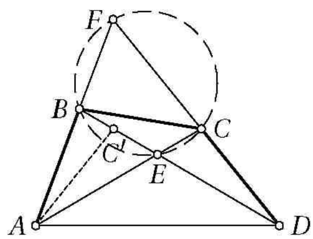
БМО 2007

1. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, дијагоналите AC и BD се со различни должини и се сечат во точката E. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DE}$ ако и само ако $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 120^\circ$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\overline{AE} = \overline{DE}$ и C' е точка на полуправата EB таква што $\overline{EC'} = \overline{EC}$. Од складноста на триаголниците AEC' и DEC следува



$$\overline{AC'} = \overline{DC} = \overline{AB},$$

но $C' \not\equiv B$, па затоа

$$180^\circ = \measuredangle ABD + \measuredangle AC'D = \measuredangle ABD + \measuredangle ACD.$$

Тоа значи дека полуправите AB и DC се сечат во некоја точка F (бидејќи $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD > 180^\circ$) и дека четириаголникот $BEFC$ е тетивен. Сега

$$\measuredangle EFA = \measuredangle ECB = \measuredangle EAF,$$

па затоа $\overline{EF} = \overline{EA} = \overline{ED}$, т.е. E е центар на опишаната кружница околу $\triangle ADF$. Конечно,

$$2\measuredangle AFD = \measuredangle AED = \measuredangle BEC = 180^\circ - \measuredangle AFD,$$

па значи

$$\measuredangle AFD = 60^\circ \text{ и } \measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 120^\circ.$$

Нека $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 120^\circ$, F е пресечната точка на правите AB и CD. Тогаш $\measuredangle AEB = \measuredangle ACB + \measuredangle DBC$ и $\measuredangle AEB = \measuredangle DAE + \measuredangle ADE$, па затоа важи

$$\begin{aligned}\measuredangle AEB &= \tfrac{1}{2}(\measuredangle ACB + \measuredangle DBC + \measuredangle DAE + \measuredangle ADE)\\ &= \tfrac{1}{2}(\measuredangle CAB + \measuredangle BDC + \measuredangle DAE + \measuredangle ADE)\\ &= \tfrac{1}{2}(\measuredangle BAD + \measuredangle ADC) = 60^\circ.\end{aligned}$$

Бидејќи и $\measuredangle DFA = 180^\circ - (\measuredangle BAD + \measuredangle ADC) = 60^\circ$, следува дека четириаголникот $BECF$ е тетивен, па затоа $\measuredangle EFB = \measuredangle ECB$, т.е. $\measuredangle EFA = \measuredangle CAF$ (бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC}$, па е $\measuredangle ECB = \measuredangle CAB$). Според тоа, $\triangle AEF$ е рамнокрак и затоа важи $\overline{AE} = \overline{FE}$. Аналогно $\measuredangle DFE = \measuredangle CBD = \measuredangle BDC$, па затоа $\overline{DE} = \overline{FE}$. Конечно, имаме $\overline{AE} = \overline{FE} = \overline{DE}$.

Втор начин. Нека $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$, $\measuredangle ACB = x$ и $\measuredangle DBC = y$. Од синусната теорема применета на $\triangle BCE$ имаме $\overline{AC} = 2\cos x$ и $\overline{CE} = \frac{\sin y}{\sin(x+y)}$, па затоа $\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE} = 2\cos x - \frac{\sin y}{\sin(x+y)} = \frac{2\sin(x+y)\cos x - \sin y}{\sin(x+y)} = \frac{\sin(2x+y)}{\sin(x+y)}$. Аналогно се добива $\overline{DE}=\frac{\sin(x+2y)}{\sin(x+y)}$. Сега, од $\overline{AE}=\overline{DE}$ следува $\frac{\sin(2x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{\sin(x+2y)}{\sin(x+y)}$, односно $0=\sin(2x+y)-\sin(x+2y)=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{3x+3y}{2}$. Но, $x\neq y$ и $x,y<90^\circ$, па затоа $\frac{3x+3y}{2}=90^\circ$, т.е. $x+y=60^\circ$. Сега $\measuredangle ABC+\measuredangle BCD=360^\circ-2x-2y=240^\circ$, од каде $\measuredangle BAD+\measuredangle ADC=120^\circ$.

Доказот на обратната импликација е како во првиот начин на решавање.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(f(x)+y)=f(f(x)-y)+4f(x)y\,.$$

Решение. Ако во дадената равенка наместо (x,y) последователно замениме $(x,f(x))$ и $(z,2f(x)-f(z))$ добиваме

$f(2f(x))=f(0)+4f(x)^2$ и $f(2f(x))=f(2f(z)-2f(x))+8f(x)f(z)-4f(z)^2$.

Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме
$$f(2f(x)-2f(z))-(2f(x)-2f(z))^2=f(0)\,. \qquad (1)$$

Јасно, $f\equiv 0$ е едно решение. Да забележиме дека ако $f\not\equiv 0$, тогаш секој реален број t може да се запише како $2f(x)-2f(z)$. Навистина, од почетната равенка имаме $2(f(f(u)+y)-f(f(u)-y))=8f(u)y=t$, за $y=\frac{t}{8f(u)}$, каде $f(u)\neq 0$. Затоа од (1) следува дека $f(t)-t^2=f(0)=c$, т.е. $f(t)=t^2+c$. Лесно се проверува дека последната функција е решение на почетната равенка.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација σ на броевите $1,2,\dots,n$ таква што $\sqrt{\sigma(1)+\sqrt{\sigma(2)+\sqrt{\dots+\sqrt{\sigma(n)}}}}$ е рационален број.

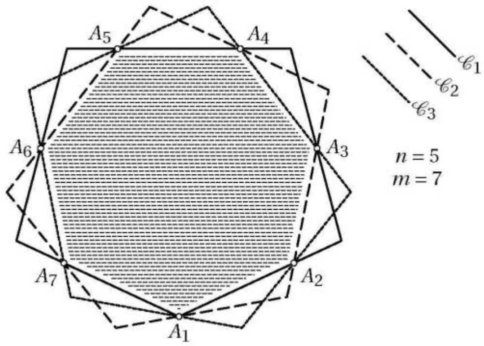
Решение. Да означиме $a_i=\sqrt{\sigma(i)+\sqrt{\sigma(i+1)+\sqrt{\dots+\sqrt{\sigma(n)}}}}$, за $1\le i\le n$ и $a_{n+1}=0$. Ако a_1 е рационален, со повеќекратно квадрирање добиваме дека и $a_2,\dots,a_n$ се рационални. Уште повеќе, a_n мора да биде цел број, па затоа и $a_{n-1},\dots,a_1$ се цели броеви.

Понатаму, од $a_n<\sqrt{n}+1$ следува дека $a_{n-1}<\sqrt{n+\sqrt{n}+1}<\sqrt{n}+1$, а потоа дека $a_{n-2}<\sqrt{n}+1$ итн. па затоа $a_i<\sqrt{n}+1$, за секој i. Нека $k^2<n\le(k+1)^2$. За некој j важи $\sigma(j)=k^2+1$. Бидејќи $a_j>k$ имаме $a_j=\sqrt{k^2+1+a_{j+1}}\ge k+1$, т.е. $a_{j+1}\ge 2k$. Меѓутоа, $a_{j+1}<\sqrt{n}+1$, па затоа $2k<\sqrt{(k+1)^2+1}$, од што следува $3k^2<2k+2$, па затоа $k\le 1$, т.е. $n\le 4$.

Ако $n=4$, тогаш $\sigma(4)=1$ или $\sigma(4)=4$. Во првиот случај мора да биде $\sigma(3)=3$ и $\sigma(2)=2$, па останува $\sigma(4)=1$, што не е решение. Во вториот случај се добива $\sigma(3)=\sigma(2)=2$, што не е можно. Слично и за $n=2$ немаме решение. За $n=1$ и $n=3$ решенија се $\sqrt{1}=1$ и $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}=2$. Значи, $n\in\{1,3\}$.

4. Даден е цел број $n\geq 3$. Нека ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 се границите на три конвексни $n-$аголници во рамнината такви да пресекот на секои две од нив е конечно множество точки. Определи го најголемиот можен број точки на $\ell_1\cap\ell_2\cap\ell_3$.

Решение. Точките во $\ell_1\cap\ell_2\cap\ell_3$ се темиња на конвексен многуаголник P. Да разгледаме една негова страна AB. Таа припаѓа најмногу на една од границите на $n-$аголниците ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 (пресекот на било кои две граници не содржи отсечка), што значи дека правата AB отсекува од останатите два $n-$аголници барем по едно теме. Така секоја страна на P отсекува барем две од вкупно $3n$ темиња на ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3, па затоа P не може да има повеќе од $\frac{3n}{2}$ страни.



Бројот $m=[\frac{3n}{2}]$ може да се достигне. Нека $A_1A_2...A_m$ е конвексен $m-$аголник, a_k $(1\leq k\leq m)$ права низ темињата A_k,A_{k+1} и b_k $(1\leq k\leq 3n-m)$ произволна права низ A_k која со $m-$аголникот нема други заеднички точки ($A_{n+1}=A_1$, $b_{n+1}\neq b_1$). Доволно е да се дефинира $\ell_i,(i=1,2,3)$ како многуаголник определен со сите прави a_k и b_q, каде $k\equiv q+1\equiv i(\mathrm{mod}\,3)$. Лесно се проверува дека ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 се конвексни $n-$аголници.