МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 9 (2021), 149 – 166
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html

ПЕРИОДИЧНОСТА КАЈ ДИСКРЕТНИТЕ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ И ТЕОРЕМАТА НА ШАРКОВСКИ

Анастасија Трајанова [1]

Динамички систем е концепт спротивен на *статички систем*, со којшто се опишува развојот на одреден математички систем низ времето, кој најчесто се однесува непредвидливо и невообичаено, па од главен интерес е да се изнајде некој ред и правила коишто се кријат во тој хаос. Времето во кое системот се развива може да биде непрекинато или дискретно. Кога времето се мери во дискретни единици, тогаш станува збор за дискретен динамички систем. Теоријата на динамичките системи наоѓа примена во многу области како што се: популационата динамика, биологијата, хемиската кинетика, епидемиологијата, нелинеарната оптика, механиката, невронските мрежи, економијата, електрониката, медицинската дијагностика итн. Комплексните модели кои се добиваат дури и од наједноставните процеси во овие дисциплини, се причина за забрзаниот развој на теоријата на динамичките системи во последните 40 години.

Во овој труд, кој своевидно е и прво изложување на Теоремата на Шарковски на македонски јазик, целосно е разработен овој познат резултат кој се однесува на класата дискретни системи добиени со итерации на непрекинато пресликување на конкретен интервал, со кој Шарковски успеал да ја објасни нивната периодичност. Оригиналниот доказ од 1964 година може да се најде во неговиот најпознат труд [5].

Кога велиме *класата дискретни системи добиени со итерации на непрекинато пресликување на конкретен интервал* мислиме на систем зададен со пресликување на еден простор во самиот себе, а развојот на системот е одреден со итерации на зададеното пресликување.

Нека $f: I \to I$ е непрекинато пресликување, и $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал. Под интервал подразбираме сврзано подмножество од реалните броеви што содржи повеќе од една точка (може да биде отворено, затворено или полуотворено).

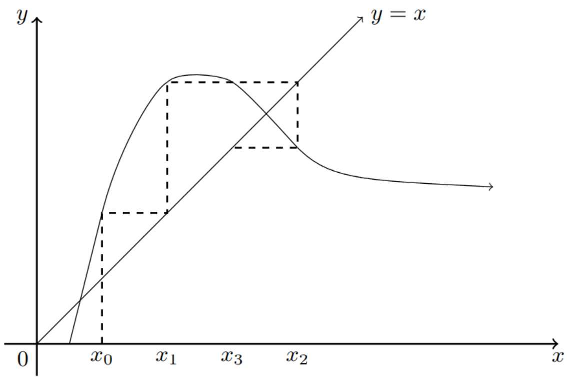
На неколку места во овој труд ќе користиме ознака $< a, b >$ за затворен интервал со крајни точки a и b во кој е непознато кој број е поголем, дали a или b.

Штом имаме непрекинато пресликување f можеме да итерираме со ова пресликување на следниот начин:

$$f^1 = f, \quad f^{n+1} = f \circ f^n, \quad n \geq 1.$$

Во горе дадената нотација за итерации, f^1 (првата итерација од f) е всушност самото пресликување f, додека f^{n+1} ($n+1$ - та итерација од f) е дефинирана индуктивно како композиција на f и n - тата итерација од f, соодветно.

Пример 1. Да видиме како графички изгледа низата итерации од f (непрекинато пресликување) во итеративната точка x_0, т.е. низата x_0, $f^1(x_0)$, $f^2(x_0)$, ... дадена со следниот цртеж:



Да забележиме што се случува геометриски ако почнеме да итерираме во точката x_0:

1. Цртаме вертикална линија од x_0 (*прва итеративна точка*) која го сече графикот на функцијата f во единствена точка. Од оваа точка цртаме хоризонтална линија која ја сече правата $y = x$ во единствена точка. На крај, од оваа точка цртаме вертикална линија која ја сече x-оската точно во *втората итеративна точка* на функцијата f, т.е. во точката $x_1 = f^1(x_0)$.

2. Истата постапка ја повторуваме аналогно и од точката x_1 за да ја добиеме *третата итеративна точка* на функцијата f, т.е. ја добиваме точката $x_2 = f^2(x_0)$.

3. Аналогно ги добиваме и останатите итеративни точки на функцијата f.

Во овој труд, ќе се запознаеме со потполното подредување на природните броеви, познато како *Подредување на Шарковски*, коешто овозможува испитување на периодичноста кај дискретните системи на начин што и ден денес нема достојни надминувања во еднодимензионалната динамика.

Пристапот за докажување на оваа теорема кој ќе го сретнете во овој труд е целосно базиран на трудот [2] од 1979 г. Самата структура на доказот е преземена од книга [1].

Целта на овој труд е да се прикаже јасна и убедлива слика на доказот на Теоремата на Шарковски и лично видување за значењето и перспективите кои оваа теорема ги имаа во областа на динамичките системи и теоријата на хаосот.

1. ОРБИТИ И ПЕРИОДИЧНИ ТОЧКИ

Во овој дел ќе изложиме некои поважни дефиниции на поими кои ќе ги користиме во понатамошното излагање.

Дефиниција 1. *Орбита во* $x \in I$ е следното множество: $\{f^n(x): n \geq 0\} = \{x, f^1(x), f^2(x), f^3(x) \ldots\}$.

Дефиниција 2. За точката $c \in I$ велиме дека е *фиксна точка во* I ако важи $f(c) = c$.

Ќе покажеме дека фиксна точка секогаш постои. Нека $f: I \to I$ е непрекинато пресликување и $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Ако a или b се фиксни точки, тогаш тврдењето сигурно важи. Ако ниту a ниту b не е фиксна точка, тогаш нека $g(x) = f(x) - x$. Па, бидејќи ни a ни b не се фиксни точки, важи $f(a) > a$ и $f(b) < b$, па имаме дека $g(a) = f(a) - a > 0$ и $g(b) = f(b) - b < 0$. Јасно е дека g е непрекинато пресликување. Од Теоремата за средна вредност имаме дека постои точка c таква што $g(c) = 0$ и велиме дека точката c е *фиксна точка* за пресликувањето f.

Дефиниција 3. За точката $c \in I$ велиме дека е *периодична со периода* n, каде што $n \in \mathbb{N}$, ако важи $f^n(c) = c$ и $f^k(c) \neq c$ за $1 \leq k < n$.

Дефиниција 4. Ако $c \in I$ е периодична точка со периода n, тогаш орбитата во c ја нарекуваме *периодична* n*-орбита*, т.е. $\{c, f^1(c), \ldots f^{n-1}(c)\}$ има точно n елементи, бидејќи $f^n(c) = c$.

2. ТЕОРЕМАТА НА ШАРКОВСКИ

Клучното прашање кое Шарковски си го поставил било: Дали кај ваквите ендоморфизми $f: I \to I$, на основа на постоењето на одредена периодична m-орбита $\{c, f^1(c), \dots f^{m-1}(c)\}$ можеме да заклучиме дека постојат и други периодични орбити со различни периоди?

Неговата теорема е еден фасцинантен резултат кој освен што важи за кое било вакво непрекинато пресликување, важи и за пресликувања од интервал *I* во целата реална права ℝ. Меѓутоа, во вториот случај некои итерации не мора да се дефинирани на интервалот I, но и покрај тоа, теоремата останува точна.

Теорема 1. (Теоремата на Шарковски) *Да претпоставиме дека сите природни броеви се потполно подредени на следниот начин (познато како подредување на Шарковски):*

$$1 \succ 2 \succ 2^2 \succ 2^3 \succ \cdots \succ 2^k \cdot 7 \succ 2^k \cdot 5 \succ 2^k \cdot 3 \dots \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 5$$
$$\succ 2^2 \cdot 3 \succ \cdots \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 3 \succ \cdots \succ 7 \succ 5 \succ 3$$

Ако f има периодична n-орбита каде што n е позитивен цел број, тогаш f има периодична m-орбита за секој $m \succ n$ во подредувањето на Шарковски.

Забелешка 1. Во подредувањето на Шарковски, ако почнеме оддесно, ги имаме сите непарни броеви почнувајќи од 3 во растечки редослед, па на ист начин сите броеви од облик $2 \cdot$ непарни (во растечки редослед), па потоа сите од облик $2^2 \cdot$ непарни, ... , $2^{\mathrm{n}} \cdot$ непарни ... и на крајот, сите степени на два, сè до $2^0 = 1$. Па, 1 е на левиот крај, најлево, а 3 е на десниот крај, најдесно.

Забелешка 2. Од тврдењето на оваа теорема директно следува дека ако постои периодична 3-орбита, тогаш ќе постои орбита од секоја друга периода.

Оваа теорема првпат е докажана од украинскиот математичар и академик Александар Михаилович Шарковски во трудот [5] објавен во украински математички билтен од 1964. Доказот којшто ќе го претставам во овој напис е помодерна адаптација на оригиналниот доказ направена во 1979 година која се базира на трудот [2].

3. ПОМОШНИ ЛЕМИ

Во овој дел ќе претставиме неколку леми кои сами по себе се од независен интерес за многу отворени проблеми од оваа област, а истовремено се користат и во доказот на оваа прекрасна теорема.

Лема 1. *Нека J е компактен подинтервал од I така што $f(J) \supseteq J$. Тогаш f има фиксна точка во J.*
Доказ. Ако $J = [a, b]$ и знаеме дека $f(J) \supseteq J$, тогаш постојат $c, d \in J$ такви да важи: $f(c) = a$ и $f(d) = b$. Па, имаме дека $a = f(c) \leq c$ и $b = f(d) \geq d$. Оттука, $f(c) - c \leq 0 \leq f(d) - d$. Ако ја разгледаме функцијата $g(x) := f(x) - x$, од Теоремата за средна вредност добиваме дека $\exists c^* \in [c, d] \subset [a, b]$ такво што $g(c^*) = 0$, односно $f(c^*) = c^*$.

Лема 2. *Нека J и K се компактни подинтервали од Iтакви што $f(J) \supseteq K$. Тогаш постои компактен подинтервал $L \subseteq J$ таков што $f(L) = K$.*
Доказ. Да забележиме дека ако J се пресликува во $f(J)$, тогаш за секој подинтервал $T \subseteq f(J)$ мора да постои подинтервал во J, да речеме $P \subseteq J$, таков што ќе важи $f(P) = T$.

Нека $K = [a, b]$ и $c = \sup\{x \in J : f(x) = a\}$. Ако за некој $x > c$: $f(x) = b$, го избираме најмалото такво x и го означуваме со d, тогаш $L = [c, d]$. Ако, пак, за некое $x < c : b = f(x)$, го избираме најголемото такво x и го означуваме со d', тогаш $L = [d', c]$.

Следната лема е всушност генерализација на Лема 2 кога имаме повеќе интервали.

Лема 3. *Нека $J_0, J_1, \dots J_m$ се компактни подинтервали од I такви што $f(J_{k-1}) \supseteq J_k$ $(1 \leq k \leq m)$. Тогаш постои компактен подинтервал $L \subseteq J_0$ таков што $f^m(L) = J_m$ и $f^k(L) \subseteq J_k$ $(1 \leq k < m)$. Дошолнително, ако $J_0 \subseteq J_m$, тогаш постои точка $y \in L \subseteq J_0 \subseteq I$ таква што $f^m(y) = y$ и $f^k(y) \in J_k$ $(0 \leq k < m)$.*
Доказ. Лемата ќе ја докажеме со помош на математичка индукција.

Почетниот случај во индукцијата $(m = 1)$ е всушност резултат на Лема 2: $J_1 \subseteq f(J_0) \exists L \subseteq J_0$, $f(L) = J_1$. Додатно ако $J_0 \subseteq J_1$, имаме дека $f(L) = J_1 \supseteq J_0 \supseteq L$, па од Лема 1, постои фиксна точка $y \in L \subseteq J_0$ таква што $f(y) = y$ и $f^k(y) = y \in J_0$ $(0 \leq k < 1)$.

Индуктивна претпоставка: Фиксираме некое $m > 1$ и претпоставуваме дека тврдењето е точно за сите помали вредности. Имаме, $J_1 \subseteq f(J_0)$, $J_2 \subseteq f(J_1)$, $J_3 \subseteq f(J_2)$, $J_{m-1} \subseteq f(J_{m-2})$, $J_m \subseteq f(J_{m-1})$. Индуктивната претпоставка применета на последните $m-1$ релации:

$$J_2 \subseteq f(J_1), J_3 \subseteq f(J_2), J_{m-1} \subseteq f(J_{m-2}), J_m \subseteq f(J_{m-1}) \Rightarrow$$

$$\exists L' \subseteq J_1 : f^{m-1}(L') = J_m, f^k(L') \subseteq J_{k+1} \text{ за } 1 \leq k < m-1.$$

Сега, од Лема 2 имаме: $L' \subseteq J_1 \subseteq f(J_0) \Rightarrow \exists L \subseteq J_0$ таква што $f(L) = L' \subseteq J_1 \Rightarrow f^m(L) = f^{m-1}(L') = J_m, f^k(L) \subseteq f^{k-1}(L') \subseteq J_k$, за $2 \leq k < m$. Со ова го докажавме првиот дел, т.е. дека $\exists L \subseteq J_0$ за кое важи $f^m(L) = J_m$ и $f^k(L) \subseteq J_k$ за $2 \leq k < m$ и дополнително, $f(L) \subseteq J_1$ и $f^0(L) = L \subseteq J_0$. Сега, уште ако $J_0 \subseteq f(J_m)$ ќе покажеме дека постои периодична точка $y \in L$ со периода m, т.е. дека $f^m(y) = y$.

Од првиот дел на лемата, $J_0 \subseteq J_m \subseteq f(J_{m-1})$ и $\exists L \subseteq J_0$ за кое важи $f^m(L) = J_m \supseteq J_0 \supseteq L$, па од Лема 1 имаме: $\exists c \in L \subseteq J_0 : f(c) = c$. Оттука, $f^m(c) = c$.

Дополнително, $f^k(L) \subseteq J_k$ (од првиот дел од оваа лема) заклучуваме дека $f^k(c) \subseteq J_k$ за $1 \leq k < m$.

4. ПОМОШНА ТЕОРЕМА

Теоремата во овој дел, без која подредувањето на Шарковски би немало смисла, ни гарантира постоење на помала орбита од разгледуваната, односно орбита со помала периода.

Теорема 2. *Нека е $f: I \to I$ непрекинато пресликување и I компактен интервал. Нека е $\boldsymbol{B} = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ периодична n - орбита со периода $n > 1$. Тогаш, помеѓу секои две соседни елементи во орбитата $\boldsymbol{B}$ постои точка која припаѓа на некоја друга периодична орбита со периода помала од n.*

Доказ. Нека $\{c, f(c), f^2(c), \dots f^{n-1}(c)\}$ е периодична n - орбита. Јасно $f^n(c) = c$ и $f^k(c) \neq c$ за $1 \leq k < n$. Нека a и b се два соседни елементи во n-орбитата. Ги разгледуваме сите $m < n$ такви што $f^m(b) < b$. Постои барем едно такво m, бидејќи a е од левата страна на b $(a < b)$ и a е исто така дел од n-орбитата. Да се увериме дека постои $m' \neq n$, $1 \leq m' < n$, такво што $f^{m'}(a) > a$ и $f^{m'}(b) < b$.

Ако за сите m – орбити за кои $f^m(b) < b$ важи дека $f^m(a) < a$, тогаш би следело дека лево од a има онолку елементи колку што има и лево од b што не е можно. Бидејќи f е непрекинат ендоморфизам, секоја итерација е дефинирана на интервалот I. Во случајот кога $f: I \to \mathbb{R}$, не мора секоја итерација да биде дефинирана, па затоа ќе ги разгледаме и двата случаја.

Случај 1° Нека f^m е добро дефинирана на $[a, b]$. Тогаш $\exists c \in (a, b)$ така што $f^m(c) = c$ (од Теоремата за средна вредност), па c е периодична точка со периода помала или еднаква на m, па затоа помала и од n.

Случај 2° Нека f^m не е добро дефинирана на $[a, b]$. Нека $J_k =< f^k(a), f^k(b) >$ за $1 \leq k \leq m$. При непрекинато пресликување интервал се пресликува во интервал, па множеството $f\,(< f^{k-1}(a),\ f^{k-1}(b) >)$ е интервал што ги содржи $f\left(f^{k-1}(a)\right), f(f^{k-1}(b))$ како слики на крајните точки, т.е. $J_k \subseteq f(J_{k-1})$. Од $f^m(a) \geq b$ и $f^m(b) \leq a$ имаме дека $J_0 \subseteq J_m$, па врз основа на Лема 3, постои точка $y \in [a, b]$ таква што $f^m(y) = y$ и $f^k(y) \subseteq J_k$, за $0 \leq k < m$.

5. СВОЈСТВО НА ПОДРЕДЕНА $\boldsymbol{n}$-ОРБИТА

Во овој дел ќе се сретнеме со еден нов концепт кој овозможува секоја периодична n-орбита да се претстави како циклус во соодветен диграф.

Дефиниција 5. Нека f е непрекинат ендоморфизам на интервалот I и $\boldsymbol{B} = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ периодична n-орбита со периода $n > 1$ запишана во растечки облик.

Ако $f(x_i) = x_{s_i}$ $(1 \leq s_i \leq n)$, $i = 1,2, \dots n$, тогаш орбитата **B** ја асоцираме со цикличната пермутација:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}.$$

Дефиниција 6. Нека $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ (па за орбита со периода n, добиваме $n - 1$ интервали). **Диграф** од циклусот кој ја претставува периодичната n-орбита $\boldsymbol{B}$ е насочен граф од транзиции, со темиња $I_1, I_2, \dots I_{n-1}$ и рабови $I_i \to I_s$ ако $f(I_i) \supseteq I_s$.

Следно, ќе наведеме неколку својства на диграф.

Својство 1. *За секој I_j постои барем еден I_k за кој $I_j \to I_k$ и секогаш можеме да најдеме такво k различно од j, освен кога $n = 2$.*

Доказ. Ова својство ни кажува дека ако тргнеме од кое било теме во диграфот, сигурно ќе постои раб кој ќе излегува од него, а да не е јамка, освен во случајот кога $n = 2$.

Тривијално е! Бидејќи $f(I_j) \supseteq < f(x_j), f(x_{j+1}) >$, $f(x_j) \neq x_j$ и $f(x_{j+1}) \neq x_{j+1}$, сигурно ќе постои интервал различен од I_j содржан во $f(I_j)$ сè додека $n \neq 2$ (во случајот кога $n = 2$ може да се случи $f(x_j) = x_{j+1}$ и $f(x_{j+1}) = x_j$).

Својство 2. *За секој I_k постои барем еден I_j за кој $I_j \to I_k$ и секогаш може да најдеме такво j различно од k освен кога n е парен и $k = \frac{n}{2}$.*

Доказ. Ова својство ни кажува дека ако тргнеме од кое било теме во диграфот I_k, секогаш ќе постои раб кој ќе влегува во него. Уште повеќе, секогаш постои таков раб кој не е јамка, освен во случајот кога n е парен и $k = \frac{n}{2}$ (ова е случајот кога n е парна орбита и тргнуваме од средишниот интервал). Доказот не е тривијален! Да претпоставиме спротивно, нека не постои $j \neq k$ такво што $I_j \to I_k$. Сакаме да покажеме дека n е парен, $k = \frac{n}{2}$ и I_k е јамка. Ако $i \neq k$ и $f(x_i) \leq x_k$, тогаш $f(x_{i+1}) \leq x_k$ и $f(x_i) \geq x_{k+1} \Rightarrow f(x_{i+1}) \geq x_{k+1}$.

Ако $f(x_{k+1}) \geq x_{k+1} \Rightarrow f(x_i) \geq x_{k+1}$ за $k < i \leq n$, тогаш вистинското подмножество $\{x_{k+1}, \dots x_n\}$ се пресликува во самото себе, па сочинува орбита со периода $n - k$, што не е можно заради нашата дефиниција за n-орбита. Оттука, мора да важи $f(x_{k+1}) \leq x_k$ и слично, $f(x_k) \geq x_{k+1}$, па според тоа $f(I_k) \supseteq I_k$ постои јамка во I_k ($I_k \to I_k$).

$$f(x_i) \leq x_k \text{ за } k \leq i \leq n \text{ (овде имаме } n-k \text{ точки)}$$

$$\Rightarrow n - k \leq k \Rightarrow n \leq 2 \cdot k$$

$$f(x_i) \geq x_{k+1} \text{ за } 1 \leq i \leq k \Rightarrow k \leq n - k \Rightarrow n \geq 2 \cdot k$$

Оттука, $n \leq 2 \cdot k$ и $n \geq 2 \cdot k$, па значи $n = 2 \cdot k$.

Својство 3. *Секој диграф содржи I_k $(1 \leq k \leq n-1)$ такво што $I_k \to I_k$.*

Доказ. Знаеме дека $f(x_1) > x_1$ и $f(x_n) < x_n$. Нека $k = \min\{1 \leq j < n: f(x_j) > x_j, f(x_{j+1}) < x_{j+1}\}$ (таков индекс постои, ако земеме на пример $k = n - 1$). Па затоа, $I_k \subseteq f(I_k)$.

Следните два примера илустрираат како изгледа соодветниот циклус и диграф за периодична 3-орбита.

Пример 2. (Циклус) Нека $\boldsymbol{B} = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ е некоја 3-орбита. Јасно е дека $f^3(x_i) = x_i$, за $i = 1,2,3$. Бидејки елементите во $\boldsymbol{B}$ се подредени, како претставници за x_1, x_2, x_3 можеме да ги земеме броевите 1,2,3 кои се подредени на ист начин.

Нека $f(x_i) = x_{s_i}$ за $i = 1,2,3$. Тогаш $x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}$ е пермутација од x_1, x_2, x_3. Покрај тоа, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$ е циклична, бидејќи во спотивно би значело дека постои циклус помал од 3, што не е можно. Затоа, постојат две можности за да се претстави циклусот на 3-орбитата:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. (Диграф) Ако $B = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ соодветствува со циклусот $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, тогаш имаме $I = [x_1, x_2]$ и $I_2 = [x_2, x_3]$ што ги поистоветуваме со $[1,2]$ и $[2,3]$, соодветно. Па, важи:

$$f(I_1) \supseteq I_1; \;\; f(I_1) \supseteq I_2; \;\; f(I_2) \supseteq I_1 \quad \Leftrightarrow \quad I_1 \to I_1; \;\; I_1 \to I_2; \;\; I_2 \to I_1,$$

со што го добиваме соодветниот диграф $I_1 \leftrightarrow I_1 \leftrightarrow I_2$.

Напомена. Ако ги замениме местата на I_1 и I_2 ќе го добиеме диграфот за другиот циклус од Пример 2!

6. ФУНДАМЕНТАЛЕН ЦИКЛУС

Во овој дел е претставен уште еден концепт, наречен *фундаментален циклус,* за полесно понатамошно работење со периодичните орбити.

Дефиниција 7. Дадена е n-орбита. Циклусот $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ со должина n во соодветниот диграф е наречен *фундаментален циклус* ако J_0 содржи крајна точка c таква што $f^k(c)$ е крајна точка на J_k $(1 \leq k < n)$.

Ќе покажеме дека фундаментален циклус секогаш постои и тој е единствен. Нека $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ е n - циклус од диграфот на n-орбитата каде што $J_0 = J_1$, а останатите интервали може, но и не мора да се повторуваат. Ако почнеме од J_1 и земеме крајна точка $c = 1$, тогаш следниот интервал е еднозначно определен, бидејќи $f(c) \in f(J_1)$ и $f(J_1)$ содржи точно еден интервал со крајна точка $f(c)$. Заради тоа, сите следни интервали се единствено определиви. Бидејќи c е дел од n-орбитата, добиваме дека $f^n(c) = c$, што значи дека сигурно ќе завршиме во J_1.

Забелешка 3. Еден од интервалите $J_0, J_1, \dots J_{n-1}$ во фундаменталниот циклус мора да се повтори барем двапати, бидејќи диграфот има само $n-1$ теме $(I_1, I_2, \dots I_{n-1})$.

Забелешка 4. Секој интервал во фундаменталниот циклус може да се појави најмногу 2 пати бидејќи секој интервал има точно 2 крајни точки, па за да биде во фундаменталниот циклус треба и двете да се итерации од почетната точка c. Затоа секој интервал може да се појави најмногу 2 пати.

Дефиниција 8. За циклус во диграфот велиме дека е ***примитивен*** ако не е составен од помал циклус кој се повторува неколку пати.

Ако некој од интервалите $I_1, I_2, \dots I_{n-1}$ се содржи двапати во фундаменталниот циклус, тогаш тој циклус може да се разложи на два помали циклуси во кои овој интервал ќе се содржи точно еднаш. Заради тоа овие два потциклуса ќе бидат примитивни!

Забелешка 5. $J_1 \to J_4 \to J_4 \to J_3 \to J_5 \to J_2 \to J_6 \to J_1$ е всушност примитивен!

7. СТРАФИНОВА ЛЕМА

Оригиналниот доказ на Шарковски во суштина е мошне долг и комплициран. Како што и самиот Страфин рекол: „Тој има конструирано толку многу низи од точки, што осум комплексни фигури и повеќето букви од грчката азбука се потребни за да се следи доказот.“ ([3, p. 104]). Заради тоа, Страфин успеал да даде едноставен доказ за значаен дел од Теоремата на Шарковски со којшто се гарантира дека ако f има периодична точка со периода n и придружениот нејзин диграф содржи примитивен циклус со должина m, тогаш f има периодична точка со периода m.

Лема 4. *Нека f има периодична точка со периода n, односно n - орбита. Ако придружениот нејзин диграф содржи примитивен циклус $J_0 \to J_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to J_0$ со должина m, тогаш f има периодична точка y со периода m и $f^k(y) \in J_k$ $(0 \leq k < m)$.*

Доказ. $f(J_0) \supseteq J_1$, $f(J_1) \supseteq J_2$, ... $f(J_{m-2}) \supseteq J_{m-1}$, $f(J_{m-1}) \supseteq J_0$. Според Лема 3, кога $J_m = J_0$, добиваме дека постои компактен интервал $L \subseteq J$ таков што $f^m(L) = J_m$ и $f^k(L) \subseteq J_k$, за $1 \leq k < m$.

Исто така, важи $J_0 \subseteq J_0$, па постои точка $y \in J_0$ таква што $f^k(y) = y$ и $f^k(y) \in J_k$, за $0 \leq k < m$. Забележуваме дека итерациите од y скокаат од еден во друг од дадените интервали. Останува уште да се покаже дека y е периодична точка со периода m. Затоа треба да покажеме дека $f^k(y) \neq y$ за $1 \leq k < m$.

Случај 1° Ако y не е крајна точка од J_0 тогаш m мора да биде периода за y бидејќи $f^k(y)$ скока од еден во друг интервал, а циклусот не е примитивен!

Случај 2° Ако y е крајна точка од J_0 и бидејќи y е елемент на n-орбитата, односно $f^n(y) = y$, тогаш мора да важи дека $n|m$.

Имаме дека $f(J_{k-1}) \supseteq J_k$ и $f^k(y) \in J_k$ $(1 \leq k < m)$ што одговара на конструкцијата на фундаментален циклус, па J_k е еднозначно определен и овој циклус е содржател на фундаментален циклус, што би значело дека не е примитивен! Според тоа, y е m-периодична точка.

Користејќи ја оваа лема, Страфин конструирал многу краток и едноставен доказ на резултат познат како *Lee-Yorke-ва теорема*, којашто е претставена во неговиот труд [4], издаден 10 години по доказот на Шарковски, во кој се вели дека *периода 3 повлекува постоење на секоја друга периода* или како што Lee и Yorke ја нарекуваат:

Теорема 3. *Периода 3 имплицира хаос*.

Доказ. Да претпоставиме дека f има 3-орбита: $\{f(c) < c < f^2(c)\}$. Од нејзиниот диграф $I_1 \leftrightarrow I_1 \leftrightarrow I_2$ гледаме дека постојат два примитивни циклуси со должина 1 и 2, па затоа f има фиксна точка и f има периодична точка со периода 2. За секој позитивен цел број $m > 2$ постои m-

орбита која соодветствува на примитивниот циклус со должина m: $I_1 \to I_2 \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1$. Па затоа, f има периодична точка од секоја периода $m \in \mathbb{N}$.

8. ПОМОШНА ЛЕМА – ХИЕРАРХИЈА

Со следната лема се потврди почетната хиерархијата која ја насетил Шарковски, а која покажува дека $n \succ 3$ за $n > 1$, т.е. дека 3 е највисоко во хиерархијата, а потоа и дека $1 \succ 2$, но $2 \nsucc 1$, и на крај, $1 \succ 2 \succ n$, каде што $n > 2$. Ваквата хиерархија е директна последица на оваа лема заедно со Страфиновата лема.

Лема 5. *Ако f има периодична точка со периода $n > 1$, тогаш f има фиксна точка и периодична точка со периода 2.*

Доказ. Секој диграф има јамка, па според Лема 1 (заради $f(I_k) \supseteq I_k$) следува дека секој диграф има фиксна точка. Нека $n > 1$ е најмалиот позитивен цел број таков што f има n-периода. Ќе покажеме дека $n = 2$ постои. Да го претпоставиме спротивното, т.е. нека $n > 2$, па го разложуваме фундаменталниот циклус на два примитивни циклуси. Вакво разложување е секогаш можно.

Случај 1° Ако ФЦ (фундаменталниот циклус) не е примитивен, може да се разложи на k примитивни при што $k|n$.

Случај 2° Ако ФЦ е примитивен тогаш знаеме дека постои интервал кој се повторува барем двапати, а ниеден повеќе од двапати. Па, во првиот циклус прескокнуваме сѐ помеѓу ваквите два интервала, а вториот циклус е јамка од интервалот кој се повторува двапати! На овој начин, нашиот n-циклус сме го разложиле на два примитивни од кои едниот има должина строго поголема од 1 и нека таа е s. Од Страфиновата лема (Лема 5), заклучуваме дека f има периодична точка строго помеѓу 1 и n, што не е можно заради минималноста на n.

9. СТЕФАНОВА ОРБИТА

Во овој дел ја претставуванме Стефановата лема која ни покажува како f влијае врз својата *минимална непарна орбита* (кога не постојат периодични орбити со помала непарна периода) и комплетно го карактеризира нејзиниот изглед.

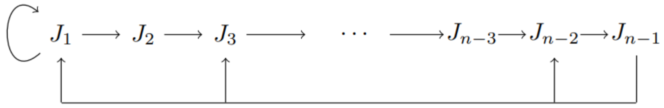
Лема 6. *Да претпоставиме дека f има n - орбита каде n е непарен број и дека нема периодични орбити со непарна периода између 1 и n (минимална непарна орбита). Ако c е средишна точка во n орбитата тогаш елементите во неа го имаат следниот распоред:*

$$f^{n-1}(c) < f^{n-3}(c) < \cdots < f^2(c) < c < f(c) < f^3(c) < \cdots < f^{n-2}(c)$$

или инверзниот облик

$$f^{n-2}(c) < f^{n-4}(c) < \cdots < f(c) < c < f^2(c) < f^4(c) < \cdots < f^{n-1}(c)$$

За $J_1 =< c, f(c) >$ и $J_k =< f^{k-2}(c), f^k(c) >$ за $1 < k < n$, го добиваме соодветниот диграф:



Доказ. Нека ФЦ е фундаментален циклус за соодветниот диграф. Го разложуваме ФЦ на два примитивни циклуси од кои едниот има непарна должина. Тоа е можно бидејќи Страфиновата лема (Лема 4) гарантира 2-циклус, па другиот мора да има непарна должина. Бидејќи нема циклус со непарна должина помеѓу 1 и n, заклучуваме дека тоа мора да биде 1-циклус. Оттука, ФЦ има облик: $J_1 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1$, каде што $J_i \neq J_1$ за $1 < i < n$, бидејќи J_1 не смее да се појави повеќе од 2 пати во фундаменталниот циклус. Оттука, J_1, J_2, ...J_{n-1} се меѓусебно различни. Во спротивно би значело дека постои помал примитивен циклус. Па, ако тој е непарен тогаш може да е единствено 1-циклус, па ако го извадиме добиваме парен примитивен. Ако дополнително го извадиме почетниот 1-циклус, ќе добиеме непарен примитивен циклус со должина помала од n. Ако, пак, тој е парен, со негово анулирање добиваме непарен циклус, што не е можно.

Затоа J_1, J_2, ...J_{n-1} се сите меѓусебно различни и сочинуваат пермутација од I_1, I_2, ... I_{n-1}.

Слично, не може да имаме $J_i \to J_k$ ако $k > i + 1$ или ако $k = 1$ и $i \neq 1, n-1$. Зошто? Знаеме дека $f(J_1) \supseteq J_2$, па не е можно и $J_3 \supseteq J_1$, бидејќи во тој случај може да се исклучи таквиот циклус и да се добие помала непарна орбита од n користејќи ја Страфиновата лема. Исто така, не може да имаме $J_i \to J_1$ за $j \neq 1, n-1$, бидејќи на ист начин може да се конструира постоење на помала непарна орбита.

Претпоставуваме дека $J_1 = J_k = [a,b]$. Бидејќи $I_1 \leftrightarrow I_1 \leftrightarrow I_2 \Rightarrow J_2$ е соседно со J_1 и важи едно од следните 2 тврдења:

$$\big(x_k = a, x_{k+1} = f(a), x_{k-1} = f^2(a)\big) \ \vee$$
$$(x_{k+1} = b, \quad x_k = f(b), \quad x_{k+2} = f^2(b))$$

$J_1 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1$ и знаеме дека $f(J_1)$ ги содржи единствено J_1 и J_2. Па, каде ќе се наоѓа J_2? Нека $J_1 = I_k = [x_k, x_{k+1}]$ за некој $k \in \{1, \dots n-1\}$. Тогаш имаме само два можности:

Случај 1°. $J_2 = [x_{k-1}, x_k]$, $J_1 = [x_k, x_{k+1}]$;

$$x_k = a\ ;\ x_{k+1} = f(x_k) = f(a)\ ;\ x_{k-1} = f(x_{k+1}) = f^2(x_k) = f^2(a)\ ;$$

$$\Rightarrow\ f^2(a) < a < f(a).$$

Случај 2°. $J_1 = [x_k, x_{k+1}]$, $J_2 = [x_{k+1}, x_{k+2}]$;

$$x_{k+1} = b\ ;\ x_k = f(x_{k+1}) = f(b)\ ;$$

$$x_{k+2} = f(x_k) = f((x_{k+1})) = f^2(b)\ ;$$

$$\Rightarrow f(b) < b < f^2(b).$$

Гледаме дека, ако $n = 3$, тогаш сме готови! Да заклучиме уште за $n > 3$. Да видиме каде ќе се наоѓа J_3.

Случај 1°. $f^2(a) < a < f(a)$. Ако $f^3(a) < f^2(a)$ добиваме дека $J_2 \to J_1$ што не е дозволено! Оттука, $f^3(a) > f^2(a)$. Бидејќи $J_2 \nrightarrow J_k$ за $k > 3 \Rightarrow$ $J_3 = [f(a), f^3(a)]$ е прв сосед на J_1 од десно. Ако $f^4(a) > f^3(a)$ добиваме дека $J_3 \to J_1$, што не е дозволено. Оттука, а $J_2 \to J_1$, што не е дозволено! Оттука, $f^4(a) > f^3(a)$. Бидејќи $J_3 \nrightarrow J_k$ за $k > 4$, следува дека $[f^4(a), f^2(a)]$ е прв сосед на J_2 од лево. Ако продолжиме на овој начин, ќе видиме дека редоследот на реалната права е следниот:

$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \cdots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < \cdots < f^{n-2}(a)$$

Случај 2°. $f(b) < b < f^2(b)$. Аналогно се добива следниот распоред на реалната права:

$$f^{n-2}(b) < f^{n-4}(b) < \cdots < f(b) < b < f^2(b) < f^4(b) < \cdots < f^{n-1}(b).$$

10. ПОСЛЕДНИ ДВЕ ПОМОШНИ ЛЕМИ

Следната лема покажува дека непарните периоди имаат повисока хиерархија од парните и помалите непарни имаат повисока хиерархија од поголемите непарни.

Лема 7. *Ако f има непарна орбита со периода $n > 1$ тогаш има периодична орбита со периода (i) r за секој парен број r; (ii) m за секој непарен број $m > n$.*

Доказ. Да претпоставиме дека n е минимална непарна орбита. Тогаш диграфот е всушност Стефанов од Лема 6. Ако $m < n$ е парен, тогаш $J_{n-1} \to J_{n-m} \to J_{n-m+1} \to \cdots \to J_{n-1}$ е примитивен циклус со должина m. Ако $m > n$ е парен или непарен, тогаш $J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1 \to J_1 \to \cdots \to J_1$ е примитивен циклус со должина m, што од Лема 4 значи дека f содржи m - орбита.

Оваа лема заедно со следната лема се клучни за комплетирање на подредувањето претставено во Теоремата на Шарковски.

Лема 8. *Ако c е периодична точка на f со периода n, тогаш за секој позитивен цел број h, c е и периодична точка на f^h со периода $\frac{n}{(h,n)}$, каде што $(h,n) = НЗД(h,n)$. Обратно, ако c е периодична точка на f^h со периода m, тогаш c е и периодична точка на f со периода $\frac{m \cdot h}{d}$, каде што $d|h$ и $(d,m) = 1$.*

Доказ. Нека c има периода n за f и нека $m = \frac{n}{(h,n)}$ за произволно $h \in \mathbb{N}$. Тогаш имаме дека $f^{m \cdot h}(c) = f^{n \cdot \frac{h}{(h,n)}}(c)$ каде што $\frac{h}{(h,n)}$ е цел број. Ако, пак, $f^{k \cdot h}(c) = c$, тогаш n мора да е делител на $k \cdot h$. Нека $k \cdot h = n \cdot d$, за некој $d \in N$. Тогаш имаме дека

$$k = \frac{d \cdot n}{h} = \frac{n}{(h,n)} \cdot \frac{d \cdot (h,n)}{h} = m \cdot \frac{(d \cdot h, d \cdot n)}{h} = m \cdot (d,n).$$

Оттука, $m|k$, па c е m-периодична за f^h, со што првиот дел е покажан.

Да претпоставиме дека c е m-периодична за f^h, т.е. $f^{h \cdot m}(c) = c$. Тогаш c има периода n за f каде што n е делител на $h \cdot m$. Нека $n = \frac{m \cdot h}{d}$ за некој $d \in \mathbb{N}$. Од директната насока на оваа лема за произволен h имаме дека c е периодичка точка на f^h со периода $\frac{n}{(h,n)}$, па затоа

$$m = \frac{\frac{m \cdot h}{d}}{(h,n)} = \frac{m \cdot h}{d \cdot (h,n)} \Leftrightarrow h = d \cdot (h,n) = d \cdot (h,n) \Rightarrow d|h.$$

Нека $e = (h,n)$. Имаме: $(d \cdot e, m \cdot e) = \big(h, m \cdot (h,n)\big) = (h,n) = e,$ од каде што следува дека $(d,m) = 1$.

11. СУМИРАЊЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Во овој дел ќе ја комплетираме хиерархијата на Шарковски на следниот начин. Нека е дадена n-орбита, $n = 2^d \cdot q$ каде што q е непарен број.

- Прво покажуваме дека кога $q = 1$ и $m = 2^e$ за $0 \leq e < d$ важи хиерархијата: $m \succ n$.
- Потоа, нека $q > 1$ и $m = 2^d \cdot r$. Покажуваме дека важи $m \succ n$ во два случаја: (i) кога r е парен; (ii) кога r е непарен и $r > q$.

Јасно е дека со ова се гарантира следното подредување:

$$1 \succ 2 \succ 2^2 \succ 2^3 \succ \cdots \succ 2^k \cdot 7 \succ 2^k \cdot 5 \succ 2^k \cdot 3 \ldots \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 5$$
$$\succ 2^2 \cdot 3 \succ \cdots \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 3 \succ \cdots \succ 7 \succ 5 \succ 3$$

Затоа, нека е дадена n – орбита, $n = 2^d \cdot q$ каде што q е непарен.

– Прво претпоставуваме дека $q = 1$ и $m = 2^e$ каде што $0 \leq e < d$. Од Лема 5 може да претпоставиме дека $e > 0$. Ќе покажеме дека $m \succ n$. Нека c е периодична точка од f со периода $n = 2^d$. Го разгледуваме пресликувањето $g = f^{\frac{m}{2}}$ и ја применуваме директната насока од Лема 8 со $h = \frac{m}{2} = 2^{e-1}$ и $n = 2^d$. Добиваме дека g има периодична точка c со периода $\frac{n}{(h,n)} = \frac{2^d}{(2^{e-1}, 2^d)} = 2^{d-e+1}$. Лема 5 повлекува дека g има периодична точка со периода 2. Ако ја примениме обратната насока од Лема 8 за $h = \frac{m}{2} = 2^{e-1}$ и $m = 2$ добиваме дека f има периодична точка со периода $\frac{m \cdot h}{d} = \frac{2 \cdot 2^{e-1}}{d} = \frac{2^e}{d}$ каде што $d|h = 2^{e-1}$ и $(d,2) = 1$. Оттука, $d = 1$ и f има периодична точка со периода $m = 2^e$.

– Сега нека $n = 2^d \cdot q$ и $q > 1$ е непарен. Останува да покажеме дека $m \succ n$ за $m = 2^d \cdot r$ каде што или (i) r е парен или (ii) r е непарен и $r > q$. Го разгледуваме пресликувањето $g = f^{2^d}$. Директната насока од

Лема 8 за $h = 2^d$ и $n = 2^d \cdot qg$ има периодична точка со периода $\frac{n}{(h,n)} = \frac{2^d \cdot q}{(2^d, 2^d \cdot Q)} = \frac{2^d \cdot q}{2^d} = q$. Од Лема 7 добиваме дека: g има периодична точка со периода $r > q$. Сега ако го примениме вториот смер од Лема 8 со $h = 2^d$ и $m = r$ добиваме дека за некој $\hat{d}$, f има периодична точка со периода $\frac{m \cdot h}{\hat{d}} = \frac{r \cdot 2^d}{\hat{d}}$ каде што $(m, \hat{d}) = (r, \hat{d}) = 1$ и $\hat{d} | h = 2^d$. Во случајот (i) r е парен имаме: $\hat{d} = 1$ па f има периодична точка со периода $2^d \cdot r$ што е и потребно да се покаже. Во случајот (ii) r е непарен и $r > q$ имаме: $\hat{d} = 2^k$ за некој $0 \leq k \leq d$, па f има периодична точка со периода $2^e \cdot r$ за некој $e \leq d$.

- Ако $e = d$ добиваме дека f има периодична точка со периода $2^d \cdot r$.
- Ако $e < d$, наместо $n = s^d \cdot q$ разгледуваме $n = s^d \cdot r$ $(r > q)$, па добиваме $m = 2^e \cdot (2^{d-e} \cdot r)$ каде што $2^{d-e} \cdot r$ е парен. Од случајот (i) следи дека f има периодична точка со периода точно m.

Со ова се комплетира доказот на Теоремата на Шарковски.

12. ПРОЗОРЕЦ КОН ТЕОРИЈАТА НА ХАОСОТ

Она по што се разликува доказот на Теоремата на Шарковски прикажан во овој напис од оригиналниот доказ на Шарковски е воведувањето на два нови концепти: *диграф* и *фундаментален циклус.* Овој пристап не само што значајно го скратува самиот доказ, кој во оригиналот е доста долг заради елементарниот израз на авторот, туку истовремено го прави поелегантен и што е многу поважно овозможува подобар пристап за оваа теорија да се развива во насока на хаотичните динамички системи.

Она што е од посебен интерес кај хаотичните динамички системи е да се разбере асимптотското однесување на итеративната низа кога $n \to \infty$, т.е. дали низата конвергира во фиксна точка или можеби во некоја периодична орбита, со што се испитува нејзината стабилност. Теоремата на Шарковски ни говори за постоењето на орбита, но не и за нејзината стабилност. Една од дефинициите за *хаос* што е изнесена во трудот на Block и Coppel, [4], во кој покажуваат дека периода 3 имплицира хаос, е случајот кога постои орбита од секоја периода но ниедна не е стабилна, па траекторијата во вакви системи е всушност „скокање“ од една нестабилна орбита во друга. Во вакви системи не постои периодично однесување па оттука и името *хаотични системи.* Затоа, за да се разбере природата на хаосот, од големо значење е да се испитува подлабока класификација на орбитите, позната како *фина класификација* (англ. *fine classification*) со која се класифицираат сите орбити во зависност од нивното место во хиерархијата на Шарковски. Ваквата класификација за разлика од класификацијата според периодичност на орбитите, позната како *груба класификација* (англ. *rough classification*), се прави според *диграфот* и *цикличната пермутација* на орбитите коишто ги претставивме во овој труд.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L.S.Block, W.A.Coppel, *Dynamics in One Dimension, Springer-Verlag*, Berlin, 1992.

[2] L.S. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewich, L.S. Young, *Periodic Points and Topological Entropy of One-dimensional Maps*, Global Theory of Dynamical Systems, Proc. International Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill.,(1979), 18-34.

[3] P. D. Straffin, Jr., Periodic points of continuous functions. Math. Mag., 51 (1978), 99-105.

[4] T.Y. Li, J.A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10. (1975), 985-992.

[5] A.N. Sharkovsky, *Coexistence of Cycles of a Continuous Transformation of a Line into itself,* Ukrain. Mat. Zhurn., 16, 1(1964), 61-71.

[1] Природно-математички факултет, Нови Сад,
Др Зорана Ђинђића 1, Нови Сад 21000, Р. Србија
e-mail: anastasijatrajanova@gmail.com

Примен: 29.5.2021
Поправен: 17.10.2021
Одобрен: 25.10.2021
Објавен на интернет: 4. 12.2021