Глигор Тренчевски
Ристо Малчески
Костадин Тренчевски

МАТЕМАТИКА 3

ЗА ТРЕТА ГОДИНА ВО РЕФОРМИРАНОТО ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

С О Д Р Ж И Н А

ГЛАВА III

ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

ГЛАВА IV

В О В Е Д

Пред тебе е учебникот по изборниот предмет МАТЕМАТИКА за трета година од гимназиското образование. Тој е работен така, што ќе можеш и самостојно да се здобиваш со новите знаења и умеења што се предвидени со наставната програма по овој предмет.

Материјалот е поделен, согласно со програмата, во четири одделни целини (теми). На почетокот на секоја тема, покрај содржината што е разработена во неа даден е преглед на потребните предзнаења за успешно следење на материјалот кој е разработен во таа глава. Исто така, даден е и прегледот на новите знаења и умеења со кои треба да се стекнеш доколку успешно ги совладаш предвидените содржини. Секоја тема е заокружена целина и е разделена на одреден број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Темите се означени со римски броеви, додека лекциите се означени со арапски броеви. Во секоја тема, дефинициите, примерите, забелешките и теоремите се нумерирани интегрално за темата, што не е случај со задачите за вежбање кои се дадени по секоја лекција, како и задачите за повторување и утврдување кои се дадени на крајот на секоја тема. На крајот од секоја тема е даден тест, со чија помош можеш да ги провериш и да ги оцениш своите знаења и умеења.

Разработуваниот материјал содржи голем број тврдења (теореми), од кои дел треба да ги усвоиш без доказ, што е посебно назначено за секоја теорема. Примерите, кои ги има во доволен број, се целосно решени и се дадени како илустрација на тврдења-та што се разработуваат. Затоа, особено е важно добро да ги разработиш, бидејќи само така можеш да се подготвиш за самостојно решавање на задачи, а потоа да преминеш кон решавање на задачите за вежбање.

За полесно користење на учебникот, даден е регистар на поимите со кои ќе се сретнеш во текот на учењето, како и список на користените ознаки.

На крајот од учебникот се дадени одговори и упатства на некои од задачите за вежбање. Пожелно е пред да го погледнеш одговорот или упатството на задачата, да се обидеш самостојно да ја решиш и да извршиш самопроверка. Само така ќе можеш да се здобиеш со самодоверба и ќе можеш успешно да усвојуваш нови знаења и умеења. Се разбира дека за посеопфатно и подлабоко усвојување на предвидениот материјал, пожелно е да користиш и дополнителна литература, па затоа таа е наведена во посебен дел, веднаш по одговорите и упатствата на задачите.

Авторите

ЛИСТА НА СИМБОЛИ

Simbol	*Zna~ewe*	*Simbol*	*Zna~ewe*
N	множество природни броеви	$\log_a b$	логаритам од b за основа a
Z	множество цели броеви	sec	секанс
R	множество реални броеви	cosec	косеканс
	агол	V_n^k	варијација без повторување од n елементи од класа k
	степен	$\overline{V}_n^k$	варијација со повторување од n елементи од класа k
rad	радијан	P_n	пермутација без повторување од n елементи
$\overline{AB}$	должина на отсечка	$P_n^{k_1,k_2,...,k_m}$	пермутација од n елементи од тип $(k_1, k_2, ..., k_m)$
sin	синус	C_n^k	комбинација без повторување од n елементи од класа k
cos	косинус	$\overline{C}_n^k$	комбинација со повторување од n елементи од класа k
tg	тангенс	$\overline{A}$	настан спротивен на настанот A
ctg	котангенс	$P(A)$	веројатност на настанот A
a^r, a 0	степен со реален експонент		бројот пи
	припаѓа		унија
f : **R** **R**	реална функција		пресек
	невозможен настан		подмножество
	сигурен настан	$C_n^k, \binom{n}{k}$	биномен коефициент

ГЛАВА I

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. Степен со реален експонент
2. Експоненцијална функција
3. Експоненцијални равенки
4. Поим за логаритам. Основни својства
5. Логаритамска функција
6. Декадни логаритми
7. Логаритамски равенки
8. Некои примени на експоненцијалните функции

P O TREBN I P REDZ N AEWA

Za uspe { no sov l aduvawe na sodr ` i n i t e ko i }e gi usvojuva { vo ovaa t ema, po t rebno e da se po t se t i { na:

- *de f i n i c i ja t a na s t epen i operac i i t e so s t epen i so rac i ona l en pokaza t e l ,*
- *po imo t rea l en broj i pr i b l i ` ni t e rac i onal n i vrednos t i na i rac i onal n i t e broev i ,*
- *f ormul i t e za skra t eno mno ` ewe,*
- *re { avawe t o na l inearn i t e i kvadra t n i t e ravenk i , i*
- *re { avawe t o na l inearn i t e i kvadra t n i t e neravenk i .*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да ја усвоиш дефиницијата на експоненцијалната функција,
- да научиш да одредуваш дефинициона област на експоненцијална функција,
- да научиш да ја испитуваш монотоноста на експоненцијалната функција за различни вредности на основата,
- да составуваш таблици на вредности на експоненцијалната функција,
- да конструираш график на функција од видот $y\ \ a^x; y\ \ a^x\ \ m; y\ \ a^{x\ \ p}\ \ m;$ за $a\ \ \mathbf{R}$,
- да научиш да ја проценуваш положбата на графикот на експоненцијалната функција според аналитичкиот запис,
- да ја усвоиш дефинцијата на експоненцијалната равенка,
- да научиш да решаваш равенки од видот $a^x\ \ m\ \ 0, a^{f(x)}\ \ m\ \ 0, (a^{f(x)})^2\ \ ba^{f(x)}\ \ c\ \ 0,$,
- да ја усвоиш дефиницијата на логаритам,
- да ја усвоиш операцијата логаритмирање,
- да ги усвоиш својствата на логаритмирањето,
- да ги усвоиш правилата за логаритмирање на производ, количник, степен и корен,
- да научиш да одредуваш карактеристика на декаден логаритам од даден број,
- да научиш да логаритмираш бројни изрази и да вршиш приближни пресметувања,
- да ја усвоиш врската меѓу логаритми од броеви со различни основи,
- да ја усвоиш дефиницијата на логаритамската функција,
- да одредуваш дефинициона област на логаритамски функции од видот $y\ \ \log_a x$ и $y\ \ \log_a f(x)$,
- да научиш да ја испитуваш монотоноста на логаритамската функција,
- да научиш да ја проценуваш монотоноста на логаритамската функција според нејзината основа,
- да конструираш график на логаритамската функција $y\ \ \log_a x$,
- да ја усвоиш дефиницијата на логаритамската равенка, и
- да научиш да решаваш едноставни логаритамски равенки.

Во математиката и нејзините примени важна улога имаат таканаречените експоненцијални и логаритамски функции. Експоненцијалната функција $x \mapsto a^x, a > 0, x \in \mathbf{R}$ е потполно определено проширување на поимот за степен $n \mapsto a^n, a \neq 0, n \in \mathbf{Z}$. Со експоненцијалните функции се опишуваат процесите на растење, како што е порастот на бројот на жителите на некоја земја, порастот на националниот доход итн. Исто така, со овие функции се опишуваат и процесите на опаѓање, на пример масата на радиоактивно тело во текот на времето и слично.

Посебно важна е експоненцијалната функција $x \mapsto 10^x, x \in \mathbf{R}$ и со неа поврзаната функција $x \mapsto \log x$. За важноста на овие функции доволно говори фактот дека секој калкулатор има вграден програм за приближно пресметување на вредностите на овие функции.

I.1. СТЕПЕН СО РЕАЛЕН ЕКСПОНЕНТ

Во прва година се запознавме со степените со показател (експонент) рационален број. Да се потсетиме. Прво се запознавме со степенот $a^n, a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$, а потоа го воведовме и степенот чиј показател е 0, односно цел негативен број, и тоа со следниве дефиниции

$$a^0 = 1, a \neq 0 \text{ и } a^{-k} = \frac{1}{a^k}, k \in \mathbf{N}, a \neq 0.$$

Притоа забележавме дека степените a^0 и a^{-k}, за $a = 0$ не се дефинирани. Понатаму, степенот со позитивен рационален експонент го воведовме со следнава дефиниција

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, m, n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

а степенот со негативен рационален експонет со дефиницијата

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0, m, n \in \mathbf{N}.$$

Да забележиме дека за $a < 0$ дефиницијата (1) не можеме да ја примениме на изразот a^r, $r \in \mathbf{Q}$, што може да се види од следниов пример.

Пример 1. Нека $a < 0$. За $r = \frac{2}{4}$ имаме $a^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{a^2} \in \mathbf{R}$, а за $r = \frac{1}{2} (= \frac{2}{4})$ добиваме $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \notin \mathbf{R}$. Понатаму, за $r = \frac{2}{6}$ имаме $a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2} > 0$, а за $r = \frac{1}{3} (= \frac{2}{6})$ добиваме $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} < 0$.

Исто така, за степените со рационални експоненти важи следнава теорема.

Теорема 1. За секои $a, b > 0$ и за секои $r, q \in \mathbf{Q}$ важат равенствата

$$a^r \cdot a^q = a^{r+q},\; a^r : a^q = a^{r-q},\; (ab)^r = a^r \cdot b^r,\; (\tfrac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r} \text{ и } (a^r)^q = a^{rq}. \tag{2}$$

Во претходниот дел се потсетивме на степените со експонент рационален број. Но, дали можеме да разгледуваме степен со експонент ирационален број? На пример, дали има смисла изразот $3^{\sqrt{2}}$? Пред да одговориме на ова прашање ќе докажеме уште едно својство на степните со експонент рационален број. Имено, ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 2. Нека $r \quad s; r,s \quad \mathbf{Q}$. Ако $a \quad 1$, тогаш $a^r \quad a^s$. Ако $0 \quad a \quad 1$, тогаш $a^r \quad a^s$.

Доказ. Нека $r \quad s; r,s \quad \mathbf{Q}$ и $a \quad 1$. Тогаш, $r \quad \frac{m}{n}, s \quad \frac{p}{q}$ и $r \quad s \quad \frac{mq \quad np}{nq} \quad 0$, па затоа можеме даземеме дека $mq \quad np \quad 1$ и $nq \quad 1$. Сега од својствата на степен со природен експонент и од теорема 1 имаме $a^{mq \quad np} \quad 1 \quad 1^{nq}$, па затоа

$$1 \quad a^{\frac{mq \quad np}{nq}} \quad a^{\frac{m}{n} \quad \frac{p}{q}} \quad \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} \quad \frac{a^r}{a^s}.$$

Ако во последното равенство помножиме со $a^s \quad 0$ добиваме $a^r \quad a^s$, што и требаше да се докаже.

Ако $0 \quad a \quad 1$ и $r \quad s; r,s \quad \mathbf{Q}$, тогаш $\frac{1}{a} \quad 1$, па од претходно изнесеното следува $(\frac{1}{a})^r \quad (\frac{1}{a})^s$. Сега од теорема 1 следува $\frac{1}{a^r} \quad \frac{1}{a^s}$ и ако во последното равенство помножиме со $a^r a^s \quad 0$ добиваме $a^r \quad a^s$, што и требаше да се докаже.

Да се вратиме на прашањето за *stepen so realen eksponent*, т.е. дали има смисла изразот $3^{\sqrt{2}}$? За таа цел да ги разгледаме неравенствата

$$1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \quad ... \quad \sqrt{2} \quad ... \quad 1{,}4143 \quad 1{,}415 \quad 1{,}42 \quad 1{,}5 \quad 2.$$

Ако ја искористиме теорема 2 добиваме

$$3^1 \quad 3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414} \quad 3^{1,4142} \quad ... \text{ и } ... \quad 3^{1,4143} \quad 3^{1,415} \quad 3^{1,42} \quad 3^{1,5} \quad 3^2.$$

Според тоа, изразот $3^{\sqrt{2}}$ исто така можеме да го сфатиме како степен чија вредност е еднозначно определена со претходните две низи неравенства, т.е.

$$3^1 \quad 3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414} \quad 3^{1,4142} \quad ... \quad 3^{\sqrt{2}} \quad ... \quad 3^{1,4143} \quad 3^{1,415} \quad 3^{1,42} \quad 3^{1,5} \quad 3^2.$$

Забелешка 1. Воопшто, изразите $a^r, a \quad 0$, каде r е ирационален број, ги сфаќаме како степени и за нив важат истите правила како и за степените со рационални експоненти, т.е. точни се теоремите 1 и 2. Меѓутоа, во пракса при пресметување на бројните вредности на степените со ирационални експоненти конкретните пресметувања ги вршиме со помош на нивните приближни вредности.

Пример 2. а) Од $3^{1,41421} \quad 4{,}728785881...$ и $3^{1,41422} \quad 4{,}728837832...$ и како

$$1{,}41421 \quad \sqrt{2} \quad 1{,}41422 \text{ т.е. } 3^{1,41421} \quad 3^{\sqrt{2}} \quad 3^{1,41422}$$

заклучуваме дека со точност до третото децимално место важи $3^{\sqrt{2}} \quad 4,728$.

б) Од $7^{1,73205} \quad 29,09055857...$ и $7^{1,732051} \quad 29,09061517...$ и како

$$1,73205 \quad \sqrt{3} \quad 1,732051 \text{ т.е. } 7^{1,73205} \quad 7^{\sqrt{3}} \quad 7^{1,732051}$$

заклучуваме дека со точност до третото децимално место важи $7^{\sqrt{3}} \quad 29,090$.

Пример 3. а) Од теорема 1 имаме

$$\frac{3^{\sqrt{3}}\, 3^{1 \;\; \sqrt{3}}}{2\, 3^{\sqrt{2} \;\; 1}} \quad \frac{3^{\sqrt{3} \;\; 1 \;\; \sqrt{3}}}{2\, 3^{\sqrt{2} \;\; 1}} \quad \frac{1}{2}\, \frac{3}{3^{\sqrt{2} \;\; 1}} \quad \frac{1}{2}\, 3^{1 \;\; \sqrt{2} \;\; 1} \quad \frac{1}{2}\, 3^{\;\; \sqrt{2}}.$$

б) Бидејќи $\sqrt{2} \quad \frac{3}{2} \quad \sqrt{3}$ и како $6 \quad 1$ од забелешка 1 и теорема 2 следува

$$6^{\sqrt{2}} \quad 6^{\frac{3}{2}} \quad 6^{\sqrt{3}}.$$

Од друга страна, бидејќи $\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1$ и $\sqrt{2} \quad \frac{3}{2} \quad \sqrt{3}$, повторно од теорема 2 и забелешка 1 следува

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{3}} \quad (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{3}{2}} \quad (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}}.$$

Забелешка 2. Во пример 2 се пресметани неколку вредности на степени. По правило овие пресметувања се комплицирани, па затоа пожелно е да користиш калкулатор. Во случајов употребата на калкулаторот е едноставна и таа се состои во следново:

- ја внесуваш основата на степенот, на пример $2,41$,
- го притискаш копчето со ознака y^x,
- го внесуваш степеновиот показател, на пример $1,456$, после што на екранот ќе се појави бројот $3,599289786 \quad 2,41^{1,456}$.

ЗАДАЧИ

1. Напиши ги во облик на степени изразите

а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt[3]{x^2}$, в) $\sqrt[2n \;\; 1]{a \;\; 1}$.

2. Пресметај

а) $81^{\frac{1}{2}}$, б) $32^{\frac{2}{5}}$, в) $(2^{\frac{1}{2}} \quad 3^{\frac{3}{2}}) \;\; 2^{\frac{3}{2}}$, г) $(\;\; 15 \;\; 2^{\frac{1}{n}}):(3 \;\; 2^{\;\; \frac{1}{n \;\; 1}})$.

3. Без да пресметуваш, подреди ги по растечки редослед броевите: $2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{4}}$ и $5^{\frac{1}{6}}$.

4. Без да пресметуваш, подреди ги по растечки редослед броевите: $4^{\sqrt{2}}$, $4^{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$, $4^{\;\; \frac{3\sqrt{3}}{4}}$ и $4^{\;\; \sqrt{2}}$.

I. 2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

Од разгледувањата во претходната точка можеме да заклучиме, дека при $a \quad 0$ степенот a^x има, за секоја вредност $x \quad \mathbf{R}$, точно една позитивна вредност. Според тоа, има смисол следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Нека $a \quad 0$. Функцијата $f : \mathbf{R} \quad \mathbf{R}$, определена со

$$f(x) \quad a^x, \text{ за секој } x \quad \mathbf{R} \tag{1}$$

ја нарекуваме *eksponencijalna funkcija* со основа a.

Природно е да се запрашаме кои својства ги има експоненцијалната функција.

i) Од $1^x \quad 1$, за секој $x \quad \mathbf{R}$ добиваме дека во случај кога основата е $a \quad 1$ експоненцијалната функција всушност е константната функција $f(x) \quad 1$, за секој $x \quad \mathbf{R}$.

ii) Нека $a \quad 0$. Од својствата на степените имаме дека $a^0 \quad 1$, што значи дека графикот на експоненцијалната функција (1) ја сече y оската во точката $A(0,1)$. Понатаму, од својствата на степените и од $a \quad 0$ следува дека за секој $x \quad \mathbf{R}$ важи $a^x \quad 0$, што значи дека графикот на експоненцијалната функција не ја сече x оската, т.е. оваа функција нема нули.

iii) Нека $x_1 \quad x_2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1 \quad x_2$. Имаме:

- ако $0 \quad a \quad 1$, тогаш од забелешка 1 и теорема 2 следува дека $a^{x_1} \quad a^{x_2}$, т.е. $f(x_1) \quad f(x_2)$, и
- ако $a \quad 1$, тогаш од забелешка 1 и теорема 2 следува дека $a^{x_1} \quad a^{x_2}$, т.е. $f(x_1) \quad f(x_2)$,

па затоа при $a \quad 1$ со (1) е зададена инјекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$.

Може да се докаже дека при $a \quad 1$, за секој $y \quad \mathbf{R}$ постои $x \quad \mathbf{R}$ таков, што $f(x) \quad y$, т.е. дека со (1) е зададена сурјекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$. Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема 3. Ако $a \quad 1$, тогаш експоненцијалната функција (1) е биекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$.

iv) Од претходната теорема непосредно следува дека дефиниционата област на експоненцијалната функција (1) е множеството $\mathbf{R}$, а нејзиното множество вредности е множеството позитивни реални броеви $\mathbf{R}$.

v) Пред да ја разгледаме монотоноста на експоненцијалната функција, да се потсетиме дека:

- за функцијата $y \quad g(x)$ велиме дека строго монотоно расте, ако од $x_1 \quad x_2$, следува $g(x_1) \quad g(x_2)$;

- за функцијата $y \quad g(x)$ велиме дека строго монотоно опаѓа, ако од $x_1 \quad x_2$, следува $g(x_1) \quad g(x_2)$.

Во *iii*) видовме дека за $0 \quad a \quad 1$ од $x_1 \quad x_2$ следува $a^{x_1} \quad a^{x_2}$ т.е. $f(x_1) \quad f(x_2)$, а за $a \quad 1$ од $x_1 \quad x_2$ следува $a^{x_1} \quad a^{x_2}$ т.е. $f(x_1) \quad f(x_2)$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 4. а) Ако $0 \quad a \quad 1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област.

б) Ако $a \quad 1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно расте на целата дефинициона област.

Пример 4. а) За да го нацртаме графикот на функцијата $y \quad 2^x$, $x \quad \mathbf{R}$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на експоненцијалната функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

x	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
$y \quad 2^x$	$\frac{1}{32}$ 0,03125	$\frac{1}{16}$ 0,0625	$\frac{1}{8}$ 0,125	$\frac{1}{4}$ 0,25	$\frac{1}{2}$ 0,5	1	2	4	8	16	32

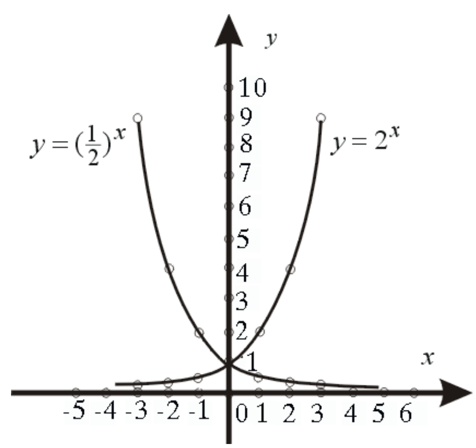
Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, 2^x)$ и истите ги поврземе (цртеж долу).

б) За да го нацртаме графикот на функцијата $y \quad (\frac{1}{2})^x$, $x \quad \mathbf{R}$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на експоненцијалната функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

x	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
$y \quad (\frac{1}{2})^x$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$ 0,5	$\frac{1}{4}$ 0,25	$\frac{1}{8}$ 0,125	$\frac{1}{16}$ 0,0625	$\frac{1}{32}$ 0,03125

Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, (\frac{1}{2})^x)$ и истите ги поврземе (цртеж долу).

Од пример 4 а) насетуваме дека функцијата $y \quad 2^x$, $x \quad \mathbf{R}$ може да прими произволно голема вредност кога x е доволно голем број, односно произволна мала позитивна вредност кога x е доволно мал број. Последното ќе го покажеме на пример.



Пример 5. а) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што на пример $2^x \quad 8589934591$.

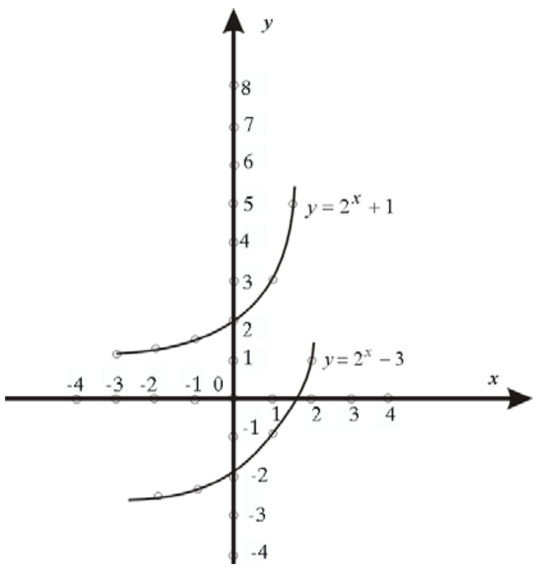
Бидејќи $2^{33} \quad 8589934592 \quad 8589934591$ од својствата на експоненцијалната функција следува дека за секој $x \quad 33$ важи

$$2^x \quad 2^{33} \quad 8589934592 \quad 8589934591.$$

б) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што $2^x = 0{,}0000000002$.

Бидејќи $2^{-33} = \frac{1}{2^{33}} = \frac{1}{8589934592} > 0{,}0000000002$ од својствата на експоненцијалната функција следува дека за секој $x \geq -33$ важи $2^x \geq 2^{-33} > 0{,}0000000002$.

Од претходниот пример и од таблицата што и соодветствува на функцијата $y = 2^x$ се забележува следново: ако земеме дека x е негативно и дека постојано опаѓа, т.е. дека неговата апсолутна вредност расте, добиваме дека функцијата прима позитивни вредности и дека таа постојано опаѓа, но нејзината вредност никогаш не е еднаква на нула. Тоа значи дека соодветната крива за оние негативни вредности на апцисата x што неограничено опаѓаат се приближува до негативниот дел на $x-$оската, но во случајот не ја сече. Во ваков случај велиме дека $x-$оската е *хоризонтална асимптота* на дадената крива. Очигледно, $x-$оската е *хоризонтална асимптота* за кривата $y = (\frac{1}{2})^x$, со тоа што во овој случај ординатата y се приближува до $x-$оската во нејзиниот позитивен дел.



Воопшто говорено, $x-$оската е хоризонтална асимтота на функцијата $y = a^x$ и тоа:

- ако $a > 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до $x-$оската во негативниот дел, и
- ако $0 < a < 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до $x-$оската во позитивниот дел.

Забелешка 3. Во претходните разгледувања ја проучивме експоненцијалната функција (1) и научивме да го конструираме нејзиниот график. Овде, со помош на графикот на функцијата (1), ќе покажеме како можеме да го конструираме графикот на функцијата

$$f(x) = a^x + m,\ x \in \mathbf{R}. \qquad (2)$$

Да ја разгледаме функцијата $g(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$. Притоа за функциите f и g важи $f(x) = g(x) + m$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Според тоа, за секој $x \in \mathbf{R}$ вредноста на функцијата f можеме да ја пресметаме ако на вредноста на функцијата g додадеме m. Последното значи, дека графикот на функцијата (2) можеме да го добиеме со транслација во правец на $y-$оската за вектор со должина $|m|$ на графикот на функцијата (1) и тоа:

- во позитивна насока на $y-$оската, ако $m > 0$ и
- во негативна насока на $y-$оската, ако $m < 0$.

Притоа, функцијата (2) ја сече $y-$оската во точка $A(0,1+m)$ и правата $y = m$ е нејзина хоризонтална асимптота. На цртежот горе се дадени графиците на функциите $y = 2^x - 3$ и $y = 2^x + 1$.

Забелешка 4. Слично, како и во претходниот случај, графикот на функцијата

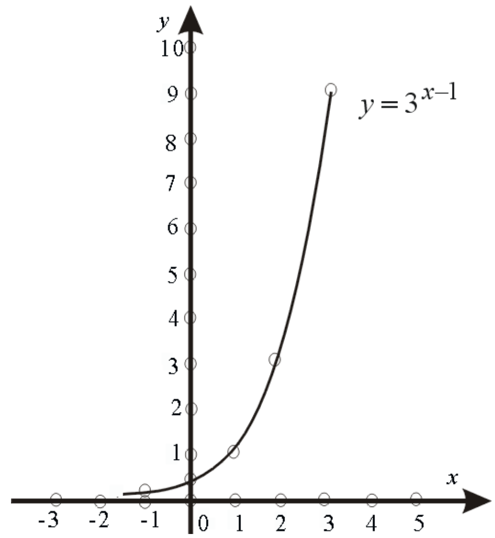
$$f(x) = a^{x+p},\ x \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

можеме да го конструираме со помош на графикот на функцијата (1). Имено, од $f(x) \quad a^{x \quad p} \quad a^p a^x$, $x \quad \mathbf{R}$ следува дека вредноста на функцијата f можеме да ја пресметаме ако вредноста на функцијата $g(x) \quad a^x$ ја помножиме со константата a^p. Јасно, графикот на функцијата (3) ја сече y оската во точката $A(0, a^p)$ и x оската е хоризонтална асимптота за функцијата (3).

Пример 6. Графикот на функцијата $y \quad 3^{x \quad 1}$ ја сече y оската во точката $A(0, \frac{1}{3})$ и x оската е негова хоризонтална асимптота. Составуваме таблица за некои вредности на функцијата:

x	3	2	1	0	1	2	3	4
$y \quad 3^{x \quad 1}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	21

Графикот на функцијата $y \quad 3^{x \quad 1}$ е даден на цртеж десно.



Забелешка 5. На крајот од овој дел да забележиме дека графикот на функцијата

$$f(x) \quad a^{x \quad p} \quad m, \; x \quad \mathbf{R} \tag{4}$$

можеме да го конструираме така што прво ќе го конструираме графикот на функцијата $g(x) \quad a^{x \quad p}$ (види забелешка 4), а потоа истиот ќе го транслатираме согласно забелешка 3. Јасно, правата $y \quad m$ е хоризонтална асимптота за функцијата (4) и нејзиниот график ја сече y оската во точката $A(0, a^p \quad m)$.

ЗАДАЧИ

1. Нацртај го графикот на функцијата

а) $f(x) \quad 3^x$, б) $f(x) \quad \frac{1}{3^x}$, в) $f(x) \quad 3^x$, г) $f(x) \quad \frac{1}{3^x}$.

2. Определи ја експоненцијалната функција $f(x) \quad a^x$, ако $f(\frac{2}{3}) \quad \frac{9}{16}$.

3. а) Докажи дека за функцијата $f(x) \quad 3^x$ важи равенството $f(2 \quad 3) \quad f(2)f(3)$.

б) Докажи дека за функцијата $f(x) \quad a^x$ важи равенството $f(x \quad t) \quad f(x)f(t)$.

4. Во ист координатен систем нацртај го графикот на функцијата $f(x) \quad 2^x$ и на функцијата

а) $g(x) \quad x$, б) $g(x) \quad x^2$, в) $g(x) \quad 3^x$, г) $g(x) \quad 2^{|x|}$.

Спореди го растењето на овие функции.

5. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x) \quad 3^x \quad 4$, б) $f(x) \quad 3^{x \quad 1} \quad \sqrt{3}$, в) $f(x) \quad 2^x \quad 1$, г) $f(x) \quad 2^{x \quad 2} \quad \sqrt{2}$.

I.3. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Во равенката $2^x = 8$ непознатата x се наоѓа во експонентот, па затоа равенката од ваков вид ја нарекуваме *eksponencijalna ravenka.* Во овој дел, преку примери, ќе се осврнеме на решавањето на елементарни експоненцијални равенки, кои можат да се сведат на еднаквост на два степени со исти основи:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, 0 < a \neq 1, \tag{1}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми или количници на полиноми од најмногу втор степен. Притоа, од својствата на степените следува дека равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

За $a = 1$ равенките (1) и (2) не се еквивалентни, бидејќи во овој случај решение на равенката (1) е множеството реални броеви $\mathbf{R}$, што не е случај со равенката (2). Исто така, ќе се осврнеме и на равенките кои можат да се сведат на експоненцијалната равенка од видот

$$a(A^{f(x)})^2 + bA^{f(x)} + c = 0, \tag{3}$$

каде $0 < A \neq 1$, $a,b,c \in \mathbf{R}$ и која со смената $A^{f(x)} = t$ се сведува на квадратната равенка

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{4}$$

чии решенија се $t_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Притоа од $A^{f(x)} > 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ следува дека равенката (3) има решение ако $t_1 > 0$ и истото го наоѓаме решавајќи ја равенката $A^{f(x)} = t_1$. Меѓутоа, ако $t_1 \leq 0$ тогаш за најденото t_1 не добиваме решение на (3). Аналогната дискусија се однесува и за решението t_2 на равенката (4).

Пример 7. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $2^x = 8$, **б)** $4^{3x+1} = 128$

Решение. а) Имаме

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

б) Од $128 = 2 \cdot 64 = 2 \cdot 4^3 = 2 \cdot (2^2)^3 = 2^7$ и $4 = 2^2$ следува

$$4^{3x+1} = 128 \Leftrightarrow (2^2)^{3x+1} = 2^7 \Leftrightarrow 2^{6x+2} = 2^7 \Leftrightarrow 6x + 2 = 7 \Leftrightarrow 6x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}.$$

Пример 8. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $0{,}1^{x^2-x} - 100^{2x-5} = 0$, **б)** $7^x + 7^{x+1} = 8^x$, **в)** $7 \cdot 2^{x-3} - 4 \cdot 3^{x-2} = 3^x - 2^x$.

Решение. а) Имаме

$$0{,}1^{x^2-x} - 100^{2x-5} = 0 \Leftrightarrow (10^{-1})^{x^2-x} = (10^2)^{2x-5} \Leftrightarrow 10^{-x^2+x} = 10^{4x-10}$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + x = 4x - 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Решенијата на последнава равенка се $x_1 = 2$ и $x_2 = -5$ и тие се решенија на дадената равенка.

б) Имаме

$$7^{x} \quad 7^{x \ 1} \quad 8^{x} \qquad 7^{x \ 1}(7 \quad 1) \quad 8^{x} \qquad 8 \ 7^{x \ 1} \quad 8^{x} \qquad \frac{8 \, 7^{x \ 1}}{8^{x}} \quad 1 \qquad (\tfrac{7}{8})^{x \ 1} \quad 1 \qquad x \quad 1 \quad 0 \qquad x \quad 1 .$$

в) Прво ги префрламе степените со иста основа на иста страна од равенката и добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$7 \ 2^{x \ 3} \quad 2^{x} \quad 3^{x} \quad 4 \ 3^{x \ 2} .$$

Понатаму, пред загради вадиме 2^{x} и 3^{x} и ја добиваме еквивалентната равенка

$2^{x}(7 \ 2 \ ^{3} \quad 1) \quad 3^{x}(1 \quad 4 \ 3 \ ^{2})$.

После средувањето ја добиваме равенката $2^{x} \ \frac{15}{8} \quad 3^{x} \ \frac{5}{9}$, која е еквивалентна на равенката $(\frac{2}{3})^{x} \quad (\frac{2}{3})^{3}$ од каде наоѓаме $x \quad 3$.

Пример 9. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $3\sqrt[x]{81} \quad 10\sqrt[x]{9} \quad 3 \quad 0$ **б)** $2^{x \ 2} \quad 2^{2 \ x} \quad 6$.

Решение. а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3 \ (9^{2})^{\frac{1}{x}} \quad 10 \ 9^{\frac{1}{x}} \quad 3 \quad 0$$

т.е. на равенката

$$3 \ (9^{\frac{1}{x}})^{2} \quad 10 \ 9^{\frac{1}{x}} \quad 3 \quad 0.$$

Воведуваме смена $9^{\frac{1}{x}} \quad y$ и ја добиваме равенката

$$3y^{2} \quad 10y \quad 3 \quad 0$$

чии решенија се $y_{1} \quad 3$ и $y_{2} \quad \frac{1}{3}$. Според тоа, $9^{\frac{1}{x}} \quad 3$ па затоа $3^{x} \quad 9 \quad 3^{2}$ т.е. $x_{1} \quad 2$ и $9^{\frac{1}{x}} \quad 3 \ ^{1}$ па затоа $3 \ ^{x} \quad 9 \quad 3^{2}$ и $x_{2} \quad 2$.

б) Дадената равенка е еквивалентна на равенката $4 \ 2^{x} \quad \frac{4}{2^{x}} \quad 6$ т.е. на равенката

$$4 \ 2^{2x} \quad 6 \ 2^{x} \quad 4 \quad 0 .$$

Во последната равенка ведуваме смена $y \quad 2^{x}$ и ја добиваме равенката $4y^{2} \quad 6y \quad 4 \quad 0$ чии решенија се $y_{1} \quad \frac{1}{2}$ и $y_{2} \quad 2$. Но, $y \quad 2^{x} \quad 0$, па затоа $2^{x} \quad 2$ т.е. $x \quad 1$ е единствено решение на почетната равенка.

Пример 10. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $9^{x^{2} \ 1} \quad 36 \ 3^{x^{2} \ 3} \quad 3 \quad 0$, **б)** $3 \ 16^{x} \quad 2 \ 81^{x} \quad 5 \ 36^{x}$.

Решение. а) Очигледно, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(3^{2})^{x^{2} \ 1} \quad 36 \ 3^{x^{2} \ 1} \ 3 \ ^{2} \quad 3 \quad 0$$

т.е. на равенката

$$(3^2)^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-1}\cdot 3^{-2}+3=0.$$

Воведуваме смена $3^{x^2-1}=t$ и ја добиваме равенката $t^2-4t+3=0$ чии решенија се $t_1=3$ и $t_2=1$. Сега за $t_1=3$ ја добиваме равенката $3^{x^2-1}=3=3^1$ од каде наоѓаме $x^2-1=1$ т.е. $x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$, а за $t_2=1$ ја добиваме равенката $3^{x^2-1}=1=3^0$ од каде наоѓаме $x^2-1=0$ т.е. $x_{3/4}=\pm 1$.

б) Дадената равенка ја делиме со $36^x>0$ и ја добиваме еквивалентната равенка $3\cdot\frac{16^x}{36^x}+2\cdot\frac{81^x}{36^x}=5$ која е еквивалентна на равенката $3(\frac{4}{9})^x+2(\frac{9}{4})^x=5$. Воведуваме смена $(\frac{4}{9})^x=t$ и ја добиваме равенката $3t+\frac{2}{t}=5, t>0$ односно равенката $3t^2-5t+2=0$ чии решенија се $t_1=1$ и $t_2=\frac{2}{3}$. Сега, од $t_1=1$ добиваме $(\frac{4}{9})^x=1=(\frac{4}{9})^0$ т.е. $x=0$, а од $t_2=\frac{2}{3}$ добиваме $(\frac{4}{9})^x=\frac{2}{3}=(\frac{2}{3})^1$, односно $(\frac{2}{3})^{2x}=(\frac{2}{3})^1$ па затоа $2x=1$ т.е. $x=\frac{1}{2}$.

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ НЕРАВЕНКИ (за оние што сакаат да знаат повеќе)

Во овој дел ќе ги разгледаме само оние експоненцијални неравенки кои можат да се сведат на обликот

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}, 0<a\neq 1, \tag{5}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми од најмногу втор степен или се количници на полиноми од најмногу прв степен. Ако се искористи монотоноста на експоненцијалната функција, тогаш неравенката (5) е еквивалентна на неравенката

$$f(x)>g(x), \quad a>1 \tag{6}$$

односно на неравенката

$$f(x)<g(x), \quad 0<a<1. \tag{7}$$

Затоа, решавајќи ја неравенката (6), односно (7), ние всушност ја решаваме неравенката (5).

Пример 11. Реши ја експоненцијалната неравенка

а) $5^{2x^2-5x-3}>1$, **б)** $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{1+\sqrt[4]{x}}\geq 9^{\sqrt{x}}$.

Решение. а) Бидејќи $5^0=1$ дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $5^{2x^2-5x-3}>5^0$. Но $5>1$, па затоа последната неравенка е еквивалентна на неравенката $2x^2-5x-3>0$. Нулите на квадратниот трином $2x^2-5x-3$ се $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=3$ и како $2>0$ добиваме дека решение на неравенката $2x^2-5x-3>0$ е множеството $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(3,\infty)$.

б) За $x\geq 0$ неравенката можеме да ја запишеме во обликот $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9\cdot 3^{2\sqrt[4]{x}}\geq 3^{2\sqrt{x}}$. Ако поделиме со $3^{2\sqrt[4]{x}}$ ја добиваме неравенката $8\cdot 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}+9\geq 3^{2(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})}$. Воведуваме смена $3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}=t>0$ и ја добиваме неравенката $8t+9\geq t^2$ од каде наоѓаме $0<t\leq 9=3^2$, т.е. $3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}\leq 9=3^2$. Оттука добиваме $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\leq 2$. Ставаме $z=\sqrt[4]{x}\geq 0$ и добиваме $z^2-z-2\leq 0$. Решението на оваа неравенка е $0\leq z\leq 2$, т.е. $0\leq\sqrt[4]{x}\leq 2$, од што конечно добиваме $0\leq x\leq 16$.

ЗАДАЧИ

1. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $5^{x} \quad 25$, б) $10^{x} \quad 0{,}0001$, в) $\frac{1}{3^{x}} \quad 27$.

2. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $5^{x^2 \; 3x \; 1} \quad \frac{1}{5}$, б) $(2^{x \; 2})^{x \; 1} \quad 64$, в) $6^{\sqrt{x \; 2}} \quad 36$.

3. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $3^{x} \quad 3^{x \; 1} \quad 3^{x \; 2} \quad 21$, б) $7 \; 3^{x} \quad 2 \; 3^{x \; 1} \quad 81$, в) $2^{x} \quad 2^{x \; 1} \quad 3^{x}$.

4. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $3^{x \; 1} \; 2^{3x \; 7} \quad 12^{9 \; x}$, б) $5^{x \; 2} \; 8^{\frac{4x \; 12}{3}} \quad 20^{6 \; x}$.

5. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $9^{x} \quad 3^{x} \quad 6 \quad 0$, б) $5 \; 2^{4x} \quad 3 \; 4^{x \; 1} \quad 32$, в) $5^{x} \quad 5^{3 \; x} \quad 20$.

6. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $4^{x} \quad 9^{x} \quad 2 \; 6^{x}$, б) $25^{x} \quad 4^{x} \quad 29 \; 10^{x \; 1}$.

7. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $4^{\sqrt{2x \; 1}} \quad 16 \quad 10 \; 2^{\sqrt{2x \; 1}}$, б) $9^{x \quad \sqrt{x \; 1}} \quad 1 \quad 10 \; 3^{x \; 1 \quad \sqrt{x \; 1}}$.

8. Re{ i gi eksponencijalni te neravenki:

a) $2^{x} \quad 2$, *b)* $3^{x \; 2} \quad 1$, *v)* $5^{2x \; 1} \quad 0{,}04$.

9. Re{ i gi eksponencijalni te neravenki:

a) $(5^{x \; 1})^{x \; 1} \quad 125$, *b)* $8^{x^2 \; 2x \; 2} \quad 2^{3x \; 6}$, *v)* $1 \quad 2^{x(x \; 3)} \quad 16$.

10. Re{ i gi eksponencijalni te neravenki:

a) $3^{2x} \quad 2 \; 3^{x} \quad 3$, *b)* $5^{2x} \quad 4 \; 5^{x} \quad 5$.

11. Re{ i gi eksponencijalni te neravenki:

a) $\frac{1}{2^{x} \; 8} \quad \frac{1}{2^{x \; 3} \; 1}$, *b)* $\frac{1}{3^{x \; 1} \; 7} \quad \frac{1}{3^{x} \; 5}$.

I.4. ПОИМ ЗА ЛОГАРИТАМ. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

Во претходната лекција научивме да решаваме одредени видови експоненцијални равенки. На пример, решение на равенката $2^{y} \quad 8$ е $y \quad 3$. Меѓутоа, при изучувањето на експоненцијалната функција видовме дека за $a \quad 0$, $a \quad 1$ функцијата $f:\mathbf{R} \quad \mathbf{R}$, определена со $f(x) \quad a^{x}$, за секој $x \quad \mathbf{R}$ е сурјекција. Тоа значи дека, за секој $b \quad 0$ постои $x \quad \mathbf{R}$ таков, што

$$a^{x} \quad b, \tag{1}$$

и како f е инјекција заклучуваме дека бројот x е единствен. Според тоа, при дадени позитивни реални броеви a и b равенката (1) има единствено решение. Бројот x, кој е решение на равенката (1) го нарекуваме логаритам од b за основа a и го означуваме со $\log_a b$. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 2. Нека $a,b>0$, $a\neq 1$. За реалниот бројот c ќе велиме дека е *logaritam od brojot* b *za osnova* a ако и само ако $a^c=b$. Притоа пишуваме $c=\log_a b$.

Според тоа

$$c=\log_a b \Leftrightarrow a^c=b. \tag{2}$$

Пример 12. а) Нека $a=2$ и $b=\frac{1}{8}$. Од $2^{-3}=\frac{1}{8}$, според дефиниција 2 имаме

$$\log_2 \frac{1}{8}=-3.$$

б) Нека $a=10$ и $b=0{,}000001$. Од $10^{-6}=0{,}000001$ според дефиниција 2 имаме

$$\log_{10} 0{,}000001=-6.$$

Во врска со логаритмите ќе докажеме неколку формули кои овозможуваат полесно користење на истите. Претходно да забележиме, дека од тоа што за секој $a>0$ важи $a^0=1$ и $a^1=a$, согласно со дефиниција 2 добиваме дека за секој $a>0$, $a\neq 1$ важи

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1. \tag{3}$$

Теорема 5. Ако $a>0$, $a\neq 1$, тогаш

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c\text{, за секои } b,c\in\mathbf{R}^+. \tag{4}$$

$$\log_a b^c=c\log_a b\text{, за секои } b\in\mathbf{R}^+,\ c\in\mathbf{R}. \tag{5}$$

$$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c\text{, за секои } b,c\in\mathbf{R}^+. \tag{6}$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\text{, за секои } b,c\in\mathbf{R}^+,\ a\neq 1. \tag{7}$$

Доказ. Нека $b,c\in\mathbf{R}^+$. Да ставиме $w=\log_a(bc), u=\log_a b$ и $v=\log_a c$. Од дефиниција 2 имаме $bc=a^w, b=a^u$ и $c=a^v$. Понатаму, од горните равенства и од својствата на степените добиваме

$$a^w=bc=a^u a^v=a^{u+v},$$

и како експоненцијалната функција е биективно пресликување, имаме $w=u+v$. Конечно, со замена за w,u и v наоѓаме $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$, т.е. важи равенството (4).

Нека $b\in\mathbf{R}^+, c\in\mathbf{R}$. Да ставиме $w=\log_a b^c$ и $u=\log_a b$. Од дефиниција 2 имаме $a^w=b^c$ и $a^u=b$. Понатаму, од горните равенства и од својствата на степените добиваме

$$a^w=b^c=(a^u)^c=a^{cu},$$

и како експоненцијалната функција е биективно пресликување, имаме $w=cu$. Конечно, со замена за w и u наоѓаме $\log_a b^c=c\log_a b$, т.е. важи равенството (5).

Нека $b,c\in\mathbf{R}^+$. Со примена на равенствата (4) и (5) последователно добиваме

$$\log_a \frac{b}{c} \quad \log_a bc^{\ 1} \quad \log_a b \quad \log_a c^{\ 1} \quad \log_a b \quad (\ 1)\log_a c \quad \log_a b \quad \log_a c\,,$$

т.е. важи равенството (6).

Нека $b,c \quad \mathbf{R}$. Да ставиме $w \quad \log_a b, u \quad \log_c b$ и $v \quad \log_c a$. Од дефиниција 2 имаме $b \quad a^w, b \quad c^u$ и $a \quad c^v$, т.е. $c \quad a^{\frac{1}{v}}$. Понатаму, од горните неравенства и од својствата на степените добиваме

$$a^w \quad b \quad c^u \quad (a^{\frac{1}{v}})^u \quad a^{\frac{u}{v}}$$

и како експоненцијалната функција е биективно пресликување имаме $w \quad \frac{u}{v}$. Конечно, со замена за w,u и v наоѓаме $\log_a b \quad \frac{\log_c b}{\log_c a}$, т.е. важи равенството (7).

Последица 1. Ако $a,b \quad 0, (a \quad 1,\ b \quad 1)$ тогаш $\log_a b \quad \frac{1}{\log_b a}$.

Доказ. Ако го искористиме равенството (7), за $c \quad b$ добиваме $\log_a b \quad \frac{\log_b b}{\log_b a} \quad \frac{1}{\log_b a}$.

Пример 13. Пресметај ја вредноста на логаритмот

а) $\log_3 \sqrt[5]{243}$, **б)** $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a \quad 0$. **в)** $\log_{\sqrt{2}} 8$.

Решение. а) Од $243 \quad 3^5$ и од својствата на степените и логаритмите имаме

$$\log_3 \sqrt[5]{243} \quad \log_3 243^{\frac{1}{5}} \quad \log_3 (3^5)^{\frac{1}{5}} \quad \log_3 3^{5\frac{1}{5}} \quad \log_3 3 \quad 1.$$

б) Имаме: $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \log_a 1 \quad \log_a \sqrt{a} \quad 0 \quad \log_a a^{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2}\log_a a \quad \frac{1}{2}$.

в) Имаме: $\log_{\sqrt{2}} 8 \quad \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{2}} \quad \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{3\log_2 2}{\frac{1}{2}\log_2 2} \quad 6$.

Пример 14. За која основа логаритмот на бројот:

а) 64 е 3, **б)** $\frac{1}{256}$ е 8?

Решение. а) Нека бараната основа е a, т.е. $\log_a 64 \quad 3$. Од дефиниција 2 следува $a^3 \quad 64$ и како $64 \quad 4^3$ добиваме $a^3 \quad 4^3$, што значи $a \quad 4$ (зошто?).

б) Нека бараната основа е a, т.е. $\log_a \frac{1}{256} \quad 8$. Од дефиниција 2 следува $a^8 \quad \frac{1}{256}$ и како $\frac{1}{256} \quad \frac{1}{2^8} \quad (\frac{1}{2})^8$ добиваме $a^8 \quad (\frac{1}{2})^8$, што значи $a \quad \frac{1}{2}$ (зошто?).

Пример 15. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3\log_5 25 \quad 2\log_3 27 \quad 4\log_2 8$, **б)** $(3^{\log_3 5})^4 \quad (2^{\log_2 6})^2$,

в) $36^{\log_6 5} \quad 10^{1 \ \log_{10} 2} \quad 3^{\log_9 36}$.

Решение. а) Имаме

$$3\log_5 25 \quad 2\log_3 27 \quad 4\log_2 8 \quad 3\log_5 5^2 \quad 2\log_3 3^3 \quad 4\log_2 2^3$$
$$3 \ \ 2\log_5 5 \quad 2 \ \ 3\log_3 3 \quad 4 \ \ 3\log_2 2 \quad 6 \quad 6 \quad 12 \quad 0.$$

б) Ако искористиме дека при $a > 0$, $a \neq 1$, за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $x = a^{\log_a x}$ (докажи!) добиваме

$$(3^{\log_3 5})^4 + (2^{\log_2 6})^2 = 5^4 + 6^2 = 625 + 36 = 661.$$

в) Имаме

$$36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 3^{\log_9 36} = (6^2)^{\log_6 5} + 10^{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} - 3^{\frac{\log_3 36}{\log_3 9}} = 6^{2\log_6 5} + 10^{\log_{10}\frac{10}{2}} - 3^{\frac{\log_3 36}{2}}$$

$$= 6^{\log_6 5^2} + 10^{\log_{10} 5} - 3^{\log_3 36^{\frac{1}{2}}} = 5^2 + 5 - 36^{\frac{1}{2}} = 30 - 6 = 24.$$

Пример 16. а) Нека $c > 0$. Логаритмирај го изразот $A = \frac{3a^2b}{y^2\sqrt[4]{ab^3}}$, $a, b, y > 0$, за основа c.

б) Упрости го изразот: $A = \frac{1+\log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a - 1)\log_a \frac{a}{b}}$, $a, b > 0$.

в) Пресметај $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, ако $\log_a 27 = b$.

Решение. а) Имаме:

$$\log_c A = \log_c \frac{3a^2b}{y^2\sqrt[4]{ab^3}} = \log_c 3a^2b - \log_c y^2\sqrt[4]{ab^3}$$

$$= \log_c 3 + 2\log_c a + \log_c b - 2\log_c y - \frac{1}{4}\log_c a - \frac{3}{4}\log_c b = \log_c 3 + \frac{7}{4}\log_c a + \frac{1}{4}\log_c b.$$

б) Имаме:

$$A = \frac{1+\log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a - 1)\log_a \frac{a}{b}} = \frac{(1+\log_a b)(1-\log_a b+\log_a^2 b)}{(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} - 1)(\log_a a - \log_a b)} = \frac{\log_a b(1+\log_a b)(1-\log_a b+\log_a^2 b)}{(1-\log_a b+\log_a^2 b)(1-\log_a b)} = \log_a b.$$

в) Имаме:

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \frac{\log_3 \sqrt[6]{a}}{\log_3 \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{6}\log_3 a}{\frac{1}{2}\log_3 3} = \frac{1}{3}\log_3 a = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_a 3} = \frac{1}{\log_a 3^3} = \frac{1}{\log_a 27} = \frac{1}{b}.$$

ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја вредноста на логаритмот:

а) $\log_{\sqrt[3]{2}} 16$, б) $\log_2 \sqrt[3]{512}$, в) $\log_a \sqrt[21]{a^4}$, $a > 0$.

2. За која основа логаритмот на бројот:

а) 625 е 4, б) $\frac{1}{128}$ е -7?

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{5}{4}\log_3 81 - 3\log_{\frac{1}{2}} 16 + 2\log_2 \frac{1}{32} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$, б) $\log_3 81 \cdot \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_2 16 \cdot \log_2 8$,

в) $\log_2 16 \cdot \log_2 8 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 2 \cdot \log_2 1$, г) $5^{3-\log_5 25} + 3^{2-\log_3 3} - 2^{4-\log_2 5}$,

д) $(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}) \cdot 49^{\log_7 2}$.

4. Нека $z > 0$, $z \neq 1$. Логаритмирај го изразот:

а) $A=(4a^2b^n\sqrt[4]{c^2d})^3, a,b,c,d>0$, б) $A=\frac{5}{a}\sqrt[3]{y\sqrt[4]{\frac{c}{d}}}, a,y,c,d>0$,

в) $A=(\frac{6a^{-3}y\sqrt[4]{ab}}{5z\sqrt[3]{y}})^5, a,b,y>0$, г) $A=\sqrt[3]{\frac{y^{-3}}{\sqrt{yz}}\sqrt{\frac{a}{b}}}, a,b,y>0$.

за основа z.

5. Упрости го изразот:

а) $\frac{(\log_2\sqrt[3]{27}\;\;\log_{49}\sqrt[25]{5})(\log_4\sqrt[9]{81}\;\;\log_9\sqrt[4]{8})}{3\;\;5^{\frac{1}{\log_{16}25}}\;\;5^{\log_5 3}}$, б) $\log_b a\sqrt{a^2}\;\;2\log_b a\sqrt{a}\;\;\log_a b\sqrt{b}\;\;\frac{1}{2}\log_a b\sqrt{b}, a,b>0$.

6. Ако $x,y>0$ и $x^2+4y^2=12xy$, тогаш $\log_{10}(x+2y)-2\log_{10}2=\frac{1}{2}(\log_{10}x+\log_{10}y)$. Докажи!

7. Ако $y=2^{x^2}$ и $z=2^{y^2}$, тогаш $x=\pm\sqrt{\frac{\log_2\log_2 z}{2}}$. Докажи!

I.5. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

Нека $a>0$, $a\neq1$. Во претходните разгледувања видовме дека за секој $b\in\mathbf{R}^+$ постои единствен реален број c таков, што $c=\log_a b$, што ни дава за право да ја воведеме следнава дефиниција.

Дефиниција 3. Нека $a>0, a\neq1$. Функцијата $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, определена со

$$f(x)=\log_a x,\ \text{за секој}\ x\in\mathbf{R}^+ \tag{1}$$

ја нарекуваме *logaritamska funkcija* со основа a.

Природно е да се запрашаме кои својства ги има логаритамската функција.

i) Нека $a>0, a\neq1$. Бидејќи $\log_a x=0$ ако и само ако $a^0=x$ т.е. ако и само ако $x=1$, добиваме дека $x=1$ е единствена нула на функцијата (1). Според тоа, графикот на логаритамската функција (1) ја сече $x-$оската само во точка $A(1,0)$.

Последното значи, дека нулите на функција од видот $y=\log_a f(x)$ ги наоѓаме како решенија на равенката $f(x)=1$. На пример, нулите на функцијата $y=\log_4(3x-4)$ ги наоѓаме решавајќи ја равенката $3x-4=1$. Решение на последната равенка е $x=\frac{5}{3}$, што значи дека разгледуваната функција ја сече $x-$оската во точката $B(\frac{5}{3},0)$.

ii) Нека $a>0, a\neq1$ и $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$ се такви, што $f(x_1)=f(x_2)=b$. Тогаш, $b=\log_a x_1$ и $b=\log_a x_2$, па затоа $x_1=a^b$ и $x_2=a^b$, т.е. $x_1=x_2$. Според тоа, логаритамската функција (1) е инјекција од $\mathbf{R}^+$ во $\mathbf{R}$.

Нека y е произволен реален број и да ставиме $x=a^y$. Имаме

$$f(x)=f(a^{y})=\log_a a^{y}=y\log_a a=y.$$

Според тоа, за секој $y\in\mathbf{R}$ постои $x\in\mathbf{R}^{+}$ таков, што $f(x)=y$, што значи дека логаритамската функцијата (1) е сурјекција од $\mathbf{R}^{+}$ во $\mathbf{R}$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 6. Логаритамската функција (1) е биекција од $\mathbf{R}^{+}$ во $\mathbf{R}$.

iii) Од претходната теорема непосредно следува дека дефиниционата област на логаритамската функција (1) е множеството позитивни реални броеви $\mathbf{R}^{+}$, а нејзиното множество вредности е множеството реални броеви $\mathbf{R}$.

Пример 17. Најди ја дефиниционата област на функцијата

а) $f(x)=\log_3(2x-1)$, **б)** $f(x)=\log_5(3x^2-x+2)$, **в)** $f(x)=\log_2(x^2-x-2)$.

Решение. а) Бидејќи логаритамската функција е дефинирана само за позитивни вредности на аргументот, добиваме дека бараната дефинициона област е множеството решенија на линеарната неравенка

$$2x-1>0 \Leftrightarrow x>\tfrac{1}{2}.$$

Според тоа, дефиниционата област на функцијата $f(x)=\log_3(2x-1)$ е интервалот $(\frac{1}{2},\infty)$.

б) Бидејќи за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$3x^2-x+2=(x\sqrt{3}-\tfrac{1}{2\sqrt{3}})^2-\tfrac{1}{12}+2=(x\sqrt{3}-\tfrac{1}{2\sqrt{3}})^2+\tfrac{23}{12}>0,$$

добиваме дека дефиниционата област на функцијата $f(x)=\log_5(3x^2-x+2)$ е множеството реални броеви.

в) Дефиниционата област на разгледуваната функција е множеството решенија на неравенката $x^2-x-2>0$ (зошто?). Квадратниот трином има нули -1 и 2 и како коефициентот пред x^2 е позитивен, заклучуваме дека решение на равенката е множеството $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ и тоа е дефиниционата област на функцијата $f(x)=\log_2(x^2-x-2)$.

iv) Нека $a>0, a\neq 1$ и $x_1\neq x_2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1<x_2$. Од $y_1=\log_a x_1$ и $y_2=\log_a x_2$ согласно со дефиниција 2 добиваме $x_1=a^{y_1}$ и $x_2=a^{y_2}$. Ќе разгледаме два случаја.

- Нека $a>1$. Од $x_1<x_2$ следува $a^{y_1}<a^{y_2}$ и бидејќи експоненцијалната функција за $a>1$ строго монотоно расте, добиваме дека $y_1<y_2$ т.е. $\log_a x_1<\log_a x_2$. Според тоа, за $a>1$ логаритамската функција (1) строго монотоно расте.
- Нека $0<a<1$. Од $x_1<x_2$ следува $a^{y_1}<a^{y_2}$ и бидејќи експоненцијалната функција за $0<a<1$ строго монотоно опаѓа добиваме дека $y_1>y_2$ т.е. $\log_a x_1>\log_a x_2$. Според тоа, за $0<a<1$ логаритамската функција (1) строго монотоно опаѓа.

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 7. а) Ако $0 \quad a \quad 1$, тогаш логаритамската функција (1) строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област.

б) Ако $a \quad 1$, тогаш логаритамската функција (1) строго монотоно расте на целата дефинициона област.

v) Нека $a \quad 0, a \quad 1$. Да ја разгледаме експоненцијалната функцијата $g : \mathbf{R} \quad \mathbf{R}$ определена со

$$g(x) \quad a^x, \text{ за секој } x \quad \mathbf{R}. \tag{2}$$

За функциите (1) и (2) имаме $f \circ g : \mathbf{R} \quad \mathbf{R}$ и $g \circ f : \mathbf{R} \quad \mathbf{R}$ и притоа важи

$$(f \circ g)(x) \quad f(g(x)) \quad f(a^x) \quad \log_a a^x \quad x \log_a a \quad x, \text{ за секој } x \quad \mathbf{R} \text{ и}$$

$$(g \circ f)(x) \quad g(f(x)) \quad g(\log_a x) \quad a^{\log_a x} \quad x, \text{ за секој } x \quad \mathbf{R} \quad .$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 8. Ако $a \quad 0, a \quad 1$, тогаш функциите (1) и (2) се заемно инверзни.

Пример 18. а) За да го нацртаме графикот на функцијата $y \quad \log_2 x$, $x \quad \mathbf{R}$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на логаритамската функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

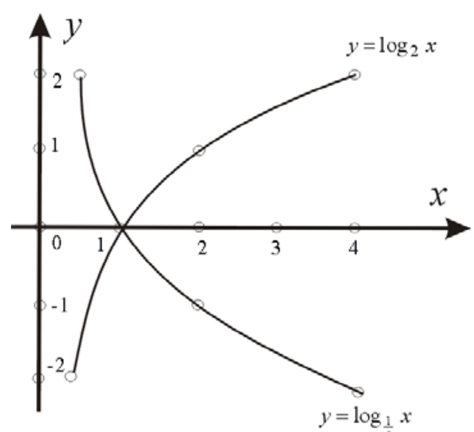
x	$\frac{1}{32}$ 0,03125	$\frac{1}{16}$ 0,0625	$\frac{1}{8}$ 0,125	$\frac{1}{4}$ 0,25	$\frac{1}{2}$ 0,5	1	2	4	8	16	32
$y \quad \log_2 x$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, \log_2 x)$ и истите ги поврземе (цртеж долу).

б) За да го нацртаме графикот на функцијата $y \quad \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \quad \mathbf{R}$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на логаритамската функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

x	$\frac{1}{32}$ 0,03125	$\frac{1}{16}$ 0,0625	$\frac{1}{8}$ 0,125	$\frac{1}{4}$ 0,25	$\frac{1}{2}$ 0,5	1	2	4	8	16	32
$y \quad \log_{\frac{1}{2}} x$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, \log_{\frac{1}{2}} x)$ и истите ги поврземе (цртеж десно).



Од пример 18 а) насетуваме дека функцијата $y \quad \log_2 x$, $x \quad \mathbf{R}$ може да прими произволно голема вредност кога x е доволно голем број, односно произволна мала негативна вредност кога x е доволно мал позитивен број. Последното ќе го покажеме на пример.

Пример 19. а) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што на пример $\log_2 x \quad 20000$.

Одговорот на ова прашањето е едноставен, особено ако се има предвид монотоноста на логаритамската функција и ако земеме $x \quad 2^{20000}$. Имено, во случајот добиваме $\log_2 x \quad \log_2 2^{20000} \quad 20000$.

б) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што $\log_2 x \quad\quad 20000$.

Како и во случајот под а) и овде одговорот е едноставен. Имено, од монотоноста на логаритамската функција, за секој позитивен реален број x, таков што $x \quad 2^{\ 20000}$ следува $\log_2 x \quad \log_2 2^{\ 20000} \quad\quad 20000$.

Од претходниот пример и од таблицата што и соодветствува на функцијата $y \quad \log_2 x$ се забележува следново: ако земеме дека x е позитивен број помал од 1 и дека постојано опаѓа, т.е. дека тој се приближува кон 0, добиваме дека функцијата прима негативни вредности и дека таа постојано опаѓа, т.е. секој негативен реален број е вредност на функцијата. Тоа значи дека соодветната крива за оние позитивни вредности на апцисата x кои се доволно блиски до 0 се приближува до негативниот дел на y оската. Во ваков случај велиме дека y оската е *vertikalna asimptota* на дадената крива. Очигледно, y оската е *vertikalna asimptota* за кривата $y \quad \log_{\frac{1}{2}} x$, со тоа што во овој случај кривата се приближува до y оската во нејзиниот позитивен дел.

Воопшто говорено, y оската е хоризонтална асимтота на функцијата $y \quad \log_a x$ и тоа:

- ако $a \quad 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до y оската во негативниот дел, и
- ако $0 \quad a \quad 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до y оската во позитивниот дел.

ЗАДАЧИ

1. Во кои точки графикот на функцијата $f(x) \quad \log_a(5x^2 \quad 2x \quad 1), 0 \quad a \quad 1$ ја сече x оската.

2. Најди ја дефинициона област на функцијата:

а) $y \quad \log_2(\quad x \quad 1)$, б) $y \quad \log_2 x^2$, в) $y \quad \log_2(x^2 \quad 2x)$,

г) $y \quad \log_3 \sqrt{x}$, д) $y \quad \log_5(x^2 \quad 4x \quad 3)$.

3. Без да пресметуваш одреди го знакот на:

а) $\log_4 \frac{1}{3}$, б) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2$, в) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}$.

4. За кои вредности на x вредностите на функцијата $y \quad \log_3(5x \quad 7)$ се негативни.

5. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y = \log_3 x$, б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, в) $y = \log_4 x$, д) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

6. Во ист график конструирај ги графиците на функциите:

$$y = \log_2 x,\ y = 1 + \log_2 x \text{ и } y = \log_2(x+1).$$

7. Дадена е функцијата $y = \log_{\sqrt{5}}(3x^2 - 2x)$.

а) Определи ги нулите и дефиниционата област на функцијата.

б) За кои вредности на x вредноста на функцијата е 2?

I.6. ДЕКАДНИ ЛОГАРИТМИ

Пресметување на количникот $1073741824:2097152$ е заморно. Меѓутоа, ако воочиме дека $1073741824 = 2^{30}$ и $2097152 = 2^{21}$, тогаш пресметувањето е поедноставно, т.е. $1073741824:2097152 = 2^{30}:2^{21} = 2^9 = 512$. Забележуваме дека овде делењето на дадените броеви всушност го сведовме на одземање на нивните логаритми со основа 2, а потоа на наоѓање на степенот на бројот 2 на најдената разлика. Навистина, $\log_2 1073741824 = 30$ и $\log_2 2097152 = 21$.

За да можеме на наведениот начин да пресметуваме со сите позитивни броеви, треба да ги имаме пресметано нивните логаритми за основа 2 или за некоја друга основа. Во едноставни случаи лесно го наоѓаме логаритмот на даден број (*numerusot*) по дадена база. Така, на пример,

$$\log_2 8 = 3,\text{ бидејќи } 2^3 = 8;\ \log_{10} 0{,}1 = -1,\text{ бидејќи } 10^{-1} = 0{,}1.$$

Меѓутоа, во општ случај, логаритмите се ирационални броеви.

Бидејќи најчесто работиме во декаден броен систем, потребни ни се логаритмите за база 10, па имаме *dekaden logaritamski sistem*. Притоа, при пресметувањата најчесто не ја пишуваме базата 10, но истата ја подразбираме.

а) КАРАКТЕРИСТИКА И МАНТИСА НА ЛОГАРИТМОТ

Знаеме дека $\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log 100 = 2, \log 1000 = 3, \ldots, \log 10^n = n$. Бидејќи функцијата $y = \log x$ строго монотоно расте, добиваме дека

- ако $1 \le x < 10$, тогаш $0 \le \log x < 1$,
- ако $10 \le x < 100$, тогаш $1 \le \log x < 2$,
- ако $100 \le x < 1000$, тогаш $2 \le \log x < 3$ итн.

Така, на пример, од $100 < 624 < 1000$ имаме $2 < \log 624 < 3$, па затоа

$$\log 624 = 2 + m,\text{ каде } m \in (0,1),$$

и притоа велиме дека бројот 2 е *karakteristika*, а бројот m *mantisa* на $\log 624$. Воопшто ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 4. Целиот дел на логаритмот го нарекуваме *karakteristika*, а неговиот децимален дел *mantisa* на логаритмот.

Како што видовме, карактеристиката на $\log 624$ е 2. Понатаму, за секој $x \in (100,1000)$ важи $2 < \log x < 3$, па затоа карактеристиката на $\log x$ е 2. Според тоа, логаритми од различни броеви можат да имаат еднакви карактеристики. Логично е да се запрашаме, дали логаритми од различни броеви можат да имаа еднакви мантиси? Одговорот на ова прашање е позитивен, што може да се види од следниве разгледувања.

Секој позитивен реален број x можеме да го запишеме во вид на производ на некој степен $10^k, k \in \mathbf{Z}$ и број $y \in [1,10)$. Така, имаме

$$\begin{aligned} a &= 21{,}7 = 10^1 \cdot 2{,}17 \\ b &= 217000 = 10^5 \cdot 2{,}17 \\ c &= 0{,}00217 = 10^{-3} \cdot 2{,}17. \end{aligned} \tag{1}$$

Во сите три случаи важи

$$x = 10^k y,\ k \in \mathbf{Z}, y \in [1,10)\,. \tag{2}$$

Ако на равенството (2) ги примениме правилата за логаритмирање добиваме:

$$\log x = \log 10^k y = \log 10^k + \log y = k + \log y,\quad k \in \mathbf{Z}, 0 \le \log y < 1\,, \tag{3}$$

што значи дека k е карактеристиката на бројот $\log x$ (целиот дел), а $\log y = m$ е неговата мантиса (дециналниот дел). Од равенствата (1) следува

$$\begin{aligned} \log a &= \log 21{,}7 = 1 + \log 2{,}17 = 1 + m \\ \log b &= \log 217000 = 5 + \log 2{,}17 = 5 + m \\ \log c &= \log 0{,}00217 = -3 + \log 2{,}17 = -3 + m, \end{aligned} \tag{4}$$

т.е. броевите a, b и c имаат карактеристики $1, 5$ и -3, соодветно и иста мантиса $m = \log 2{,}17$.

Од досегашните разгледувања можеме да заклучиме дека логаритмот на даден број е еднозначно определен со неговата карактеристика и неговата мантиса, па затоа ќе покажеме како истите се определуваат.

б) ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА КАРАКТЕРИСТИКАТА

Од равенствата (1), односно од формулата (3), следува:

- ако $x \ge 1$, тогаш карактеристиката на x е број кој е за 1 помал од бројот на цифрите на целиот дел од x напишан во декаден броен систем,
- ако $0 < x < 1$, тогаш карактеристиката на x е цел негативен број, чија апсолутна вредност е еднаква на бројот на нулите кои ги има бројот x пред првата цифра различна од 0 во декаден броен систем.

Според тоа, логаритамските карактеристики на броевите $1;\ 345{,}76;\ 0{,}35;\ 0{,}000201$, се еднакви на $0;\ 2;\ -1;\ -4$.

Забележуваме дека карактеристиката на логаритмот на бројот x зависи само од положбата на децималната запирка, а не зависи од вредностите на цифрите на бројот x. Последното се должи на својствата на декадниот броен систем, од кои всушност и следува дефиницијата на карактеристиката на логаритмот на даден број x.

в) ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА МАНТИСАТА

Мантисата m на логаритмот на бројот x, како што видовме, е децималниот дел на логаритмот. Од равенствата (3) и (4) следува дека сите броеви кои се разликуваат само во положбата на децималната запирка, односно во бројот на нулите пред првата цифра која во декадниот запис е различна од 0 имаат иста мантиса. Во претходниот дел видовме како може да се определи карактеристиката на $\log x$. Меѓутоа, определувањето на мантисата е многу сложено и за истото се потребни знаења од областа математичка анализа, делови од кои ќе ги изучуваш во следната учебна година. Меѓутоа, во меморијата на современите калкулатори е вграден алгоритмот за пресметување на логаритам од позитивен реален број x, кој може да се пресмета на следниов начин:

- го внесуваме бројот x, на пример $x \quad 12{,}3456$ и
- го притискаме копчето на кое пишува $\log$ и на екранот ќе се појави логаритмот од бараниот број, во случајот $\log x \quad \log 12{,}3456 \quad 1{,}091512202$.

Да се вратиме на равенствата (1). За дадените броеви, со помош на калкулатор наоѓаме:

$$\log 21{,}7 \quad 1{,}336459734 \quad 1 \quad 0{,}336459734$$

$$\log 217000 \quad 5{,}336459734 \quad 5 \quad 0{,}336459734$$

$$\log 0{,}00217 \quad\quad 2{,}6635440266$$

Забележуваме дека мантисите на $\log 21{,}7$ и $\log 217000$ се еднакви на $0{,}336459734$, што е согласно со равенствата (4). Но што станува со мантисата на $\log 0{,}00217 \quad\quad 2{,}6635440266$? Дали калкулаторот грешно пресметува? Се разбира дека не. Проблемот е во тоа што карактеристиката на $\log 0{,}00217$ е $\quad 3$, па за да ја добиеме мантисата на $\log 0{,}00217$ од најдената вредност на $\log 0{,}00217$ треба да одземеме 3 и да додадеме 3. Притоа добиваме

$$\log 0{,}00217 \quad\quad 2{,}6635440266 \quad\quad 3 \quad 3 \quad 2{,}6635440266 \quad\quad 3 \quad 0{,}336459734$$

т.е. мантисите на броевите $\log 21{,}7$; $\log 217000$ и $\log 0{,}00217$ се еднакви.

г) АНТИЛОГАРИТМИРАЊЕ

Во практиката често пати можеме да го определиме логаритмот y на некој број x и треба да го најдеме бројот x и оваа постапка ја нарекуваме *an t i l ogar i t m i rawe*. Ако ја искористиме дефиницијата на логаритмот, тогаш од равенството $y \quad \log x$ добиваме $x \quad 10^{y}$, што значи дека со помош на калкулатор за дадената вредност на y треба да ја пресметаме вредноста на степенот 10^{y}. На пример, ако $\log x \quad 1{,}234567891$, тогаш

$$x \quad 10^{1{,}234567891} \quad 17{,}16199974.$$

ЗАДАЧИ

1. Определи ги карактеристиките на броевите
а) 324, б) 53054, в) $32{,}08$, г) $0{,}2$, д) $0{,}043$.

2. Знаејќи дека $\log 4 = 0{,}602059991$, најди ги логаритмите на броевите
а) 40, б) $0{,}4$, в) $0{,}0004$, г) 40000, д) 4000000.

3. Со калкулатор пресметај
а) $\log 256$, б) $\log 0{,}69$, в) $\log 0{,}02635$.
а потоа определи ги карактеристиките и мантисите на овие логаритми.

4. Со калкулатор најди ја вредноста на x, ако $\log x$ е еднаков на:
а) $-1{,}23654$, б) $5{,}5432167$, в) $0{,}026357891$.

I.7. ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \log_2(2x-3)$. Како што знаеме нулите на оваа функција ги наоѓаме решавајќи ја равенката $2x-3=1$. Меѓутоа, во суштина ние ја решаваме равенката

$$\log_2(2x-3)=0$$

за која велиме дека е *logaritamska ravenka*. Во овој дел, предмет на нашите разгледувања ќе бидат токму логаритамските равенки и нивното решавање во множеството реални броеви ќе го усвоиме преку примери.

Пример 20. Реши ја логаритамската равенка

$$\log_4(x+3)+\log_4(x-2)-\log_4 6=0. \tag{1}$$

Решение. Прво ќе ја определиме дефиниционата област на равенката. Имено, за да се дефинирани логаритмите на левата страна на равенката, потребно е подлогаритамските величини истовремено да се ненегативни, т.е. $x+3>0$ и $x-2>0$, од што добиваме $x>-3$ и $x>2$, односно $x\in(2,+\infty)$. Последното значи, ако постои решение на равенката (1), тогаш тоа мора да припаѓа на интервалот $(2,+\infty)$. На овој интервал, равенката (1) е еквивалентна на равенката $\log_4\frac{(x+3)(x-2)}{6}=0$, т.е. на равенката $\frac{(x+3)(x-2)}{6}=4^0$, која е еквивалентна на квадратната равенка

$$x^2+x-12=0. \tag{2}$$

Решенијата на равенката (2) се: $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}$, т.е. $x_1=-4$ и $x_2=3$.

Бидејќи $x_1=-4\notin(2,+\infty)$, заклучуваме дека $x_1=-4$ не е решение на равенката (1), а како $x_2=3\in(2,+\infty)$, заклучуваме дека $x_2=3$ е решение на равенката (1). Навистина, со замена во (1) за $x_2=3$ добиваме:

$$\log_4(3+3)+\log_4(3-2)-\log_4 6=\log_4 6+\log_4 1-\log_4 6=\log_4 6+0-\log_4 6=0.$$

Пример 21. Реши ја равенката

$$\log(4-2x^2)=\log 7x. \tag{3}$$

Решение. Во претходниот пример прво ја определивме дефинционата област на равенката, а потоа преминавме на нејзино решавање на дефинционата област. Меѓутоа, можеме да постапиме и вака:

$$\log(4-2x^2)=\log 7x \Rightarrow 4-2x^2=7x \Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0.$$

Решенијата на последната равенка се $x_1=-4$ и $x_2=\frac{1}{2}$. Останува да провериме дали најдените решенија се решенија и на почетната равенка. Притоа, бидејќи за $x_1=-4$ подлогаритамските величини во (3) се $4-2\cdot(-4)^2=7\cdot(-4)=-28<0$, а логаритмот е дефиниран само за позитивни реални броеви, заклучуваме дека $x_1=-4$ не е решение на равенката (3). Лесно се гледа дека $x_2=\frac{1}{2}$ е решение на равенката (3). Провери!

Пример 22. Реши ја равенката $x^{\frac{1+\log x}{4}}=10^{\log x+1}$.

Решение. Јасно $x>0$. Ако, за основа 10, ја логаритмираме дадената равенка последователно добиваме

$$\frac{\log x+1}{4}\log x=\log x+1,$$

$$(1+\log x)(1-\tfrac{1}{4}\log x)=0$$

од што следува $\log x+1=0$ или $1-\frac{1}{4}\log x=0$ т.е. $x_1=10^{-1}$ и $x_2=10^4$. Најдените решенија се позитивни, па затоа тие се решенија и на почетната равенка. Провери!

Пример 23. Реши ја равенката $\log_{x+2}(x^2+5x-4)^4=8$.

Решение. Имаме

$$\log_{x+2}(x^2+5x-4)^4=8 \Leftrightarrow 4\log_{x+2}|x^2+5x-4|=8 \Leftrightarrow |x^2+5x-4|=(x+2)^2.$$

Од $x^2+5x-4=(x+2)^2=x^2+4x+4$ се добива едно решение на последната равенка, и тоа: $x=8$, а од $-x^2-5x+4=x^2+4x+4 \Leftrightarrow 2x^2+9x=0$ се добиваат две решенија на последната равенка и тоа: $x=0$ и $x=-\frac{9}{2}$. Решенија на дадената равенка се само $x=0$ и $x=8$, бидејќи за $x=-\frac{9}{2}$ имаме $x+2<0$, т.е. основата на логаритмот е негативна, а тоа не е можно.

Пример 24. Реши ја равенката $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

Решение. Јасно, $x>0$. Ако искористиме дека $\log_{16}x=\frac{1}{\log_x 16}=\frac{1}{4\log_x 2}=\frac{1}{4}\log_2 x$ и $\log_4 x=\frac{1}{2}\log_2 x$ добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\tfrac{1}{4}\log_2 x+\tfrac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7$$

т.е. на равенката $\log_2 x=4$, чие решение е $x=2^4=16$ и тоа е решение на почетната равенка (зошто?).

ЛОГАРИТАМСКИ НЕРАВЕНКИ (за оние што сакаат да знаат повеќе)

Во овој дел ќе ги разгледаме само оние логаритамски неравенки кои можат да се сведат на обликот

$$\log_a f(x) \quad \log_a g(x), 0 \quad a \quad 1, \tag{5}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми од најмногу втор степен или се количници на полиноми од најмногу прв степен. Притоа, дефиниционата област на неравенката (5) ја наоѓаме од условите

$$f(x) \quad 0,\ g(x) \quad 0. \tag{6}$$

Имајќи ги предвид условите (6), ако се искористи монотоноста на логаритамската функција, тогаш неравенката (5) е еквивалентна на системот неравенки

$$f(x) \quad 0,\ g(x) \quad 0,\ f(x) \quad g(x), \quad a \quad 1 \tag{7}$$

односно на неравенката

$$f(x) \quad 0,\ g(x) \quad 0, f(x) \quad g(x), \quad 0 \quad a \quad 1. \tag{8}$$

Затоа, решавајќи ја неравенката (7), односно (8), ние всушност ја решаваме неравенката (5).

Пример 25. Реши ја неравенката $\log_2(x^2 \quad 7x \quad 10) \quad \log_2(3x \quad 11)$.

Решение. Од претходно изнесеното следува дека дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки

$$x^2 \quad 7x \quad 10 \quad 0$$
$$3x \quad 11 \quad 0$$
$$x^2 \quad 7x \quad 10 \quad 3x \quad 11$$

Решението на првата неравенка е $x \quad (\quad ,2) \quad (5, \quad)$, на втората $x \quad (\frac{11}{3}, \quad)$ и на третата $x \quad [3,7]$. Конечно, наоѓаме $x \quad (5,7]$.

На крајот од овој дел ќе разгледаме уште еден пример, за чие решавање е потребно да се реши експоненцијална неравенка.

Пример 26. Реши ја равенка $\log_3(4 \ 3^x \quad 1) \quad 2x \quad 1$.

Решение. Дадената равенка има смисол за $4 \ 3^x \quad 1 \quad 0$ од што следува $3^x \quad \frac{1}{4} \quad 3^{\log_3 \frac{1}{4}}$ т.е. $x \quad \log_3 \frac{1}{4}$. Понатаму од $\log_3(4 \ 3^x \quad 1) \quad 2x \quad 1$ последователно добиваме

$$4 \ 3^x \quad 1 \quad 3^{2x \ 1},$$
$$4 \ 3^x \quad 1 \quad 3 \ (3^x)^2.$$

Воведуваме смена $y \quad 3^x$ и од последната равенка ја добиваме равенката $3y^2 \quad 4y \quad 1 \quad 0$ чии решенија се $y_1 \quad \frac{1}{3}$ и $y_2 \quad 1$. Според тоа, $3^x \quad \frac{1}{3}$ па е $x_1 \quad\quad 1$ и $3^x \quad 1$ па е $x_2 \quad 0$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x_1 \quad \log_3 \frac{1}{4}$ и $x_2 \quad \log_3 \frac{1}{4}$, што значи дека најдените решенија се решенија и на почетната равенка.

ЗАДАЧИ

1. Реши ги равенките

а) $\log_3(2x \quad 4) \quad 2$, б) $\log_2(x \quad 5) \quad 1$, в) $\log_3(x^2 \quad 1) \quad 2$.

2. Реши ги равенките

а) $\log x \quad \log(x \quad 3) \quad 1$, б) $\log x \quad \log\frac{1}{x \;\, 1} \quad \log 2 \quad \log(2x \quad 3)$.

3. Реши ги равенките

а) $\log_x \sqrt{5} \quad \log_x 5x \quad 2{,}25 \quad (\log_x \sqrt{5})^2$, б) $\log_a x \quad \log_{a^2} x \quad \log_{a^4} x \quad \frac{3}{4}, a \quad 0$.

4. Реши ја равенката $\log_2(x^2 \quad 2x \quad 7)\log_{x^2 \;\, 6x \;\, 9} 4 \quad 1$.

5. Реши ја равенката $\log_{x \;\, 3}(x^2 \quad 7x \quad 9)^4 \quad 8$.

6. Реши ја равенката $x^{\frac{a\lg x \;\, 1}{4}} \quad 10^{b(\lg x \;\, 1)}$, $a, b \quad \mathbf{R}$.

7. Реши ја равенката $2\log_4(2^x \quad 1) \quad x \quad \log_{\frac{1}{2}} 3 \quad \log_{\frac{\sqrt{6}}{6}} 6 \quad 0$.

8. Реши ги неравенките

а) $\log(x \quad 4) \quad \log(x \quad 1) \quad 1$, б) $\log(x \quad 2) \quad \log x$,

в) $x^{(\log x)^2 \;\; 3\log x \;\; 1} \quad 1000$, г) $\log_3(x^2 \quad 5x \quad 6) \quad 0$.

I.8. НЕКОИ ПРИМЕНИ НА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

На крајот од оваа тема ќе разгледаме неколку примени на експоненцијалните функции, за кои сметаме дека ќе придонесат за подобро запознавање на важноста на овие функции. За таа цел ќе разгледаме три примери.

Пример 27. Ако сума од C_0 денари ја вложиме во банка со каматна стапка од p проценти и за временски период од n години, тогаш сумата ќе се зголеми за вредноста на каматата која во случај на таканареченото *obi~no vkama t uvawe* се пресметува според формулата $K \quad \frac{C_0 p}{100} n$. Според тоа, после n години ќе располагаме со сума од

$$C \quad C_0 \quad \frac{C_0 p}{100} n \tag{1}$$

денари. Покрај едноставното вкаматување постои и таканаречено *s l o ` eno vkama t uvawe,* кое се состои во посебен договор меѓу банката и штедачот. Имено, штедачот нема да ги подига парите во текот на n години, а банката оваа услуга ја плаќа со тоа што на крајот од секоја година кон сумата која во иднина ќе се вкаматува ја допишува каматата за изминатата година. Така, после првата година сумата C_0 се зголемува за $\frac{C_0 p}{100}$ денари, па штедачот има сума од

$$C_1 \quad C_0 \quad \frac{C_0 p}{100} \quad C_0(1 \quad \frac{p}{100}) \quad C_0 r$$

денари, каде $r \quad 1 \quad \frac{p}{100}$. Со впишувањето на каматата во текот на следната година штедачот ќе добива камата на сумата C_1, па затоа износот на каматата ќе биде $\frac{C_1 p}{100}$. Според тоа, после две години сумата која штедачот ја има во банката ќе биде

$$C_2 \quad C_1 \quad \frac{C_1 p}{100} \quad C_1(1 \quad \frac{p}{100}) \quad C_0 r^2 ,$$

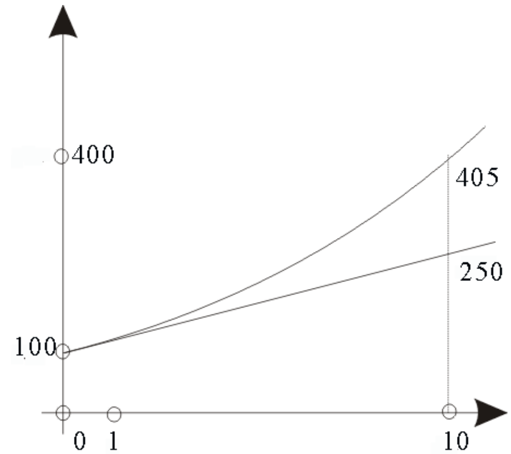
денари. Очигледно, после n години, штедачот во банката ќе има

$$C_n \quad C_0 r^n \qquad (2)$$

денари и дури тогаш ќе може да ја подигне сумата. На цртежот десно е прикажан графикот на функцијата

$$f(x) \quad C_0 r^x ,$$

кој соодветствува на почетната сума од $C_0 \quad 100$ денари, процент $p \quad 15\%$ е време од $n \quad 10$ години. Во случајот имаме



$$r \quad 1 \quad \frac{p}{100} \quad 1 \quad \frac{15}{100} \quad 1{,}15$$

па затоа станува збор за функцијата $f(x) \quad 100 \quad 1{,}15^x$. Според тоа, порастот на сумата при сложеното вкаматување е експоненцијален и после $n \quad 10$ години штедачот ќе добие сума $f(10) \quad 100 \quad 1{,}15^{10} \quad 405$ денари. Меѓутоа, ако со истата каматна стапка штедачот вложи 100 денари на 10 години, тогаш според формулата (1) добиваме дека тој ќе добие сума од $100 \quad (1 \quad \frac{15}{100} \quad 10) \quad 250$ денари.

Пример 28. Во моментот радиусот на пресекот на стеблото на едно дрво изнесува $2cm$ и истиот годишно се зголемува за 20%. Со аналогни заклучувања како во претходниот пример наоѓаме дека радиусот на стеблото после t години се задава со формулата

$$R(t) \quad 2 \quad 1{,}2^t \, cm . \qquad (3)$$

Користејќи ја формулата (3) за радиусот на стеблото после 8 години наоѓаме

$$R(8) \quad 2 \quad 1{,}2^8 \, cm \quad 2 \quad 4{,}3cm \quad 8{,}6cm .$$

Меѓутоа, ако сакаме да го пресметаме радиусот на стеблото после 16 години, 5 месеци и 14 дена, тогаш прво го определуваме времето t_1 во години. Имаме

$$t_1 \quad 16 \quad \frac{5}{12} \quad \frac{14}{365} \quad 16 \quad 0{,}417 \quad 0{,}038 \quad 16{,}455 \text{ години}$$

и од формулата (3) наоѓаме

$$R(16{,}455) \quad 2 \quad 1{,}2^{16{,}455} \, cm \quad 2 \quad 20{,}0875cm \quad 40{,}17cm .$$

Пример 29. Да земеме дека литар алкохол го разредуваме на следниов начин: одлеваме петтина од шишето и потоа го дополнуваме со вода, потоа добро ќе измешаме и одлеваме $\frac{1}{5}$ од растворот и шишето повторно го дополнуваме со вода и така постапката ја повторуваме. Бидејќи $\frac{1}{5} \quad 0{,}2$ после првото разредување количеството алкохол во шишето е дадена со

$$a \quad 1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}8 .$$

После второто разредување количеството алкохол во шишето е дадено со

$$a - a \cdot 0{,}2 = a(1 - 0{,}2) = a^2,$$

после третото разредување количеството алкохол е дадено со a^3 итн., после n-тото разредување количеството алкохол е дадено со a^n. Според тоа, станува збор за функцијата

$$f(x) = a^x = 0{,}8^x. \tag{4}$$

Сакаме да добиеме алкохолен раствор кој ќе содржи приближно 10% алкохол. Колку разредувања на чистиот алкохол треба да направиме?

За да одговориме на поставеното прашање, треба за функцијата (4) да го определиме аргументот x така, што $f(x) = 0.1$. Имаме

$$0{,}8^x = 0{,}1.$$

Последната равенка ја логаритмираме за основа 10 и последователно наоѓаме

$$x \log 0{,}8 = \log 0{,}1,$$

$$x = \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}8} = \frac{1}{0{,}096910013} \approx 10{,}31885116.$$

Според тоа, после 10 разредувања ќе добиеме алкохолен раствор кој ќе содржи околу 10% алкохол или поточно

$$f(10) = 0{,}8^{10} \approx 10{,}74$$

проценти алкохол.

ЗАДАЧИ

1. Пресметај го полупериодот на распаѓање на радиумот ако неговата маса се пресметува според формулата $M(t) = M_0 10^{-0{,}000174t}$, каде M_0 е сегашната маса и $M(t)$ е масата после t години. Полупериод на распаѓање е времето t за кое масата M_0 ќе се намали на маса $\frac{1}{2}M_0$.

2. Биолог во лабораторија одгледува некој вид бактерии кои се размножуваат според законот $N_n = N_0 \cdot 3^n$, каде N_n е бројот на бактериите после n дена, а N_0 е бројот на бактериите кои ги имал на почетокот. Нека претпоставиме дека после два дена имал 250000 бактерии.

а) Колку бактерии имал после 4 дена?

б) После колку време бројот на бактериите се зголемил 5 пати?

3. Бројот на жителите на еден град се зголемува за 30% :

а) на секои 10 години; б) на секои 5 години, в) на секои 3 години.

Колку жители ќе има тој град во 2050 година, ако во 2003 година има 12000 жители?

4. За колку време ќе се удвои главнината на влогот при сложено вкаматување ако е:

а) $p = 12\%$, б) $p = 17\%$, в) $p = 21\%$?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y \quad 3^{x} \quad 1$, б) $y \quad 2 \;\; 3^{x}$.

2. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y \quad 2^{\frac{x^2}{|x|}}$, б) $y \quad 2^{x \;\; |x|}$.

3. Конструирај го графикот на функцијата $y \quad |3^{x} \quad 1|$.

4. Реши ја равенката

а) $25^{x} \quad 5^{3 \;\; x}$, б) $3^{x} \;\; 5^{2x \;\; 3} \quad 45$, в) $2^{x} \;\; 3^{x \;\; 1} \;\; 5^{2x \;\; 1} \quad 250$.

5. Реши ја равенката

а) $(\frac{5}{9})^{2x \;\; 7} \quad \sqrt[3]{(\frac{9}{5})^{3x \;\; 1}}$, б) $(\frac{4}{7})^{x}(\frac{7}{4})^{3x \;\; 1} \quad \frac{16}{49} \quad 0$.

6. Реши ја равенката

а) $4^{x} \quad 2^{x} \quad 20$, б) $3^{x \;\; 2} \quad 9^{x \;\; 1} \quad 810$, в) $4^{x} \quad 5 \;\; 2^{x} \quad 24 \quad 0$,

г) $9^{\sqrt[3]{x}} \quad 2 \;\; 3^{\sqrt[3]{x}} \quad 3$, д) $2^{x \;\; \sqrt{x^2 \;\; 4}} \quad 5(\sqrt{2})^{x \;\; 2 \;\; \sqrt{x^2 \;\; 4}} \quad 6 \quad 0$.

7. Реши ја равенката

а) $6 \;\; 4^{x} \quad 13 \;\; 6^{x} \quad 6 \;\; 9^{x} \quad 0$, б) $7 \;\; 4^{x^2} \quad 9 \;\; 14^{x^2} \quad 2 \;\; 49^{x^2} \quad 0$,

в) $5^{1 \;\; \frac{1}{x}} \quad 7 \;\; 10^{\frac{1}{x}} \quad 2 \;\; 4^{\frac{1}{x}} \quad 0$, г) $3 \;\; 4^{x} \quad 2 \;\; 9^{x} \quad 5 \;\; 6^{x}$,

д) $4 \;\; \sqrt[x]{81} \quad 12 \;\; \sqrt[x]{36} \quad 9 \;\; \sqrt[x]{16} \quad 0$, ѓ) $2^{2(x^2 \;\; x) \;\; 3} \quad 2^{x^2 \;\; x \;\; 2} \quad 1$.

8. Реши ја равенката

а) $(\sqrt{4 \quad \sqrt{15}})^{x} \quad (\sqrt{4 \quad \sqrt{15}})^{x} \quad 8$, б) $(\sqrt{3 \quad 2\sqrt{2}})^{x} \quad (\sqrt{3 \quad 2\sqrt{2}})^{x} \quad 34$,

в) $(\sqrt{7 \quad \sqrt{48}})^{x} \quad (\sqrt{7 \quad \sqrt{48}})^{x} \quad 14$, г*) $(\sqrt{2 \quad \sqrt{3}})^{x} \quad (\sqrt{2 \quad \sqrt{3}})^{x} \quad 2^{x}$.

9. Реши ја равенката

а*) $4^{x} \quad 9^{x} \quad 25^{x} \quad 6^{x} \quad 10^{x} \quad 15^{x}$, б*) $2^{3x} \quad \frac{8}{2^{3x}} \quad 6(2^{x} \quad \frac{1}{2^{x \;\; 1}}) \quad 1$.

10. Реши ја неравенката

а) $5^{x^2 \;\; 3x} \quad 125 \;\; 5^{x}$, б) $125 \;\; (\frac{1}{5})^{3x^2} \quad (\frac{1}{25})^{\;\; 4x}$, в) $2^{x} \;\; 5^{x} \quad 0{,}1 \;\; (10^{x \;\; 1})^{5}$.

11. Реши ја неравенката

а) $2^{x} \quad 2^{\;\; x \;\; 1} \quad 3 \quad 0$, б) $\frac{2^{x \;\; 1} \;\; 1}{2^{x \;\; 1} \;\; 1} \quad 2$, в) $\frac{1}{2^{x} \;\; 3} \quad \frac{1}{2^{x \;\; 2} \;\; 1}$.

12. Пресметај:

а) $\log_{\frac{1}{10}} 1000$, б) $\log_{\sqrt{3}} 81$, в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$.

13. Пресметај

а) $\log_2 \log_2 16 \quad \log_3 \log_3 27$, б) $2 \quad 5^{\log_5 125} \quad 5 \quad 3^{\log_3 81}$,

в) $5^{\log_5 25} \quad 2^{\log_2 8} \quad 3^{\log_3 3}$, г) $2^{3 \quad \log_2 6} \quad 3^{4 \quad \log_3 8}$,

д) $(3^{\log_3 5})^3 \quad 2^{3\log_2 8} \quad 5^{2\log_5 25}$, ѓ) $2\log_5 125 \quad 2^{1 \quad \log_2 4} \quad 3^{2\log_3 9 \quad 1}$.

14. Нека $z \quad 0$. Логаритмирај го изразот:

а) $A \quad \frac{2ax^3 \sqrt[4]{5}}{3by^2 \sqrt[3]{7}}, a, b, x, y \quad 0$, б) $A \quad (\frac{c^5 z \sqrt[3]{c^2 d}}{\sqrt{ab}})^2, a, b, c, d, z \quad 0$,

в) $A \quad \sqrt[5]{(\frac{1}{a^3 b^2 \sqrt[4]{c^3}})^2}, a, b, c \quad 0$.

15. Упрости го изразот

а) $2\log(a \quad b) \quad \frac{2}{3}\log(a \quad b) \quad \frac{1}{2}\log a$,

б) $3\log a \quad \frac{1}{2}\log 7 \quad \frac{1}{2}\log b \quad 3\log c \quad \log 8$,

в) $\log 3 \quad \frac{1}{2}(\log a \quad 3\log b) \quad 2\log d \quad \frac{1}{3}\log c$.

16. а) Ако е $\log_a 10 \quad m, 0 \quad a \quad 1$, пресметај $\log_{10a} a$.

б) Ако е $\log_a 32 \quad m, 0 \quad a \quad 1$, пресметај $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[8]{a}$.

17. Ако $a^2 \quad b^2 \quad 7ab$ и $a \quad 0, b \quad 0$, докажи дека $\log \frac{a \quad b}{3} \quad \frac{1}{2}(\log a \quad \log b)$.

18. Ако $a^2 \quad b^2 \quad 6ab$ и $a \quad 0, b \quad 0$ и $a \quad b$, докажи дека

$$\log(a \quad b) \quad \log(a \quad b) \quad \frac{1}{2}\log 2.$$

19. Ако a и b се катети на правоаголен триаголник, а c негова хипотенуза, докажи дека $\log_{b \quad c} a \quad \log_{c \quad b} a \quad 2\log_{b \quad c} a \ \log_{c \quad b} a$.

20. Ако е $\log_5 2 \quad a, \log_5 3 \quad b$, пресметај $\log_{45} 100$.

21. Ако е $\log_7 2 \quad c, \log_7 5 \quad d$, пресметај $\log_{70} 2{,}5$.

22. Пресметај $\log_{\sqrt{3}} 8$, ако $\log_{12} 3 \quad a$.

23. Ако е $\log_b a \quad m, \log_c b \quad n$, пресметај $\log_{bc} ab$.

24. Ако $f(x) \quad \log \frac{1 \quad x}{1 \quad x}$, докажи дека $f(a) \quad f(b) \quad f(\frac{a \quad b}{1 \quad ab})$.

25. Ако a, b, c и d се позитивни броеви различни од 1, докажи дека

$$\log_a d \ \log_b d \quad \log_b d \ \log_c d \quad \log_c d \ \log_a d \quad \frac{\log_a d \log_b d \log_c d}{\log_{abc} d}.$$

26. Ако $n \quad \mathbf{N}$, $0 \quad a \quad 1$ и $0 \quad x \quad 1$ докажи дека

$$\frac{1}{\log_a x} \quad \frac{1}{\log_{a^2} x} \quad \frac{1}{\log_{a^3} x} \quad \ldots \quad \frac{1}{\log_{a^n} x} \quad \frac{n(n \quad 1)}{2}\log_x a.$$

27. Докажи дека за секои $a, b \quad (0,1)$ важи неравенството $\log_a \frac{2ab}{a \quad b} \log_b \frac{2ab}{a \quad b} \quad 1$.

28. Ако $a \quad 1, b \quad 1, c \quad 1$ или $0 \quad a \quad 1, 0 \quad b \quad 1, 0 \quad c \quad 1$ докажи дека

$$\frac{\log_b a^2}{a \quad b} \quad \frac{\log_c b^2}{b \quad c} \quad \frac{\log_a c^2}{c \quad a} \quad \frac{9}{a \quad b \quad c}.$$

29. Докажи дека

$$\log_4 5 \quad \log_5 6 \quad \log_6 7 \quad \log_7 8 \quad 4{,}4.$$

30. Колку цифри има бројот

а) 3^{100}, б) 7^{2003}?

31. Кој број е поголем 21^{23} или 23^{21}?

32. Најди ја дефиниционата област на функцијата

а) $y \quad \log(x^2 \quad 1)$, б) $y \quad \log(4x \quad x^2 \quad 1)$, в) $y \quad \log(x^2 \quad 1)$,

г) $y \quad \dfrac{\sqrt{x^2 \quad 2x}}{\log_5(x \quad 1)}$, д) $y \quad \log(x^2 \quad 1) \quad \sqrt{4x \quad x^2}$.

33. Без да пресметуваш, определи кои од дадените броеви е поголем:

а) $\log_3 2$ или $\log_3 5$, б) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ или $\log_{\frac{1}{3}} 5$, в) $\log_2 3$ или $\log_5 3$.

Одговорот да се образложи!

34. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y \quad \log_{\frac{1}{2}}(x \quad 2)$, б) $y \quad 2 \quad \log_2 x$, в) $y \quad 1 \quad \log_{\frac{1}{3}} x$,

г) $y \quad |\log_2 x|$, д) $y \quad \log_2 |x \quad 1|$.

35. Реши ја равенката:

а) $\log_x(x \quad 1) \quad 2$, б) $\log_3(x \quad 1) \quad \log_3(x \quad 1) \quad 1$.

36. Реши ја равенката:

а) $\log_2(2^x \quad 3) \quad 2 \quad x$, б) $\log_{x \quad 1}(x^2 \quad 5x \quad 10) \quad 2$, в) $\log_2(\log_2 x) \quad 0$.

37. Реши ја равенката

а) $\dfrac{\log(1 \quad \sqrt{x \quad 1})}{\log \sqrt[3]{x \quad 40}} \quad 3$, б) $\log(5 \quad x) \quad 2\log\sqrt{3 \quad x} \quad 1$.

38. Реши ја равенката

а) $\log^2 x \quad 5\log x \quad 6 \quad 0$, б) $\log^2 x \quad \log x^6 \quad \log_2 3 \quad 9$,

в) $x^{\log_x 3} \quad x^{\log_3 x} \quad 9$, г) $3^{\log_3^2 x} \quad x^{\log_3 x} \quad 6$.

39. Реши ја равенката

а) $x^{\log x} \quad 10000$, б) $x^{\log x} \quad 100x$, в) $x^{2\log_3 x} \quad 3x$.

40. Реши ја равенката

а) $\log_3(4 \quad 3^x \quad 1) \quad 3x \quad 1$, б) $\log_2(2^x \quad 1) \log_2(2^{x \quad 1} \quad 2) \quad 2$,

в) $\log_2(9^{x \quad 1} \quad 7) \quad 2 \quad \log_2(3^{x \quad 1} \quad 1)$.

41. Реши ја равенката

а) $\frac{1}{\log_x 2} \quad \frac{1}{\log_x 4} \quad \frac{1}{\log_x 8} \quad 11$, б) $3 \quad 2\log_{x\ 1} 3 \quad 2\log_3(x \quad 1)$.

42. Реши ја равенката

а) $5^{\log x} \quad 3^{\log x\ 1} \quad 3^{\log x\ 1} \quad 5^{\log x\ 1}$, б) $\sqrt{\log_2 x} \quad \frac{1}{2} \quad \log_2 \sqrt{x}$,

в) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \qquad \log_x 5$.

43. Re{ i ja neravenka t a

a) $\log_7(2x \quad 8) \quad \log_7(x \quad 2)$, *b)* $\log_{\frac{1}{2}}(1 \quad 2x) \qquad 1$,

v) $\log_2^2 x \quad 3\log_2 x \quad 2 \quad 0$, *g)* $\log_2 x \quad 2\log_x 2 \quad 1 \quad 0$.

44. Re{ i ja neravenka t a

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x\ \ 4}{2x\ \ 5} \quad 1$, *b)* $\frac{\log_{0,5}(x\ \ 3)}{x\ \ 5} \quad 0$, *v)* $\frac{\log_2(x\ \ 1)}{x\ \ 1} \quad 0$.

45. Re{ i ja neravenka t a

a) $(\frac{2}{5})^{\log_{0,5}(x^2\ \ 5x\ \ 8)} \quad 2{,}5$, *b)* $3^{2\ \ \log x} \quad 3^{5\ \ \log x^2} \quad 2$.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. Без да пресметува подреди ги по опаѓачки редослед броевите $3^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{5}}$.

2. Нацртај го графикот на функцијата $f(x) \quad 2^{x\ \ 1} \quad 3$.

3. Реши ја равенката: а) $2^{\ \ x\ \ 4x} \quad \frac{1}{8}$, б) $9^{x^2\ \ 1} \quad 36\ \ 3^{x^2\ \ 3} \quad 3 \quad 0$.

4. Одреди ја дефиниционата област на функцијата

а) $f(x) \quad \log_2 \frac{x\ \ 2}{x\ \ 2}$, б) $f(x) \quad \log_{\frac{25\ \ x^2}{16}}(\ \ x^2 \quad 2x \quad 24)$

5. Упрости го изразот $A \quad \log(x \quad 1) \quad 2\log(x \quad 3) \quad \log a^2 \quad \log(a \quad 1)$

6. Пресметај ја вредноста на изразот $A \quad \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} \quad \log_9 \sqrt{3\sqrt{3}}$.

7. Ако е $\log_a x \quad k,\ \log_b x \quad m,\ \log_c x \quad n,$ каде $0 \quad a,b,c \quad 1$ пресметај $\log_{abc} x$.

8. Конструирај го графикот на функцијата $f(x) \quad 2 \quad \log_{\frac{1}{3}} x$.

9. Кој број е поголем 33^{32} или 32^{33}?

10. Реши ја логаритамската равенка:

а) $\log x \quad \log(x \quad 3) \quad 1$, б) $\log_{4x} 2\ \ \log_{\frac{x}{4}} 2 \quad \log_{\frac{x}{16}} 2$.