tg}\beta) + (\sin\gamma + \operatorname{tg}\gamma)}{3} \geqslant \sin\Big(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\Big) + \operatorname{tg}\Big(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\Big),$$

tj.

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\Big(\sin\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\Big) = 3\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\Big).$$

Znak jednakosti u posljednjoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tj. kad je zadani trokut jednakostraničan.

Zadatak 3. Dokaži nejednakost

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ} < \operatorname{tg} 22^\circ 30' < \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 44^\circ}{44}.$$

Rješenje. Budući da je funkcija $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$ konkavna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ jer je

$$f''(x) = (\ln \operatorname{tg} x)'' = -4 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} < 0, \qquad \forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle,$$

to prema teoremu 2 možemo pisati

$$\ln \operatorname{tg} 1^\circ + \ln \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \ln \operatorname{tg} 44^\circ \leqslant 44 \ln \operatorname{tg}\Big(\frac{1^\circ + 2^\circ + \ldots + 44^\circ}{44}\Big),$$

$$\frac{1}{44} \ln(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ) \leqslant \ln \operatorname{tg}(22^\circ 30')$$

te konačno dobivamo

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ} < \operatorname{tg} 22^\circ 30'. \tag{7}$$

Zbog konveksnosti funkcije $g(x) = \operatorname{tg} x$ (posljedica 3) na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$, prema teoremu 1 dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 44^\circ}{44} > \operatorname{tg}\Big(\frac{1^\circ + 2^\circ + \ldots + 44^\circ}{44}\Big) = \operatorname{tg} 22^\circ 30'. \tag{8}$$

Iz nejednakosti (7) i (8) direktno proizlazi tražena dvostruka nejednakost.

Zadatak 4. Ako su $x, y, z \in \mathbf{R}$ $(0 \leqslant x, y, z < \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbf{N}$ dokaži nejednakost

$$\operatorname{tg}^n x \cdot \operatorname{tg}^n y + \operatorname{tg}^n y \cdot \operatorname{tg}^n z + \operatorname{tg}^n z \cdot \operatorname{tg}^n x \geqslant \frac{1}{3^{n-1}}(\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x)^n.$$

Rješenje. Za $n = 1$ vrijedi jednakost. Neka je $n \geqslant 2$ i $f(x) = x^n$, $x > 0$. Budući je $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, $x > 0$, to možemo primijeniti teorem 1, te slijedi

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \geqslant f\Big(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\Big),$$

a samim time i

$$\frac{x_1^n + x_2^n + x_3^n}{3} \geqslant \Big(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\Big)^n. \tag{9}$$

Kako za brojeve $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi $0 \leqslant x, y, z < \frac{\pi}{2}$, to je $\operatorname{tg} x \geqslant 0$, $\operatorname{tg} y \geqslant 0$, $\operatorname{tg} z \geqslant 0$. Supstitucijom $x_1 = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$, $x_2 = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$, $x_3 = \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x$ u nejednakost (9) dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg}^n x \cdot \operatorname{tg}^n y + \operatorname{tg}^n y \cdot \operatorname{tg}^n z + \operatorname{tg}^n z \cdot \operatorname{tg}^n x}{3} \geqslant \Big(\frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x}{3}\Big)^n$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

Zadatak 5. Neka su α, β, γ kutovi trokuta i $n \in \mathbf{N}$. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\gamma}{2} \geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Rješenje. Za funkciju $f(x) = \operatorname{ctg}^n x$ dobivamo $f''(x) = n(n-1)\operatorname{ctg}^{n-2} x \cdot \frac{1}{\sin^4 x} + 2n \operatorname{ctg}^{n-1} x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} > 0$, $\forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $n \in \mathbf{N}$. Budući je funkcija $f(x)$ prema teoremu

3 konveksna, iz teorema 1 slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2}&=3\Big(\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2}\Big)\\&\geqslant 3\operatorname{ctg}^n\frac{1}{3}\Big(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\Big)\\&=3\operatorname{ctg}^n\Big(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\Big)=3\operatorname{ctg}^n\frac{\pi}{6}=3^{\frac{n+2}{2}}.\end{aligned}$$

Zaključak

Nadam se da ste kroz ovih nekoliko primjera uočili efikasnost Jensenove nejednakosti. Kao što ste mogli i primijetiti, sama metodika rješavanja relativno je standardna i svodi se na određivanje odgovarajuće funkcije definirane na nekom zadanom intervalu kojoj određujemo konveksnost ili konkavnost, te konačno realiziramo dokaz kroz teorem 1 ili 2.

Za one koji nisu uočili prednost teorema 1 i 2 nad klasičnim rješavanjem, predlažem da riješe sve nejednakosti, koje su ovdje navedene, nekom drugom metodom (indukcijom, trigonometrijski,. . .), dok za one druge ostavljam još nekoliko zadataka za uvježbavanje.

Korisno bi bilo upamtiti teoreme opisane u ovom članku i razmisliti o upotrebi Jensenove nejednakosti na ostale funkcije (nejednakosti algebarskog karaktera).

Zadaci za vježbu

1. Ako su α_1, α_2, . . . , α_n kutovi konveksnog mnogokuta, dokaži da vrijede nejednakosti

$$\sin\frac{\alpha_1}{m}+\sin\frac{\alpha_2}{m}+\ldots+\sin\frac{\alpha_n}{m}\leqslant n\sin\Big(\frac{n-2}{mn}\pi\Big),$$

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n<\Big(\frac{2\pi}{n}\Big)^n.$$

2. Dokaži da u šiljastokutnom trokutu vrijedi

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\geqslant 3\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\Big).$$

3. Neka su α, β, γ kutovi trokuta i $n\in\mathbf{N}$. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}^n\alpha+\operatorname{tg}^n\beta+\operatorname{tg}^n\gamma\geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Literatura

[1] J. PEČARIĆ, *Konveksne funkcije i nejednakosti*, MFL, god. XXXIX, 4/159, 1988.–89.

[2] D. S. MITRINOVIĆ i P. M. VASIĆ, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[3] S. KUREPA, *Matematička analiza I. i II. dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1997.

[4] M. VALČIĆ, *Trigonometrija – odabrani zadaci*, Element, Zagreb, 1996.