O četverokutu koji je i tetivni i tangencijalni, Fussova relacija i Ponceletov teorem zatvaranja

Mirko Radić[1], *Rijeka*

Za četverokut kojemu se može opisati kružnica kaže se da je *tetivni*, a za četverokut kojemu se može upisati kružnica kaže se da je *tangencijalni*. Četverokut kojemu se može opisati i upisati kružnica kraće se zove *bicentrički* četverokut. U ovom će članku biti riječi o nekim zanimljivim i važnim svojstvima bicentričkog četverokuta.

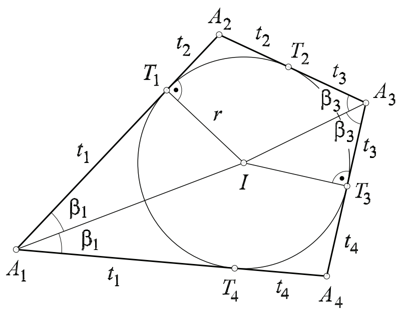
Teorem 1. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ bilo koji zadani tangencijalni četverokut i neka su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine njegovih tangenata, tj.

$$|A_1A_2| = t_1 + t_2, \quad |A_2A_3| = t_2 + t_3, \quad |A_3A_4| = t_3 + t_4, \quad |A_4A_1| = t_4 + t_1. \tag{1}$$

Polumjer kružnice upisane četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ označen je s r, a s I je označeno središte te kružnice. Ako vrijede jednakosti

$$t_1t_3 = r^2, \qquad t_2t_4 = r^2, \tag{2}$$

tangencijalni četverokut $A_1A_2A_3A_4$ je i tetivni.



Slika 1.

Dokaz. Kao što je poznato, četverokut je tetivni ako mu zbroj dvaju nasuprotnih kutova iznosi 180°. Dakle, da bismo dokazali da je četverokut $A_1A_2A_3A_4$ prikazan na slici 1 tetivni, treba dokazati da je $2\beta_1 + 2\beta_3 = 180^\circ$. U tu svrhu pretpostavit ćemo da vrijede jednakosti (2) i koristiti poznatu formulu iz trigonometrije

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{3}$$

Možemo pisati

$$\cos 2\beta_1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta_1}{1 + \operatorname{tg}^2\beta_1} = \frac{1 - \left(\frac{r}{t_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{t_1}\right)^2} = \frac{t_1^2 - r^2}{t_1^2 + r^2},$$

$$\cos 2\beta_3 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta_3}{1 + \operatorname{tg}^2\beta_3} = \frac{1 - \left(\frac{r}{t_3}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{t_3}\right)^2} = \frac{t_3^2 - r^2}{t_3^2 + r^2} = \frac{\left(\frac{r^2}{t_1}\right)^2 - r^2}{\left(\frac{r^2}{t_1}\right)^2 + r^2} = -\frac{t_1^2 - r^2}{t_1^2 + r^2},$$

jer je

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{r}{t_1}, \quad \operatorname{tg}\beta_3 = \frac{r}{t_3} = r : \frac{r^2}{t_1} = \frac{t_1}{r}.$$

Dakle, $\cos 2\beta_1 = -\cos 2\beta_3$, što može biti samo ako je $2\beta_1 + 2\beta_3 = 180^\circ$.

Time je teorem 1 dokazan. □

[1] Autor je profesor emeritus na Filozofskom fakultetu u Rijeci.

Teorem 2. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ bilo koji zadani osno simetrični četverokut i neka je r polumjer kružnice upisane četverokutu $A_1A_2A_3A_4$, R polumjer kružnice opisane četverokutu $A_1A_2A_3A_4$, d udaljenost između središta upisane i opisane kružnice. Tada je

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2). \tag{4}$$

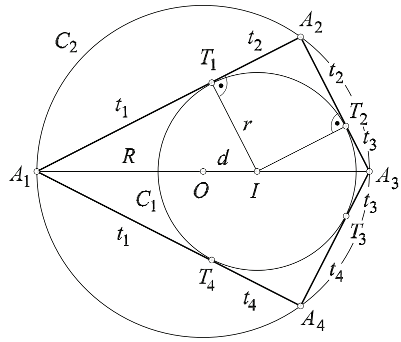
Dokaz. Promotrimo sliku 2. Kružnica opisana četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ označena je s C_2, a kružnica upisana četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ označena je sa C_1. S O je označeno središte kružnice C_2, a s I središte kružnice C_1. Udaljenost između O i I označeno je s d. Lako se vidi da je četverokut $IT_1A_2T_2$ kvadrat kojemu je duljina stranice jednaka r. Prema tome je $t_2 = t_4 = r$. Obratimo pozornost na trokute A_1T_1I i IT_2A_3. Ti su trokuti slični, pa vrijedi jednakost

$$r : t_1 = t_3 : r,$$

odnosno

$$t_1t_3 = r^2,$$

što i prema teoremu 1 mora vrijediti.



Slika 2.

Iz trokuta A_1T_1I i IT_2A_3 vidimo, također, da je

$$t_1 = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}, \quad t_3 = \sqrt{(R-d)^2 - r^2}.$$

Zato možemo pisati

$$\sqrt{(R+d)^2 - r^2} \cdot \sqrt{(R-d)^2 - r^2} = r^2$$

i dalje je

$$[(R+d)^2 - r^2][(R-d)^2 - r^2] = r^4,$$
$$(R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2) = 0.$$

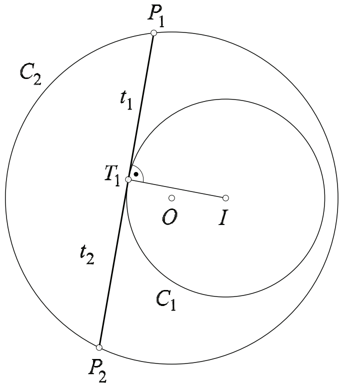
Time je dokazano da vrijedi jednakost (4), tj. dokazan je teorem 2.

Zadržimo se još malo na slici 2. Primijetimo da je t_1 duljina najveće tangente koja se može povući iz ma koje točke kružnice C_2 na kružnicu C_1, a da je t_3 duljina najmanje tangente koja se može povući iz ma koje točke kružnice C_2 na kružnicu C_1. Da bismo to istakli označimo tu duljinu t_1 s t_M, a duljinu t_3 s t_m. Dakle, t_m i t_M dane su izrazima

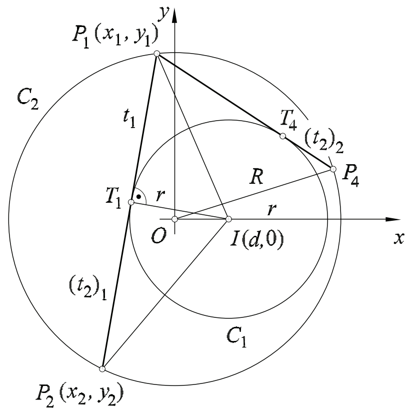
$$t_m = \sqrt{(R-d)^2 - r^2}, \quad t_M = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}. \tag{5}$$

Promotrimo sada sliku 3. Uzmimo da su kružnice C_1 i C_2 kao i na slici 2 i da je P_1 bilo koja zadana točka na kružnici C_2 i t_1 duljina tangente povučene iz P_1 na kružnicu C_1. Treba naći izraz za t_2, tj. valja naći formulu po kojoj se može izračunati t_2 na temelju poznavanja vrijednosti za t_1. Da bismo našli tu formulu dopunit ćemo sliku 3 na način da se dobije slika 4.

Kao što se vidi, koristimo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O (središtu kružnice C_2) tako da x-os sadrži točku I (središte kružnice C_1).



Slika 3.



Slika 4.

Dokazujemo sada sljedeći teorem.

Teorem 3. Neka su C_1 i C_2 kružnice kao na slici 2, dakle, kao i na slici 3 ili na slici 4. Dalje, neka je t_1 duljina bilo koje zadane tangente povučene iz neke točke na kružnici C_2 na kružnicu C_1, tj. neka je t_1 bilo koja zadana duljina tako da je

$$t_m \leqslant t_1 \leqslant t_M, \tag{6}$$

gdje su t_m i t_M dane izrazima (5). Tada je t_2 dana izrazom

$$t_2 = (t_2)_1 = \frac{(R^2 - d^2)\,t_1 + \sqrt{D}}{r^2 + t_1^2} \tag{7}$$

ili izrazom

$$t_2 = (t_2)_2 = \frac{(R^2 - d^2)\,t_1 - \sqrt{D}}{r^2 + t_1^2} \tag{8}$$

gdje je

$$D = t_1^2(R^2 - d^2)^2 + (r^2 + t_1^2)\,\left[4R^2d^2 - r^2t_1^2 - (R^2 + d^2 - r^2)^2\right]. \tag{9}$$

Dokaz. Najprije primijetimo da se iz zadane točke na kružnici C_2 mogu povući dvije tangente na kružnicu C_1. Tako se, iz točke P_1 na slici 4, mogu povući tangente P_1T_1 i P_1T_4. Iza tangente P_1T_1 dolazi tangenta T_1P_2 čija je duljina označena s $(t_2)_1$, a iza tangente P_1T_4 dolazi tangenta T_4P_4 čija je duljina označena s $(t_2)_2$. U razmatranju koje ćemo kasnije provoditi bit će svejedno koju ćemo od vrijednosti $(t_2)_1$ i $(t_2)_2$ uzeti za t_2. Recimo da smo uzeli da je $t_2 = (t_2)_1$.

Da bismo dokazali da vrijede izrazi (7) i (8) koristit ćemo trokute P_1T_1I i T_1P_2I. Ti su trokuti pravokutni, pa vrijede jednakosti

$$t_1^2 + r^2 = (x_1 - d)^2 + y_1^2, \quad t_2^2 + r^2 = (x_2 - d)^2 + y_2^2.$$

A budući da je $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = R^2$, možemo te jednakosti pisati u obliku

$$t_1^2 + r^2 = R^2 + d^2 - 2dx_1, \quad t_2^2 + r^2 = R^2 + d^2 - 2dx_2$$

ili, u obliku

$$x_1 = \frac{-t_1^2 + R^2 - r^2 + d^2}{2d}, \quad x_2 = \frac{-t_2^2 + R^2 - r^2 + d^2}{2d}. \tag{10}$$

Koristit ćemo i jednakost $t_1 + t_2 = |P_1P_2|$, tj.

$$(t_1 + t_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

odnosno

$$(t_1+t_2)^2 = -2x_1x_2 - 2y_1y_2 + 2R^2.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$(2y_1y_2)^2 = ((t_1+t_2)^2 + 2x_1x_2 - 2R^2)^2,$$

koja se, koristeći izraze $y_1^2 = R^2 - x_1^2$, $y_2^2 = R^2 - x_2^2$ i (10), može pisati u obliku

$$(r^2+t_1^2)\,t_2^2 - 2t_1t_2(R^2-d^2) + r^2t_1^2 - 4R^2d^2 + (R^2+d^2-r^2)^2 = 0. \tag{11}$$

To je kvadratna jednadžba po t_2 i njeni korijeni su dani izrazima (7) i (8). To se može lako provjeriti i tako da se koristi znanje o Vièteovim formulama. Naime, vidimo da je

$$(t_2)_1 + (t_2)_2 = \frac{2(R^2-d^2)\,t_1}{r^2+t_1^2}, \quad (t_2)_1(t_2)_2 = \frac{r^2t_1^2 - 4R^2d^2 + (R^2+d^2-r^2)^2}{r^2+t_1^2}.$$

Time je teorem 3 dokazan. □

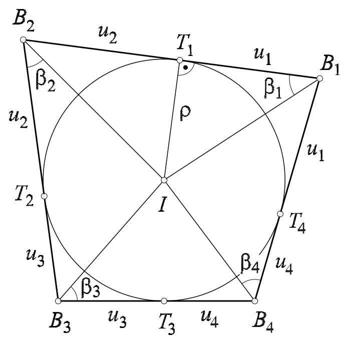
Teorem 4. Neka je $B_1B_2B_3B_4$ bilo koji zadani tangencijalni četverokut i neka su mu u_1, u_2, u_3, u_4 duljine njegovih tangenti, tj.

$$u_1+u_2 = |B_1B_2|, \qquad |u_2+u_3| = |B_2B_3|,$$
$$u_3+u_4 = |B_3B_4|, \qquad |u_4+u_1| = |B_4B_1|.$$

Tada vrijedi jednakost

$$(u_1+u_2+u_3+u_4)\rho^2 = u_1u_2u_3 + u_2u_3u_4 + u_3u_4u_1 + u_4u_1u_2, \tag{12}$$

gdje je ρ polumjer kružnice upisane četverokutu $B_1B_2B_3B_4$ (vidi sliku 5).



Slika 5.

Dokaz. Iz slike 5 vidimo da vrijedi jednakost

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 = 180^\circ,$$

jer je suma unutarnjih kutova četverokuta jednaka 360°. Tu jednakost možemo pisati u obliku

$$\beta_1+\beta_2 = 180^\circ - (\beta_3+\beta_4)$$

i dalje,

$$\operatorname{tg}(\beta_1+\beta_2) = \operatorname{tg}(180^\circ - (\beta_3+\beta_4)) = \operatorname{tg}(\beta_3+\beta_4),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2}{1-\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\operatorname{tg}\beta_3 + \operatorname{tg}\beta_4}{1-\operatorname{tg}\beta_3\operatorname{tg}\beta_4}. \tag{13}$$

Kako je

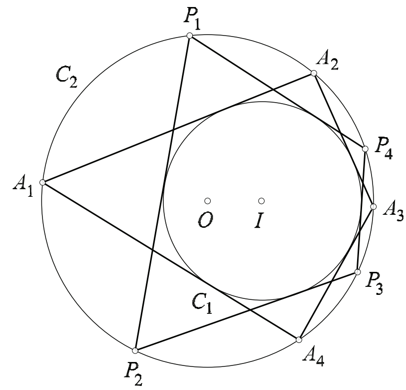
$$\operatorname{tg}\beta_i = \frac{\rho}{u_i} \qquad (i = 1,2,3,4),$$

lako se nalazi da time jednakost (13) prelazi u jednakost (12).

Teorem 4 je dokazan. $\square$

U narednom teoremu uzet ćemo da su duljine r, R, d, t_1, $(t_2)_1$ iste kao i u teoremu 3. Dokazujemo sada:

Teorem 5. Postoji beskonačno mnogo bicentričkih četverokuta koji imaju istu upisanu i istu opisanu kružnicu kao i četverokut $A_1A_2A_3A_4$ prikazan na slici 2. Za svaku točku X_1 na kružnici C_2 postoje točke X_2, X_3, X_4 tako da je četverokut $X_1X_2X_3X_4$ bicentrički koji ima istu upisanu i istu opisanu kružnicu kao i četverokut $A_1A_2A_3A_4$ prikazan na slici 2 (vidi sliku 6).



Slika 6.

Dokaz. Poći ćemo od slike 3. Budući da su kružnice C_1 i C_2 na toj slici i po veličini i po međusobnom položaju kao i one na slici 2, dovoljno je pokazati da za svaku točku P_1 na kružnici C_2 postoje točke P_2, P_3, P_4 tako da četverokut $P_1P_2P_3P_4$ bude bicentrički kojemu je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica.

Drugim riječima, dovoljno je pokazati da postoji bicentrički četverokut tako da je

$$|P_1P_2| = t_1 + t_2, \quad |P_2P_3| = t_2 + t_3, \quad |P_3P_4| = t_3 + t_4, \quad |P_4P_1| = t_4 + t_1,$$

gdje je

$$t_m \leqslant t_1 \leqslant t_M, \quad t_2 = \frac{(R^2 - d^2)\,t_1 + \sqrt{D}}{r^2 + t_1^2}, \quad t_3 = \frac{r^2}{t_1}, \; t_4 = \frac{r^2}{t_2}. \tag{14}$$

Primijetimo ovdje da je t_1 duljina tangente koja se može povući iz točke P_1 na kružnici C_1 i da je $t_2 = (t_2)_1$, gdje je $(t_2)_1$ dana izrazom (7).

Najprije treba pokazati da postoji tangencijalni četverokut kojemu su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine tangenata dane izrazima (14) i r polumjer upisane mu kružnice, tj. da vrijedi jednakost

$$(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)r^2 = t_1t_2t_3 + t_2t_3t_4 + t_3t_4t_1 + t_4t_1t_2.$$

Dokaz je lagan. Naime, koristeći jednakosti $t_1t_3 = r^2$, $t_2t_4 = r^2$, možemo gornju jednakost pisati u obliku

$$(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)r^2 = r^2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4).$$

Na temelju teorema 1 jasno je i to da je tangencijalni četverokut kojemu su duljine tangenata dane izrazima (14) i tetivni četverokut, dakle, bicentrički četverokut. Pokazat ćemo da je opisana kružnica toga bicentričkog četverokuta upravo kružnica C_2. U tu svrhu koristit ćemo poznate formule za bicnetrički četverokut. Naime, ako je $B_1B_2B_3B_4$ bicentrički četverokut kojemu je R polumjer opisane kružnice i t_1, t_2, t_3, t_4 duljine njegovih tangenata, tada vrijede formule

$$R^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{16P^2}, \qquad P^2 = abcd \tag{15}$$

gdje je $a = t_1 + t_2$, $b = t_2 + t_3$, $c = t_3 + t_4$, $d = t_4 + t_1$, P – površina četverokuta $B_1B_2B_3B_4$.

(Formule (15) nalaze se i u srednjoškolskoj literaturi, pa ih ovdje nećemo dokazivati. Čitatelj kojega to zanima, može to naći, na primjer, u knjižici koja se navodi u popisu literature. U njoj ima mnogo zanimljivih relacija koje se odnose na tetivne i tangnecijalne poligone.)

Koristeći formule (15) može se pokazati da je razlomak

$$\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16abcd}$$

jednak R^2 za duljine t_1, t_2, t_3, t_4 dane izrazima (14). Ostavljamo čitatelju da se uvjeri da se na kraju dobiva razlomak $\dfrac{R^2(r^2+t_1^2)}{r^2+t_1^2}$.

Tako je dokazan i teorem 5.

Sada možemo, kao sažetak svega što je rečeno u ovome članku, istaknuti dvije osnovne i veoma značajne tvrdnje koje se odnose na bicentričke četverokute.

1. Ako su C_1 i C_2 dvije kružnice u istoj ravnini i C_1 unutar C_2, pa ako postoji bicentrički četverokut kojemu je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica, tada vrijedi jednakost

$$(R^2-d^2)^2 = 2r^2(R^2+d^2), \tag{16}$$

gdje je r polumjer kružnice C_1, a R polumjer kružnice C_2, d udaljenost između središta kružnica C_1 i C_2.

2. Ako su C_1 i C_2 dvije kružnice u istoj ravnini i C_1 unutar C_2, pa ako postoji bicentrički četverokut kojemu je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica, tada postoji beskonačno mnogo bicentričkih četverokuta kojima je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica.

Dakle, ili nema nijednog ili ima beskonačno mnogo bicentričkih četverokuta.

Prvu tvrdnju dokazao je njemački matematičar **Nicolaus Fuss** (1755. – 1826.), suvremenik i prijatelj velikog švicarskog matematičara Leonharda Eulera. Time je bio riješen problem koji se ubrajao među sto velikih problema elementarne matematike.

Drugu tvrdnju dokazao je veliki francuski matematičar **Jean Victor Poncelet**, (1788. – l867.). Ta je tvrdnja poznata kao *Ponceletov teorem zatvaranja za bicentrički četverokut*. Poncelet je dokazao da analogno vrijedi za poligone s po volji mnogo vrhova. Čak je i poopćio tu tvrdnju na slučaj kad umjesto kružnica dolaze konike (čunjosječnice). Ali se ovdje na tome ne možemo zadržavati. Spomenut ćemo samo da se sve te fascinantne tvrdnje mogu relativno lako dokazati koristeći jednu granu geometrije, tzv. *projektivnu geometriju*.

Autor ovoga članka se nada da je našao dovoljno pristupačan način (ne udaljavajući se od srednjoškolskog gradiva) da dokaze osnovnih tvrdnji o bicnetričkim četverokutima mogu shvatiti i učenici srednjih škola koji vole matematiku i kojima njeno upoznavanje čini zadovoljstvo i užitak.

Na kraju, preporučamo učenicima da obrate pozornost i narednim vježbama.

Vježbe

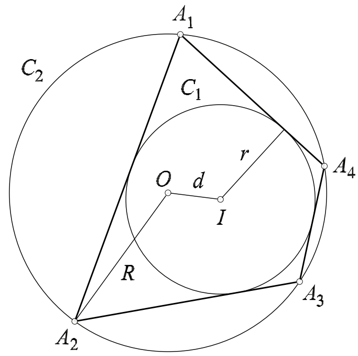
1. Koristeći jednakost pod (4), dokaži da se diskriminanta D dana izrazom (9) može pisati u obliku

$$D = (R^2-d^2)^2t_1^2 - r^2(r^2+t_1^2)^2. \tag{17}$$

Uputa. Vrijede jednakosti $4R^2d^2-(R^2+d^2-r^2)^2 = -(R^2-d^2)^2+2r^2(R^2+d^2)+r^4 = r^4$.

2. Neka je $R = 3$ cm, $d = 1$ cm. Iz jednakosti navedenoj pod (4) slijedi da je $r = 1.788854382$ cm. Koristeći formule (5) uvjeri se da je $t_m = 0.894427191$ cm, $t_M = 3.577708764$ cm. Dakle, za t_1 možemo uzeti bilo koju vrijednost između t_m i t_M. Uzmimo da je $t_1 = 1.7$ cm. Uvjeri se da je $t_2 = 3.5699729$ cm, $t_3 = 1.88235294$ cm, $t_4 = 0.896365343$ cm. Koristi izraze navedene pod (14). (Manje računanja će biti ako za D uzmeš izraz naveden pod (17).) Na slici 7 nacrtan je odgovarajući bicentrički četverokut.

Duljine t_2, t_3 i t_4 računali smo ovdje na devet decimala, iako za ovu potrebu nije trebalo više od par decimala.



Slika 7.

3. Neka su R, d i r kao u prethodnoj vježbi. Uzmi $t_1 = 2$ cm i izračunaj t_2, t_3, t_4, a zatim nacrtaj odgovarajući bicentrički četverokut. Nacrtaj na toj slici i bicentrički četverokut nacrtan na slici 7.

4. Neka su $A_1A_2A_3A_4$ i $B_1B_2B_3B_4$ bilo koja dva bicentrička četverokuta koji imaju istu upisanu i opisanu kružnicu i neka su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine tangenata četverokuta $A_1A_2A_3A_4$, a u_1, u_2, u_3, u_4 duljine tangenata četverokuta $B_1B_2B_3B_4$. Dokaži da vrijede jednakosti

$$t_1t_2t_3t_4 = u_1u_2u_3u_4 = r^4,$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_4t_1 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + u_4u_1 = 2(R^2 - d^2).$$

Koristi izraze navedene pod (14).

5. Dokaži da je $t_mt_M - r^2 = 0 \iff (R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2) = 0$.

6. Iz slike 4 lako je zaključiti da u slučaju kad su P_1, P_2 i P_4 tri vrha bicentričkog četverokuta onda je izrazom (8) dana duljina tangente t_4. Koristeći tu činjenicu dokaži da je

$$t_2t_4 - r^2 = 0 \iff (R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2) = 0,$$

gdje je $t_2 = (t_2)_1$, $t_4 = (t_2)_2$.

To je još jedan vrlo zanimljiv način kako se može dokazati Fussova relacija (4).

Literatura

[1] M. RADIĆ, V. KADUM, (2005), *Tangencijalni i tetivni poligoni. Bicentrički poligoni*, (Matematika za mlade), Pula: IGSA