ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА
СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2006/2007.

Београд – Суботица, 2007

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

школска година 2006/2007.

1. Арсеновић др Милош, Математички факултет, Београд
2. Балтић Владимир, Економски факултет, Београд
3. Гајић др Борислав, Математички институт САНУ
4. Димитријевић мр Слађана, ПМФ, Крагујевац
5. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
6. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад
7. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
8. Ђукић Душан, Универзитет у Торонту, Канада
9. Живаљевић др Раде, Математички институт САНУ, **председник**
10. Икодиновић др Небојша, ПМФ, Крагујевац
11. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд
12. Кртинић мр Ђорђе, Математички факултет, Београд
13. Матић Иван, Беркли, САД
14. Милићевић Ђорђе, Принстон, САД
15. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
16. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
17. Сеничић Александар, Краљево
18. Станојевић Раде, Хамилтон институт, Ирска
19. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад
20. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
21. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд
22. Шобот мр Борис, ПМФ, Нови Сад

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 03. 02. 2007.

Први разред – А категорија

1. Аутомобил креће из места A константном брзином по правом путу. Сваких 15 минута ауто скрене под углом од 90 степени лево или десно. Доказати да се ауто може вратити у место A само после целог броја сати.

2. (M504) Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned} x - y &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007. \end{aligned}$$

3. (M539) На симетрали $\sphericalangle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1. Доказати да је $MB = MC$.

4. За природне бројеве a, b и c важи $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{4016}{2007}$. Доказати да је

$$\frac{1}{c + \frac{1}{b+\frac{1}{a}}} = \frac{2007}{4016}.$$

5. Одредити на колико начина можемо факторисати број 441000 на два фактора m и n, тако да је $m > 1$, $n > 1$, и НЗД$(m, n) = 1$, при чему редослед фактора није битан (тј. производи $m \cdot n$ и $n \cdot m$ представљају исто факторисање).

Други разред – А категорија

1. (M501) Одредити скуп свих тачака комплексне равни које задовољавају

$$|\frac{1}{z} - i| \leqslant 1.$$

2. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l. Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истом кругу.

3. Који је већи од следећа два сложена разломка? Образложити одговор!

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{2006 + \cfrac{1}{2007}}}}} \qquad B = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{2005 + \cfrac{1}{2006}}}}}$$

4. Одредити све могуће вредности реалног параметра a, за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2 + ax + a - 1}{x+3} = 0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

5. (M567) Нека су прва четири члана низа бројеви $1, 9, 9, 3$, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, \ldots)$. Доказати да ће се у том низу поново, пре или касније, појавити четворка $1, 9, 9, 3$. Да ли ће се у том низу појавити и четворка $7, 3, 6, 7$?

Трећи разред – А категорија

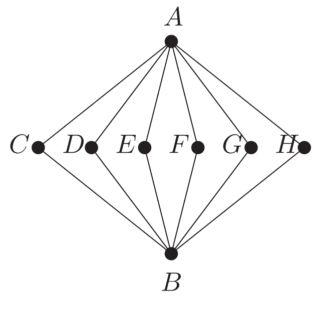
1. Једнакокраки трапез чија је висина 12, крак 13, а средња линија 15, ротира око своје краће основице. Израчунати запремину добијеног обртног тела.
Тангента 41/1, стр. 27

2. Доказати да ни за један природан број n, број $3^{3^n} + 1$ није дељив са 41.

3. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l. Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истом кругу.

4. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.
Тангента 41/1, стр. 29

5. На следећој слици је представљено 8 градова (A, B, C, D, E, F, G, H) који могу бити повезани са 12 путева; $AC, AD, AE, \ldots, AH, BC, BD, BE, \ldots, BH)$.



а) Који је најмањи број асфалтних путева (од тих 12) потребно изградити тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима?

б) Одредити број различитих начина да се они повежу минималним бројем асфалтних путева (од тих 12), тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима.

Четврти разред – А категорија

1. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

Тангента 41/1, стр. 29

2. Одредити максималну вредност функције

$$f(x) = \left|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\right|$$

за $x \in [3,4]$. Тангента, M417

3. Који правоугли троугао обима $2+\sqrt{2}$ има највећи полупречник уписане кружнице.

4. Нека су A, B, C и D четири произвољне тачке у простору.

a) Доказати да је: $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}$.

b) Израчунати угао између дијагонала AC и BD (просторног) четвороугла $ABCD$ ако је $AB = 11$, $BC = 13$, $CD = 8$ и $DA = 4$.

Напомена: Дијагонала просторног полигона је свака дуж која спаја нека два несуседна темена.

5. Одредити све полиноме $P \in \mathbb{R}[x]$ за које важи

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \text{ за свако } x \in \mathbb{R}$$

Први разред – Б категорија

1. Страница правоугаоника BC два пута је већа од странице AB. Нека је на страници BC задата тачка M тако да су углови $\sphericalangle AMB$ и $\sphericalangle AMD$ једнаки. Израчунати те углове.

2. Колико има петоцифрених бројева који имају тачно једну цифру 6?

3. (M504) Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned} x-y &= 2005 \\ [x]+[y] &= 2007. \end{aligned}$$

4. Збир цифара броја x једнак је y, а збир цифара броја y једнак је z. Одредити x ако је $x+y+z=60$. Тангента, М404

5. Одредити две последње цифре броја 9^{9^9}. Тангента, М505

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, за које важи

$$|z| = 1 \quad \text{и} \quad |z-1-i| = |z+1+i|.$$

Тангента 45/1, стр. 39

2. Решити неједначину

$$\frac{x+2}{|3-x|} + \frac{x+2}{x-6} \leq 0.$$

Тангента 44/4, стр. 39

3. На симетрали $\sphericalangle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1. Доказати да је $MB = MC$. Тангента, М539

4. Поређати по величини разломке. Образложити одговор!

$$A = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}} \qquad B = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}} \qquad C = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}$$

5. Одредити све могуће вредности реалног параметра a за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2 + ax + a - 1}{x+3} = 0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако је $b = 3^{\frac{1}{1-\log_3 a}}$ и $c = 3^{\frac{1}{1-\log_3 b}}$, доказати да је $a = 3^{\frac{1}{1-\log_3 c}}$.
Тангента 39/3, стр. 40

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & 1. \end{array}$$

Тангента 38/2, стр. 40

3. Доказати да је

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{8}.$$

4. Одредити (уз образложење) поредак бројева (поређати их у растућем поретку)

$$a=-2^{-2^{2^2}},\ b=-2^{2^{-2^2}},\ c=-2^{2^{2^{-2}}},\ d=2^{-2^{-2^2}},\ e=2^{-2^{2^{-2}}},\ f=2^{2^{-2^{-2}}}.$$

5. Нека су прва четири члана низа бројеви $1,9,9,3$, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1,9,9,3,2,3,7,\ldots)$. Доказати да ће се у том низу поново, пре или касније, појавити четворка $1,9,9,3$. Да ли ће се у том низу појавити и четворка $7,3,6,7$?

Тангента, M567

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да се полином $P(x)=x^8+x^6+x^4+x^2+1$ може написати као производ два неконстантна полинома чији коефицијенти су цели.

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & 1. \end{array}$$

Тангента 38/2, стр. 40

3. Једначина $z^4+z^3+2z^2+2z+4=0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

Тангента 41/1, стр. 29

4. Одредити максималну вредност функције

$$f(x)=\bigl|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\bigr|$$

за $x\in[3,4]$.

Тангента, M417

5. Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ аритметички низ реалних бројева.

(a) Ако за неке природне бројеве m и n важи $\frac{a_{2m}}{a_{2n}} = -1$, доказати да овај аритметички низ садржи бар један цео број.

(b) Ако за неке природне бројеве m и n важи $\frac{a_m}{a_n} = -1$, да ли се у овом аритметичком низу обавезно мора наћи бар један рационалан број?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 24. 02. 2007.

Први разред – А категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.

Тангента 38/2, стр. 41

2. Дата су два круга који се додирују изнутра у тачки A. Ако се из друге крајње тачке B пречника AB спољашњег круга конструише права која додирује унутрашњи круг у тачки C и сече спољашњи круг у тачки D, доказати да је права AC бисектриса угла BAD.

3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији (2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5) десно минимални елементи су на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа {1, 2,..., 8} које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

4. Уз претпоставку $0 < b \leqslant a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост.

5. У зависности од природног броја n наћи највећи заједнички делилац бројева $n^2 + 1$ и $(n+1)^2 + 1$.

Други разред – А категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ. На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ) одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

2. За које $a \in \mathbb{R}$ су сва решења једначине

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

реална и задовољавају услов $|x| < 1$?

3. Нека је $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ функција дефинисана на следећи начин

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \text{НЗД}(i, n), \text{ за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Наћи $f(2^{2007})$.

4. Да ли има више релација еквиваленције или релација поретка на скупу $\{1, 2, \ldots, n\}$, где је $n \in \mathbb{N}$?

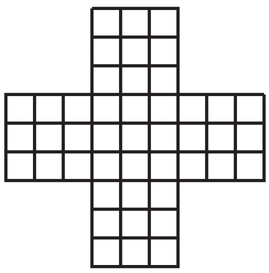
5. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

Тангента 40/4, М474

Трећи разред – А категорија

1. Замак има форму неконвексног 12-тоугла (као на слици) са укупно 45 квадратних одаја. Између сваке две одаје које имају заједнички зид постоје врата. Туриста креће из неке одаје и жели да обиђе што више одаја и да се врати у полазну одају, али тако да у сваку одају уђе највише једанпут. Колико највише одаја он може овако да посети?



2. Наћи све полиноме облика $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \ldots \pm x \pm 1$ који имају све корене реалне.

3. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

4. Наћи све природне бројеве n мање од 100 којима је збир цифара у декадном запису једнак збиру цифара у бинарном запису.

5. Наћи сва реална решења једначине $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

Тангента 34, М340

Четврти разред – А категорија

1. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

2. За дати природан број n, у скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + ... + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ {x_1}^1 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^n &= n \ . \end{aligned}$$

3. Нека су m, n и k природни бројеви. Познато је да се правоугаона таблица димензија $m \times n$ може поплочати (без преклапања) правоугаоницима $1 \times k$. Доказати да је бар један од бројева m и n дељив са k.

4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x + y = 1$$

$$(x^4 + y^2)(x^2 + y^4) = 85.$$

5. Наћи сва реална решења једначине $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

Тангента 34, М340

Први разред – Б категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.

Тангента 38, стр. 41

2. Бисектриса унутрашњег угла $\sphericalangle ACB$ троугла ABC уједно је и бисектриса угла који образује пречник CD описаног круга и висина конструисана из темена C. Доказати!

3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији (2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5) десно минимални елементи су на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа {1, 2,..., 8} које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

4. Уз претпоставку $0 < b \leqslant a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост.

5. Познато је да је површина троугла $P = \frac{15}{4}$ као и да важе једнакости $a + c = 8$ и $\beta = 30^\circ$. Наћи странице a, b, c овог троугла.

Тангента 38, стр. 43

Други разред – Б категорија

1. Одредити остатке при дељењу

(1) броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13,

(2) броја $9^{222} + 4^{333}$ са 5.

Тангента 38, стр. 41

2. Центар уписаног круга и центар описаног круга троугла ABC симетрични су у односу на страницу AB. Израчунати унутрашње углове троугла ABC.

3. У зависности од реалног параметра a, одредити број различитих реалних решења једначине

$$|x^2 + x + a| = x.$$

4. Решити неједначину $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geqslant \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

5. (M474) Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ. На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ)

одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

2. За које вредности реалног параметра p једначина

$$\frac{\log px}{\log(x+1)} = 2$$

има јединствено решење?

3. Нека је $AB = 6\sqrt{2}$ ивица квадратне основе правилне пирамиде $ABCDV$ и $TV = 3$ њена висина, где је T пресек дијагонала квадрата $ABCD$. Израчунати угао између праве ℓ одређене са дужи TH и равни α троугла ABV, где је H ортоцентар троугла ABV.

4. Решити систем једначина

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_1 + d + b_1 q = 21 \quad a_1 + 2d + b_1 q^2 = 22 \quad a_1 + 3d + b_1 q^3 = 29$$

где су a_1, b_1, d и q непознати реални бројеви.

Тангента 38, стр. 42

5. Решити неједначину

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

Тангента 38, стр. 43

Четврти разред – Б категорија

1. Уписани круг у троугао ABC додирује стране BC, AC, AB троугла у тачкама A', B', C'. На описаном кругу троугла ABC означимо са A'' средиште лука BC који не садржи тачку A, са B'' средиште лука AC који не садржи тачку B, са C'' средиште лука AB који не садржи тачку C. Доказати да се праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ секу у једној тачки.

2. а) Ако су $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$, тада ако за сваки реални број x важи $\alpha \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \beta \operatorname{arctg} x = 0$, онда је $\alpha = \beta = 0$. Доказати.
б) Да ли важи претходно тврђење ако су $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ и $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$?

3. Решити неједначину

$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

4. Доказати да у сваком тетраедру постоји теме такво да се од ивица које из њега полазе може конструисати троугао. Тангента, М335

5. Одредити чланове a_1, a_2, a_3, a_4 аритметичког и b_1, b_2, b_3, b_4 геометријског низа ако је

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_2 + b_2 = 21 \quad a_3 + b_3 = 22 \quad a_4 + b_4 = 29.$$

Тангента 38, стр. 42

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 24. 03. 2007.

Први разред – А категорија

1. Дијагонале AC и CE правилног шестоугла $ABCDEF$ подељене су тачкама M и N тако да је $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Одредити λ ако су тачке B, M и N колинеарне.

2. Дате су три неколинеарне тачке A, B и C. Конструисати тачку D тако да четвороугао $ABCD$ буде тетиван и тангентан.

3. За сваки природан број обележимо са x_n број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (нпр. $x_{15} = 123456789101112131415$). Одредити све природне бројеве n за које 27 дели $x_n^2 + x_n - 2$.

4. Одредити минималну вредност израза xyz при ограничењима

$$\begin{aligned} xy(10x + 10y + 7z) &\geqslant 27, \\ yz(10y + 10z + 7x) &\geqslant 27, \\ zx(10z + 10x + 7y) &\geqslant 27, \\ x, y, z &\geqslant 0. \end{aligned}$$

5. У равни троугла ABC уочимо n правих, од којих је свака паралелна некој страници троугла. За које најмање n је могуће да ових n правих деле раван на бар 207 области (ограничених и неограничених)?

Други разред – А категорија

1. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Права AD сече уписани круг троугла ABC још у тачки Q.

Доказати да права EQ пролази кроз средиште дужи AF ако и само ако је $AC = BC$.

2. Нека је S скуп комплексних бројева, дефинисан са:

$$S = \{z \in \mathbb{C} | \ |z + \frac{1}{z}| = 1\}.$$

(a) Наћи највећу могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$;
(b) Наћи најмању могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$.

3. Решити једначину $x^5 = y^5 + 3y^4 + 8y^2 + 5y + 1$ у $\mathbb{Z}^2$.

4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Ако за неке различите целе бројеве a и b важи $P(a) \cdot P(b) = -(a - b)^2$, доказати да је $P(a) + P(b) = 0$.

5. Могу ли се поља квадрата 5×5 прекрити правоугаоницима 2×3 тако да свако поље квадрата буде прекривено исти број пута?

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC у коме је $AB \neq AC$, уписани круг са центром S додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F. Права EF сече праву BC у P. Доказати да је PS нормално на AD.

2. У троуглу ABC је $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB, тако да је $AD = BC$. Ако је $\sphericalangle BCA = 4 \cdot \sphericalangle DCB$ одредити могуће вредности за $\sphericalangle ABC$.

3. Нека су a и n природни бројеви, $a > 1$, такви да n дели $a^n - 1$. Доказати да тада $(a-1)n$ дели $a^n - 1$.

4. У групи људи сваки човек има тачно три познаника. Доказати да је могуће сместити све људе из те групе у две просторије, тако да сваки човек има највише једног познаника у просторији у којој се налази.

5. Одредити минималну вредност израза $\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ при ограничењима

$$\min\{x(y^2 + z^2), y(z^2 + x^2), z(x^2 + y^2)\} \geqslant 1 + x + y + z, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

Четврти разред – А категорија

1. Код једнакокраког троугла ABC је $AB = BC$ и $\angle ABC = 30°$. Тачка D припада страници BC троугла тако да је $AC : BD = \sqrt{2}$. Израчунати угао $\angle DAC$.

2. Ако су X, Y и Z тачке на страницама BC, CA и AB троугла ABC, такве да је $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ ($\sphericalangle X = \sphericalangle A$, $\sphericalangle Y = \sphericalangle B$), доказати да се ортоцентар троугла XYZ и центар описаног круга троугла ABC поклапају.

3. Доказати да постоји полином облика $x^n + 2007x^{n-1} + \cdots$ који дели полином $x^m - 1$ за неко $m \in \mathbb{N}$.

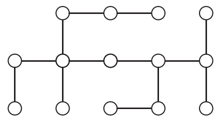
4. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, дат непаран природан број. Доказати да се сваки природан број $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n$ може представити као збир или разлика два природна броја који су мањи од n и узајамно прости са n.

5. Колико највише ловаца може да се стави на таблу $m \times n$ тако да ни једна од њих не туче више од два друга ловца. (Ловац туче фигуру која је на истој дијагонали и коју не заклање друга фигура.)

Први разред – Б категорија

1. Наћи све природне бројеве x такве да су све цифре броја x^{29} различите.

2. На приказаној мапи сваки кружић је кућа у којој станује по један ђак пешак док су линије између кружића путеви између кућа. Где треба изградити школу у селу тако да укупан пут који прелазе ђаци пешаци буде најмањи ако се зна да је дужина пута између две суседне куће једнака 1 километар. Образложити одговор!



Напомена: Ђаци се крећу искључиво по путевима а дозвољено место за изградњу школе је на некој линији или у неком од чворова наведене мапе.

3. Наћи остатак дељења броја B бројем A ако је $x = 2^{2007}$ и

$$A = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad B = x^{42} + x^{35} + x^{28} + x^{21} + x^{14} + x^7 + 1.$$

4. Доказати да конвексан четвороугао $ABCD$ код кога је $AB = 2$, $BC = 1$, $DA = 3$, $\angle BAD = 60^\circ$ и $\angle BCD = 120^\circ$, мора бити трапез.

5. Одредити непознате бројеве (број цифара) у једнакости

$$\sqrt{11\cdots1 - 22\cdots2} = 33\cdots3$$

ако се зна да број $33\cdots3$ има 2007 цифара. Тангента 46, стр. 40

Други разред – Б категорија

1. Раван је разложена на јединичне квадрате тако да формира бесконачну шаховску таблу. Уписати у сваки квадрат по један од бројева $1, 2, 3, 4, 5$ тако да у сваких пет хоризонтално, вертикално или дијагонално суседних квадрата буду уписани сви ови бројеви?

2. Нека је CD висина правоуглог троугла ABC (угао код темена C је $90°$). Ако је K тачка равни тог троугла таква да је $AK = AC$, доказати да је пречник кружнице описане око троугла ABK који садржи тачку A нормалан на DK.

3. Нека је $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ квадратна функција, где су α и β неки (не обавезно различити) природни бројеви. Колико реалних и различитих нула има једначина

$$f(f(f(x))) = 0 \ ?$$

4. За сваки природан број обележимо са x_n број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (нпр. $x_{15} = 123456789101112131415$). Одредити све природне бројеве n за које 27 дели $x_n^2 + x_n - 2$.

5. Одредити све реалне бројеве $x > 1$ за које је тачна неједнакост

$$\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leqslant 2.$$

Тангента 37, стр. 45

Трећи разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.

2. Права p која је паралелна страници AB датог троугла ABC и полови страницу BC сече симетралу s угла ABC у тачки T. Ако је O центар уписаног круга датог троугла, доказати да је

$$\sphericalangle OCT = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC.$$

3. Доказати да једначина $x + \cos x = 1$ има тачно једно решење у скупу реалних бројева.

4. Наћи бар једну неконстантну функцију $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ која задовољава услов:

$$f(x+2)+f(x)=f(x+1) \text{ за свако } x\in\mathbb{R}.$$

5. α, β, γ су оштри углови које дијагонала квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ гради редом са ивицама AA_1, AB и AD. Доказати неједнакост

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi.$$

Тангента, M337

Четврти разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P=\{1,2,\dots,n\}$ је пар $\{A,B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P=A\cup B$ и $A\cap B=\emptyset$ (партиције $\{A,B\}$ и $\{B,A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1}-1$.

2. У троуглу ABC важе релације $AB=AC<BC$. Нека је D тачка на полуправој AB таква да је $AD=BC$. Одредити вредност угла $\sphericalangle ABC$ ако се зна да је $\sphericalangle BCA=4\cdot\sphericalangle DCB$.

3. Нека су a и b природни бројеви такви да је $a\cdot b=10^{20}$ и зна се да a дели b^2, b^2 дели a^3, a^3 дели b^4, b^4 дели a^5 итд., $a^{2n-1}\mid b^{2n}$ и $b^{2n}\mid a^{2n+1}$ за све $n\in\mathbb{N}$. Доказати да је $a=b$.

4. Дат је полином $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ са целобројним коефицијентима. Ако је $a\cdot d$ непаран а $b\cdot c$ паран број, показати да је бар једна нула полинома $P(x)$ ирационална. Показати примером да аналогно тврђење не важи ако је $a\cdot d$ паран а $b\cdot c$ непаран број?

5. Одредити максималну вредност коју може имати површина нормалне пројекције правилног тетраедра ивице a на произвољну раван.

Тангента, M358

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Поставимо Декартов правоугли координатни систем тако да је координатни почетак у тачки A, а да се кретање одвија дуж оса x и y, и нека за 15 минута ауто пређе дужину 1. Тада се после сваког скретања или x или y координата аутомобила повећа или смањи за 1, при чему се x и y координате мењају наизменично. Да би аутомобил поново дошао у тачку A, и x

и y координате морају да се промене паран број пута. Како се оне мењају наизменично закључујемо да су бројеви x-промена и y-промена међусобно једнаки. Другим речима укупне дужине хоризонталног и вертикалног дела пута су једнаке. Одавде се закључује да је укупна дужина пређеног пута дељива са 4, дакле до поновног доласка у тачку A протекао је цео број сати.

Напомена: Због прегледности могу се увести ознаке x_+ и x_-, за број 15-минутних путовања паралелно са x-осом у позитивном и негативном смеру, и слично y_+ и y_-, за број 15-минутних путовања паралелно са y-осом у позитивном и негативном смеру. Услов да се аутомобил вратио у полазну тачку даје једнакости $x_+ = x_-$ и $y_+ = y_-$, услов наизменичног кретања једнакост $x_+ + x_- = y_+ + y_-$ одакле се добија да је дужина укупног пута

$$D = x_+ + x_- + y_+ + y_- = 2(x_+ + x_-) = 4x_+$$

дељива са 4.

2. Прву једначину датог система можемо записати и у облику

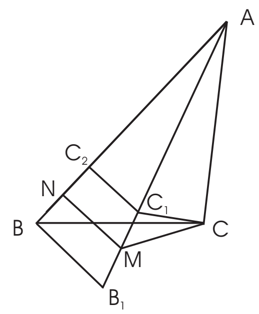
$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2005,$$

одакле следи $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, тј. $\{x\} = \{y\}$, због $0 \leqslant \{x\}, \{y\} < 1$, па је

$$\begin{aligned} [x] - [y] &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007, \end{aligned}$$

тј. $[x] = 2006$ и $[y] = 1$. Дакле, дати систем има бесконачно много решења и $\mathcal{R} = \{(2006 + \omega, 1 + \omega) \mid 0 \leqslant \omega < 1\}$.

3. Уочимо на правој AB тачке C_2 и N такве да важи $C_1C_2 \perp AB$, $MN \parallel B_1B$ (слика 1). На основу подударности троуглова AC_1C и AC_1C_2 следи да је $C_1C = C_1C_2$. Како је M средиште дужи B_1C_1 и $C_1C_2 \perp AB$ следи да је N средиште дужи BC_2. Стога је висина MN троугла BMC_2 уједно и тежишна дуж, па је тај троугао једнакокрак, тј. $BM = MC_2$. С друге стране, из подударности троуглова MC_1C_2 и MC_1C следи да је $MC = MC_2$. Према томе, $BM = MC_2 = MC$.



Слика 1.

4. Како су a, b, c природни бројеви, и како је $b + \frac{1}{c} > 1$, а самим тим и $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < 1$, имамо да је a највећи природан број мањи од $\frac{2007}{4016}$, тј. $a = 2$. Тада је $b + \frac{1}{c} = \frac{2007}{2}$, па је b највећи природан број мањи од $\frac{2007}{2}$, тј. $b = 1003$, а $c = 2$. Тада добијамо и да је $\frac{1}{c+\frac{1}{b+\frac{1}{a}}} = \frac{2007}{4016}$, што је и требало доказати.

5. Како је $441000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, тражених представљања као производ два фактора имамо колико и разбијања скупа $X = \{2^3, 3^2, 5^3, 7^2\}$ на два непразна подскупа:

$$X = \{2^3\} \cup \{3^2, 5^3, 7^2\},\ X = \{3^2\} \cup \{2^3, 5^3, 7^2\},$$

$$X = \{5^3\} \cup \{3^2, 2^3, 7^2\},\ X = \{7^2\} \cup \{2^3, 3^2, 5^3\},$$

$$X = \{2^3, 3^2\} \cup \{5^3, 7^2\},\ X = \{2^3, 5^3\} \cup \{3^2, 7^2\},\ X = \{2^3, 7^2\} \cup \{3^2, 5^3\}.$$

Дакле одговор је 7.

Други разред – А категорија

1. *Решење 1:* За $z = x + iy$ имамо

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2},$$

односно

$$|\frac{1}{z} - i|^2 = (\frac{x}{x^2+y^2})^2 + (1 + \frac{y}{x^2+y^2})^2 = \frac{x^2+y^2+2y+1}{x^2+y^2}.$$

Квадрирањем и сређивањем добија се

$$|\frac{1}{z} - i|^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2y+1}{x^2+y^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2y+1 \leqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Одавде се добија да су решења сви комплексни бројеви z који задовољавају услов $Im(z) \leqslant -\frac{1}{2}$.

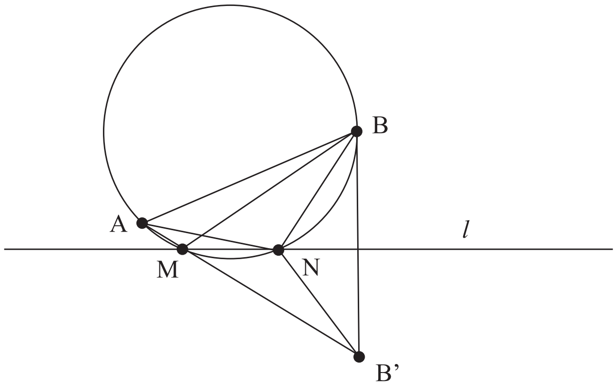
Решење 2:

$$|\frac{1}{z} - i| \leq 1 \Leftrightarrow |\frac{1-zi}{z}| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|1-zi|}{|z|} \leq 1 \Leftrightarrow |1-zi| \leq |z| \Leftrightarrow$$

$$|1-(x+yi)i| \leq |x+yi| \Leftrightarrow |(1+y)-xi| \leq |x+yi| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(1+y)^2+x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 1+2y+y^2+x^2 \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow 1+2y \leq 0.$$

2. Нека је B' тачка симетрична тачки B у односу на l. Тада је M пресечна тачка праве l и праве која пролази кроз A и B', јер за произвољну тачку P на l, различиту од M, важи $AP+PB = AP+PB' > AB' = AM+MB$. Угао AMB је спољашњи угао једнакокраког троугла MBB', па је $\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle MBB' = 2\sphericalangle AB'B$. Са друге стране, како је $AN = NB = NB'$, тачка N је центар описане кружнице око троугла ABB', па је $\sphericalangle ANB = 2\sphericalangle ABB'$ (централни угао је два пута већи од периферијског) одакле је $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB$, па тачке A, B, M, N леже на једној кружници.



Слика 2.

3. Разломак $R = X + \dfrac{1}{Y}$, где су X и Y позитивни реални бројеви, повећа се (смањи) ако се X повећа (смањи) односно смањи (повећа) ако се Y повећа (смањи). Применом овог правила два пута закључујемо да се разломак

$$X + \cfrac{1}{Y + \cfrac{1}{Z}}$$

повећа (смањи) ако се Z смањи (повећа). Сличним расуђивањем закључујемо да се разломак

$$X + \frac{1}{Y + \frac{1}{Z + \frac{1}{D}}}$$

смањи (порасте) ако D порасте (смањи се). Настављањем овог расуђивања, тј. стављањем $D + \frac{1}{T}$ уместо D у последњем разломку итд. долазимо до општег правила:

- Број "на непарном месту" (тј. на месту где стоје бројеви $1, 3, 5, \ldots, 2005$ у разломку B) својим растом повећава, а број "на парном месту" (тј. на месту где стоје бројеви $2, 4, 6, \ldots, 2006$ у разломку B) својим растом смањује полазни сложени разломак.

Закључак: $A < B$.

4. У случају када је $a = 1$ имамо јединствено решење $x = 0$. У случају када је $a \neq 1$ једначина ће имати јединствено решење када је дискриминанта квадратне једначине $(a-1)x^2 + ax + a - 1 = 0$ једнака нули (уз услов да је $x \neq 3$), одакле добијамо да a задовољава квадратну једначину $-3a^2 + 8a - 4 = 0$, чија решења су $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. У првом случају је решење $x = -1$, а у другом случају $x = 1$. Полазна једначина ће имати јединствено решење и у случају када је $x = -3$ корен квадратног тринома $(a-1)x^2 + ax + a - 1$ (јер $x = -3$ није решење полазне једначине). Тада добијамо да је $a = \frac{10}{7}$. У том случају јединствено решење је $x = -\frac{1}{3}$. Дакле полазна једначина ће имати јединствено решење у случају када $a \in \{\frac{2}{3}, 1, \frac{10}{7}, 2\}$.

5. Напишимо неколико узастопних четворки из нашег низа

$$(*) \qquad 1,9,9,3 \quad 9,9,3,2 \quad 9,3,2,3 \quad 3,2,3,7 \quad 2,3,7,5 \quad \ldots.$$

Како постоји 10^4 могућих четворки једноцифрених бројева, међу 10001-ном четворком из низа $(*)$ сигурно имамо понављање! Другим речима низ четворки $(*)$ се после неког тренутка периодично понавља! Одавде не следи директно да ће се обавезно поново појавити четворка $1,9,9,3$!

Кључно додатно опажање је да се, уз поштовање услова једноцифрености, полазни низ може једнозначно реконструисати и уназад. Нпр. ако потражимо једноцифрен број x такав да важи

$$x+1+9+9 \quad \text{при дељењу са 10 даје остатак} \quad 3$$

лако се налази да је $x = 4$. У општем случају, ако су a, b, c, d једноцифрени бројеви, онда постоји јединствен једноцифрен број x такав да

$$x+a+b+c \quad \text{при дељењу са 10 даје остатак} \quad d.$$

Из наведеног се закључује да је низ $(*)$ периодичан на обе стране, дакле четворка $1,9,9,3$ се обавезно појављује у том периоду.

Претпостављајући да се четворка $7,3,6,7$ појављује у нашем низу, одредимо неколико следећих чланова низа. Добијамо

$$\mathbf{7},\mathbf{3},\mathbf{6},\mathbf{7},3,9,5,4,\mathbf{1},\mathbf{9},\mathbf{9},\mathbf{3},2,3,7,\ldots$$

Појава четворке $1,9,9,3$ гарантује да се овде ради о истом низу $(*)$ па закључујемо (периодичност) да ће се и четворка $7,3,6,7$ у њему поново појавити.

Трећи разред – А категорија

1. По претпоставци $\frac{a+b}{2} = 15$, $h = 12$, $c = 13$, где су a и b основице, h висина а c дужина крака трапеза. Из Питагорине теореме следи да је $\frac{a-b}{2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ одакле се лако налази да је $a = 20$ и $b = 10$. Тражена запремина је $V = V_1 - 2V_2$ где је V_1 запремина ваљка са полупречником основе $h = 12$ и висином $a = 20$ а V_2 запремина купе са полупречником основе $h = 12$ и висином $\frac{a-b}{2} = 5$. Дакле тражена запремина је

$$V = V_1 - 2V_2 = 12^2\pi 20 - \frac{2}{3}12^2\pi 5 = 2400\pi.$$

2. Директно се утврђује да је $3^1 \equiv_{41} 3$, $3^2 \equiv_{41} 9$, $3^3 \equiv_{41} 27$, $3^4 \equiv_{41} 40$, $3^5 \equiv_{41} 38$, $3^6 \equiv_{41} 32$, $3^7 \equiv_{41} 14$, $3^8 \equiv_{41} 1$. Дакле $3^{3^n} \equiv_{41} -1$ је еквивалентно са

$3^n \equiv_8 4$. Међутим, последња конгруенција је очигледно немогућа, јер је 3^n непаран број.

3. Видети решење 2. задатка за 2. разред А категорију.

4. Из услова да су реални и имагинарни део решења једнаки закључујемо да оно има облик $z = t(1+i)$ где је t реалан број који треба одредити. Приметимо да је

$$(1+i)^2 = 2i \quad (1+i)^3 = -2+2i \qquad (1+i)^4 = -4$$

што се може установити или директним степеновањем или налажењем тригонометријског облика броја $1+i$. Заменом у полазној једначини добијамо

$$(*) \qquad -4t^4 + (-2+2i)t^3 + 4it^2 + 2(1+i)t + 4 = 0.$$

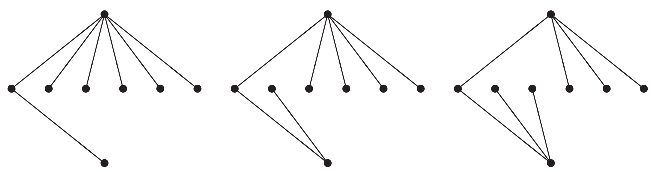
Пошто је t реалан број, ова једначина је еквивалетна пару једначина које се добију ако се реални и имагинарни део леве стране једначине $(*)$ изједначе са нулом. Имагинарни део једначине $(*)$ је једначина

$$2t^3 + 4t^2 + 2t = 0 \text{ тј. } t(t+1)^2 = 0$$

па пошто $z = 0$ није решење полазне једначине закључујемо да је $t = -1$ тј. $z = -1 - i$.

5. а) Изградњом првог асфалтног пута смо повезали 2 града. Надаље, додавањем сваког новог асфалтираног пута (из неког града који је већ повезан асфалтираним путем), повезујемо још (највише) 1 град са онима који су претходно били повезани. Стога понављањем овог поступка датих 8 градова можемо повезати са бар 7 асфалтираних путева.

Потребно је још показати да је то и могуће урадити са 7 путева (да бисмо показали да је тај минималан број асфалтираних путева баш једнак 7). То можемо урадити на више начина (колико одређујемо у делу под б). Неки од њих су представљени на следећој слици:



б) Градови A и B могу бити спојени путем дужине 2 преко било ког од градова C, D, E, F, G, H и тај град W можемо изабрати на $\binom{6}{1} = 6$ начина. За сваки од преосталих 5 градова (из скупа $\{C, D, E, F, G, H\} \setminus \{W\}$) имамо 2 могућности: или је спојен са градом A или са B. То нам даје $\binom{6}{1} \cdot 2^5 = 192$ различитих начина да асфалтираним путевима повежемо све градове.
Напомена: У Теорији графова се структура у делу под а) назива стабло

графа и оно за граф са n чворова увек има $n-1$ грану (позната чињеница која се може користити), док је у делу под б) одређиван број разапињућих стабала за који постоји посебна теорија.

Четврти разред – А категорија

1. Видети решење 4. задатка за трећи разред, А категорију.

2. *Решење 1:* Јасно, због $x \in [3,4]$,

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x).$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо да је

$$\frac{x+(7-x)}{2} \geqslant \sqrt{x(7-x)}, \quad \text{тј.} \quad x(7-x) \leqslant \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Слично добијамо да је

$$(x-1)(6-x) \leqslant \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad (x-2)(5-x) \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad (x-3)(4-x) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Једнакост у свим случајевима важи само у случају када је $x = \dfrac{7}{2} \in [3,4]$ (једначине $x = 7-x$, $x-1 = 6-x$, $x-2 = 5-x$, $x-3 = 4-x$ су еквивалентне). Дакле,

$$\max\left\{f(x) \mid x \in [3,4]\right\} = f\left(\frac{7}{2}\right) = 3^2 5^2 7^2 2^{-8} = \frac{11025}{256}.$$

Решење 2: Функција $f(x)$ је позитивана на интервалу $(3,4)$ (и важи $f(3) = f(4) = 0$) па се место њеног максимума поклапа са местом максимума функције $g(x) = \log f(x)$ (овде се користи строга монотоност логаритамске функције). Уочимо да је

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{4-x} - \frac{1}{5-x} - \frac{1}{6-x} - \frac{1}{7-x}.$$

Функција $g'(x)$ је строго опадајућа у интервалу $(3,4)$ јер су сви сабирци строго опадајући у наведеном интервалу. Ово се може проверити и налажењем извода те функције $g''(x) =$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{(4-x)^2} - \frac{1}{(5-x)^2} - \frac{1}{(6-x)^2} - \frac{1}{(7-x)^2}.$$

Лако се провери да је $g'(\frac{7}{2}) = 0$ па закључујемо да функција $g(x)$ па тиме и функција $f(x)$ достиже свој максимум у тачки $x = \frac{7}{2}$ итд.

3. Нека су a и b катете, c хипотенуза и r полупречник уписане кружнице правоуглог троугла. Користећи познату формулу за полупречник уписане кружнице правоуглог троугла, $r = \frac{a+b-c}{2}$, добијамо

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - c.$$

Одредимо сада најмању могућу вредност за c. Из неједнакости квадратне и аритметичке средине, уз коришћење Питагорине теореме, налазимо да је

$$\frac{2+\sqrt{2}-c}{2} = \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

одакле је $c \ge \sqrt{2}$. Зато је $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - c \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Овим смо доказали да полупречник уписане кружнице није већи од $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Та вредност се достиже акко у наведеној неједнакости важи знак једнакости, односно акко је $a = b$. Одавде лако налазимо да највећи могући полупречник уписане кружнице, међу правоуглим троугловима са обимом $2 + \sqrt{2}$, има правоугли троугао чије су катете $a = b = 1$, а хипотенуза $c = \sqrt{2}$.

4. a)

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC} \\
&= (\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}) \\
&\quad - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC} \\
&= 2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}) \\
&\quad + \overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}) - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC} \\
&= 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}
\end{aligned}$$

Алтернативно, могуће је идентитет проверити тако што се сви вектори изразе преко вектора $\overrightarrow{AB} = u, \overrightarrow{AC} = v$ и $\overrightarrow{AD} = w$.
b) Користећи идентитет доказан под **a)** имамо

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 13^2 + 4^2 - 11^2 - 8^2 = 0$$

па закључујемо да је угао имеђу дијагонала прав.

Напомена: Приметимо да има много просторних четвороуглова $ABCD$ који задовољавају услов под **b)** али да сви они имају ортогоналне дијагонале!

5. Претпоставимо да полином $P(x)$ није идентички једнак нули ($P(x) \equiv 0$ тривијално задовољава задану једначину). Како је $P(x^2)$ парна функција, мора бити и полином са десне стране парна функција, дакле полином $P(x)$ садржи само парне степене од x. Нека је $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + ... + a_2x^2 + a_0$ уз претпоставку да је $a_{2n} \neq 0$. Заменом у полазну једначину добијамо да је водећи члан у полиному са леве стране $a_{2n}x^{4n}$, а са десне стране

$a_{2n}x^{2n+4}$. Изједначавањем тих израза добијамо да је $n=2$. Дакле полином је облика $P(x)=ax^4+bx^2+c$. Заменом тог полинома у полазну једначину и изједначавањем коефицијената уз исте степене добијамо да је $c=0$, $b=-a$. Дакле решење су полиноми облика $P(x)=a(x^4-x^2)$, где је $a\in\mathbb{R}$.

Први разред – Б категорија

1. Угао $\sphericalangle BMA = \sphericalangle MAD$ као углови са паралелним крацима. Онда је троугао MAD једнакокрак. Следи да је $MD=AD$. Због услова задатка следи да је $MD=2CD$. У правоуглом троуглу MCD хипотенуза је два пута већа од катете па је угао $\sphericalangle DMC=30^\circ$. Одавде следи да је тражени угао 75 степени.

2. Нека је прва цифра 6. Тада имамо $p=1\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9=6\ 561$ бројева. Нека сада прва цифра није 6. Она не може бити ни 0, па је можемо изабрати на 8 начина. Цифра 6 се налази на једном од преостала 4 места - то место можемо изабрати на 4 начина. На остала 3 места може бити било која цифра различита од 6 - то место можемо изабрати на $9\cdot9\cdot9$ начина. Стога у овом случају имамо $q=8\cdot4\cdot9\cdot9\cdot9=23\ 328$ бројева. По правилу збира, бројева који задовољавау услове задатка има $p+q=29\ 889$.

3. Прву једначину датог система можемо записати и у облику

$$[x]+\{x\}-[y]-\{y\}=2005,$$

одакле следи $\{x\}-\{y\}\in\mathbb{Z}$, тј. $\{x\}=\{y\}$, због $0\leqslant\{x\},\{y\}<1$, па је

$$\begin{aligned}[x]-[y]&=2005\\ [x]+[y]&=2007,\end{aligned}$$

тј. $[x]=2006$ и $[y]=1$. Дакле, дати систем има бесконачно много решења и $\mathcal{R}=\{(2006+\omega,1+\omega)\mid 0\leqslant\omega<1\}$.

4. Очигледно је x двоцифрен број, тј. $x=10a+b$, при чему су a и b цифре декадног система и $a\neq0$. Дакле, $y=a+b$.

Ако је $a+b\leqslant9$, тада је и $z=a+b$, па је $60=10a+b+2(a+b)$, тј. $12a+3b=60$, односно $4a+b=20$. Дакле, у овом случају имамо да $(a,b)\in\{(4,4),(5,0)\}$.

Ако је $a+b\geqslant10$, тада је $z=a+b-9$, па је $60=12a+3b-9$, тј. $4a+b=23$. Решавањем последње једначине добијамо да је $(a,b)=(4,7)$.

Дакле, $x\in\{44,47,50\}$.

5. Напишимо последње две цифре свих бројева из низа

$$(*)\qquad 9,9^2,9^3,9^4,9^5,9^6,9^7,9^8,9^9,9^{10},9^{11},9^{12},\ldots$$

Узастопним множењем са 9, лако се налази да су то бројеви

$$(**) \qquad 9, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, 81, \ldots$$

Закључујемо да се последње две цифре понављају са периодом 10 тј. да 9^a и 9^b имају једнаке две последње цифре ако a и b дају исти остатак при дељењу са 10, или другим речима ако a и b имају исту последњу цифру.

Поређењем низова $(*)$ и $(**)$ налазимо да је последња цифра броја 9^9 број 9 па закључујемо да 9^{9^9} и 9^9 имају једнаке последње две цифре. Одавде, поновним упоређивањем низова $(*)$ и $(**)$ налазимо да су тражене цифре 8 и 9.

Други разред – Б категорија

1.

$$|x+iy| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=1$$

$$|(x-1)+i(y-1)| = |(x+1)+i(y+1)| \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x+y=0.$$

Одавде се лако налази да је $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ тј. једини комплексни бројеви са траженим својствима су

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

2. Пошто су $\{-2, 3, 6\}$ нуле (тј. места промене знака) полинома $x+2, 3-x, x-6$, природно је дискутовати следеће случајеве:

1. случај: $(x \leq -2)$
Неједначина је у овом случају еквивалетна са

$$\frac{x+2}{3-x} - \frac{x+2}{6-x} \leq 0 \qquad / \cdot (3-x)(6-x)$$

$$(x+2)(6-x) - (x+2)(3-x) \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+2 \leq 0.$$

Решење: $x \leq -2$.

2. случај: $(-2 < x < 3)$
Неједначина је у овом случају као и под 1. еквивалетна са

$$\frac{x+2}{3-x} - \frac{x+2}{6-x} \leq 0 \qquad / \cdot (3-x)(6-x)$$

$$(x+2)(6-x) - (x+2)(3-x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -2$$

што значи да под овим условима нема решења.

3. случај: $(3 < x < 6)$
Неједначина је у овом случају еквивалетна са

$$\frac{x+2}{x-3} - \frac{x+2}{6-x} \leq 0 \qquad / \cdot (x-3)(6-x)$$

$$(x+2)(6-x) - (x+2)(x-3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(9-2x) \leq 0.$$

Решење: $\frac{9}{2} \leq x < 6$.

4. случај: $(6 < x)$
Неједначина је у овом случају еквивалетна са

$$\frac{x+2}{x-3} + \frac{x+2}{x-6} \leq 0 \qquad / \cdot (x-3)(x-6)$$

$$(x+2)(x-6) + (x+2)(x-3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(2x-9) \leq 0$$

па ни у овом случају нема решења.

Коначно решење: $x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{9}{2}, 6)$.

3. Видети решење 3. задатка за први разред, А категорију.

4. Разломак $R = X + \dfrac{1}{Y}$, где су X и Y позитивни реални бројеви, повећа се (смањи) ако се X повећа (смањи) односно смањи (повећа) ако се Y повећа (смањи). Применом овог правила два пута закључујемо да разломак

$$X + \cfrac{1}{Y + \cfrac{1}{Z}}$$

порасте (опадне) ако Z порасте (опадне). Сличним расуђивањем закључујемо да разломак

$$X + \frac{1}{Y + \frac{1}{Z + \frac{1}{D}}}$$

опада (расте) ако D расте (опада). Коначно, применом истог аргумента, закључујемо да се разломак $(X, Y, Z, D, T > 0)$

$$(*) \qquad X + \cfrac{1}{Y + \cfrac{1}{Z + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{T}}}}$$

повећа ако се повећа један од бројева X, Z или T а смањи ако се повећа један од бројева Y или D.

Закључак:

$$B < A < C.$$

5. У случају када је $a = 1$ имамо јединствено решење $x = 0$. У случају када је $a \neq 1$ једначина ће имати јединствено решење када је дискриминанта квадратне једначине $(a-1)x^2 + ax + a - 1 = 0$ једнака нули, одакле добијамо да a задовољава квадратну једначину $-3a^2 + 8a - 4 = 0$, чија решења су $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. У првом случају је решење $x = -1$, а у другом случају $x = 1$. Полазна једначина ће имати јединствено решење и у случају када је $x = -3$ корен квадратног тринома $(a-1)x^2 + ax + a - 1$ (јер $x = -3$ није решење полазне једначине). Тада добијамо да је $a = \frac{10}{7}$. У том случају јединствено решење је $x = -\frac{1}{3}$. Дакле полазна једначина ће имати јединствено решење у случају када $a \in \{\frac{2}{3}, 1, \frac{10}{7}, 2\}$.

Трећи разред – Б категорија

1. Наведене три једнакости су еквивалентне једнакостима

$$\log_3 b = \frac{1}{1 - \log_3 a} \quad \log_3 c = \frac{1}{1 - \log_3 b} \quad \log_3 a = \frac{1}{1 - \log_3 c}.$$

Трећа једнакост се добије ако се $\log_3 b$ из прве замени у другу једнакост.

Напомена: Приметимо да је тврђење задатка блиско повезано са тврђењем да је $f(f(f(x))) = x$ где је

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

2. Сабирањем једначина добијамо да је $x+y+z+u = \frac{4}{5}$ и даље одузимањем од одговарајућих једначина налази се да је решење система

$$x = y = z = u = \frac{1}{5}.$$

3.

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}(\cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{9}) =$$

$$-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{9} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} = -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{9}) = \frac{1}{8}.$$

4. Користићемо својство да је експоненцијална функција $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, дефинисана са $f(x) = 2^x$, за свако $x \in \mathbb{R}$, строго монотоно растућа. $(*)$
Очигледно су бројеви a, b и c негативни, док су бројеви d, e и f позитивни. Нека је $a_1 = -2^{2^2}$, $b_1 = 2^{-2^2}$ и $c_1 = 2^{2^{-2}}$. Како је $2^{-2} > 0 > -2^2$, то на основу $(*)$, следи $c_1 > b_1$. Како је још и a_1 негативан број, а b_1 и c_1 позитивни, то је $a_1 < b_1 < c_1$, те због $(*)$ важи $|a| < |b| < |c|$. Одавде, имајући на уму да су бројеви a, b и c негативни, добијамо да важи поредак $a > b > c$. Нека

је сада $d_1 = -2^{-2^2}$, $e_1 = -2^{2^{-2}}$ и $f_1 = 2^{-2^{-2}}$. Бројеви d_1 и e_1 су негативни, док је број f_1 позитиван. Из $2^{-2} > 0 > -2^2$, по $(*)$ је $|e_1| > |d_1|$, односно $e_1 < d_1$. Закључујемо да је $e_1 < d_1 < f_1$, те користећи $(*)$ још једном, имамо $e < d < f$. На овај начин смо се уверили да је распоред датих бројева

$$c < b < a < e < d < f.$$

5. Видети решење 4. задатка за 2. разред А категорију.

Четврти разред – Б категорија

1. Коришћењем познатог идентитета

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

добијамо

$$P(x) = \frac{x^{10}-1}{x^2-1} = \frac{x^5-1}{x-1} \cdot \frac{x^5+1}{x+1} = (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Приметимо да се горњим аргументом доказује једнакост полинома

$$(*) \qquad P(x) = (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

уз услов $x \notin \{-1, +1\}$. Другим речима једнакост $(*)$ ће бити потпуно доказана тек ако се још и непосредно провери за $x = -1$ и $x = 1$.

2. Сабирањем једначина добијамо да је $x+y+z+u = \frac{4}{5}$ и даље одузимањем од одговарајућих једначина налази се да је решење система

$$x = y = z = u = \frac{1}{5}.$$

3. Из услова да су реални и имагинарни део решења једнаки закључујемо да оно има облик $z = t(1+i)$ где је t реалан број који треба одредити. Приметимо да је

$$(1+i)^2 = 2i \quad (1+i)^3 = -2+2i \qquad (1+i)^4 = -4$$

што се може установити или директним степеновањем или налажењем тригонометријског облика броја $1+i$.

Заменом у полазној једначини добијамо

$$(*) \qquad -4t^4 + (-2+2i)t^3 + 4it^2 + 2(1+i)t + 4 = 0.$$

Пошто је t реалан број, ова једначина је еквивалетна пару једначина које се добију ако се реални и имагинарни део леве стране једначине $(*)$ изједначе са нулом. Имагинарни део једначине $(*)$ је једначина

$$2t^3 + 4t^2 + 2t = 0 \text{ тј. } t(t+1)^2 = 0$$

па пошто $z = 0$ није решење полазне једначине закључујемо да је $t = -1$ тј. $z = -1 - i$.

4. *Решење 1:* Јасно, због $x \in [3, 4]$,

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x).$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо да је

$$\frac{x + (7-x)}{2} \geqslant \sqrt{x(7-x)}, \quad \text{тј.} \quad x(7-x) \leqslant \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Слично добијамо да је

$$(x-1)(6-x) \leqslant \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad (x-2)(5-x) \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad (x-3)(4-x) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Једнакост у свим случајевима важи само у случају када је $x = \dfrac{7}{2} \in [3, 4]$ (једначине $x = 7-x$, $x-1 = 6-x$, $x-2 = 5-x$, $x-3 = 4-x$ су еквивалентне). Дакле,

$$\max\left\{f(x) \mid x \in [3, 4]\right\} = f\left(\frac{7}{2}\right) = 3^2 5^2 7^2 2^{-8} = \frac{11025}{256}.$$

Решење 2: Функција $f(x)$ је позитивана на интервалу $(3, 4)$ (и важи $f(3) = f(4) = 0$) па се место њеног максимума поклапа са местом максимума функције $g(x) = \log f(x)$ (овде се користи строга монотоност логаритамске функције). Уочимо да је

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{4-x} - \frac{1}{5-x} - \frac{1}{6-x} - \frac{1}{7-x}.$$

Функција $g'(x)$ је строго опадајућа у интервалу $(3, 4)$ јер су сви сабирци строго опадајући у наведеном интервалу. Ово се може проверити и налажењем извода те функције $g''(x) =$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{(4-x)^2} - \frac{1}{(5-x)^2} - \frac{1}{(6-x)^2} - \frac{1}{(7-x)^2}.$$

Лако се провери да је $g'(\frac{7}{2}) = 0$ па закључујемо да функција $g(x)$ па тиме и функција $f(x)$ достиже свој максимум у тачки $x = \frac{7}{2}$.

5. (a) Претпоставимо без умањења општости да је $m < n$. Из услова задатка добијамо да је $a_{2m} + a_{2n} = 0$. Нека је d разлика аритметичког низа. Тада имамо да је $a_{m+n} = a_{2m} + (m-n)d$ и такође $a_{m+n} = a_{2n} + (n-m)d$, па сабирањем те две једнакости добијамо $2a_{m+n} = a_{2m} + a_{2n} = 0$, па је члан аритметичког низа $a_{m+n} = 0$, дакле цео број.

(b) Не мора! На пример нека је $a_1 = -\sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}, a_3 = 3\sqrt{2}$, итд. (тачније нека је $a_k = (2k-3)\sqrt{2},\ k \in \mathbb{N}$) Низ a_k је очигледно аритметички и сви чланови су ирационални, а $\frac{a_1}{a_2} = -1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Нађимо остатке дељења бројева облика 3^n при дељењу са 13. Ако је r остатак добијен при дељењу степена 3^n са 13 онда је остатак дељења броја 3^{n+1} са 13 исти као и остатак дељења броја $3r$ са 13. Заиста, по претпоставци $3^n - r$ је дељив са 13 па је према томе $3^{n+1} - 3r$ такође дељив са 13. Овим поступком добијамо следећу таблицу остатака:

3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	...
3	9	1	3	9	1	3	...

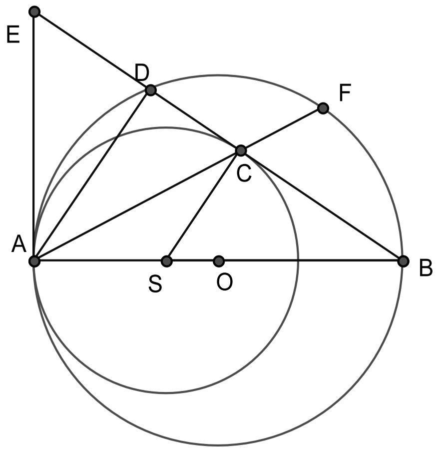
Уочавамо периодичност остатака и закључујемо да је остатак дељења 3^{1000} са 13 једнак 3. Сличан поступак налажења периодичности остатка може се применити и на случај степена 4^{1000}. Алтернативно се тражени остатак може одредити и на следећи начин. Уочимо да је $4^3 = 64 = 5 \cdot 13 - 1$. Одавде закључујемо да је

$$4^{999} = (4^3)^{333} = (5 \cdot 13 - 1)(5 \cdot 13 - 1) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 13 - 1) = 13 \cdot k - 1$$

за неки природан број k. Према томе остатак дељења броја 4^{1000} са 13 је 9.

Закључак: Тражени остатак је 12.

2. *Решење 1:* Конструишимо заједничку тангенту у тачки A. Пресек тангенте и праве BD је тачка E. Како је $EA = EC$ (тангентне дужи) то је $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ECA$. Из те једнакости као и из једнакости $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAF$ следи $\sphericalangle EAC = \sphericalangle FCB = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EBA = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EAD$ (јер је $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EBA$). Одавде следи да је $\sphericalangle DAF = \sphericalangle FAB$, што значи да је AC бисектриса угла BAD.



Решење 2: Спојимо S центар унутрашњег круга и C. Тада је $\sphericalangle SCB = 90^o$ (полупречник и тангента), и $\sphericalangle ADB = 90^o$ (угао над пречником). Одавде следи да је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CSB$ (углови са паралелним крацима), и $\sphericalangle CSB = 2\sphericalangle CAB$ (централни и периферијски угао). Одатле следи да је права AF бисектриса угла DAB.

3. На првој позицији пермутације може бити било који број, те га можемо изабрати на 8 начина. Након тога, број на другој позицији мора бити најмањи од преосталих бројева да би био десно минималан, па је одређен једнозначно. Бројеве на позицијама три и четири опет можемо изабрати произвољно од преосталих бројева, на $6 \cdot 5$ начина. Број који следи мора бити најмањи од преосталих, па је стога број на позицији пет јединствено одређен. Преостали бројеви могу се поређати произвољно, на $3 \cdot 2 \cdot 1$ начина. Дакле, укупан број пермутација које имају десно минималне бројеве на другој и петој позицији је $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$.

4.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{a})^2} \leqslant \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leqslant \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{b})^2} = \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$$

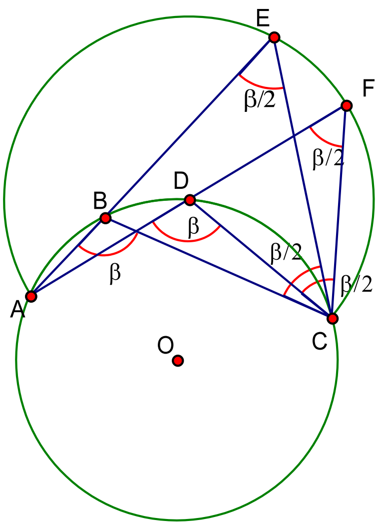
Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.

5. Нека је $d = \text{НЗД}(n^2+1, (n+1)^2+1)$. Тада $d \mid (n+1)^2 + 1 - (n^2+1)$, односно $d \mid 2n+1$. Отуда $d \mid n^2 + 1 - (2n+1)$, односно $d \mid n(n-2)$. Одавде, како је d узајамно прост са n (јер ако је $k = NZD(n^2+1, n)$ добијамо да $k \mid n^2 + 1 - n^2$, односно $k = 1$), закључујемо да $d \mid n - 2$. Напокон како смо добили да $d \mid 2n+1$ и $d \mid n-2$, то $d \mid (2n+1) - 2(n-2)$, односно $d \mid 5$. Одавде су једине потенцијалне вредности за d бројеви 1 и 5.

Одредимо сада остатак при дељењу броја n^2+1 са 5. Лако налазимо да уколико n има редом остатке $0,1,2,3,4$ при дељењу са 5, онда број n^2+1 има редом остатке $1,2,0,0,2$ при дељењу са 5. Зато је $d=5$ акко n при дељењу са 5 даје остатак 2, док је у свим осталим случајевима $d=1$.

Други разред – А категорија

1. *Решење 1:* Нека је $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ACB=\gamma$ и $\sphericalangle ABC=\beta$. По синусној теореми $AB+BC=2R(\sin\alpha+\sin\gamma)=4R\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$. Максимум овог израза се постиже за $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=1$, тј. $\alpha=\gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$. Дакле, $AB=BC=2R\sin\frac{\alpha}{2}=2R\cos\frac{\beta}{2}$, а максималан збир износи $4R\cos\frac{\beta}{2}$.
Решење 2: Продужимо дуж AB до тачке E тако да важи $BE=BC$, односно $AE=AB+BC$. Троугао BCE је једнакокрак, а како је $\sphericalangle ABC=\beta$ спољашњи за овај троугао следи да је $\sphericalangle BEC=\sphericalangle ECB=\frac{\beta}{2}$. Конструишимо тачку D на задатој кружници тако да је $AD=DC$ и $\sphericalangle ADC=\beta$. Поновимо поступак за тачку D као и за тачку B. Конструишимо тачку F тако да важи $DC=DF$, односно $AF=AD+DC$. На исти начин важи да је $\sphericalangle DFC=\sphericalangle FCD=\frac{\beta}{2}$. Тачке E и F припадају геометријском месту тачака из којих се дуж AC види под углом $\frac{\beta}{2}$ (али са исте стране праве AC са које су B и D). Геометријско место тачака је лук са центром у тачки D. Пошто је пречник најдужа тетива, онда следи да је максималан збир тетива у случају тачке D односно када је $AB=BC$.



2. Дискриминанта дате једначине је

$$D=[3a^3-12a^2-1]^2+12a^2(a-4)=[3a^2(a-4)-1]^2+12a^2(a-4)=$$

$$9a^4(a-4)^2-6a^2(a-4)+1+12a^2(a-4)=9a^4(a-4)^2+6a^2(a-4)+1=$$
$$=[3a^3-12a^2+1]^2$$

па су нуле ове једначине (за $a\neq 0$)

$$x_{1/2}=\frac{-3a^3+12a^2+1\pm(3a^3-12a^2+1)}{6a}$$

тј. $x_1=\frac{1}{3a}$ и $x_2=-a(a-4)$. За $a=0$ јединствено решење $x=0$ припада интервалу $(-1,1)$. За $a\neq 0$, нуле једначине задовољавају услов ако и само ако

$$\left|\frac{1}{3a}\right|<1 \quad \wedge \quad -1<-a^2+4a<1$$

Друга неједначина је еквивалетна са

$$3<(a-2)^2<5\Leftrightarrow\sqrt{3}<|a-2|<\sqrt{5}\Leftrightarrow a\in(2-\sqrt{5},2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3},2+\sqrt{5}).$$

Елементи из првог интервала не задовољавају услов $\frac{1}{3}<|a|$ одакле коначно добијамо да a задовољава услове задатка ако и само ако је $a\in\{0\}\cup(2+\sqrt{3},2+\sqrt{5})$.

3. Нека је p прост број а α ненегативан цео број. Одредићемо $f(p^\alpha)$. Очигледно да за свако x, $0\leq x\leq p^\alpha$ важи да је $NZD(x,p^\alpha)=p^a$, за неко $0\leq a\leq\alpha$. Одредимо колико има бројева x таквих да је $NZD(x,p^\alpha)=p^a$ за задато a. Претходни услов је еквивалентан услову $p^a\mid x$ и $p^{a+1}\nmid x$. Оваквих бројева има укупно $p^{\alpha-a}-p^{\alpha-a-1}$ ако је $a<\alpha$, односно 1 ако је $a=\alpha$. Према томе имамо да је:

$$f(p^\alpha)=1\cdot p^\alpha+\sum_{a=0}^{\alpha-1}\left(p^{\alpha-a}-p^{\alpha-a-1}\right)\cdot p^a=p^\alpha\left(1+\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)\right).$$

Ако ставимо $p=2$ и $\alpha=2007$ добијамо да је $f(2^{2007})=2009\cdot 2^{2006}$.

4. Од сваке релације еквиваленције можемо направити једну релацију поретка, тако што ћемо оставити само оне елементе $a\,\rho\,b$ из релације еквиваленције за које важи $a\leqslant b$. Лако се провери да је овако задата релација рефлексивна, антисиметрична и транзитивна па је то заиста релација поретка. Како од пуне релације еквиваленције (у којој је сваки елемент у релацији са сваким) можемо добити још једну релацију поретка (за $n>1$), ако узмемо елементе $a\geqslant b$. За ову релацију се аналогно показује да је релација поретка, а различита је од претходно одређених. Стога релација поретка има више од релација еквиваленције на скупу $\{1,2,\ldots,n\}$ за $n>1$. За $n=1$ имамо само 1 релацију еквиваленције која је истовремено и релација поретка: $\rho=\{(1,1)\}$. Дакле у овом случају имамо једнако релација поретка и релација еквиваленције.

5. Наведена једначина је еквивалентна са

$$x^2 - 2x\cos(xy) + \cos^2(xy) + \sin^2(xy) = (x - \cos(xy))^2 + \sin^2(xy) = 0$$

што је еквивалентно систему једначина

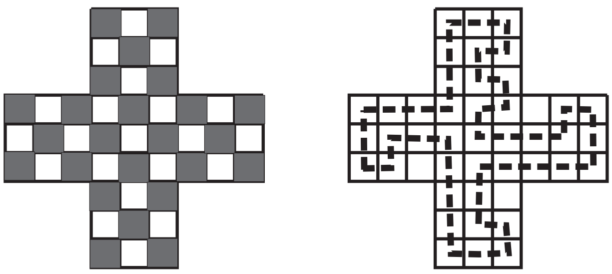
$$x - \cos(xy) = 0 \qquad \sin(xy) = 0.$$

Ако је $\sin(xy) = 0$ онда је $\cos(xy) = \pm 1$ тј. или је $x = 1$ или $x = -1$. У првом случају $(x = +1)$ из услова $\cos y = 1$ добијамо $y = 2k\pi$ за неки цео број k. У другом случају $(x = -1)$ из услова $\cos(-y) = -1$ добијамо $y = (2m+1)\pi$ за неки цео број m. Закључујемо да је (x, y) решење полазне једначине ако и само ако је

$$(x, y) \in \{(+1, 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, (2m+1)\pi) \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Трећи разред – А категорија

1. На слици се види тура туристе којом се обилази 42 одаје. Докажимо да туриста не може посетити више одаја под датим условима. Обојимо одаје црно-бело (шаховски) тако да има 24 црне и 21 белу одају. Како туриста пролази суседним одајама које су различито обојене, на његовој тури има исти број белих и црних одаја. Зато на свакој тури нема више од $21+21 = 42$ одаје.



2. Нека су $x_1, ..., x_n$ корени полинома $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ где је $a_i = \pm 1$. У случају $n = 1$ лако се налазе два решења $x \pm 1$ па зато претпоставимо да је $n > 1$. Користећи Виетове формуле имамо

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = (x_1 + ... + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n) = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 \pm 2.$$

Како су по услову задатка сви корени реални, збир квадрата мора бити позитиван, па имамо да је $x_1^2 + ... + x_n^2 = 3$, тј. $a_{n-2} = -1$. Слично је и $x_1^2x_2^2 \cdots x_n^2 = a_0^2 = 1$. Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо:

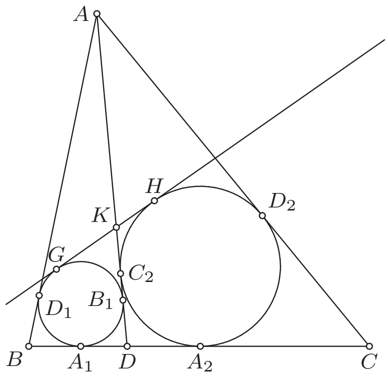
$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}(x_1^2 + ... + x_n^2) \geqslant \sqrt[n]{x_1^2 \cdots x_n^2} = 1$$

одакле је $n \leqslant 3$, при чему једнакост $n = 3$ важи акко $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$. Одатле добијамо за случај $n = 3$ два решења $(x^2-1)(x \pm 1)$. У случају $n = 2$ лако се добијају још два решења $x^2 \pm x - 1$, док у случају $n = 1$ имамо такође два решења $x \pm 1$.

3. Означимо са A_1, B_1, D_1 тачке у којима уписани круг у троугао ABD додирује странице BD, AD, AB; и означимо са A_2, C_2, D_2 тачке у којима уписани круг у троугао ACD додирује странице CD, AD, AC. Нека је $AC = b$, $AB = c$, $BD = u$, $DC = v$ и $AD = d$. Нека су G и H тачке у којима заједничка спољашња тангента различита од BC додирује кругове уписане у троуглове ABD и ACD. Тада је

$$\begin{aligned} 2AK &= (AB_1 - GK) + (AC_2 - HK) \\ &= AB_1 + AC_2 - GH \\ &= AD_1 + AD_2 - A_1A_2 \\ &= AD_1 + AD_2 - DA_1 - DA_2. \end{aligned}$$

Међутим, $AD_1 = \frac{c+d-u}{2}$, $AD_2 = \frac{b+d-v}{2}$, $DA_1 = \frac{d+u-c}{2}$, $DA_2 = \frac{d+v-b}{2}$.



Заменом добијамо

$$2AK = \frac{c+d-u+b+d-v-d-u+c-d-v+b}{2} = b+c-u-v = AC+AB-BC,$$

односно $AK = (AB + AC - BC)/2$, што зависи само од дужина страница троугла ABC.

4. Означимо редом са $S_{10}(n)$ и $S_2(n)$ збир цифара природног броја n у декадном, односно бинарном систему. Како је $n < 100 < 2^7$, то број n у бинарном систему има највише 7 цифара, па је $S_2(n) \leqslant 7$. Нека је $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ запис броја n у бинарном систему, тако да он може да почиње и одређеним бројем нула. Како је тада $n = a_6 \cdot 2^6 + a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, то је $n \equiv_3 (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5)$. Одавде, како је $n \equiv_3 S_{10}(n) \equiv_3 S_2(n) = (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) + (a_1 + a_3 + a_5)$, налазимо да је $2(a_1 + a_3 + a_5) \equiv_3 0$, односно

$a_1 + a_3 + a_5 \in \{0, 3\}$ (јер је $0 \leqslant a_1 + a_3 + a_5 \leqslant 3$). Дакле, за природан број n важи да су бинарне цифре a_1, a_3 и a_5 једнаке међу собом. Сада разликујемо два случаја:

1° $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Сада је $S_2(n) \leqslant 4$. Зато је $a_6 = 0$, јер би у супротном било $n \geqslant 64$ одакле је $S_{10}(n) \geqslant 7$, што је немогуће. Дакле, $S_2(n) \leqslant 3$, $n \leqslant 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$ и $n \equiv_4 a_0 \in \{0, 1\}$, те је $n \in \{21, 20, 12, 2, 1\}$. Провером добијамо да су решења $n = 1$, $n = 20$ и $n = 21$.

2° $a_1 = a_3 = a_5 = 1$. Зато је $n \geqslant 2^5 + 2^3 + 2^1 = 42$, па је $S_{10}(n) \geqslant 5$. Приметимо да је $a_6 = 0$, јер би у супротном било $n \geqslant 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 106$. Зато је и $S_{10}(n) \leqslant 6$. Из овога закључујемо да је $n \in \{60, 51, 42, 50\}$. Провером добијамо да ни један број из овог скупа није решење.

Једине вредности природног броја n, $n < 100$ који задовољавају услов задатка су $n = 1$, $n = 20$ и $n = 21$.

5. Уведимо ознаку $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ одакле следи $a^2 = 2 + \sqrt{3}$. Овом сменом наша једначина добија облик

$$a^{2x} + 1 = (2a)^x.$$

Бројеви $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ су решења једначине $x^2 - 4x + 1 = 0$ одакле добијамо једнакост

$$a^4 + 1 = 4a^2.$$

Упоређивањем закључујемо да је $x = 2$ једно решење наше једначине. То је и једино решење. Заиста, дељењем са $(2a)^x$ добијамо да је наша једначина еквивалентна са

$$\left(\frac{a}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2a}\right)^x = 1.$$

На левој страни је функција од x која монотоно опада; ово следи из чињенице да је $\frac{a}{2} < 1$ и $\frac{1}{2a} < 1$. Закључујемо да може постојати највише једна вредност x за коју та функција узима вредност 1.

Закључак: Једино решење наше једначине је $x = 2$.

Четврти разред – А категорија

1. Видети решење 3. задатка за 3. разред А категорију.

2. Нека је $(x_1, x_2, ..., x_n)$ решење датог система. Одузимањем прве једначине од друге и груписањем сабирака добијамо

$$\sum_{i=2}^{n} (x_i^i - 1 - i(x_i - 1)) = 0. \qquad (*)$$

Докажимо да је сваки сабирак леве стране једначине $(*)$ ненегативан.

Први начин: Нека је $2 \leqslant i \leqslant n$. Коришћењем неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

$$\frac{x_i^i + i - 1}{i} = \frac{x_i^i + 1 + ... + 1}{i} \geqslant \sqrt[i]{x_i^i \cdot 1 \cdot ... \cdot 1} = x_i.$$

Знак једнакости важи акко је $x_i^i = 1$, односно $x_i = 1$.

Други начин: Посматрајмо за фиксирано $k \in N$, $k > 1$, полином $P_k(x) = x^k - 1 - k(x-1)$. Како је $P_k'(x) = kx^{k-1} - k = k(x^{k-1} - 1)$ закључујемо да се на $[0, \infty)$ минимум функције $P_k(x)$ достиже за $x = 1$, при чему је $P_k(1) = 0$.

Овим смо доказали да су заиста сви сабирци леве стране у једначини $(*)$ ненегативни, па како је њихов збир једнак нули, то добијамо да и они морају бити једнаки нули. Ово је једино могуће у случају $x_2 = x_3 = ... = x_n = 1$. Сада лако налазимо да је и $x_1 = 1$, чиме смо доказали да дати систем има јединствено решење $(1, 1, ..., 1)$.

3. Обојимо јединична поља табле помоћу k боја и то "редом" (наизменично). На тако обојеној табли сваки правоугаоник прекрива тачно једно поље сваке боје. Зато је неопходан (не и довољан) услов за поплочавање табле да је једнак број поља обојен сваком бојом. Претпоставимо сада да бројеви m и n нису дељиви са k и нека су њихови остаци при дељењу са k, редом једнаки a и b, при чему је $0 < a, b < k$. Уочимо горњи десни део почетне табле димензије $a \times b$. У остатку табле имамо једнак број поља обојених сваком од k боја. Доказ би завршили ако докажемо да у уоченом делу немамо једнак број поља сваке боје. Размотримо случај $a \geq b$. Уочимо боју означену бројем a. Тада у свакој врсти уоченог дела таблице имамо по једно поље обојено бојом a. Ако би се десило да су све боје једнако заступљене, онда би број обојених поља у уоченом делу био kb, што није могуће јер их је тачно ab. Слично овом разматра се случај $a < b$ (тада свака колона уоченог дела садржи једно поље боје b). Овим смо добили контрадикцију, те закључујемо да претпоставка није била тачна.

4. Нека је $xy = a$. Тада користећи $x + y = 1$ добијамо

$$\begin{aligned}
85 &= (x^4 + y^2)(x^2 + y^4) = x^6 + y^6 + x^4y^4 + x^2y^2 = \\
&= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + x^4y^4 + x^2y^2 = \\
&= (x^2 + y^2)((x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2) + x^4y^4 + x^2y^2 = \\
&= (1 - 2a)((1 - 2a)^2 - 3a^2) + a^4 + a^2 = \\
&= a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 6a + 1,
\end{aligned}$$

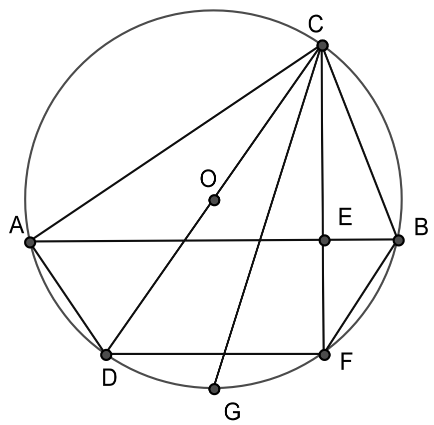
односно $a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 6a - 84 = 0$. Једно решење ове једначине је $a = -2$, одакле се лако добија $a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 6a - 84 = (a + 2)P(a)$, где је $P(a) = a^3 - 4a^2 + 18a - 42$. Како је $P'(a) = 3a^2 - 8a + 18 > 0$ за свако $a \in \mathbb{R}$, то је $P(a)$ растућа функција, па једначина $P(a) = 0$ има највише једно решење. Како је $P(a)$ полином непарног степена, то он има бар једну реалну нулу. Дакле, једначина $P(a) = 0$ има тачно једно реално решење. Како је $P(1)P(4) < 0$, због непрекидности, закључујемо да је то решење из интервала $(1, 4)$. За ову вредност a важило би $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2a < -1$, што није могуће. Овим смо доказали да је једина могућност $a = -2$. Тада је лако установити да су решења полазног система уређени парови $(2, -1)$ и $(-1, 2)$.

5. Видети решење 5. задатка за 3. разред А категорију.

Први разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за 1. разред А категорију.

2. Нека је дат троугао ABC. Опишемо око њега круг и конструишимо бисектрису угла C. Она сече кружну линију у тачки G. Тачка G је средина лука AGB (једнаки периферијски углови). Конструишимо пречник CD и висину CE чији продужетак сече кружну линију у тачки F.
Први доказ: Ако покажемо да је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF$, онда ће важити и $\sphericalangle DCG = \sphericalangle FCG$. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ (над истом тетивом). Троугао DAC је правоугли (CD је пречник). Троугао BEC је правоугли (E је подножје висине). Из ових чињеница следи једнакост углова $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF$. Овим је доказ завршен.



Други доказ: Ако покажемо да су лукови AD и BF једнаки онда ће и периферијски углови бити једнаки. $\sphericalangle AEC = 90^o$ (подножје висине) $\sphericalangle DFC = 90^o$ (над пречником CD). Одавде следи да су тетиве AB и DF паралелне што значи да су лукови AD и FB једнаки.

3. Видети решење 3. задатка за први разред А категорију.

4. Видети решење 4. задатка за 1. разред А категорију.

5. Нека је $x = BD$ и $y = CD$ где је D подножје висине из A на страну BC (слика). Пошто је $\beta = 30°$ закључујемо да је $h = \frac{c}{2}$. Одавде следи

$P = \frac{15}{4} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot c}{4}$ па за одређивање дужина a и c имамо једначине

$$a + c = 8 \qquad a \cdot c = 15.$$

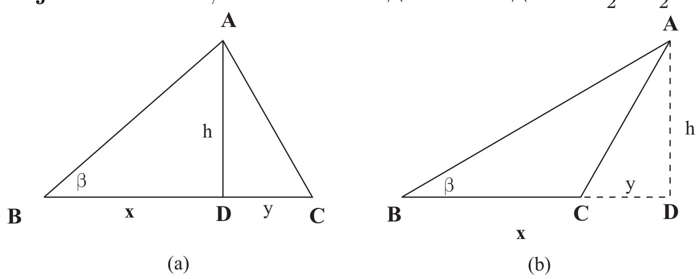
Решења $a = 3, b = 5$ и $a = 5, b = 3$ могу се у овом случају лако и погодити. Алтернативно се квадрирањем прве једначине и коришћењем друге добија $a^2 + b^2 = 34$. Одавде следи $a^2 - 2ac + b^2 = (a - c)^2 = 4$ тј. $a - c = \pm 2$ итд.

Први случај: $a = BC = 5$, $c = AB = 3$ одакле следи $h = \frac{c}{2} = \frac{3}{2}$.

У овом случају из правоуглог троугла ΔABD налазимо да је $x = \frac{3\sqrt{3}}{2} < BC = a$ (слика (а)) и $y = 5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Из правоуглог троугла ΔADC налазимо

$$b = AC = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \left(5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}.$$

Други случај: $a = BC = 3$, $c = AB = 5$ одакле следи $h = \frac{c}{2} = \frac{5}{2}$.



У овом случају из правоуглог троугла ΔABD налазимо да је $x = BD = \frac{5\sqrt{3}}{2} > BC = a$ (слика (б)) и $y = x - a = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 3$. Из правоуглог троугла ΔADC налазимо

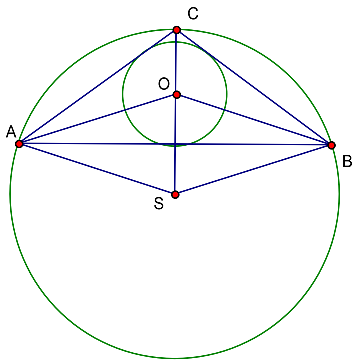
$$b = AC = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}.$$

Други разред – Б категорија

1. Решење првог дела задатка је идентично решењу 1. задатка за 1. А категорију. Други део задатка се решава аналогним расуђивањем. Сличним аргументима као и пре налазимо да је остатак дељења броја $9^{222} = (10-1)^{222}$ са 5 једнак 1 као и да је остатак дељења броја $4^{333} = 4 \cdot 4^{332} = 4 \cdot (15+1)^{166}$ са 5 једнак 4. Одавде налазимо да је број $9^{222} + 4^{333}$ дељив са 5, тј. тражени остатак је 0.

2. Нека је O центар уписаног круга, а S описаног круга. Права OS је симетрала дужи AB па је $OA = OB$, одакле следи да је $\alpha/2 = \beta/2$, односно

$\alpha = \beta$. Следи да је ΔABC једнакокрак, па теме C припада правој SC. Како



је $SA = SC$ (полупречник описаног круга) и $SB = SC$ то је $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OBC$. Одавде следи да је $3\alpha/2 = \gamma/2$, односно $\alpha = \beta = \gamma/3$, одакле се лако налази да је $\gamma = 108°$, $\alpha = \beta = 36°$.

3. Дата једначина еквивалентна је дисјункцији (I) $\vee$ (II), где су (I) и (II) следећи системи једначина и неједначина:

$$\text{(I):} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + x + a = x \end{cases} \qquad \text{(II):} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + x + a = -x \end{cases}$$

Из друге једначине система (I) добијамо да је $x^2 = -a$. Због тога (I) за $a > 0$ нема решења, док за $a \leqslant 0$ има јединствено решење.

Решимо сада систем (II). Ако је $ax^2 + bx + c = 0$ квадратна једначина ($a, b, c \in \mathbb{R}$), користећи Виетове формуле, лако закључујемо да је у случају $\frac{c}{a} < 0$ тачно једно њено решење позитивно, док су у случају $\frac{c}{a} > 0$ оба решења истог знака или су пак коњуговано комплексни бројеви. Примењујући овај закључак на другу једначину система (II), $x^2 + 2x + a = 0$, закључујемо да он за $a < 0$ има тачно једно позитивно решење, док за $a > 0$ нема позитивних решења (ако су решења реална, онда су истог знака, али им је збир једнак -2, те су оба негативна). За $a = 0$, решење система (II) је $x = 0$.

Из друге једначине система (I) и друге једначине система (II) закључујемо да је једини реалан број који би могао да буде заједничко решење наведених система $x = 0$. Он заиста и јесте заједничко решење само у случају $a = 0$.

Коначно, овим смо доказали да дата једначина има два решења за $a < 0$, једно решење за $a = 0$, док у случају $a > 0$ нема решења.

4. Област дефинисаности израза је $[1, 2] \cup \{3\}$. Неједнакост се може написати у облику $\sqrt{(x-1)(3-x)} + \sqrt{(2-x)(3-x)} \geqslant \sqrt{(3-x)(4-x)}$. Број 3 је, очигледно, решење. За $x < 3$ неједнакост се може "скратити" са $\sqrt{3-x}$

и добија се

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x-1}+\sqrt{2-x} \geqslant \sqrt{4-x} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{(x-1)(2-x)} \geqslant \sqrt{3-x} \\
\Leftrightarrow \quad & 5x^2-18x+17 \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

У овом случају нема решења. Дакле, једино решење је $x=3$.

5. Видети решење 5. задатка за 2. разред А категорију.

Трећи разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за 2. разред А категорију.

2. Једначина је еквивалентна са

$$px>0, \quad x>-1, \quad x+1\neq 1, \quad px=(x+1)^2,$$

тј. са

$$px>0, \quad x>-1, \quad x^2+(2-p)x+1=0. \qquad (*)$$

Имамо два случаја:
Први случај: Квадратна једначина има јединствени корен тј. $(2-p)^2=4$, одакле је $p=0$ или $p=4$. Решење $p=0$ не задовољава први услов, а за $p=4$ имамо јединствено решење $x=1$.
Други случај: Квадратна једначина има два корена x_1, x_2, од којих само један задовољава услове (*). Из услова да је дискриминанта квадратне једначине $D=(2-p)^2-4$ већа од нуле, добијамо $p>4$ или $p<0$. Решавањем квадратне једначине добијамо решења $x_{1,2}=\frac{1}{2}(p-2\pm\sqrt{(p-2)^2-4})$. Када је $p>4$, имамо да су оба решења позитивна, па оба задовољавају услове (*) и тада немамо јединствено решење. Када је $p<0$ имамо да су оба решења негативна, међутим како је $f(-1)=p<0$, где је $f(x)=x^2+(2-p)x+1$, имамо да је -1 између корена једначине, тј. само једно решење задовољава други услов (*), па у том случају полазна једначина има једниствено решење.

Дакле решење је $p\in(-\infty,0)\cup\{4\}$.

3. *Решење 1:* Ако је S средина странице AB, тада редом имамо да је $AS=3\sqrt{2}$, $AV=3\sqrt{5}$, $VS=3\sqrt{3}$ и из сличности троуглова HSA и ASV следи $\frac{HS}{AS}=\frac{AS}{VS}$ тј. $HS=2\sqrt{3}$ и $HV=SV-HS=\sqrt{3}$. Како је угао $\sphericalangle TVS$ заједнички за троуглове STV и THV и како је $\sqrt{3}=\frac{SV}{TV}=\frac{TV}{HV}=\sqrt{3}$ следи да су троуглови STV и THV слични, па је тражени угао $\sphericalangle THV=\sphericalangle STV=\frac{\pi}{2}$.

Решење 2: Поставимо дату пирамиду у координатни систем тако да је на пример $A(6,0,0), B(0,6,0), V(0,0,3)$ и $T(0,0,0)$. Како је $AH\perp BV$ и $AC\perp BV$ то је раван $\beta=\beta(A,C,H)\perp BV$. Аналогно је и $\gamma=\gamma(B,D,H)\perp AV$. Према томе ортоцентар H мора припадати свакој од равни α,β и γ тј. $H\in\alpha\cap\beta\cap\gamma$. Како је $\alpha: x+y+2z=6$, $\beta: -2y+z=0$ и $\gamma: -2x+z=0$, то решење овог система једначина представља координате отоцентра H, па је $H(1,1,2)$. Сада имамо да скаларни производ вектора $\overrightarrow{TH}$ и $\overrightarrow{SV}$ је $\overrightarrow{TH}\cdot\overrightarrow{SV}=(1,1,2)(-3,-3,3)=0$, што значи да је $\overrightarrow{TH}\perp\overrightarrow{SV}$ тј. $\ell\perp\alpha$, па је тражени угао $\frac{\pi}{2}$.

Решење 3: За **сваку** праву правилну четворострану пирамиду важи да је тражени угао $\frac{\pi}{2}$. Како је $AC\perp BV$ то постоји раван β која садржи AC и нормална је на BV и њој очевидно припада висина троугла ABV која полази из темена A. Како је $AC\perp BV$ то постоји раван β која садржи BD и нормална је на AV и њој очевидно припада висина троугла ABV која полази из темена B. Према томе ортоцентар H троугла ABV припада пресеку равни α и β. Како су обе равни α и β нормалне на раван троугла ABV тј. на раван α, то је и њихова пресечница нормална на α, а њој очевидно припада ортоцентар H па је тражени угао $\frac{\pi}{2}$.

4. Одузимањем прве од друге, друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1+b_1=23 \quad d+b_1(q-1)=-2 \quad d+b_1q(q-1)=1 \quad d+b_1q^2(q-1)=7.$$

Одузимањем друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1+b_1=23 \quad d+b_1(q-1)=-2 \quad b_1(q-1)^2=3 \quad b_1q(q-1)^2=6.$$

Пошто су вредности $b_1=0$ и $q=1$ искључене, дељењем четврте са трећом једначином коначно добијамо еквивалентан систем

$$a_1+b_1=23 \quad d+b_1(q-1)=-2 \quad b_1(q-1)^2=3 \quad q=2.$$

Решење последњег а тиме и нашег система је

$$q=2 \quad b_1=3 \quad d=-5 \quad a_1=20.$$

5. Из адиционе теореме за синус налазимо да је

$$\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{и} \quad \sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Разломак је позитиван ако и само ако су му и бројилац и именилац истог знака.

Први случај:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Прва једначина је еквивалетна са

$$k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

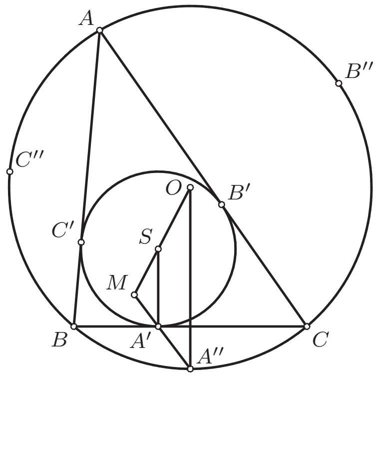
а друга са
$$m\pi < x < \frac{\pi}{4} + m\pi \, (m \in \mathbb{Z}).$$
Оба услова су задовољена ако и само ако је $x \in (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$.

Други случај:
$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin(2x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Прва једначина је еквивалетна са
$$\frac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$$
а друга са
$$\frac{\pi}{4} + m\pi < x < \pi + m\pi \, (m \in \mathbb{Z}).$$
Оба услова су задовољена ако и само ако је $x \in (\frac{3\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$ или што је еквивалетно ако и само ако је $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$.

Решење:
$$x \in (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Четврти разред – Б категорија

1. Означимо са O и S центре описаног и уписаног круга и са R и r полупречнике ових кругова. Ако је троугао ABC једнакостраничан, праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ пролазе кроз центар O троугла, па је тврђење испуњено. У супротном, тачке O и S се не поклапају. Означимо $M = A'A'' \cap OS$.



Како су дужи SA' и OA'' нормалне на страницу BC, оне су међусобно паралелне. Према Талесовој теореми је

$$\frac{MS}{MO} = \frac{SA'}{OA''} = \frac{r}{R}. \tag{1}$$

Такође, тачке A' и A'' су са исте стране праве OS, па се тачка M налази ван дужи OS. Аналогно се доказује да праве $B'B''$ и $C'C''$ секу праву OS у тачки за коју важи (1) и која се налази ван дужи OS. Како је тачка M са ова два услова једнозначно одређена, закључујемо да праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ све садрже тачку M.

2. а) Како $\alpha \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \beta \operatorname{arctg} x = 0$ мора да важи за сваки реални број x то за $x = 1$ добијамо $2\alpha + \beta = 0$, док за $x = \sqrt{3}$ добијамо $\alpha + \beta = 0$, а тај систем једначина еквивалентан је са $\alpha = \beta = 0$.

б) Не важи.

Како $\alpha \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \beta \operatorname{arctg} x = 0$ мора да важи за сваки реалан број x из интервала $[-1, 1]$, то за $x = 1$ следи $\alpha\frac{\pi}{2} + \beta\frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 0$. Докажимо да за свако $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ следи $2\alpha + \beta = 0$ тј. доказаћемо да $(\forall x \in [-1, 1])$ $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$.

Доказ: Пре свега и лева и десна страна једнакости коју доказујемо су дефинисане за свако $x \in \mathbb{R}$, јер домен функције arctg је $\mathbb{R}$, док из еквиваленције

$$\Big(-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1\Big) \Leftrightarrow \Big((x+1)^2 \ge 0 \wedge (x-1)^2 \ge 0\Big)$$

следи да је и $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ дефинисан за сваки $x \in \mathbb{R}$ (домен функције arcsin је $[-1, 1]$).

Сада применимо теорему

$$\Big(a \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \ \wedge\ b \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \ \wedge\ \sin a = \sin b\Big) \Rightarrow a = b$$

тако што узмемо $a = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $b = 2 \operatorname{arctg} x$. Прво треба показати да за свако $x \in [-1, 1]$ важи

$$a = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ \text{ и } \ b = 2 \operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Прва тврдња следи из саме дефиниције функције $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, док друга следи из

$x \in [-1, 1] \Rightarrow \operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Сада је преостало још само да се докаже да је $\sin a = \sin b$ тј. да је $\sin(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}) = \sin(2 \operatorname{arctg} x)$. Лева страна ове једнакасти је очито једнака $\frac{2x}{1+x^2}$, па покажимо да је и десна страна те једнакости једнака $\frac{2x}{1+x^2}$. Значи имамо да је $\sin(2 \operatorname{arctg} x) = 2 \sin(\operatorname{arctg} x) \cos(\operatorname{arctg} x) = 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$.

Задатак се много једноставно решава помоћу извода! Треба само показати да $(\forall x \in [-1, 1])$ $f'(x) = (2g(x))' = \frac{2}{1+x^2}$ и да је $f(x) = 2g(x)$ за неко

x, например за $x = 1$ je $f(1) = 2g(1) = \frac{\pi}{2}$, одакле следи да je $(\forall x \in [-1,1])$ $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\, x$.

3. Одредимо најпре за које вредности x дата неједначина има смисла (домен). Потребни и довољни услови за то су: (I) $7-x > 0$, (II) $21+4x-x^2 > 0$, (III) $21+4x-x^2 \neq 1$, (IV) $x+3 > 0$, (V) $x+3 \neq 1$ и (VI) $\log_{x+3}(21+4x-x^2) \neq 0$ (услов (III) имплицира услов (VI)). Њиховим решавањем добијамо (I) $7 > x$, (II) $7 > x > -3$, (III) $x \neq 2 \pm 2\sqrt{6}$, (IV) $x > -3$, (V) $x \neq -2$. Одавде добијамо да je домен

$$D = (-3, 2-2\sqrt{6}) \cup (2-2\sqrt{6}, -2) \cup (-2, 2+2\sqrt{6}) \cup (2+2\sqrt{6}, 7).$$

За свако $x \in D\backslash\{6\}$ важи $\log_{21+4x-x^2}(7-x) = \frac{1}{\log_{7-x}(21+4x-x^2)}$, те je полазна неједначина на скупу $D\backslash\{6\}$ еквивалентна редом са неједначинама

$$\frac{1}{\log_{7-x}(21+4x-x^2)\cdot\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{1}{(\log_{7-x}(7-x)(x+3))\cdot(\log_{x+3}(x+3)(7-x))} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{1}{(1+\log_{7-x}(x+3))\cdot(1+\log_{x+3}(7-x))} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{\log_{x+3}(7-x)})\cdot(1+\log_{x+3}(7-x))} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{\log_{x+3}(7-x)}{(1+\log_{x+3}(7-x))^2} < \frac{1}{4} \iff$$

$$0 < \frac{(1-\log_{x+3}(7-x))^2}{4(1+\log_{x+3}(7-x))^2} \iff 1 \neq \log_{x+3}(7-x) \iff x \neq 5.$$

Специјално, лако проверавамо да $x = 6$ jесте решење полазне неједначине. Овим je доказано да je скуп решења баш $D\backslash\{5\}$.

4. Нека je $ABCD$ произвољан тетраедар. Уочимо најдужу ивицу, нека je то на пример AB. Доказаћемо да се бар од једне од тројки ивица (AB, AC, AD) или (BA, BC, BD) може конструисати троугао. Како je AB најдужа ивица, важи

$$AB \geqslant AC,\ AB \geqslant AD,\ BA \geqslant BC,\ BA \geqslant BD,$$

па je довољно доказати да важи бар једна од неједнакости

$$AC + AD > AB,\ \ BC + BD > BA.$$

Из троугла ABC имамо да важи $AC + BC > AB$, а из троугла ABD имамо да важи $AD + BD > AB$. Сабирањем ове две неједнакости добијамо

$$(AC + AD) + (BC + BD) > 2AB,$$

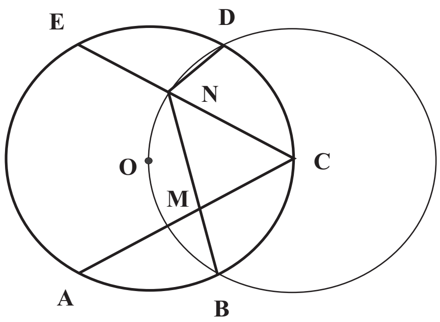
одакле закључујемо да је $AC + AD > AB$ или $BC + BD > BA$, што је и требало показати.

5. Видети решење 4. задатка за 3. разред Б категорију.

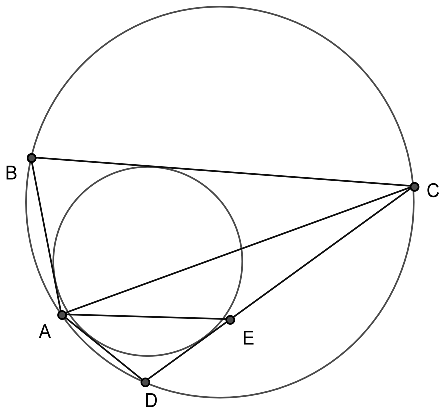
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Троугао EDN подударан је троуглу BMC ($ED = CB, EN = CM$ и $\angle DEC = \angle BCA = 30°$). Нека је $\angle MBC = \angle NDE = \alpha$ и $\angle BMC = \angle END = \beta$. Приметимо да је $\alpha + \beta = 150°$. Даље, $\angle DNC = 180° - \beta$ и $\angle BNC = 90° - \alpha$ па је $\angle DNB = 180° - \beta + 90° - \alpha = 120° = \angle BOD$, где је O центар шестоугла $ABCDEF$. Пошто је $CO = CB = CD$, закључујемо да тачке B, O, N, D припадају кругу са центром у C. Дакле $CN : CE = r : r\sqrt{3}$, па је $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



2. Обележимо углове $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$ и $\sphericalangle CDA = \delta$. Да би четвороугао $ABCD$ био тетиван мора да важи да је $\alpha+\gamma = \beta+\delta$. Одавде следи да је $\delta = 180^o - \beta$. Да би четвороугао био тангентан мора важити $AB + CD = BC + AD$. Одавде следи да је $CD - AD = BC - AB$ (разлику бирамо у зависности која је дуж већа). Ако је тачка E на страници DC таква да је $AD = DE$ онда имамо да је $CE = CD - ED = CD - AD = BC - AB$. Троугао ADE је једнакокрак па се лако израчунава угао $AEC = 90^o + \frac{\delta}{2}$. Задатак се своди на конструкцију троугла ACE коме су дате странице AC,CE и угао AEC. У случају да се тачке E и C поклапају онда је троугао ADC једнакокрак и тачка D се налази у пресеку симетрале дужи AC и описане кружнице око троугла ABC.



3. Нека је n неки природан број за који важи услов задатка. Лако је видети да је $x_n^2 + x_n - 2 = x_n^2 - 1 + x_n - 1 = (x_n - 1)(x_n + 2)$. Како $27 \mid (x_n - 1)(x_n + 2)$ закључујемо да $9 \mid (x_n - 1)$ или $9 \mid (x_n + 2)$. Са друге стране, ако је један од бројева $x_n + 2$, односно $x_n - 1$ дељив са 9, онда је он дељив и са 3, те како је разлика наведених бројева једнака 3, закључујемо да је и други број дељив са 3. Овим смо доказали да важи

$$27 \mid x_n^2 + x_n - 2 \Longleftrightarrow ((9 \mid x_n + 2) \vee (9 \mid x_n - 1)) \Longleftrightarrow ((x_n \equiv_9 7) \vee (x_n \equiv_9 1)). \quad (1)$$

Коришћењем чињенице да неки природан број при дељењу са 9 даје исти остатак као и његов збир цифара, налазимо да је

$$x_n \equiv_9 1 + 2 + ... + n \equiv_9 \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2)$$

Када природан број n узима редом остатке $0, 1, 2, ..., 8$ при дељењу са 9, није тешко утврдити да број $\frac{n(n+1)}{2}$ при дељењу са 9, редом даје остатке $0, 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 0$.

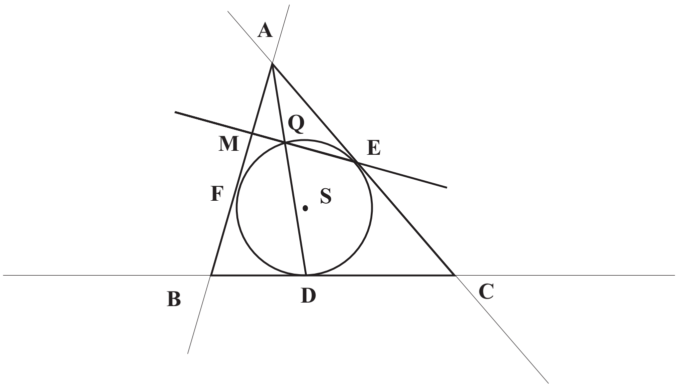
Одавде, користећи (1) и (2) добијамо да су решења бројеви n који при дељењу са 9 дају један од остатака $1, 4$ или 7. Ово су заправо они природни бројеви n који при дељењу са 3 дају остатак 1.

4. Помножимо редом услове са z, x, y и саберемо. Скраћивањем са $27(x + y + z)$ добијамо $xyz \geqslant 1$, па коришћењем неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо $x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} \geqslant 3$. Дакле минимум траженог израза је 3 и достиже се за $x = y = z = 1$.

5. Нека је уочено a правих паралелних дужи BC, b правих паралелних дужи AC, c правих паралелних дужи AB, при чему је $a + b + c = n$. Праве паралелне са BC и AC деле раван на укупно $(a+1)(b+1)$ области. Свака права паралелна са AB сече преостале праве у највише $a+b$ тачака, па је она подељена на највише $a+b+1$ делова. Самим тим, она доприноси подели равни са највише $a+b+1$ нових области. Зато је укупан број области највише $N=(a+1)(b+1)+c(a+b+1)=ab+ac+bc+a+b+c+1$, одакле је $N \geqslant \frac{n^2}{3}+n+1$. Лако се израчунава да је $\frac{n^2}{3}+n+1 \geqslant 207$ испуњено за $n \geqslant 24$. Заиста, за $n=24$ и $a=b=c=8$ раван се може поделити на чак 217 области.

Други разред – А категорија

1. Нека је $M = AF \cup EQ$. Из потенције тачке M, $MF^2 = MQ \cdot ME$. Зато је $MA = MF$ еквивалентно са $MA^2 = MQ \cdot ME$, што је еквивалентно са $\triangle MAQ \sim \triangle MEA$, и са $\sphericalangle MAE = \sphericalangle MQA$. Међутим, $\sphericalangle MAE = \alpha$, док је $\sphericalangle MQA = \sphericalangle DQE = \frac{1}{2}\sphericalangle DSE = 90^\circ - \gamma/2$. (С је центар уписаног круга). Сада је $\alpha = 90^\circ - \gamma/2$ еквивалентно са $\alpha = \beta$, чиме је тврђење задатка доказано.



2. (a) Нека је $z \in S$. Пошто је $z \in S \Leftrightarrow |z+\frac{1}{z}| = 1 \Leftrightarrow |z^2+1| = |z|$, из неједнакости троугла (за бројеве z^2+1 и -1) имамо:

$$|z| = |z^2+1| \geq |z^2| - 1 = |z|^2 - 1.$$

Решавањем квадратне неједначине $0 \geq |z|^2 - |z| - 1$, имајући на уму да је $|z| \geq 0$, добијамо $|z| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Како се у претходној неједнакости знак једнакости достиже за $z = \pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}i$, то је највећа могућа вредност за $|z|$, $z \in S$, баш $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Из дефиниције скупа S следи да уколико је $z \in S$, онда је и $z' = \frac{1}{z} \in S$. Зато на основу дела под (a) имамо

$$|z| = \frac{1}{|\frac{1}{z}|} = \frac{1}{|z'|} \geq \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Како је $z = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2} i \in S$, то је најмања могућа вредност за $|z|,\ z \in S$, једнака $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. Како је $8y^2+5y+1>0$ (јер је дискриминанта $5^2-4\cdot 8\cdot 1<0$), следи да је $x^5=y^5+3y^4+8y^2+5y+1>y^5$, тј. $x>y$, па је и $x \geqslant y+1$. Одавде добијамо

$$(y+1)^5 \leqslant y^5+3y^4+8y^2+5y+1 \Leftrightarrow$$

$$2y^2(y^2+5y+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$y \in \{-4,-3,-2,-1,0\}.$$

Провером ових вредности y добија се да је једино решење $(x,y)=(1,0)$.

4. Користићемо чињеницу да за свака два различита цела броја a и b и $P \in \mathbb{Z}[x]$ важи $a-b \mid P(a)-P(b)$. Дакле, постоји $k \in \mathbb{Z}$, тако да је $P(a)-P(b) = k(a-b)$. Зато је $P(a)\cdot(P(a)-k(a-b)) = -(a-b)^2$. Последња једначина је квадратна (по $P(a)$) и лако закључујемо да је неопходан услов да би $P(a)$ био цео број, да цео број буде и $\sqrt{D} = |a-b|\sqrt{k^2-4}$. Дакле, $\sqrt{k^2-4} \in \mathbb{Q}$, одакле је $\sqrt{k^2-4} \in \mathbb{Z}$. Није тешко закључити да је израз k^2-4 потпун квадрат само за $k=\pm 2$. Из поменуте квадратне једначине је тада $P(a) = \pm(a-b)$, те из $P(a)-P(b)=k(a-b)$ налазимо $P(b)=\mp(a-b)$. Овим је доказано да је $P(a)+P(b)=0$.

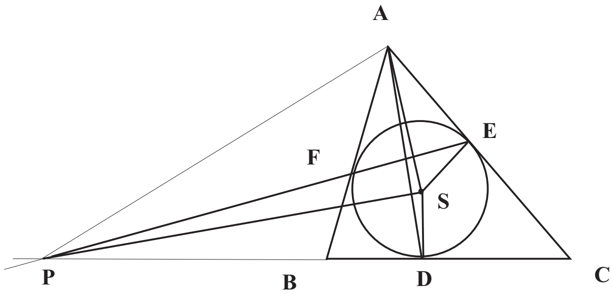
5. Одговор на постављено питање је негативан. За доказ посматрајмо следеће "бојење" квадрата 5×5 бојама (бројевима) 1 и -4:

-4	1	1	1	-4
1	1	1	1	1
1	1	-4	1	1
1	1	1	1	1
-4	1	1	1	-4

На сваком 2×3 или 3×2 правоугаонику од поља квадрата збир бројева који су на њему је 1, а збир свих бројева на квадрату је 0. Ако би било могуће покривање правоугаоницима тако да свако поље квадрата буде покривено неких к-пута, збир бројева на свим правоугаоницима би био 0 (јер је на сваком од њих 0) а истовремено и $k\cdot 1 = k > 0$ (рачунато по пољима).

Трећи разред – А категорија

1. Познато је тврђење да су дијагонале четвороугла $KLMN$ нормалне ако и само ако је $KL^2+MN^2=LM^2+NK^2$. Заиста, ако се KM и LN секу у O и ако је нпр. угао KOL оштар, имамо $KL^2+MN^2<OK^2+OL^2+OM^2+ON^2<LM^2+NK^2$; одавде је и други смер јасан.

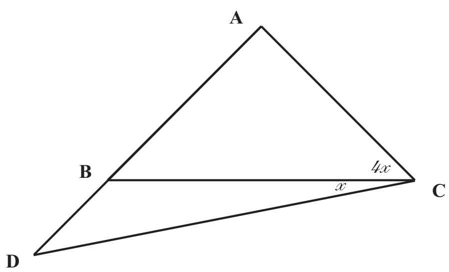


Вратимо се задатку. Како су дијагонале четвороугла $AESP$ нормалне, важи

$$AP^2 + SD^2 = AP^2 + SE^2 = AE^2 + SP^2 = AE^2 + r^2 + DP^2 = AS^2 + DP^2,$$

где је r полупречник уписаног круга. Дакле, $AS^2+PD^2 = AP^2+SD^2$, одакле следи тврђење.

2. Нека је $\sphericalangle DCB = x$. Тада је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 4x$, а из одговарајућих синусних теорема следи $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin 4x}{\sin 8x}$ (из $\triangle ABC$) и $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (из $\triangle DCA$). Како је $AB = AC$ и $AD = BC$, следи (користећи и $0 < x < \dfrac{1}{8} \cdot 180°$, што је тачно, јер је у $\triangle ABC$ збир углова већи од $8x$)



$$\sin 4x \sin 5x = \sin 3x \sin 8x \Leftrightarrow$$

$$\sin 4x \sin 5x = 2 \sin 4x \cos 4x \sin 3x \Leftrightarrow (\text{јер је } x \neq k \cdot 45°, k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin 5x = 2 \cos 4x \sin 3x \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 7x - \sin x \Leftrightarrow$$

$$\sin x = \sin 7x - \sin 5x = 2 \sin x \cos 6x \Leftrightarrow (\text{јер је } x \neq k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos 6x = \frac{1}{2},$$

тј. $6x = 60°$, односно $x = 10°$, одакле је $\sphericalangle ABC = 40°$. Другим речима једини кандидат за могућу вредност угла $\angle ABC$ је угао од $40°$.

Са друге стране, ако у $\triangle ABC$ важи $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 40^\circ$ и ако је D тачка за коју је $A - B - D$ и $\sphericalangle BCD = 10^\circ$, следи да је

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{\sin 50^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \sin 80^\circ} = \frac{2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = 1,$$

тј. да је ова ситуација стварно и могућа.

Одговор: Једина могућа вредност за угао $\angle ABC$ је 40°.

3. Тврђење доказујемо потпуном индукцијом по n. За $n = 1$, тврђење је очигледно. Претпоставимо да твђење важи за све бројеве мање од n. Уколико је $(n, a-1) = 1$, тада

$$n \mid a^n - 1 \quad \wedge \quad a - 1 \mid a^n - 1 \quad \Rightarrow \quad n(a-1) \mid a^n - 1.$$

Уколико n и $a-1$ нису узајамно прости, тада постоји прост број p који дели оба броја и важи $n = pm$ и $a \equiv 1 \pmod{p}$. Нека је $b = a^p$. Сада важи

$$m \mid a^n - 1 = (a^p)^m - 1 = b^m - 1.$$

Одавде, како је $m < n$, по индукцијској претпоставци имамо $(b-1)m \mid b^m - 1$, односно

$$(a^p - 1)m \mid a^n - 1.$$

Доказ ће бити окончан уколико докажемо да је $a^p - 1$ дељиво са $p(a-1)$. Ово је задовољено јер је

$$a^p - 1 = (a-1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1)$$

и на основу $a \equiv 1 \pmod{p}$ важи

$$a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1 \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p} \equiv 0 \pmod{p}.$$

4. Најпре сместимо људе у две просторије произвољно. У случају да сваки човек има највише једног познаника у просторији у којој је, урадили смо оно што се у задатку тражило.

У супротном, постоји човек који у својој просторији има два или три познаника. Преместимо тог човека у другу просторију. Приметимо да је пре премештања укупан број парова људи (у обе просторије) који се познају и у истој су просторији већи него после премештања.

Премештање на овај начин понављамо докле год има људи који у својој просторији имају два или три познаника. С обзиром да укупан број парова људи (у обе просторије) који се познају и у истој су просторији опада приликом сваког премештања, после коначно много премештања постићи ћемо тражени распоред.

5. Ограничења се могу записати у облику

$$x(y^2 - yz + z^2) \geqslant 1, y(z^2 - zx + x^2) \geqslant 1, z(x^2 - xy + y^2 \geqslant 1$$

После множења редом са $y+z, z+x, x+y$ и сабирања по странама, добијамо

$$x(y^3 + z^3) + y(z^3 + x^3) + z(x^3 + y^3) \geqslant 2(x + y + z)$$

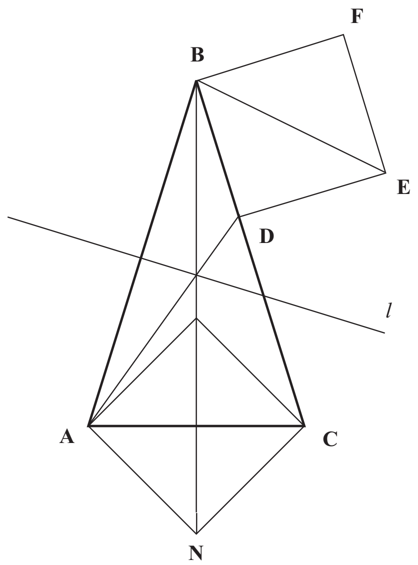
Како је, сагласно Мјурхедовој неједнакости,

$$2(x^4 + y^4 + z^4) \geqslant x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$$

добијамо $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant x + y + z$. Тражени минимум је 1 и достиже се ако је $x = y = z = 1$.

Четврти разред – А категорија

1. Једнакост $AC : BD = \sqrt{2}$ значи да је квадрат конструисан над BD као страницом (ван троугла ABC) подударан квадрату конструисаном над AC као над дијагоналом (видети слику). Како је $\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE = 75^\circ = \angle BAC$, то су тачке A и B, односно C и E, симетричне у односу на праву l (симетралу дужи AB). Према томе квадрати су симетрични у односу на l па је $\angle DAC = \angle MBE = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$



2. *Прво решење.* Конструишимо праве x, y и z кроз тачке X, Y и Z, паралелне са YZ, ZX, и XY. Нека су P, Q и R пресечне тачке правих y и z; z и x; x и y, респективно. Тада је $\triangle PQR \sim \triangle XYZ$ и X,

Y и Z су средишта страница RQ, QP и PR. Нека је M ортоцентар троугла XYZ. Очигледно, M је центар описаног круга троугла PQR и $\sphericalangle ZMY = 180^\circ - \sphericalangle X = 180^\circ - \sphericalangle P = 180^\circ - \sphericalangle A$. То значи да тачке P, A, Z, M и Y припадају једном кругу. Сасвим слично се доказује да тачке Z, B, R, X и M припадају једном кругу. Тада је $\sphericalangle PMA = \sphericalangle PZA = \sphericalangle BZR = \sphericalangle BMR$, и како је $MR = MP$ и $\sphericalangle PAM = \sphericalangle BRM = 90^\circ$, закључујемо да је $MA = MB$. Сасвим слично закључујемо и да је $MA = MC$, па је M центар описаног круга троугла ABC.

Друго решење. Кругови описани око AYZ, BZX и ZXY се секу у једној тачки M (Микелова тачка), имају исти полупречник као круг описан око XYZ, и пошто су $\angle MYA$ и MYC суплементни, добијамо да је $MA = MC$. Сасвим слично је и $MA = MB$, па је M центар описаног круга за ABC. Даље имамо $\angle MZX = \angle MYX = \varphi$, $\angle MXZ = \angle MYZ = \psi$, $\angle MXY = \angle MZY = \theta$ па из $\triangle XYZ$ добијамо $2(\varphi + \psi + \theta) = 180^\circ$. Сада је $ZM \perp XY$ јер је $\angle XZM + ZXY = \varphi + \psi + \theta = 90^\circ$. Сасвим слично $MY \perp ZX$ и тиме је доказано да је M ортоцентар троугла XYZ.

3. Ако је p прост делилац броја m, онда полином $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ дели $x^p - 1$ што дели $x^m - 1$. Нека је сада $m = p_1 p_2 \cdots p_{2007}$, где су p_i различити прости бројеви. Сваки од полинома $P_i(x) = x^{p_i-1} + x^{p_i-2} + \cdots + 1$ дели полином $x^m - 1$. Такође, свака два полинома P_i и P_j $(i \neq j)$ су узајамно проста јер немају заједничке нуле (нуле првог су примитивни p_i-ти корени јединице, а нуле другог p_j-ти корени, а ова два скупа су наравно дисјунктни). То значи да је $x^m - 1$ дељив и производом $P_1(x)P_2(x) \cdots P_{2007}(x)$ чији је први коефицијент иза водећег управо једнак 2007.

4. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где су $p_1, \ldots, p_k$ различити прости бројеви. Имамо да је $p_i \neq 2$ за свако $i = 1, \ldots, k$. Напишимо l у облику $l = s + (l - s)$. Да би ово разлагање задовољавало услове задатка, мора да важи да су s и $l - s$ узајамно прости са n. Према томе, ниједан прост број p_i, $i = 1, \ldots, k$ не сме да дели ни s ни $l - s$. Овај услов може да се запише и у облику $s \equiv_{p_i} t_i$, тако да је t_i различит од 0 и l по модулу p_i. На овај начин је могуће изабрати бројеве t_i тако да је претходни услов испуњен зато што је сваки прост број p_i већи од 2. Сада је довољно показати да за овако изабране бројеве t_i постоји број s тако да је $s \equiv_{p_i} t_i$ за свако $i = 1, \ldots, k$. Егзистенција оваквог броја s следи из Кинеске теореме о остацима, и он је јединствен по модулу $p_1 \cdots p_k$. Одаберимо број s тако да је $0 \leq s < p_1 \cdots p_k$. Из услова које смо наметнули за s лако закључујемо да разлагање $l = s + (l - s)$ задовољава све услове задатка. Овим је доказ завршен.

5. Највећи број ловаца је $2m + 2n - 4$. Коректан распоред са толико ловаца је онај где је на сваком ивичном пољу табле по један ловац. Докажимо да је ово највећи број ловаца доказујући да за сваки коректан распоред ловаца који нису сви на ивичним пољима постоји коректан распоред са исто толико ловаца и већим бројем ивичних ловаца. Размотримо коректну конфигурацију са неким неивичним ловцем Л1. Како тај ловац туче највише два ловца он туче и два празна ивична поља. Преместимо га на једно од њих. Уколико добијена конфигурација задовољава услов задатка добили смо коректну конфигурацију са већим бројем ивичних ловаца. У супротном постоји други ловац Л2 који је тукао два друга ловца а сад туче и премештеног ловца Л1. Тај ловац није на ивичном пољу те туче и једно празно ивично поље. Преместимо ловца Л2 на то ивично поље. Ако се добије коректна конфигурација тврђење је доказано. У супротном могуће је да се појавио нови Л3 ловац који туче Л1 и још два друга. Преместимо Л3 ако постоји на празно угаоно поље које туче. Процедуру понављамо све док постоје некоректни ловци који туку Л1 и још два друга. Након тога отклањамо редом поремећај који може настати премештањем ловаца Л2 па Л3 итд. Процедура је коначна јер понављања конфигурација нема пошто се сваким кораком повећава број ивичних ловаца.

Први разред – Б категорија

1. $x = 1$ је тривијално решење задатка па можемо претпоставити да је $x \geqslant 2$. Пошто је

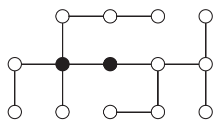
$$3^{29} \geqslant 81 \cdot 3^{25} = 81 \cdot (3^5)^5 \geqslant 81 \cdot 100^5 = 81 \cdot 10^{10}$$

закључујемо да су за $x \geqslant 3$ сви бројеви x^{29} бар дванаестоцифрени, дакле у њиховом декадном запису постоји цифра која се појавила бар два пута. С друге стране

$$2^{29} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 = 1024 \cdot 1024 \cdot 512 = 536870912$$

одакле следи да су решења задатка бројеви 1 и 2.

2. Уочимо да школу никако не треба изградити на месту неког од граничних (изолованих) кружића. Заиста, ако би локацију школе преместили из граничног у први суседни кружић, видимо да би само ученик који станује у граничном кружићу био на губитку док би сви остали ученици, њих 13, имали краћи пут (сви за 1 километар). Ово расуђивање се може наставити. Упоређивањем неког кружића са једним од његових првих суседа лако видимо да је нова локација боља ако је број ученика којима се пут скраћује већи од броја ученика којима се пут продужава. На тај начин долазимо да су обојени кружићи на слици најбољи избор али и да је свако место између њих такође решење проблема.
Одговор: Школу треба изградити било где између 2 обојене куће (може и у њима).



3. Доказаћемо да је тражени остатак једнак 7. У доказу користимо формулу

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}),\ k \in N,$$

из које специјално добијамо важну чињеницу да број $a-b$ дели број $a^k - b^k$, ако су a и b цели бројеви. Приметимо најпре да је

$$B - 7 = ((x^7)^6 - 1^6) + ((x^7)^5 - 1^5) + ((x^7)^4 - 1^4) + ((x^7)^3 - 1^3) + ((x^7)^2 - 1^2) + (x^7 - 1).$$

Број у свакој од шест заграда је према наведеној чињеници дељив бројем $x^7 - 1$. Како је још и $x^7 - 1 = (x-1)A$, то је сваки од бројева у наведеним заградама дељив и бројем A. Овим смо доказали да је број $B - 7$ дељив са A. Одавде, како је $A > 7$, имамо да је тражени остатак при дељењу броја B бројем A баш једнак 7.

4. Нека је E тачка на дужи AD, таква да је $AE = 2$. Тада је $AB = AE = 2$ и $\angle BAE = 60°$, па је троугао BEA једнакокрак са углом при врху од $60°$. Одавде закључујемо да је он једнакостраничан. Докажимо сада да су троуглови BED и DCB подударни. Заиста, како је $\angle BED = 180° - \angle BEA = 180° - 60° = 120° = \angle DCB$, $ED = 1 = CB$ и $BD = DB$, закључујемо да су троуглови BED и DCB подударни (ССУ: по две стране једнаке и једнаки њима одређени углови). Користећи ову чињеницу, лако налазимо да је $\angle ADC + \angle DCB = \angle ADB + \angle BDC + \angle DCB = \angle CBD + \angle BDC + \angle DCB = 180°$, одакле закључујемо да су странице AD и BC паралелне. Овим је доказано да је четвороугао $ABCD$ трапез.

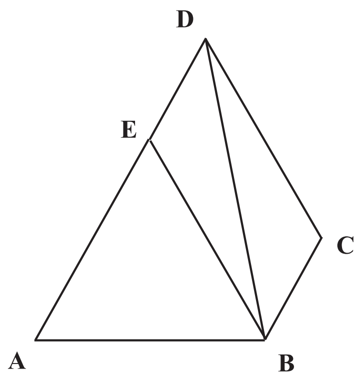


Figure 1:

5. Претпоставимо да број $11\cdots1$ има n, а број $22\cdots2$, k цифара. Пошто је $10^m - 1 = 99\cdots9$ (m деветки), закључујемо да је $11\ldots1 = \frac{1}{9}(10^n - 1)$, $22\ldots2 = \frac{2}{9}(10^k - 1)$ и $33\ldots3 = \frac{3}{9}(10^{2007} - 1)$. Одавде се добија $\sqrt{\frac{1}{9}(10^n-1) - \frac{2}{9}(10^k-1)} = \frac{3}{9}(10^{2007} - 1)$, односно после сређивања и квадрирања

$$10^n - 2 \cdot 10^k = 10^{4014} - 2 \cdot 10^{2007}.$$

Ова једнакост је еквивалетна са $10^n + 2 \cdot 10^{2007} = 10^{4014} + 2 \cdot 10^k$, одакле се (јединственост декадског записа) закључује да је $n = 4014$ и $k = 2007$. Алтернативно се до овог закључка може доћи и овако. Из $10^k(10^{n-k} - 2) = 10^{2007}(10^{2007} - 2)$ закључујемо да је лева страна дељива са 5^k, а није са 5^{k+1}, док је десна дељива са 5^{2007}, а није дељива са 5^{2008}.

Други разред – Б категорија

1. Једно решење се добија ако се следећа таблица периодично продужи на целу раван.

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

2. Како је $AK^2 = AC^2 = AD \cdot AB$ тј. $\frac{AK}{AD} = \frac{AB}{AK}$, следи да су троуглови ADK и ABK слични, па је $\angle ADK = \angle AKB$. Нека је AM пречник описане кружнице око троугла ABK и L пресечна тачка правих AM и DK. Четвороугао $AKMB$ је тетивни па је $\angle MAB = 90° - \angle AMB == 90° - \angle AKB = 90° - \angle ADK$ одакле следи да је $\angle MAB + \angle ADK = 90°$ па је $\angle ALD = 90°$.

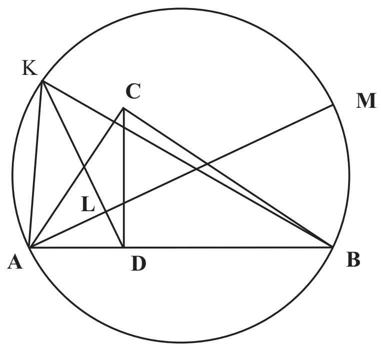


Figure 2:

3. Имамо да је $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$, где су α и β неки природни бројеви. Зато је једначина $f(f(f(x))) = 0$ еквивалентна са $(f(f(x)) - \alpha)(f(f(x)) - \beta) = 0$. Посматрајмо сада једначину $f(f(x)) = \alpha$. Лако је установити да једначина $f(x) = \alpha$ има два реална и различита решења (јер је њена дискриминанта једнака $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha > 0$). Нека су то x_1 и x_2. Отуда је једначина $f(f(x)) = \alpha$ еквивалентна са $f(x) = x_1 \vee f(x) = x_2$. Означимо са D_1 и D_2 дискриминанте последње две једначине. Важи $D_i = (\alpha - \beta)^2 + 4x_i$, $i = 1, 2$. Користећи

Виетове формуле, знамо да је $x_1 + x_2 = \alpha + \beta$, као и $x_1x_2 = \alpha(\beta - 1)$. На основу последњих веза лако проверавамо да је

$$D_1 + D_2 = 2(\alpha-\beta)^2 + 4(x_1 + x_2) = 2(\alpha-\beta)^2 + 4(\alpha+\beta) > 0, \qquad (1)$$

као и

$$\begin{aligned} D_1 \cdot D_2 &= (\alpha-\beta)^4 + (x_1 + x_2)(\alpha-\beta)^2 + 16x_1x_2 = \\ &= (\alpha-\beta)^4 + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 + 16\alpha(\beta-1) \geq 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Знак једнакости у (2) важи акко је $\alpha = \beta = 1$. Отуда, на основу (1), закључујемо да је у том случају један од бројева D_1 и D_2 једнак нули, док је други позитиван. Зато тада једначина $f(f(x)) = \alpha$ има 3 реална и различита решења. Ако у (2) не важи знак једнакости, на основу (1) и (2) лако закључујемо да су дискриминанте D_1 и D_2 позитивне, те једначина $f(f(x)) = \alpha$ има 4 реална и различита решења.

Из свега наведеног закључујемо да једначина $f(f(f(x))) = 0$ има 8 реалних и различитих решења у случају $\alpha \neq \beta$, у случају $\alpha = \beta \neq 1$ њихов број је 4, док за $\alpha = \beta = 1$ има 3.

4. Нека је n неки природан број за који важи услов задатка. Лако је видети да је $x_n^2 + x_n - 2 = x_n^2 - 1 + x_n - 1 = (x_n - 1)(x_n + 2)$. Како $27 \mid (x_n - 1)(x_n + 2)$ закључујемо да $9 \mid (x_n - 1)$ или $9 \mid (x_n + 2)$. Са друге стране, ако је један од бројева $x_n + 2$, односно $x_n - 1$ дељив са 9, онда је он дељив и са 3, те како је разлика наведених бројева једнака 3, закључујемо да је и други број дељив са 3. Овим смо доказали да важи

$$27 \mid x_n^2 + x_n - 2 \iff ((9 \mid x_n + 2) \vee (9 \mid x_n - 1)) \iff ((x_n \equiv_9 7) \vee (x_n \equiv_9 1)). \qquad (1)$$

Коришћењем чињенице да неки природан број при дељењу са 9 даје исти остатак као и његов збир цифара, налазимо да је

$$x_n \equiv_9 1 + 2 + ... + n \equiv_9 \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (2)$$

Када природан број n узима редом остатке $0, 1, 2, ..., 8$ при дељењу са 9, није тешко утврдити да број $\frac{n(n+1)}{2}$ при дељењу са 9, редом даје остатке $0, 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 0$.

Одавде, користећи (1) и (2) добијамо да су решења бројеви n који при дељењу са 9 дају један од остатака $1, 4$ или 7. Ово су заправо они природни бројеви n који при дељењу са 3 дају остатак 1.

5. *Решење 1:* Сређивањем леве стране неједнакости добијамо

$$\log_2(\log_4 x) + \log_2[(\log_2 x)^{1/2}] = \log_2(\log_4 x \cdot (\log_2 x)^{1/2}) = \log_2(\frac{1}{2}(\log_2 x)^{3/2})$$

Одавде следи да је наша неједнакост задовољена ако и само ако важи $(\log_2 x)^{3/2} \leqslant 8$ тј. ако је $\log_2 x \leqslant 4$. Према томе x је решење ако и само ако је $1 < x \leqslant 16$.

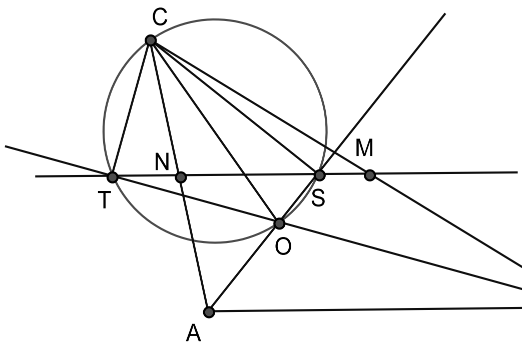
Решење 2: Знајући да су логаритми (за основу > 1) растуће функције, као и да је збир две растуће функције опет растућа функција, закључујемо да је и функција са леве стране посматране неједнакости строго растућа функција. Пошто се за $x = 16$ добија једнакост, закључујемо да је x решење ако и само ако је $x \in (1, 16]$.

Трећи разред – Б категорија

1. *Решење 1:* За $n = 2k$ укупан број тражених партиција је $S_2^{2k} = \binom{2k}{1} + \binom{2k}{2} + \ldots + \binom{2k}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = 2^{2k-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$, а за $n = 2k+1$ број начина је $S_2^{2k+1} = \binom{2k+1}{1} + \binom{2k+1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\binom{2k+1}{k} = 2^{2k} - 1 = 2^{n-1} - 1$.

Решење 2: Елемент 1 скупа P мора се налазити у тачно једном од скупова A и B. Нека је A тај скуп. Свих таквих подскупова има 2^{n-1}, па самим тим и партиција $\{A, B\}$ које се траже јер је $B = P \setminus A$. Међутим у случају $A = P$ скуп B је празан што није дозвољено. Отуд и одговор $2^{n-1} - 1$.

2. Докажимо прво следеће помоћно тврђење. Симетрала угла $\sphericalangle CAB$ сече средњу линију MN троугла ABC у тачки S за коју важи да је $\sphericalangle ASC = 90^o$.



Заиста, посматрајмо троугао ASC. Тачка N је средина странице AC, значи $AN = NC$. $\sphericalangle NSA = \sphericalangle SAB$ (углови са паралелним крацима) $\sphericalangle NAS = \sphericalangle SAB$ (симетрала угла) Одавде следи да је $\sphericalangle NSA = \sphericalangle SAN$, па је троугао NAS је једнакокраки, па следи да је $NS = NA$. Значи тачка N је центар описаног круга око троугла ACS, па је троугао ASC правоугли. Значи $\sphericalangle ASC = 90^o$ што завршава доказ помоћног тврђења.

На основу леме следи да је $\sphericalangle ATC = 90^o$ и $\sphericalangle ASC = 90^o$. Значи $OSCT$ је тетивни четвороугао. $\sphericalangle OCT = \sphericalangle TSO$ (периферијски углови) $\sphericalangle TSO = \sphericalangle SAB$ (углови са паралелним крацима). Коначни закључак је да важи $\sphericalangle OCT = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$.

3. Како је $-1 \leq \cos x \leq 1$, то важи $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$. Одавде, како је $x = 1 - \cos x$, закључујемо да су сва решења дате једначине из сегмента $[0, 2]$. Ако је $x \in$

$(0, \frac{\pi}{2})$, онда су бројеви $\sin x$ и $\cos x$ из интервала $(0,1)$, па је $\sin x > \sin^2 x$ и $\cos x > \cos^2 x$. Такође, када је x из поменутог интервала, важи неједнакост $x > \sin x$. Зато би за такве вредности x важило

$$x + \cos x > \sin x + \cos x > \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Одавде закључујемо да полазна једначина у интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$ нема решења. Размотримо сада случај када је $x \in [\frac{\pi}{2}, 2]$. За те вредности x важи

$$x + \cos x \geq \frac{\pi}{2} + \cos x \geq \frac{\pi}{2} + \cos 2 > \frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi - 1}{2} > 1,$$

па једначина и на сегменту $[\frac{\pi}{2}, 2]$ нема решења. Како је $x = 0$ решење једначине, то из свега наведеног следи да је то и једино решење.

4. *Решење 1:* Потражимо функцију $f(x)$ у облику $f(x) = \sin ax$.

$$f(x) + f(x+2) = \sin ax + \sin a(x+2) =$$

$$2\sin\frac{2a(x+1)}{2} \cdot \cos a = 2\sin a(x+1) \cdot \cos a = \sin a(x+1).$$

Одавде видимо да је тражена једнакост испуњена ако је $\cos a = \frac{1}{2}$ нпр. ако је $a = \frac{\pi}{3}$. Дакле једна функција која има тражена својства је $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3}x)$.

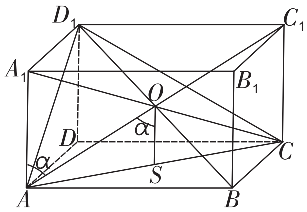
Решење 2: Из услова $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$ закључујемо да ако су познате вредности функције $f(x)$ у интервалу $[0,2)$ да су познате њене вредности и у интервалу $[2,3)$. Слично, из услова $f(x) = f(x+1) - f(x+2)$ закључујемо да ако је функција позната на интервалу $[0,2)$ онда је она позната и на интервалу $[-1,0)$. Ово расуђивање се може пренети на било који интервал $[m, m+2)$ за $m \in \mathbb{Z}$. Дефинишимо функцију $f(x)$ на следећи начин. На интервалу $[0,2)$ (случај $m = 0$) изаберимо било коју функцију која није константна. Продужимо ту функцију на интервале $[1,3)$ и $[-1,+1)$ сагласно горњем правилу. Наставимо поступак (узимањем $m = 1$ и $m = -1$, након тога $m = 2$ и $m = -2$ итд.). На овај начин долазимо до функције која је дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$.

Покажимо да она има тражено својство тј. да важи

$$f(y+2) + f(y) = f(y+1) \tag{1}$$

за сваки $y \in \mathbb{R}$. Нека је $m = [y] - 2$ у случају $y \geqslant 0$, у супротном узимамо $m = [y]+1$. У првом случају вредност $f(y)$ је одређена (сагласно услову (1)) уз помоћ познатих (претходно дефинисаних) вредности $f(y-1)$ и $f(y-2)$ из интервала $[m, m+2)$ а у другом уз помоћ већ дефинисаних вредности $f(y+1)$ и $f(y+2)$ такође из интервала $[m, m+2)$. Одавде закључујемо (индукција) да ова функција заиста има тражена својства.

5. *Решење 1:* Нека је O центар квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и S пресек дијагонала AC и BD стране $ABCD$ (Слика Б3-1). Тада је права OS нармална на раван $ABCD$. Троугао AOC је једнакокраки, јер је $OC = OA$. Како је $OS \parallel AA_1$, следи да је $\sphericalangle AOS = \sphericalangle OAA_1 = \alpha$ и $\sphericalangle AOC = 2\alpha$. Аналогно долазимо до закључка да је $\sphericalangle AOD_1 = 2\sphericalangle OAB = 2\beta$ и $\sphericalangle COD_1 = 2\sphericalangle OAD = 2\gamma$. Према томе углови при врху O тетраедра $OACD_1$ једнаки су 2α, 2β и 2γ. Како је $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 2\pi$, добијамо $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.



Решење 2: Неједнакост $\alpha + \beta < \pi - \gamma$ је, у светлу чињенице да су сви углови α, β, γ оштри, еквивалетна са $\cos(\alpha + \beta) > \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$. Последња неједнакост је еквивалетна са

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma < \sin\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

Нека су a, b, c дужине ивица квадра. С обзиром да се углови α, β, γ не мењају при хомотетији са центром у A, без губитка општости можемо претпоставити да је $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Неједнакост (2) је еквивалетна са

$$ab + \sqrt{1 - a^2 - b^2} > \sqrt{1 - a^2} \cdot \sqrt{1 - b^2}. \tag{3}$$

Последња неједнакост је (квадрирањем обе стране) еквивалетна очевидној неједнакости

$$1 - a^2 - b^2 + a^2b^2 + 2ab\sqrt{1 - a^2 - b^2} > (1 - a^2)(1 - b^2).$$

Четврти разред – Б категорија

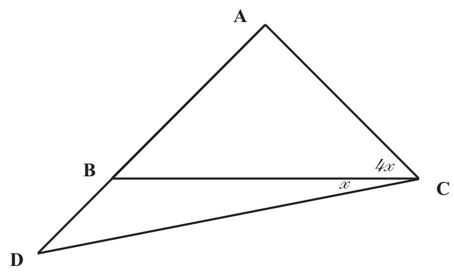
1. Видети решење првог задатка за трећи разред Б категорију.

2. Нека је $\sphericalangle DCB = x$. Тада је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 4x$, а из одговарајућих синусних теорема следи $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin 4x}{\sin 8x}$ (из $\triangle ABC$) и $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (из $\triangle DCA$). Како је $AB = AC$ и $AD = BC$, следи

$$\sin 4x \sin 5x = \sin 3x \sin 8x \Leftrightarrow \sin 4x \sin 5x = 2\sin 4x \cos 4x \sin 3x \Leftrightarrow$$

$$(\text{јер је } x \neq k \cdot 45^\circ, k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin 5x = 2\cos 4x \sin 3x \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 7x - \sin x \Leftrightarrow$$



$$\sin x = \sin 7x - \sin 5x = 2 \sin x \cos 6x \Leftrightarrow (\text{јер је } x \neq k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos 6x = \frac{1}{2},$$

тј. $6x = 60^\circ$, односно $x = 10^\circ$, одакле је $\sphericalangle ABC = 40^\circ$.

Напомена: За разлику од задатка бр. 2 (3. разред, А категорија), овде се не тражи додатни доказ да троугао који задовољава услове задатка и код кога је $\sphericalangle ABC = 40^\circ$ заиста и постоји.

3. Из услова $a \cdot b = 10^{20}$ закључујемо да за неке ненегативне целе бројеве p, q, r, s важи $a = 2^p 5^q$ и $b = 2^r 5^s$. Из услова $a \mid b^2$ следе неједнакости $p \leqslant 2r$ и $q \leqslant 2s$. Слично, из услова $b^2 \mid a^3$ следе неједнакости $2r \leqslant 3p$ и $2s \leqslant 3q$. У општем случају из услова $a^{2n-1} \mid b^{2n}$ и $b^{2n} \mid a^{2n+1}$ закључујемо да важе неједнакости

$$p \leqslant \frac{2n}{2n-1} r,\ q \leqslant \frac{2n}{2n-1} s \quad \text{и} \quad r \leqslant \frac{2n+1}{2n} p,\ s \leqslant \frac{2n+1}{2n} q. \tag{1}$$

Покажимо да одавде следе неједнакости $p \leqslant r, q \leqslant s, r \leqslant p$ и $s \leqslant q$ одакле и следи тражени закључак да је $p = r$ и $q = s$.
На пример прва неједнакост следи из $p \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n-1} r = r$ а сличан аргумент даје и остале неједнакости. Елементарно (без употребе лимеса) се до истог закључка може доћи и на следећи начин. Приметимо да бројеви p и r нису већи од 20 и да ни један од њих није 0 (што следи из (1)). Из (1) следи неједнакост $\frac{19}{20} < \frac{r}{p}$ одакле (у светлу чињенице $p \leqslant 20$) следи $p \leqslant r$. Остале неједнакости се могу доказати на сличан начин.

4. Претпоставимо супротно, тј. да су све нуле полинома $P(x)$ рационални бројеви. Нека су то $\frac{p_i}{q_i}$, $i = 1, 2, 3$. Тада (на основу теореме о рационалним нулама полинома са целобројним коефицијентима) $p_i \mid d$, и $q_i \mid a$, $i = 1, 2, 3$, па су сви бројеви p_i, q_i, $i = 1, 2, 3$ непарни. Коришћењем Виетових формула имамо

$$-\frac{b}{a} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2}{q_1 q_2 q_3},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{p_1}{q_1}\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_1}{q_1}\frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1 p_2 q_3 + p_2 p_3 q_1 + p_1 p_3 q_2}{q_1 q_2 q_3}.$$

Бројеви $\alpha = p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2$, $\beta = p_1p_2q_3 + p_2p_3q_1 + p_1p_3q_2$ и $\gamma = q_1q_2q_3$ су непарни. Отуда, како је и a непаран број, из $-\frac{b}{a} = \frac{\alpha}{\gamma}$ лако закључујемо да је број b непаран. Аналогно, из $\frac{c}{a} = \frac{\beta}{\gamma}$ се добија да је и c непаран број. Ово је у супротности са условом да је bc парно.

Аналогно тврђење у случају да је $a \cdot d$ парно и $b \cdot c$ непарно не важи. Један пример полинома који сведочи о овој чињеници је $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$ (нуле овог полинома су рационални бројеви $-\frac{3}{2}$, 0 и 1).

5. Нормална пројекција овог тетраедра на произвољну раван може бити троугао или четвороугао. Ако је пројекција троугао, онда се највећа вредност површине пројекције достиже у случају када је једна страна тетраедра паралелна равни на коју се тетраедар нормално пројектује и износи $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ако је пројекција четвороугао са дијагоналама d_1 и d_2, онда је површина те пројекције једнака $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где је α угао између дијагонала. Како су дијагонале d_1 и d_2 нормалне пројекције двеју ивица тетраедра, то је $d_1 \leqslant a$ и $d_2 \leqslant a$. Максимална вредност у овом случају се достиже ако је $d_1 = d_2 = a$ и ако су дијагонале нормалне, и износи $\frac{a^2}{2}$. Ова вредност се постиже када су две мимоилазне ивице тетраедра паралелне равни на коју се тетраедар нормално пројектује. Како је $\frac{a^2}{2} > \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, закључујемо да је $\frac{a^2}{2}$ тражена максимална вредност.