ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ОД ГЕОМЕТРИЈА

Даниел Велинов[1], Самоил Малчески[2]
[1]Градежен факултет Скопје, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ во Скопје
[2]Меѓународен Славјански Универзитет во Свети Николе

Олимписките проблеми од геометрија се доказ за елеганцијата и длабочината вградени во светот на математиката.

Геометријата со својата поврзаност и логичка прецизност, служи како плодно тло за одгледување на вештините за решавање проблеми и негување на длабоко разбирање на математичките концепти. Проблемите кои се карактеристични за математичките олимпијади, се надвор од рутинските задачи и претставуваат интригантни предизвици пред учениците, барајќи креативно размислување, аналитичко резонирање и владеење со основните и напредните геометриски резултати.

Во оваа статија, ќе обратиме посебно внимание на некои одбрани задачи од геометрија од различни математички олимпијади, задржувајќи се на нивните структури и поединости. Секој проблем служи како врата кон поширок регион на геометриските концепции, од основните теореми до напредни резултати, прикажувајќи го разновидниот и динамичен карактер на областа.

Наша цел овде не е само да ги претставиме решенијата на овие проблеми, туку и да обезбедиме увид во стратегиите за решавање на вакви и слични проблеми. Преку детално разгледување на овие проблеми, целта ни е да ги опремиме читателите со алатки на геометријата, негувајќи пошироко разбирање за предметот и освојување на увереност за справување со нови предизвици.

Ги покануваме учениците, наставниците и математичките ентузијасти да ни се придружат во ценењето на убавината и комплексноста на геометриските олимписки проблеми, секој од кои е доказ за трајната привлечност на математичките истражувања.

Задача 1. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник така што $|AD|=|BD|$ и нека M е пресек на неговите дијагонали. Понатаму, нека N е пресек на дијагоналата AC со кружницата која минува низ точките B, M и центарот на впишаната кружница во триаголникот BCM. Докажи дека важи $|AN|\cdot|NC|=|CD|\cdot|BN|$.

Решение. I *начин*. Нека означиме $\measuredangle BAD=\measuredangle DBA=\sim$. Тогаш

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = 180^\circ - 2\sim \ .$$

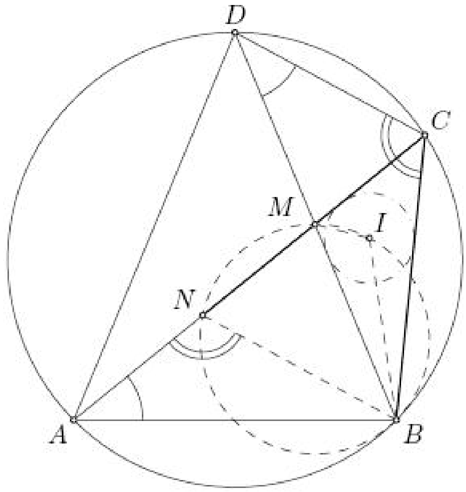
Нека I е центар на впишаната кружница во триаголникот BCM . Па,

$$\measuredangle MIB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\measuredangle BMC + \measuredangle CBM) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle MCB)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle ACB) = 180^\circ - \sim .$$

Бидејќи четириаголникот $BIMN$ е тетивен, важи $\measuredangle BNC = \sim$ (независно од положбата на точката N), па триаголникот BCN е рамнокрак и важи $\overline{BC} = \overline{NC}$.

Да забележиме дека триаголниците ABN и DBC се слични бидејќи $\measuredangle ANB = \measuredangle DCB = 180^\circ - \sim$ и $\measuredangle BAN = \measuredangle BDC$. Па,



$$\frac{\overline{NA}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{NC}},$$

односно

$$\overline{AN} \cdot \overline{NC} = \overline{CD} \cdot \overline{BN} \ .$$

II *начин*. Овде ќе ги користиме истите ознаки како во првото решение. Имаме дека $\measuredangle MIB = 180^\circ - \sim$. Кога точката N , би се наоѓала на отсечката CM , би имале

$$\measuredangle ANB = \measuredangle MNB = \measuredangle MIB = 180^\circ - \sim \ ,$$

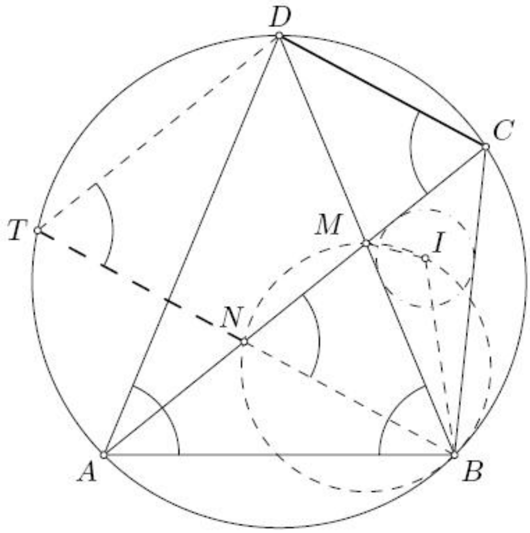
$$\measuredangle NBA = \measuredangle NBM + \measuredangle MBA > \sim \ ,$$

па во триаголникот ABN збирот на два од аглите би бил поголем од 180°, што не е можно. Според тоа, точката N се наоѓа на отсечката AM и важи $\measuredangle BNM = 180^\circ = \measuredangle MIB = \sim$.

Нека точката T е втор пресек на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ и правата BN . Имајќи предвид дека

$$\measuredangle DCA = \measuredangle DBA = \sim \text{ , } \measuredangle TNA = \measuredangle BNC = \sim \text{ и } \measuredangle BTD = \measuredangle BAD = \sim \text{ ,}$$

четириаголникот $CDTN$ е паралелограм и важи $\overline{CD} = \overline{NT}$.



Конечно, од степенот на точката N , во однос на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$, добиваме дека

$$\overline{AN} \cdot \overline{NC} = \overline{BN} \cdot \overline{NT} \text{ ,}$$

односно

$$\overline{AN} \cdot \overline{NC} = \overline{CD} \cdot \overline{BN} \text{ .}$$

III *начин*. Имајќи во предвид дека

$$\measuredangle NCB = \measuredangle ACB = \measuredangle ADB \text{ и } \measuredangle BNC = \sim \text{ ,}$$

триаголникот BCN е рамнокрак и важи $\overline{BC} = \overline{CN}$. Уште повеќе, триаголниците ABD и CBN се слични. Со примена на теоремата на Птоломеј за тетивниот четириаголник $ABCD$, добиваме

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \text{ ,}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \frac{\overline{DA}}{\overline{BD}} = \overline{AC} \text{ .}$$

Бидејќи триаголникот ABD е сличен со триаголникот NBC , имаме

$$\overline{AB} : \overline{BD} : \overline{DA} = \overline{NB} : \overline{BC} : \overline{CN} \text{ ,}$$

од каде добиваме

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{BC}} \cdot \overline{CD} + \overline{NC} = \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \overline{CD} = \overline{AN} \text{ ,}$$

па конечно

$$\overline{AN}\cdot\overline{NC}=\overline{CD}\cdot\overline{BN}\ .$$

Задача 2. Нека точките M и N се допирните точки на впишаните кружници на разностраниот триаголник ABC со страните AB и CA, соодветно, а точките P и Q се допирните точки на припишаните кружници спроти темињата B и C со правата BC. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е тетивен ако и само ако триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето A.

Решение. I *начин*. Нека $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ и $\overline{AB}=c$ се должините на страните на триаголникот ABC и нека s е неговиот полупериметар. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $b<c$.

Понатаму, нека S е пресек на правите BC и MN, а точката X е допирна точка на впишаната кружница во триаголникот ABC со страната BC.

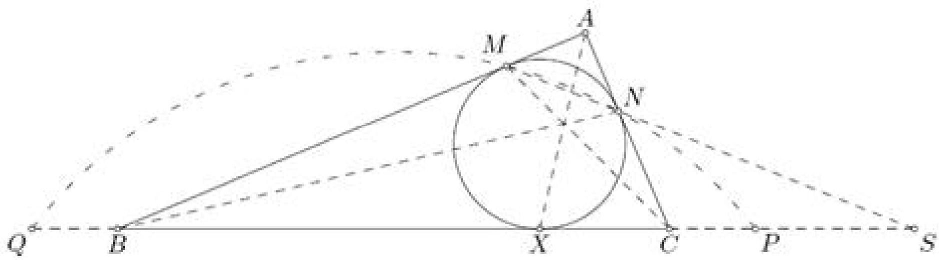
Со примена на теоремата на Менелај, имаме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}\cdot\frac{\overline{BS}}{\overline{CS}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}=1\,.$$

Имајќи предвид дека

$$\overline{AM}=\overline{AN}=s-a\,,\quad \overline{BM}=\overline{BX}=s-b\ \text{и}\ \overline{CN}=\overline{CX}=s-c\,,$$

добиваме



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}\cdot\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}=1,$$

од каде се добива дека

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}=\frac{\overline{BS}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{SX}+\overline{BX}}{\overline{SX}-\overline{CX}}\ .$$

Ставајќи $\overline{SX}=d$, имаме

$$\frac{s-b}{s-c}=\frac{d+(s-b)}{d-(s-c)},$$

$$d(s-b)-(s-b)(s-c)=d(s-c)+(s-b)(s-c)\,,$$

$$d(s-c)=2(s-b)(s-c)\ .$$

Уште,

$$\overline{PX} = \overline{CX} + \overline{CP} = (s-c) + (s-a) = b\,,$$

$$\overline{QX} = \overline{BX} + \overline{BQ} = (s-b) + (s-a) = c \text{ и}$$

$$\overline{SM} \cdot \overline{SN} = \overline{SX}^2$$

(степен на точката S во однос на впишаната кружница на триаголникот ABC).

Конечно, тврдењето на задачата го докажуваме со помош на следнава низа од еквиваленции:

Четириаголникот $MNPQ$ е тетивен.

$$\Leftrightarrow \overline{SM} \cdot \overline{SN} = \overline{SP} \cdot \overline{SQ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{SX}^2 = (\overline{SX} - \overline{PX}) \cdot (\overline{SX} + \overline{QX})$$

$$\Leftrightarrow d^2 = (d-b)(d+c)$$

$$\Leftrightarrow d(c-b) = bc$$

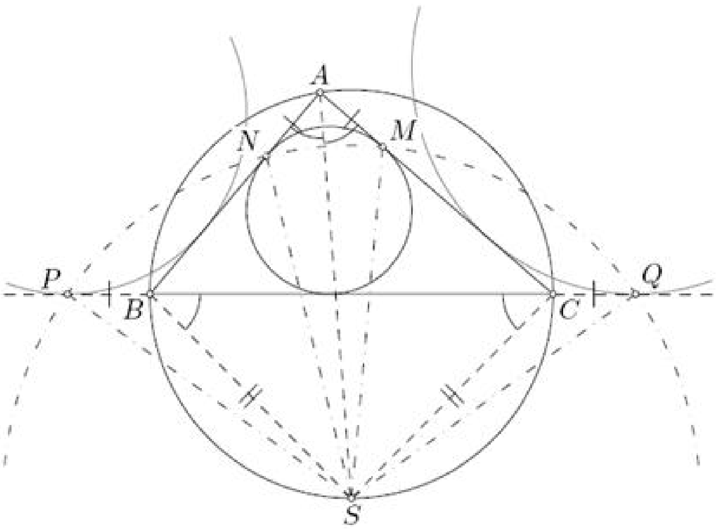
$$\Leftrightarrow 2(s-b)(s-c) = bc$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (b-c)^2 = 2bc$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$$

Триаголникот ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето A.

II *начин*. Нека $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ и $\overline{AB} = c$ се должините на страните на триаголникот ABC и нека $s = \frac{a+b+c}{2}$ е неговиот полупериметар. Нека ~ е големината на аголот $\measuredangle BAC$.



Нека претпоставиме дека четириаголникот $MNPQ$ е тетивен. Тогаш центарот на неговата опишана кружница е пресек на симетралите на тетивите MN и PQ.

Бидејќи $\overline{BP} = \overline{CQ} = s - a$, симетралата на тетивата PQ е и симетрала на отсечката BC, а симетралата на тетивата MN е и симетрала на аголот $\measuredangle BAC$. Па, центарот на опишаната кружница на четириаголникот $MNPQ$ е точката S-средина на лакот BC од опишаната кружница околу триаголникот ABC, на кој не лежи точката A.

Четириаголникот $ABSC$ е тетивен и важи

$$\measuredangle SBC = \measuredangle SAC = \frac{\sim}{2},\ \overline{BS} = \overline{CS} = \frac{a}{2\cos\frac{\sim}{2}},$$

а со примена на теоремата на Птоломеј се добива

$$\overline{AB} \cdot \overline{CS} + \overline{BS} \cdot \overline{CA} = \overline{AS} \cdot \overline{BC},$$

$$(b+c) \cdot \overline{BS} = a \cdot \overline{AS},$$

$$a \cdot \overline{AS} = \frac{a(b+c)}{2\cos\frac{\sim}{2}},$$

$$\overline{AS} = \frac{b+c}{2\cos\frac{\sim}{2}}.$$

Триаголниците ANS и BPS имаат два пара еднакви страни,

$$\overline{AN} = \overline{BP} = s - a,\ \overline{SN} = \overline{SP} = R$$

и важи

$$\measuredangle NAS = \frac{\sim}{2},\ \measuredangle PBS = 180^\circ - \frac{\sim}{2}.$$

Со примена на косинусната теорена во двата триаголници, добиваме

$$\overline{SN}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{AS}^2 - 2\overline{AN}\,\overline{AS}\cos\measuredangle NAS$$

$$\overline{SP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{BS}^2 - 2\overline{BP}\,\overline{BS}\cos\measuredangle PBS,$$

односно

$$R^2 = (s-a)^2 + \overline{AS}^2 - 2(s-a)\overline{AS}\cos\frac{\sim}{2}$$

$$R^2 = (s-a)^2 + \overline{BS}^2 - 2(s-a)\overline{BS}\cos\frac{\sim}{2}.$$

Оттука, $\overline{AS} - \overline{BS} = 2(s-a)\cos\frac{\sim}{2}$ (бидејќи $\overline{AS} + \overline{BS} \neq 0$), од каде се добива дека $2\cos^2\frac{\sim}{2} = 1$, односно $\sim = 90^\circ$.

Обратно, нека триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето A, должината на отсечката BC е дијаметар на опишаната кружница околу него и важи $\overline{BS}=\overline{CS}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\overline{AS}=\frac{(b+c)\sqrt{2}}{2}$. Со примена на косинусна теорема за триаголниците ANS и BPS, се добива

$$\begin{aligned}\overline{SN}^2 &= \overline{AN}^2+\overline{AS}^2-2\overline{AN}\,\overline{AS}\cos\measuredangle NAS\\ &=(s-a)^2+\frac{(b+c)^2}{2}-2(s-a)\frac{(b+c)\sqrt{2}}{2}\cos 45^\circ\\ &=(s-a)^2+\frac{(b+c)^2}{2}-(s-a)(b+c)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\overline{SP}^2 &= \overline{BP}^2+\overline{BS}^2-2\overline{BP}\,\overline{BS}\cos\measuredangle PBS\\ &=(s-a)^2+\frac{a^2}{2}-2(s-a)\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos 135^\circ\\ &=(s-a)^2+\frac{a^2}{2}+a(s-a).\end{aligned}$$

Конечно,

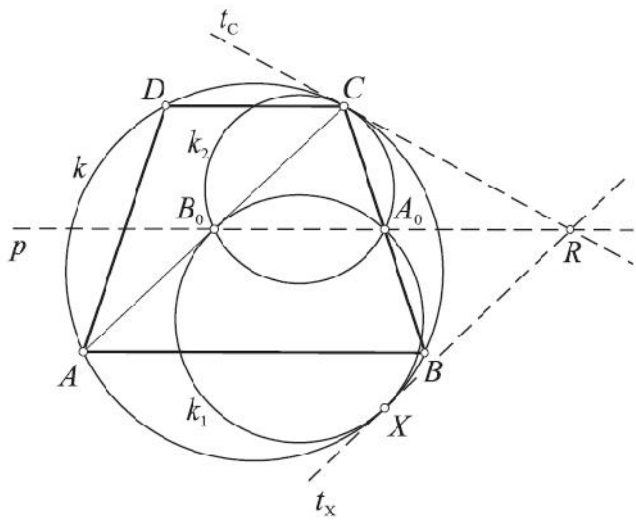
$$\begin{aligned}\overline{SN}^2-\overline{SP}^2 &= \frac{(b+c)^2}{2}-\frac{a^2}{2}-(s-a)(b+c+a)\\ &=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2}-\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2}=0\end{aligned}$$

па поради симетрија во однос на симетралата на отсечката BC и симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ важи $\overline{SM}=\overline{SN}=\overline{SP}=\overline{SQ}$, па четириаголникот $MNPQ$ е тетивен.

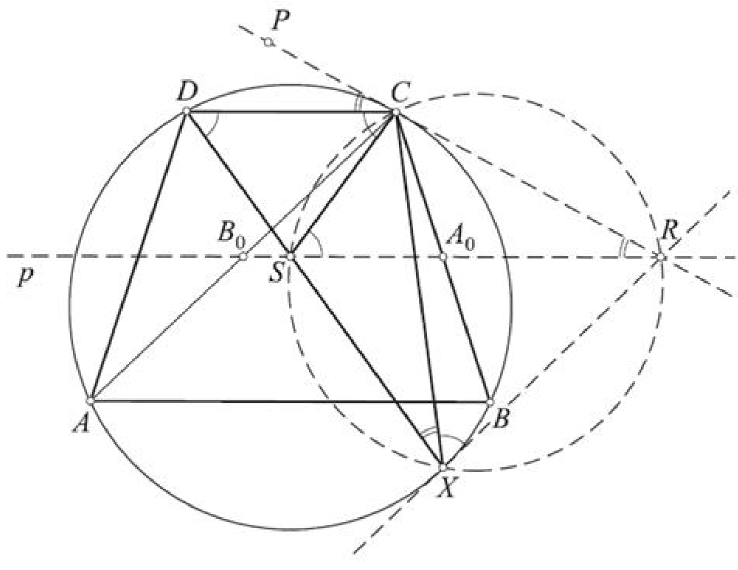
Да забележиме дека овој дел може да се докаже и без тригонометрија. Доволно е да се забележи дека триаголниците IMS и CQS се складни, каде I е центар на впишаната крижница во триаголникот ABC, а другите ознаки се како на цртежот погоре.

Задача 3. Трапезот $ABCD$, со подолга основа AB е впишан во кружница k. Нека A_0 и B_0 се средини на страните BC и CA, соодветно. Нека N е подножје на висината спуштена од темето C на страната AB, а G е тежиште на триаголникот ABC. Кружницата k_1 минува низ точките A_0 и B_0 и ја допира кружницата k во точката X, различна од точката C. Докажи дека точките D, G, N и X се колинеарни.

Решение. Нека k_2 е опишаната кружница околу триаголникот A_0B_0C.



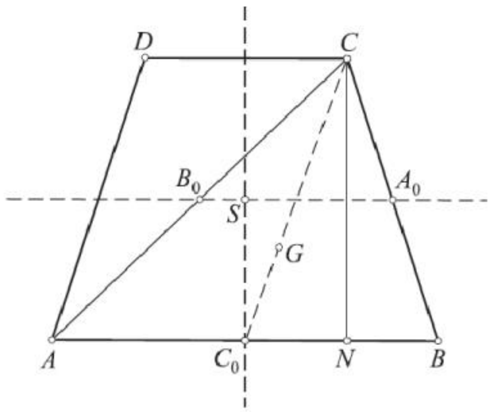
Бидејќи k_2 е слика на кружницата k при хомотетија со центар во точката C и коефициент $\frac{1}{2}$, кружниците k_2 и k се допираат во точката C. Тангентите t_X и t_C на кружницата k во точките X и C, соодветно и тие се радикални оски за кружниците k и k_1, и k и k_2, па нивниот пресек R е радикалниот центар на кружниците k, k_1 и k_2. Па, R лежи на радикалната оска A_0B_0 на кружниците k_1 и k_2. Нека p е правата на која лежат точките R, A_0 и B_0.



Нека S е точка пресек на правите p и DX, а точката P на правата t_C таква да точката C е помеѓу P и R. Тогаш $\measuredangle CRS = \measuredangle PCD$ (правите CD и p се паралелни) и $\measuredangle CXS = \measuredangle PCD$ (еднаквост на аглите на тетивата и тангентата t_C). Заклучуваме дека $\measuredangle CXS = \measuredangle CRS$ и четириаголникот $CSXR$ е тетивен. Па, $\measuredangle RXC = \measuredangle RSC$. Но, $\measuredangle RSC = \measuredangle SCD$ (правите CD и p се паралелни), па $\measuredangle CDS = \measuredangle CDX = \measuredangle RXC$ (еднаквост на аглите на тетивата и тангентата t_X). Заклучуваме дека

$$\measuredangle SCD = \measuredangle RSC = \measuredangle RXC = \measuredangle CDS,$$

па S лежи на симетралата на отсечката CD.



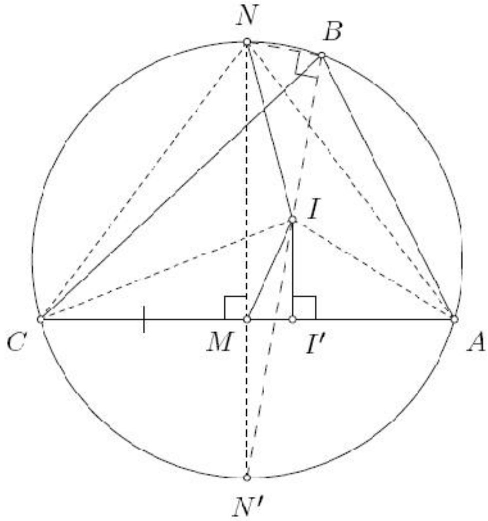
Останува да покажеме дека точките D, S, G и N лежат на иста права. Да забележиме дека точките C, D, N се темиња на правоаголник чиј центар на опишана кружница околу него е во точката S, па точката N лежи на правата DS. Нека C_0 е средина на отсечката AB. Нека G' е пресек на правата на која лежат точките D, S, N со правата CC_0. Тогаш триаголниците C_0NG' и CDG' се слични и важи

$$\overline{CG'} : \overline{C_0G'} = \overline{CD} : \overline{NC_0} = 2:1.$$

Но, точката G е единствена точка на отсечката CC_0 која ја дели отсечката во однос $2:1$, па следува дека $G \equiv G'$ и G лежи на правата DS. Следува, точките G, N и X лежат на правата DS.

Задача 4. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} < \overline{BC}$. Точката I е центар на впишаната кружница во тој триаголник. Нека M е средина на страната AC, а N е средина на лакот $\widehat{AC}$ од опишаната кружница во тој триаголник кој ја содржи точката B. Докажи дека $\measuredangle IMA = \measuredangle INB$.

Решение. I *начин*. Нека точката N' е втор пресек на опишаната кружница околу триаголникот ABC и правата BI. Таа е средина на лакот $\overset{\frown}{CA}$, кој не ја содржи точката B, дијаметрално спротивна н точката N и $M \in \overline{NN'}$. Од Талесовата теорема имаме $\measuredangle NBI = \measuredangle NBN' = 90°$, па барањето на задачата може еквивалентно да се запише како $\measuredangle IMN' = \measuredangle NIN'$.



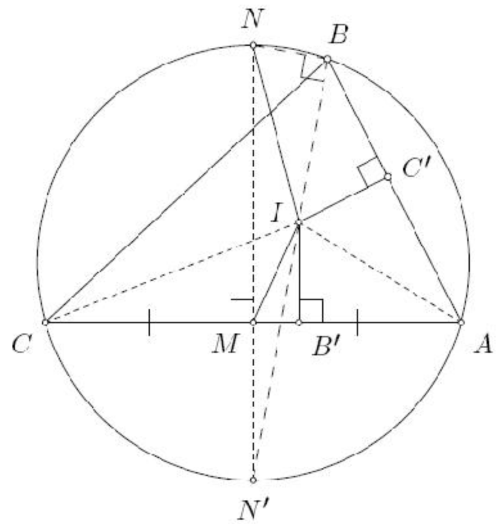
За да ја докажеме оваа еднаквост на аглите, доволно е да покажеме дека триаголниците IMN' и NIN' се слични. Бидејќо аголот во темето N' е заеднички за двата триаголника, доволно е да се докаже

$$\frac{\overline{IN'}}{\overline{MN'}} = \frac{\overline{NN'}}{\overline{IN'}} \quad \Leftrightarrow \overline{IN'}^2 = \overline{MN'} \cdot \overline{NN'}.$$

Да го разгледаме триаголникот NAN'. Од Талесовата теорема имаме дека тој е правоаголен триаголник со прав агол во темето A. Од Евклидовата теорема (или од сличноста на триаголниците NAN' и AMN') следува дека $\overline{AN'}^2 = \overline{MN'} \cdot \overline{NN'}$.

Бидејќи $\measuredangle AIN' = \measuredangle IAN' = \frac{\measuredangle CAB}{2} + \frac{\measuredangle ABC}{2}$, триаголникот AIN' е рамнокрак и важи $\overline{AN'} = \overline{IN'}$. Оттука, следува дека $\overline{IN'}^2 = \overline{AN'}^2 = \overline{MN'} \cdot \overline{NN'}$, па тврдењето на задачата е покажано.

II *начин*. Нека $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ и нека r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница во и околу триаголникот ABC, соодветно. Нека точката N' е втор пресек на кружницата опишана околу триаголникот ABC и правата BI. Таа е средина на лакот $\overset{\frown}{CA}$ кој не ја содржи точката B, дијаметрално спротивна на точката N и $M \in NN'$. Па, $\measuredangle NBI = \measuredangle NBN' = 90°$.



Нека B' е допирна точка на впишаната кружница во триаголникот ABC со страната AC. Тогаш триаголникот $B'MI$ е правоаголен триаголник. Доволно е да се докаже дека триаголниците BNI и $B'MI$ се слични, односно важи

$$\overline{BN} : \overline{BI} = \overline{B'M} : \overline{B'I} .$$

Јасно $\overline{B'I} = r$ и

$$\overline{B'M} = \overline{AM} - \overline{AB'} = \frac{b}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-c}{2} = R\sin\sim - R\sin ¥ .$$

Ако C' е допирна точка на впишаната кружница во триаголникот ABC со страната AB, тогаш

$$\overline{BI} = \frac{\overline{C'I}}{\sin\frac{}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{\sim+¥}{2}} .$$

Да забележиме дека $\measuredangle BN'A = \measuredangle BCA = ¥$, и

$$\measuredangle NN'A = \measuredangle NCA = \measuredangle CAN = \frac{180°-}{2} .$$

Следува дека $\measuredangle NN'B = \frac{\sim-¥}{2}$. Исто така, од правоаголниот триаголник $NN'B$, добиваме $\overline{BN} = 2R\sin\frac{\sim-¥}{2}$. Тврдењето дека $\overline{BN} : \overline{BI} = \overline{B'M} : \overline{B'I}$ е еквивалентно на тврдењето $\sin\sim - \sin ¥ = 2\cos\frac{\sim+¥}{2} \cdot \sin\frac{\sim-¥}{2}$, но ова тврдење е познат тригонометриски идентитет, со што тврдењето на задачата е докажано.