Дидактичко-методска
Нумерусова библиотека **3**

Јоже Улчар

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА СО ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

Скопје, 1995

Оваа книга е фототипско издание по иницијатива на Природно-математички факултет - Институт за математика, по повод 50-годишнината од неговото постоење.

Издавач
Друштвото на математичарите на град Скопје -
Р.Е. "Нумерус" - Скопје

Главен уредник
Јово Стефановски

Подготвил и уредил за печат
д-р Драган Димитровски

Технички уредници
Коста Мишовски
Петре Крстески
Натка Кречева

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
"Климент Охридски", Скопје

516+512.5(075.8)

УЛЧАР, Јоже
Аналитичка геометрија со векторска алгебра / Јоже Улчар. - [2. изд.]. - Скопје : РЕ Нумерус, 1995. - 508 стр. : илустр. ; 24 см. - (Дидактичко-методска Нумерусова библиотека)

Тираж 600. - Библиографија: стр. III-V.

ISBN 9989-646-01-5

а) Аналитичка геометрија - Учебници б) Векторска алгебра - Учебници

ПРЕДГОВОР КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Книгата Аналитичка геометрија со векторска алгебра од проф. Јоже Улчар е прв универзитетски учебник на македонски јазик, и прв универзитетски учебник печатен на висок печат во Република Македонија. Како таков, тој има определено заслужно место во темелите на македонската култура и историско значење за развитокот на математичките и техничките науки кај нас. На него се школувале генерации наставници и професори по математика, кои во второто и третото колено создале генерации на техничка и природно-научна интелигенција, која толку многу стори за изградбата и напредокот на нашата Република. Славејќи го јубилејот од 50 години на Филозофскиот и Природоматематичкмиот факултет, наша должност е да го одбележиме настанот со преиздавањето на ова класично дело, со кое започна македонската учебникарска традиција по математика, која денес се гордее со десетици учебници и книги, научни и популарни списанија.

Бидејќи традицијата е составен дел на секоја нација, во земјата на Свети Кирил и Методиј и на првата славјанска писменост, издавањето на дела што значат почетоци на епоха на математичка или техничка култура; е света должност, зошто негувањето на традицијата значи одржување на македонскиот дух и на самото наше битие.

Одбележувајќи ја и 80-годишнина од раѓањето на Јоже Улчар, и 30 години од неговата смрт, им должиме благодарност на сите наши учители, градители на македонската нација, научници, професори. Јоже Улчар беше еден од најголемите.

проф. д-р. Драган Димитровски

НАШИОТ ПРОФЕСОР ЈОЖЕ УЛЧАР

Се ближи зимскиот семестар на учебната 1996/97 година, кога Република Македонија ќе слави еден од своите значајни јубилеи 50 години од основањето на првите македонски факултети: Филозофскиот и Природно-математичкиот.

Затоа математичарите од нашата Република треба да се потсетат пригодно на два одамна одминати моменти од своето педесетгодишно организирано дејсвување.

Првиот, кога пред педесет години, на 16 декември во 1946 година, професорот Драгослав Митриновиќ и универзитетскиот предавач Јоже Улчар ги одржаа првите предавања за студентите по математика на првата високошколска институција во Македонија - Филозофскиот факултет.

Вториот, кога пред триесет години, на 16 јануари во 1967 година почина редовниот професор на Природно-математичкиот факултет Јоже Улчар; се потсетија на деновите кога професорот Улчар ги одржа своите последни лекции...

Македонскиот математичар Јоже Улчар, по потекло Словенец, е роден на Блед во 1915 година. Своето школување го поминува во Словенија; учи гимназија во Крањ, а дипломира математика при филозофскиот факултет во Љубљана во 1938 година.

По дипломирањето работи како професор по математика во средните школи во Мурска Собота и Призрен, а потоа доаѓа во нашите краишта уште пред војната; во Македонија го поминува скоро целиот свој работен век.

Прво е професор во гимназиите во Струмица, Битола и Прилеп, а во 1946 година е поставен за прв наставник по математика, во звање универзитетски предавач, на тукушто формираниот Филозофски факултет во Скопје. Наставно-научниот совет на Филозофскиот факултет, а потоа и Советот на Природно-математичкиот факултет, во 1954 година го избира за доцент, во 1959 година - за вонреден професор, а во 1965 година и за редовен професор.

Покрај редовната работа на факултетот професорот Јоже Улчар ја организира и ја води повеќе години наставата по геометрија на Вишата педагошка школа, Електро-машинскиот и Архитектонско-градежниот факултет; соработува со Министерството за просвета и Заводот за школство врз поставување, развивање и следење на наставата по математика во средните училишта и пишува, преведува и рецензира учебници за таа настава; се ангажира на повеќе наврати во управните органи на Друштвото на математичарите и физичарите од НР Македонија; го иницира, осмислува и го спроведува (со други членови на Институтот) во учебната 1954/55 година првиот Републички натпревар по математика за учениците од средните училишта во Македонија; посетува средни училишта при што помага, советува и ги инспектира своите завршени студенти итн.

Професорот Улчар, во исто време, активно се ангажира во управните и самоуправните органи на Математичкиот институт, Факултетот и Универзитетот; член е на Универзитетскиот совет, а во периодот 1963-1965 година е проректор на Универзитетот.

Поради малиот број наставници, првите години по започнувањето на работата на Филозофскиот факултет, Јоже Улчар држи настава по повеќе предмети (во тие години држи осум различни курсеви). Подоцна се ориентира кон геометријата и, сè до последните свои предавања, главно, ги води геометриските дисциплини, што самиот ги конципира, оформува, развива. Неговите студенти го паметат по прекрасните лекции по Аналитичка геометрија, Проективна геометрија, Диференцијална геометрија, Елементарна геометрија, Нацртна геометрија.

Заедно со растежот на Математичкиот институт и тој се развиваше и растеше како научник и стручњак, како извонреден предавач и природно надарен методичар, кој со успех на голем педагог можеше да го открива богатството на геометријата и да ги објасни и најсуптилните финеси на предметите што ги водеше, и кој, како што го паметат неговите студенти, секогаш жалеше што "не стигнал да го предаде она најинтересното".

Покрај мошне плодната и разновидна наставна дејност професорот Јоже Улчар остави забележителна трага и во математичката публицистичка дејност, што е посебно важно за математичкиот живот во Македонија. Тој објави 23 научни и стручни трудови и учебници: во "Зборникот" на Факултетот и "Билтенот" на Друштвото, коишто извесно време и ги уредуваше, како и во други југословенски и странски едиции.

Во историјата на развитокот на математичката научна мисла во Македонија ќе биде забележано името на професорот Јоже Улчар не само по неговиот придонес во научното и стручното творештво туку и по тоа што меѓу првите објавени трудови по математика на македонски јазик може да се најдат и негови статии и преводи.

Се сеќавам, како ученик во гимназијата се служев со учебникот по геометрија од Киселев, преведен на македонски јазик (издание од 1946 година?) и бев зачуден што на последната страница пишуваше: превел Јоже Улчар. Мислев тогаш дека тоа или е псевдоним на некој нашинец или е печатна грешка (просто си велев, тоа е некој Јоле, Јоне или Јове). Сè уште и денеска се потсетувам на смеата на професорот Улчар, кога, повеќе години подоцна, му раскажував за тоа.

д-р Живко Мадевски

МЕСТО ПОГОВОР

Нумерус - издавач и афирматор на математиката

Нумерус е популарно математичко списание во Република Македонија наменето за учениците од основното училиште. Основано е 1975 година од група ентузијасти - наставници и професори по математика, повеќето од кои биле ученици ~~на~~ професорот Јоже Улчар. Иницијатор за издавање на списанието е Душко Ковачев.

Во оваа година, кога славиме 20-годишен јубилеј на списанието, должни сме да му оддадеме признание на овој скромен и работлив човек.

Денес Нумерус е списание со најголем тираж во Република Македонија, од 18.000 примероци по број. Излегува 4-пати годишно и допира буквално до сите основни училишта во Македонија. Ова списание е составен дел на секојдневната математичка настава и математичкиот живот во Републикава, и даде огромен придонес во образованието по математика, толку потребно во современиот живот.

Нумерус прерасна, од популарно списание наменето за учениците од III до VIII одделение, до една вистинска издавачка куќа која издава бројна литература, од контролни писмени работи па се до повеќе изданија наменети за надарените ученици по математика. Освен тоа, Нумерус е и непосреден организатор на скоро сите најважни математички настани во Републикава, меѓу кои да наведеме само 19 училишни, регионални и републички натпревари по математика за основното образование, голем број подготвителни курсеви за средното образование, специјални предолимписки подготовки итн.

Како непосреден пример за успехот е што некои од учениците ја афирмираа нашата држава и во светски рамки, што за нас денес е особено значајно.

Поздравувајќи ја иницијативата, Нумерус да издава и учебници за високошколската настава, со радост констатираме дека Нумерус станува една значајна македонска издавачка куќа специјализирана за математика и информатика, па од сѐ срце му го честитеме јубилејот.

проф. д-р Драган Димитровски,
Природно-математички факултет
- Институт за математика - Скопје

УНИВЕРЗИТЕТ ВО СКОПЈЕ

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА
СО
ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

ЈОЖЕ УЛЧАР

ИЗДАНИЕ НА РЕКТОРАТОТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ
ВО СКОПЈЕ
1958

ПРЕДГОВОР

Оваа книга им е наменета на студентите од математичката и физичката група од I и II семестар, кои веќе неколку години инсистираат да се издадат предавањата по аналитичната геометрија што ги слушаат во првата учебна година.

Книгата е разделена во два дела. Во првиот дел — „Вектори и нивната примена во геометријата" — е обработена векторската алгебра. Во вториот дел — „Криви и површини" — се изучувани, главно, оние криви и површини што се разгледуваат обикновено во основните курсеви по аналитична геометрија: правата и кониките во рамнината, и рамнината и квадриките во просторот.

Сè до претпоследната глава се обработува аналитичната геометрија во *реалнаша* афина рамнина одн. простор. Тоа е сторено намерно, и покрај тоа што тоа бара поголема опширност во излагањето, за да се запознаат студентите-почетници прво основно со раелните односи во рамнината одн. просторот. Прерано воведување на комплексните броеви во аналитичното излагање на геометријата би можело да биде штетно. Затоа воведувањето на комплексната афина рамнина и на комплексниот афин простор е оставено за последната глава, во која се изучени подробно кривите од втор ред и површините од втор ред.

Исто така не се воведени бескрајните елементи. Тоа е оставено за курсот по проективна геометрија.

Во излагањето се одделени, посебно во секоја глава, афините поими и теореми од метричните. Затоа е даден, во гл. VI, и поимот за класификацијата на геометриските особини според групниот принцип.

Во последната глава е извршена полна афина и метрична класификација на површините од втор ред, ползувајќи ја само познатата метода на одделувањето на квадрати.

Кон основниот текст се додадени извесни дополненија и примени, печатени во петит. Покрај другото дадена е геометриската теорија на оние системи линеарни равенки што се употребувани во текстот — теоријата на системите од две и три равенки, и на системата од четири хомогени равенки со четири непознати. При читањето овие пасуси можат и да се испуштат; излагањето е разбирливо и без нив.

На првиот дел му е дадено во книгата сравнително многу место, повеќе од оној минимум што би бил нужен за излагањето на аналитичната геометрија по векторска метода. Тоа е направено затоа што, спрема сегашната програма по геометрија на Филозофскиот факултет во Скопје, во изучаваните геометриски дисциплини ни е поставено за цел, освен да проучиме низа геометриски факти, да се запознаеме основно и со три важни помошни средства: во аналитичната геометрија — со векторската алгебра, во проективната геометрија — со сметањето со матриците, во диференцијалната геометрија — со тензорското сметање.

При составувањето на оваа книга е користена литературата, дадена на крајот на книгата.

Ракописот го прочитаа унив. проф. д-р Станко Билински и унив. доцент д-р Благој Попов, на кои им благодарам на корисните сугестии што ми ги дадоа.

J. У.

Скопје, април 1954 г.

Прв дел

ВЕКТОРИ И НИВНАТА ПРИМЕНА ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

ГЛАВА I

УВОД ВО ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

§ 1. Скаларни и векторски величини. Нивното геометриско претставување.

Од елементарна геометрија ни се познати разни величини кои се наполно определени со нивниот мерен број, при определена единица мерка. Такви величини се на пр. *должина* на отсечката, *површина* на геометриската слика, *просторнина* на геометриските тела и сл. Навистина, при еднаш избрана единица мерка, мерниот број ја определува наполно секоја од наброените величини.

Но сретнуваме, нарочно во механиката, и такви величини кои со мерниот број не се наполно определени. Такви величини се на пр. *силата*, *брзината*, *забрзувањето* и *преместувањето*. За да биде која и да е од овие величини наполно определена, потребно е да се знае освен нивното нумерично значење, т. е. бројот на килограмите, бројот на метрите во секунда, итн., уште и правецот и смерот.

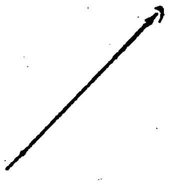
Овие два вида величини меѓусебно битно се разликуваат. Затоа носат и различни имиња. Првите ги викаме *скаларни* величини, а вторите *векторски*.

Скаларни величини се оние величини за чие што определување е доволен само мерен број, а векторски величини се оние величини кои се определени наполно со мерниот број, правецот и смерот.

Броевите ќе ги наречуваме и *скалари*.

Секоја скаларна величина можеме геометриски да ја претставиме со *отсечка* чиј што мерен број е еднаков на мерниот број на соодветната скаларна величина. На пр. величината „маса од 5 тони" можеме да ја претставиме геометриски со отсечка долга 5 см, и сл.

За геометриско репрезентирање на една векторска величина отсечката, очигледно, не стига, бидејќи таа само го покажува нејзиниот мерен број. Зато на таа отсечка треба да ѝ додадеме уште определен правец и смер. Таква отсечка, на која ѝ е



Сл. 1

определен смерот и правецот (сл. 1), се вика *ориентирана отсечка* или *вектор*.

§ 2. Векторска алгебра

Научната дисциплина која ги изучува векторите се вика *векторска алгебра*. Името „алгебра" е оправдано со тоа што во оваа дисциплина ќе дефинираме такви операции над векторите кои ќе имаат наполно аналогни особини како што ги имаат операциите (собирање, вадење,...) над броевите во обикновената алгебра. Оваа последнава, за разлика од векторската, ја викаме уште и *скаларна алгебра*.

Скаларната алгебра и аритметиката изучуваат броеви, односно сè она што се изградува на поимот за број, без оглед на тоа каков *конкретен смисол* можат да имаат броевите, т. е. дали се добиени како резултат на мерењето на некои величини, како резултат на броењето на некои обекти или сл. Се разбира, и векторската алгебра ќе ја строиме без оглед на тоа какви конкретни величини претставуваат векторите.

Векторската алгебра, значи, *изучува вектори, апстрахирајќи го при тоа конкретното значење на векторите.*

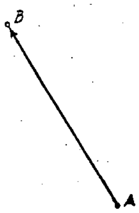
Нам векторската алгебра ќе ни служи пред сè како помошен апарат со кој ќе се служиме при изучувањето на аналитичната геометрија. Зградата на векторската алгебра ќе ја градиме постепено, онака како што ќе е удобно за аналитичната геометрија. А во таа изградба прва наша задача ќе е да го доуточниме поимот за вектор.

§ 3. Вектор

1. Дефиниција на вектор. Кога дефинираме некој нов поим, тогаш, се разбира, на смееме да користиме никаков поим кој математички не би бил веќе дефиниран. Но при провизорната дефиниција за вектор во § 1 ние користевме поими кои би требало прво да се дефинираат. Тоа се поимите за правец и смер. Затоа даваме сега за вектор една друга дефиниција која не ќе трпи од горе спомнатиот недостаток. Дефиницијата гласи:

Една отсечка, определена со своите крајни точки, од кои едната се смета како прва, а другата како втора, е вектор.

Првата точка ќе ја викаме уште и *почетна*, а втората — *крајна* точка на векторот. Ако почетната точка (почеток) е A, а крајната (крајот) B, тогаш векторот ќе го бележиме со ознаката $\overrightarrow{AB}$.



Сл. 2

Графички ќе го претставиме векторот $\overrightarrow{AB}$ на тој начин што при нацртаната отсечка AB со една стрелка при B (сл. 2) ќе истакнеме дека B е *крајната* точка.

Должината на отсечката AB ја наречуваме *должина* на векторот $\overrightarrow{AB}$. Ќе ја означиме со знакот $|\overrightarrow{AB}|$.

Правата што минува низ A и B, заедно со сите нејзе паралелни прави, определува еден правец. За две прави кажуваме имено дека имаат ист правец, ако се паралелни. За векторот $\overrightarrow{AB}$ ќе кажеме дека има ист *правец* како правата што минува низ A и B.

Место да кажеме дека A е почетна, а B крајната точка на векторот $\overrightarrow{AB}$, ќе кажеме дека векторот $\overrightarrow{AB}$ има *смер* или *смисол* од од A кон B.

Користејќи ги горе воведените поими за должина, правец и смер кај векторите, можеме да кажеме дека:

Вектор е отсечка која има определена должина, правец и смер.

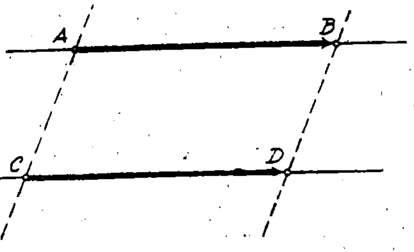
2. Еднаквост на векторите. Еден вектор е определен со својата должина, правец и смер. Два вектора кои овие три, за еден вектор карактеристични величини, ги имаат еднакви, ќе ги сметаме, по договор, за еднакви. Значи дефинираме:

Два вектори кои имаат еднакви должина, правец и смер се еднакви.

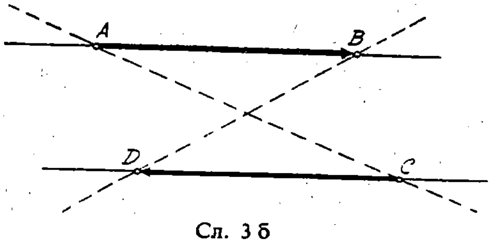
Оваа дефиниција има еден недостаток. Додека точно знаеме што значи да два вектора имаат еднакви должини и ист правец, тоа не сме дефинирале уште кога *два* вектора имаат ист смер. Треба, спрема тоа, да се договориме што ќе означува за нас тоа да два вектора со ист правец имаат ист смер.

Да претпоставиме дека два зададени вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имаат ист прадец, но да не лежат на една права. Тогаш отсечките AC и BD можат да се сечат или да не се сечат. Ако не се сечат, ќе кажеме дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имаат *ист смер*. Ако е во овој случај уште и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, тогаш отсечките AC и BD се дури и *паралелни*, бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тогаш паралелограм.

Да претпоставиме сега дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и



Сл. 3 а



Сл. 3 б

$\overrightarrow{CD}$, кои не лежат на една иста права, се еднакви. Тоа ќе го обележуваме со $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Тие имаат спрема горната дефиниција за еднаквост, значи, еднакви должини*), т. е. $\overline{AB}=\overline{CD}$, ист правец, т. е. $AB \| CD$, и ист смер, т. е. $AC \| BD$. Ако е $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, имаме, спрема тоа

$$\overline{AB}=\overline{CD},\ AB \| CD,\ AC \| BD.$$

Но последните две релации ја имаат за последица првата. Затоа горе формулираната дефиниција за еднаквост на векторите можеме да ја замениме со следната:

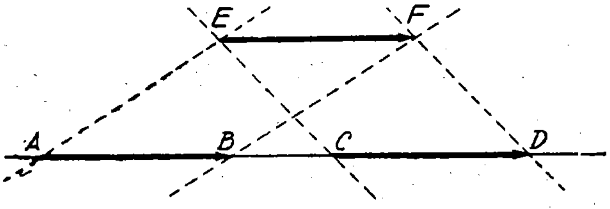
Два вектора $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$*, кои не лежат на една иста права, се еднакви, ако важи*

$$AB \| CD,\ \ AC \| BD.$$

Тукушто дефинираниот поим за еднаквост на векторите е транзитивен. Тоа значи да од $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$ следува $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$. Читателот лесно ќе го докаже тоа.

Останува уште да ја дополниме горната дефиниција за еднаквост и за вектори кои лежат на една права. Тоа ќе направиме со ова дополнение:

Два вектори кои лежат на една иста права се еднакви ако се еднакви на еден трет вектор.



Сл. 4

На сл. 4. е, на пр., $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$. Затоа е, спрема оваа дефиниција, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

На основа дефиницијата за еднаквост на векторите можеме кон еден зададен вектор да конструираме безброј нему еднакви вектори. Тие меѓу себе ќе се разликуваат по положајот на почетната точка.

Со дефинираниот поим за еднаквост на векторите ја дополнивме содржината на поимот за вектор.

---

*) Со $\overline{AB}$ ќе ја обележуваме должината на отсечката AB, а со AB правата што минува низ A и B.

3. Слободен вектор. Често пати положајот на почетната точка при векторот не игра никаква улога. Во таков случај ќе ги сметаме сите меѓу себе еднакви вектори само како одделни конкретни претставители на еден *ист* поим, на таканаречениот *слободен вектор*.

Ако во дефиницијата за вектор апстрахираме од положајот на почетната точка, доаѓаме до поимот за слободен вектор.

Слободните вектори ќе ги бележиме со ознаките **a**, **b**, **c**,... и (на сликите) со $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$...

Во иднина ние ќе го употребуваме терминот „вектор" во значењето на „слободен вектор".

Ако за некој вектор **a** *избереме* некоја точка O како негова почетна точка, т. е. ако го посматраме оној конкретен претставител од слободниот вектор **a** кој има свој почеток во O, ќе се изразуваме дека векторот **a** го *нанесовме* од таа точка и ќе пишуваме $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$. Точката A ќе ја викаме крајна точка на векторот **a**, нанесен од O.

Слободниот вектор ќе го репрезентираме геометриски со нацртување на *кој да е* негов пртеставител — ориентирана отсечка.

§ 4. Собирање на векторите

1. Дефиниција на збир од два вектора. Дадени нека ни се два вектори **a** и **b**.

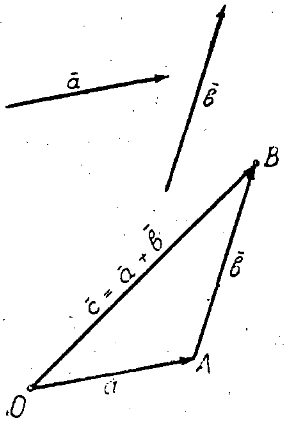
Од која да е точка O во просторот го нанесуваме векторот **a**. Имаме $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$. Од A го нанесуваме векторот **b**. Нека е $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$. Точките O и B определуваат еден вектор $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OB}$.

На основа оваа конструкција добиваме *за какви да е* два слободни вектора **a** и **b** еден точно определен вектор **c**. Добиениот вектор **c** ќе го викаме *збир* од векторите **a** и **b**. Тоа симболично ќе го означуваме со

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

Векторите **a** и **b** ќе ги наречуваме *собирци* на збирот. Самата операција, т. е. определувањето на **c** од **a** и **b** на горниот начин, ќе ја викаме *собирање* на векторите.

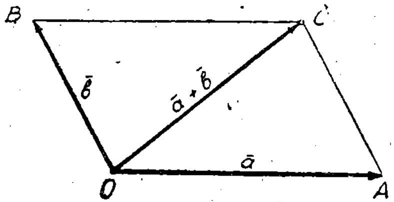
Дефиницијата за операцијата собирање кратко ќе ја викаме „*правило на триаголникот*", бидејќи векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$ и нивниот збир $\overrightarrow{OB}$ образуваат триаголник.



Сл. 5

Збир на два вектора може да се дефинира освен по „правилото на триаголникот" и по таканареченото „*правило на паралелогра-*

мой", познато од средношколскиот курс по физика. Ако именò векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ги нанесеме од една иста точка O (сл. 6), така да е $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, и го конструираме паралелограмот $OACB$, при кој OA, OB се две соседни страни, тогаш е спрема ова правило



Сл. 6

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

Навистина, од дефиницијата за еднаквост на векторите следува дека е $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$, и затоа

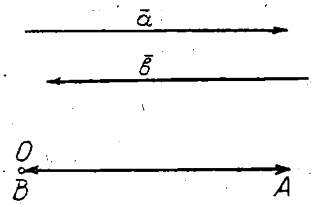
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

Бидејќи по правилото на триаголникот е $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$, тоа е $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$, што требаше да се докаже.

Ова правило на паралелограмот може да се примени, очигледно, само за вектори кои немаат ист правец.

2. Вектор нула. Векторите со ист правец ќе ги викаме *колинеарни*.

Збирот на кои да е колинеарни вектори е пак еден вектор кој е колинеарен со собирците. Исклучок прави само случајот кога сумандите се колинеарни, со еднакви должини, но со спротивни смерови. Такви вектори ќе ги викаме *спротивни*. Во тој случај кога собирците $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$ се спротивни вектори, точките O и B (сл. 7), кои спрема правилото на триаголникот го определуваат збирот $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, се поклопуваат. Во оквирот на досега изложеното, збирот на вакви вектори не е дефиниран, затоа што при дефиницијата на вектор молчејќи претпоставивме да неговиот почеток и крај не совпаднуваат. Но за да го избегнеме тој исклучок, го воведуваме поимот за вектор, при кој почетокот совпаднува со крајот. Му го даваме името „*вектор нула*", а го бележиме со $\boldsymbol{0}$. Равенството



Сл. 7

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

изразува, спрема тоа, дека векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се спротивни.

Спрема дефиницијата на векторот $\boldsymbol{0}$ и дефиницијата за збирот на два вектора следува

(I) $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}.$$

Бидејќи векторот $\boldsymbol{0}$ нема определен смер, тоа него ќе го сметаме, по дефиниција, паралелен или колинеарен со секој друг вектор.

3. Основни особини на збирот. Од правилото на паралелограмот е јасно дека векторот збир не се менува, ако се променат местата на два неколинеарни собирци $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, значи дека важи

$$\text{(II)} \qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

По правилото на триаголникот се проверува лесно дека тоа важи и за колинеарните вектори.

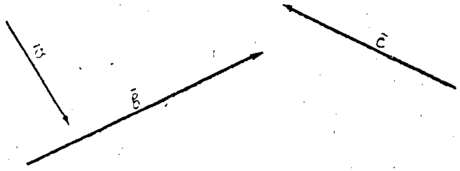
Оваа особина (II) ја викаме *комутативност* на собирањето.

Сега ќе докажеме една важна особина на три кои да е вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Нека е $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BC}$.

Ќе го конструираме прво збирот од векторите $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\boldsymbol{c}$. Имаме (сл. 8) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$. Значи

$$\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$



А сега ќе го конструираме збирот на векторите $\boldsymbol{a}$ и $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Спрема правилото на триаголникот, применето за $\triangle\ ABC$, имаме

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

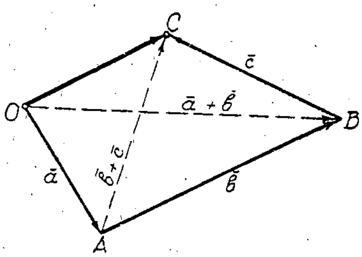
а применото на $\triangle\ OAC$,

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Векторите, еднакви на истиот вектор $\overrightarrow{OC}$, се еднакви. Затоа

$$\text{(III)} \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Оваа особина (III) се вика *асоцијативност* на собирањето на векторите.



Сл. 8

Особините (I), (II) и (III) се наполно аналогни на основните особини на собирањето на броевите во скаларната алгебра, кои и таму носат исти називи како кај нас. Од тие особини се изведуваат во скаларна алгебра, само со правилата на логиката, сите познати правила за собирање. Затоа и при собирањето на вектори можеме формално да ги применуваме сите правила кои важат во скаларната алгебра. Така собирците при збировите можеме произволно да ги преместуваме и групираме, да ги испуштаме и ставаме загради. Заградите затоа и не се потребни. Важи на пр.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a},$$

и затоа за овие збирови пишуваме просто $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Онаа улога што во скаларната алгебра ја играат броевите, различни од нула, ја играат во векторска алгебра векторите кои не се $\boldsymbol{0}$, а онаа улога што до првата дисциплина ја има бројот 0, ја има во втората векторот $\boldsymbol{0}$.

Оваа полна аналогија помеѓу особините на збирот во скаларна и векторска алгебра го оправдува изборот на терминот „собирање" за операцијата над векторите, дефинирана со правилото на триаголникот.

Пример: На основа особините (I), (II), (III) да се докаже дека важи

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}).$$

Решение: Од (II) следува

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c},$$

и, применувајќи асоцијативност (III),

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}).$$

Од обете равенства следува еднаквоста, чија валидност требаше да се докаже.

ЗАДАЧИ:

1. Да се изберат три, четири,... произволни вектори. Покажи дека конструкцијата може да се изврши на тој начин, што секој собирок го нанесуваме на крајот од предодниот, а првиот од една произволна точка O; збирот има тогаш почеток во O, а крај во крајната точка на последниот нанесен вектор. („*Правило на полигон*").

2. Да се конструира збирот на векторите чии почеток е во O, а крајните точки во темињата на еден правилен шестоаголник, впишан во еден круг со центар во O.

3. Да се докаже дека збирот на векторите чии крајни точки се во темињата на еден правилен многуаголник со парен број страни, а почетните точки им се во центарот на кругот, е векторот $\boldsymbol{0}$.

4. Истата задача како зад. 3, ако бројот на страните на правилниот полигон е непарен.

§ 5. Множење на вектор со скалар.

Прејдуваме кон определувањето на уште една операција над векторите — кон операцијата множење на вектор со број (скалар).

Прво ќе воведеме една ознака. *Должината* на едн вектор $\boldsymbol{a}$ ќе ја бележиме со $|\boldsymbol{a}|$, или — кога нема опасност од недоразумение — просто со a. Исто така ќе ја бележиме апсолутната вредност на еден број m со $|m|$.

Сега дефинираме:

Производ на векторот $\boldsymbol{a}$ *со еден (реален) број* m *е вектор со должина* $|\boldsymbol{a}|\cdot|m|$, *кој има ист смер како* $\boldsymbol{a}$ *ако е* $m>0$, *а спротивен со него ако е* $m<0$. Ќе го означуваме со $m\cdot\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{a}\cdot m$, или пократко со $m\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{a}m$. $\boldsymbol{a}$ и m се викаат *множители* на производот.

Нека е m цел позитивен број. Збирот од m собирци, еднакви на $\boldsymbol{a}$, има должина ma. Затоа е, спрема горната дефиниција,

$$\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}}_{m \text{ собирци}}=\boldsymbol{a}\cdot m,$$

што е во полна аналогија со дефиницијата за множење на природните броеви во аритметиката.

Од горната дефиниција следува понатаму

$$\boldsymbol{a}\cdot 1=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}\cdot 0=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{0}\cdot m=\boldsymbol{0}.$$

Ако еден од множителите е нула (бројот или векторот), производот е, значи, вектор нула. Но точно е и обратно. Ако е имено $m\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, треба да е $|m\cdot\boldsymbol{a}|=0$. Но од дефиницијата за производ следува $|m\boldsymbol{a}|=|m|\cdot|\boldsymbol{a}|$. За да биде $|m\boldsymbol{a}|=0$, треба, спрема тоа, да е или $m=0$, или $|\boldsymbol{a}|=0$, или $m=|\boldsymbol{a}|=0$. Значи:

За да биде производот на вектор со скалар $\boldsymbol{0}$, *потребно е и доволно, барем еден од неговите множители да биде нула.*

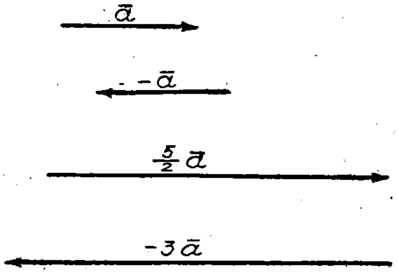
Векторот $(-1)\cdot\boldsymbol{a}$ е, спрема дефиницијата, *спротивен* на векторот $\boldsymbol{a}$. Него ќе бележиме со ознаката $-\boldsymbol{a}$, значи ставуваме

$$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

На сл. 9 се дадени неколку примери за производ на вектор и скалар.

Терминот „множење" и „производ" е оправдан со тоа што оваа операција има, како што ќе покажеме, особини кои се наполно аналогни на особините на множењето на броевите во скаларната алгебра.

Од самата дефиниција за множење на вектор со скалар произлегува наведнаж дека е



Сл. 9

(I) $\qquad m(n\boldsymbol{a})=(m\cdot n)\cdot\boldsymbol{a},$

т. е. дека важи *асоцијативноста* на множењето вектор со скалар.

Исто така, лесно се увидува точноста на релацијата

(II) $\qquad \boldsymbol{a}(m+n)=\boldsymbol{a}m+\boldsymbol{a}n,$

која ја изразува *дистрибутивноста* во однос нумеричкиот множител $(m+n)$.

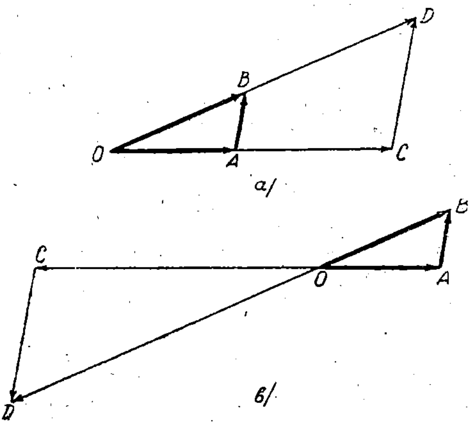
Освен овие две особини важна улога игра и *дистрибутивноста* во однос на векторскиот множител, имено:

(III) $\qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,m=\boldsymbol{a}m+\boldsymbol{b}m.$

Да би ја докажале верноста на овая еднаквост (III), ги избираме векторите $\mathbf{a}=\vec{OA}$, $\mathbf{b}=\vec{AB}$. Тогаш е $\vec{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Сега постројуваме $\triangle\ OCD$, сличен со $\triangle\ OAB$, и тоа така да е $\vec{OC}=m\cdot\vec{OA}$ (за $m>0$ сл. 10 а, за $m<0$ сл. 10 б).

Од сличноста на триаголниците следува:

$$\vec{OC}=m\cdot\vec{OA},\quad \vec{CD}=m\cdot\vec{AB},\quad \vec{OD}=m\cdot\vec{OB},$$



Сл. 10

откаде поради

$$\vec{OD}=\vec{OC}+\vec{CD}$$

добиваме

$$m\cdot\vec{OB}=m\cdot\vec{OA}+m\cdot\vec{AB},$$

или

$$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b},$$

што и требаше да се покаже.

Од овие основни особини (I), (II) и (III) на операцијата множење вектор со скалар се докажува дека важи за произволен број вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{c}$ и скаларот m еднаквоста

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\cdots+\mathbf{c})\,m=\mathbf{a}m+\mathbf{b}m+\cdots+\mathbf{c}m;$$

а исто така за векторот $\mathbf{a}$ и при произволен број скалари $m, n, \ldots, l$ релацијата

$$\mathbf{a}\,(m+n+\cdots+l)=\mathbf{a}m+\mathbf{a}n+\cdots+\mathbf{a}l.$$

Доказите се наполно еднакви со доказите на аналогните особини во скаларната алгебра.

Последните две еднаквости, читани од десно на лево, покажуваат дека при една сума од производи на вектори со скалари заедничкиот фактор, па било да је тој вектор или скалар, може да се изнесе пред зграда. Тоа е пак вс полна аналогија со скаларната алгебра.

ЗАДАЧИ:

1. Упрости го изразот $3\,(2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+\mathbf{c})+\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c})+\frac{\mathbf{a}}{2}+\frac{3}{2}\mathbf{b}$.

2. Покажи дека резултантата на силите $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$, $\vec{OP_4}$, ако P_1, P_2, P_3, P_4 образуваат еден паралелограм со средина S, е $4\cdot\vec{OS}$.

3. Определи го збирот на векторите, чија заедничка почетна точка е O, а крајните точки им лежат на темињата на еден правилен n-аголник чиј центар е S.

4. Ако M и N се средините на отсечките AB и CD од една права, да се покаже дека е $2\cdot\vec{MN}=\vec{AC}+\vec{BD}=\vec{AD}+\vec{BC}$.

§ 6. Вадење на векторите

Аритметиката покрај операциите собирање и множење ги дефинира и нивните *обратни* опреации, вадењето и делењето. Бидејќи ние сакаме да соградиме таква векторска алгебра во која, до најголема можна степен, ќе владеат истите формални правила за „сметање" како и во аритметиката и скаларната алгебра, тоа и ние ќе ги дефинираме обратните операции на векторското собирање и на множење вектор со скалар.

Обратната операција од векторското собирање се вика *вадење* на вектори.

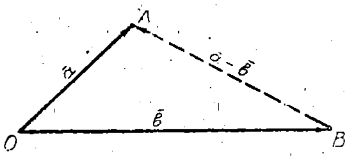
Вадење на два вектора е, значи, определување на еден вектор — собирок c, ако е познат другиот собирок b и нивниот збир a.

Спрема тоа, *од векторот* a *да се извади векторот* b *значи да се конструира таков вектор* c *да збирот* $b+c$ *биде еднаков на* a.

Векторот c се вика *разлика* од векторот a — *намаленикот* — и векторот b — *намалителот*. Операцијата ја означуваме со ознаката

$$a-b=c.$$

Геометрискиот репрезентант на векторот разлика се конструира едноставно. Ако е $a=\overrightarrow{OA}$, $b=\overrightarrow{OB}$, имаме (сл. 11)



Сл. 11

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$$

или

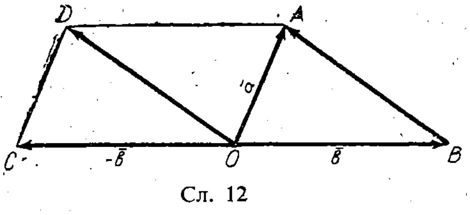
$$b+\overrightarrow{BA}=a,$$

и, спрема дефиницијата за вадење,

$$\overrightarrow{BA}=a-b.$$

Векторот $a-b$ *е вектор определен со крајните точки на векторите* a *и* b, *нанесени од една иста точка. Крајната точка од векторот разлика лежи при тоа во крајната точка на намаленикот.*

Разликата $a-b$ можеме геометриски да ја конструираме и на друг начин. За таа цел ги нанесуваме векторите a, b и $-b$ од една иста точка O. Нека е $a=\overrightarrow{OA}$, $b=\overrightarrow{OB}$, $-b=\overrightarrow{OC}$. Тогаш е



Сл. 12

$$\overrightarrow{BA}=a-b.$$

Потоа го конструираме паралелограмот $OADC$, во кој отсечките OC, OA се две соседни страни.

По правилото за паралелограм е

$$\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OC} \quad \text{или} \quad \vec{OD}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

Но бидејќи е

$$OB \parallel DA, \quad BA \parallel OD,$$

што се проверува лесно, е, спрема § 3, $\vec{BA}=\vec{OD}$. Векторите, еднакви на еднаквите вектори $\vec{BA}$ и $\vec{OD}$, се меѓу себе еднакви, значи

$$(1) \qquad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

Од оваа последна релација може со чисто алгебарски средства да се докаже дека сите формални правила за ослободување од загради при собирањето и вадењето што важат во скаларната алгебра, важат и во векторската алгебра.

Да наведеме само еден пример!

Обележувајќи го $-\boldsymbol{b}$ со $\boldsymbol{c}$, т. е. ставајќи $-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, имаме, множејќи ги двете страни со -1, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$. Во (1) заменуваме $-\boldsymbol{b}$ со $\boldsymbol{c}$, а $\boldsymbol{b}$ со $-\boldsymbol{c}$, па добиваме

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}.$$

ЗАДАЧИ

1. Упрости го изразот $2(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}$.

2. Дадени се должините на дијагоналите на еден трапезоид и аголот помеѓу нив. Да се конструираат должините на средните линии и аголот помеѓу нив.

3. Дадени се должините на средните линии на еден трапезоид и аголот помеѓу нив. Да се конструираат должините на дијагоналите и аголот меѓу нив.

§ 7. Делење на колинеарни вектори.

Обратна операција на операцијата множење вектор со скалар е операцијата *делење на два колинеарни вектори.*

Ако имено еден вектор $\boldsymbol{a}$ го множиме со скаларот m, го добиваме векторот $\boldsymbol{a}m$, кој е колинеарен со $\boldsymbol{a}$. Бројот m го викаме *количник* на колинеарните вектори $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}m$ и $\boldsymbol{a}$, и пишуваме, ако е $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}=m.$$

И обратно, *ако* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *се два произволни колинеарни вектори, од кои* $\boldsymbol{a}$ *не е вектор нула, постои таков број* m *да е* $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}m$.

Навистина, ако ставиме

$$m=\pm\frac{b}{a},$$

каде што се зема горниот или долниот знак спрема тоа дали $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се исто или спротивносмерни, е $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}m$.

Дефинираме:

Количник од два колинеарни вектора $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{a}$, *од кои* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, *е бројот* m, *за кој важи* $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}m$. Го обележуваме со ознаката

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} = m.$$

Операцијата делење ја дефинираме, значи, *само за колинеарни* вектори, а не за произволни.

За количникот на два колинеарни вектори важат аналогни правила за скратување како во скаларната алгебра.

Нека е

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = m. \tag{2}$$

Тогаш е $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}m$. Множејќи ги двете страни на ова равенство со скаларот $\lambda \neq 0$, добиваме

$$\lambda\, \boldsymbol{b} = \lambda\, (\boldsymbol{a}m), \quad \text{или} \quad \lambda\, \boldsymbol{b} = m\, (\lambda \boldsymbol{a}),$$

од каде, на основа дефиницијата за количник,

$$\frac{\lambda\, \boldsymbol{b}}{\lambda\, \boldsymbol{a}} = m.$$

На основа (2) е значи

$$\frac{\lambda\, \boldsymbol{b}}{\lambda\, \boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\,. \tag{3}$$

Од друга страна, ако m и n се произволни скалари, но $n \neq 0$, а $\boldsymbol{a}$ произволен вектор различен од $\boldsymbol{0}$, постои еден таков скалар λ да е

$$\frac{m\, \boldsymbol{a}}{n\, \boldsymbol{a}} = \lambda \tag{4}$$

А оттука следува дека

$$m\boldsymbol{a} = \lambda\, (n\boldsymbol{a}), \quad \text{или} \quad m\boldsymbol{a} = (\lambda n)\, \boldsymbol{a},$$

од каде

$$(m - \lambda n)\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Оттука, поради $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, е

$$m - \lambda n = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \frac{m}{n}.$$

Затоа, со оглед на (4), добиваме

$$\frac{m\, \boldsymbol{a}}{n\, \boldsymbol{a}} = \frac{m}{n}\,. \tag{5}$$

Равенствата (3) и (5) покажуваат дека *количникот од два колинеарни вектори може да се „скрати" како со векторскиот така и со скаларниот множител.*

Забелешка: Помеѓу операциите собирање и вадење на векторите од една страна и множење вектор со скалар и делење на колинеарни вектори од друга страна постои една битна разлика.

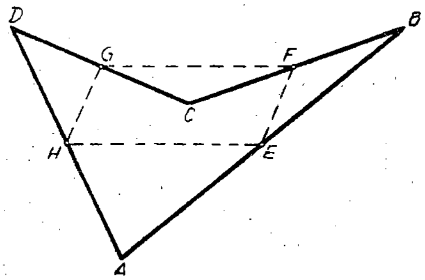
При собирањето и вадењето „оперираме" само со вектори (собираме вектор и вектор, вадиме вектор и вектор), и како резултат на извршената операција добиваме пак вектор (вектор сума, вектор разлика).

Кај другите две операции работата не стои така. При множењето вршиме операции над еден *вектор* и еден *број*, а во резултат на операцијата добиваме пак *вектор*, при делењето пак вршиме операција со *вектори*, а во резултат на операцијата добиваме *број*.

§ 8. Некои примени и дополненија.

1. *Задача за просторен четириаголник.* Нека A, B, C, D се произволни точки во просторот. Отсечките AB, BC, CD и DA се страните на еден „просторен" четириаголник.

Ќе покажеме дека средните E, F, G, H на овие страни се темињата на еден паралелограм.



Сл. 13

Нека е

$$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{DC}=\boldsymbol{c},\ \overrightarrow{CB}=\boldsymbol{d},$$

Тогаш е

$$\overrightarrow{HA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{GC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}.$$

Оттука добиваме

$$\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}),$$

од каде следува поради

$$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$$

дека е

$$\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}.$$

На основа дефиницијата за еднаквост на векторите имаме значи (§ 3)

$$HE \parallel GF,\quad GH \parallel FE.$$

Четириаголникот $EFGH$ е, значи, навистина паралелограм.

2. *Задача.* — За векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ важи

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}. \tag{6}$$

Да се пресмета $\overrightarrow{CB}:\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}$!

Решение: Имаме

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=-\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB},$$

или

(7) $$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot(1-\lambda),$$

односно

$$\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AB}}=1-\lambda.$$

Векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ се колинеарни, како што се гледа од (6) и (7). Од овие две равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\lambda\cdot\overrightarrow{AB}}{(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{AB}}.$$

Бидејќи важи (6), е $\overrightarrow{AB}\neq \boldsymbol{0}$. Затоа можеме да „скратиме" со $\overrightarrow{AB}$, и имаме

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

3. *Задача*. Нека е $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=m:n$. Да се пресмета $\overrightarrow{CA}:\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}:\overrightarrow{AB}$.

Решение: Со симболиката од предодната задача имаме

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{m}{n}.$$

Оттука

$$\lambda=\frac{m}{m+n},\quad 1-\lambda=\frac{n}{m+n},$$

и затоа

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{m}{m+n},\quad \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{n}{m+n}.$$

Забелешка: Бидејќи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни, точките A, B, C лежат на една права. Ако е $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=m:n$ кажуваме дека *точката C ја дели отсечката AB во однос $m:n$.*

4. *Задача за трапез.* На краците (или на нивните продолженија) на еден трапез ги избираме точките M, N, кои истите ги разделуваат во ист однос $m:n$. Ќе испитаме каков правец и каква должина има отсечката MN.

Решение: Нека се A, B, C, D темињата на трапезот, и

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{DC}=\boldsymbol{c},\ \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{d},\ \overrightarrow{MN}=\boldsymbol{s}.$$

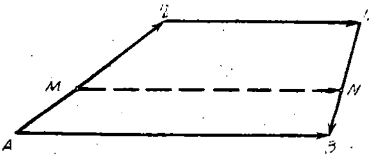
Тогаш е

$$\overrightarrow{MD}=\frac{n}{m+n}\cdot\boldsymbol{d},\quad \overrightarrow{CN}=\frac{n}{m+n}\cdot\boldsymbol{b}.$$

Освен тоа од

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$$

добиваме



Сл. 14

$$b+d=a-c.$$

Векторот $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$ можеме да го претставиме сега во обликот

$$s=\frac{n}{m+n}\cdot(b+d)+c,$$

или

$$s=\frac{n}{m+n}(a-c)+c=\frac{n}{m+n}\cdot a+\frac{m}{m+n}\cdot c.$$

Векторите $\frac{n}{m+n}\cdot a$ и $\frac{m}{m+n}\cdot c$ се колинеарни; нивниот збир е значи паралелен со a и b, значи со основите на трапезот.

Отсечката MN е, значи, паралелна со основите на трапезот, а нејзината должина е рамна на

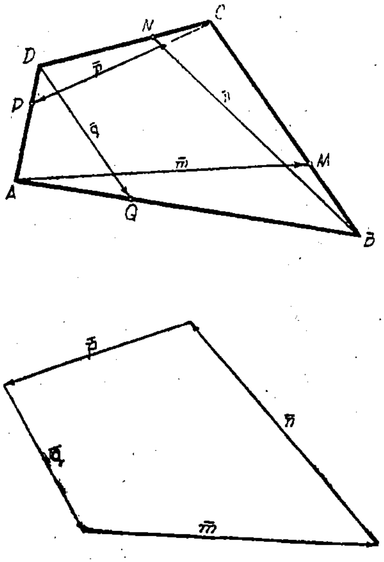
$$s=\frac{na+mc}{m+n}.$$

Резултатот не зависи од висината на трапезот. Сите трапези со еднакви и паралелни основи имаат, значи, еднакви и паралелни отсечки MN, определени на горниот начин.

За специјалниот случај $m=n=1$ ја добиваме за должината на средната линија на трапезот познатата ни вредност

$$s=\frac{a+c}{2}.$$

5. *Задача.* — Нека се A, B, C, D темињата на еден просторен четириаголник. Точките M, N, P, Q ги разделуваат страните BC, CD, DA, односно AB во ист однос. Ќе покажеме дека векторите $m=\overrightarrow{AM}$, $n=\overrightarrow{BN}$, $p=\overrightarrow{CP}$, $q=\overrightarrow{DQ}$ лежат на страните на еден четириаголник.



Сл. 15

За таа цел ставаме

$$\overrightarrow{AB}=a,\ \overrightarrow{BC}=b,\ \overrightarrow{CD}=c,\ \overrightarrow{DA}=d.$$

Ако е $\overrightarrow{AQ}=\lambda\cdot a$, тогаш е и $\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot b$, $\overrightarrow{CN}=\lambda\cdot c$ и $\overrightarrow{DP}=\lambda\cdot d$. Одовде е

$$m=a+\lambda\cdot b,\quad n=b+\lambda\cdot c,$$

$$p=c+\lambda\cdot d,\quad q=d+\lambda\cdot a$$

и

$$m+n+p+q=(1+\lambda)\cdot(a+b+c+d).$$

Но бидејќи е

$$a+b+c+d=0,$$

имаме

$$m+n+p+q=0,$$

што го докажува тврдењето.

Задачата може на разни начини да се обопшти.

6. *Задача.* Помеѓу векторите a, b, p, q важат релациите

(8) $$2\,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a},$$

(9) $$\boldsymbol{p}-3\,\boldsymbol{q}=2\,\boldsymbol{b}.$$

Да се изразат векторите $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ во обликот $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, ако е можно!

Решение: Над равенствата (8) и (9) ќе извршиме ист формален постапок како при решавањето на системи од две равенки со две непознати во алгебрата. Улогата на „непознати" ќе ја имаат кај нас векторите $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Така ќе смееме да постапиме, бидејќи при тоа ќе ги користиме само веќе дефинираните операции — множење вектори со број, собирање и вадење на вектори.

Ако двете страни од (8) ги помножиме со —3, добиваме пак еднакви вектори, имено

$$6\,\boldsymbol{p}+3\,\boldsymbol{q}=3\,\boldsymbol{a}.$$

Собирајќи ја левата страна на ова равенство со левата страна од (9), а исто така и нивните десни страни, добиваме пак меѓу себе еднакви вектори

$$(\boldsymbol{p}-3\,\boldsymbol{q})+(6\,\boldsymbol{p}+3\,\boldsymbol{q})=3\,\boldsymbol{a}+2\,\boldsymbol{b},$$

или

$$7\,\boldsymbol{p}=3\,\boldsymbol{a}+2\,\boldsymbol{b}.$$

Множејќи ги двете страни со $\frac{1}{7}$, добиваме

$$\boldsymbol{p}=\frac{3}{7}\,\boldsymbol{a}+\frac{2}{7}\,\boldsymbol{b}.$$

На сличен начин добиваме и

$$\boldsymbol{q}=\frac{1}{7}\,\boldsymbol{a}-\frac{4}{7}\,\boldsymbol{b}.$$

Системата равенки (8) и (9) ја „решивме" по $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

7. *Равенство* $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$. Сега си ја поставуваме задачата да ги определиме сите оние скалари λ и μ за кои важи

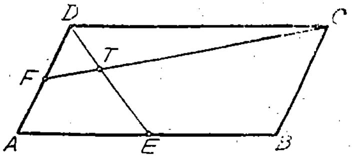
(10) $$\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b},$$

ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се два произволно дадени неколинеарни вектори, значи непаралелни и двата различни од $\boldsymbol{0}$.

Векторите $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\mu\boldsymbol{b}$ не се колинеарни, ако е $\lambda\neq 0$ и $\mu\neq 0$. Бидејќи неколинеарните вектори помеѓу себе не се еднакви, тоа релацијата (10) не е можна, ако е $\lambda\neq 0$ и $\mu\neq 0$. А ако е на пр. $\lambda=0$, е и $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, а затоа, ако важи (10), е и $\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, од каде поради $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ следува и $\mu=0$. Исто така, ако е $\mu=0$, е (10) задоволена само ако е и $\lambda=0$. Следователно:

Равенката (10) *е можна во случајот која* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *се неколинеарни само ако е* $\lambda=\mu=0$.

Во наредните примери ќе го применуваме овој резултат.



Сл. 16

8. *Една задача за паралелограм.* Во паралелограмот $ABCD$ точката E е средина на страната AB, а F — средина на AD.

Ќе пресметаме во каков однос ги дели отсечките DE и CF точката T, во која тие отсечки се пресекуваат.

Нека е $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$. Тогаш е

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}a,\ \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}=\frac{1}{2}b,\ \overrightarrow{FC}=\frac{1}{2}b+a,\ \overrightarrow{ED}=-\frac{a}{2}+b.$$

Векторот $\overrightarrow{AT}$ можеме да го претставиме како збир $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FT}$ и како збир $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ET}$. Затоа е

(11) $$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FT}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ET}.$$

Векторите $\overrightarrow{FT}$ и $\overrightarrow{FC}$, како и векторите $\overrightarrow{ET}$ и $\overrightarrow{ED}$ се колинеарни, затоа постојат такви скалари λ, μ да е

(12) $$\overrightarrow{FT}=\lambda\cdot\overrightarrow{FC},\quad \overrightarrow{ET}=\mu\cdot\overrightarrow{ED}.$$

Сега (11) ја запишуваме во вид:

$$\frac{1}{2}b+\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}b+a\right)=\frac{1}{2}a+\mu\left(-\frac{1}{2}a+b\right),$$

или

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\lambda\right)\cdot a=\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}-\mu\right)\cdot b.$$

Бидејќи a и b не се колинеарни, имаме, спрема предодната задача,

$$\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\lambda=0,\quad \frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}-\mu=0,$$

од каде се добива

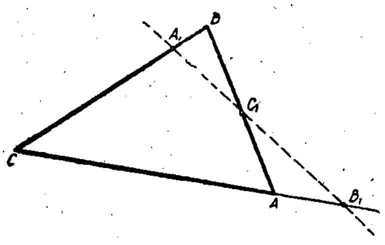
$$\lambda=\frac{1}{5},\quad \mu=\frac{3}{5}.$$

Спрема тоа, на основа (12), имаме

$$\overrightarrow{FT}:\overrightarrow{FC}=1:5,\quad \overrightarrow{ET}:\overrightarrow{ED}=3:5,$$

или

$$\overrightarrow{FT}:\overrightarrow{TC}=1:4,\quad \overrightarrow{ET}:\overrightarrow{TD}=3:2.$$



Сл. 17.

9. *Теоремата на Менелаос.* На страните (или нивните продолженија) од еден триаголник ABC ги избираме точките A_1, B_1, C_1.

Нека е

$$\overrightarrow{CA}=a,\quad \overrightarrow{AB}=b,\quad \overrightarrow{BC}=c.$$

Бидејќи векторите $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ се колинеарни соодветно со векторите a, b и c, тоа постојат такви скалари λ, μ, ν, да важи

$$\overrightarrow{CB_1}=\lambda a,\quad \overrightarrow{AC_1}=\mu b,\quad \overrightarrow{BA_1}=\nu c.$$

Си го поставуваме сега прашањето, кој е оној потребен и доволен услов, што треба λ, μ, ν да го задоволат, за да точките A_1, B_1, C_1 бидат *колинеарни*, т. е. да лежат на една права. Затоа е потребно и доволно векторите $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$ да бидат колинеарни.

Имаме

$$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AC_1},\quad \overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{CA_1}.$$

Спрема зад. 2 е

$$\overrightarrow{B_1A}=(1-\lambda)\,\mathbf{a},\quad \overrightarrow{CA_1}=-\overrightarrow{A_1C}=-(1-\nu)\,\mathbf{c},$$

и затоа

$$\overrightarrow{B_1C_1}=(1-\lambda)\,\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\quad \overrightarrow{B_1A_1}=-\lambda\mathbf{a}-(1-\nu)\,\mathbf{c}.$$

Ако векторите $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$ се колинеарни, постои еден скалар p таков да е $\overrightarrow{B_1A_1}=p\cdot\overrightarrow{B_1C_1}$, или

$$p\cdot[(1-\lambda)\,\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}]=-\lambda\mathbf{a}-(1-\nu)\,\mathbf{c}.$$

Бидејќи е $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, ставуваме $\mathbf{b}=-\mathbf{c}-\mathbf{a}$, а потоа ги пренесуваме членовите колинеарни со $\mathbf{a}$ на едната страна, а членовите колинеарни со $\mathbf{c}$ — на другата страна. Добиваме

$$[p\,(1-\lambda-\mu)+\lambda]\cdot\mathbf{a}=[p\mu+\nu-1]\cdot\mathbf{c}.$$

Бидејќи $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни, е

$$p\,(1-\lambda-\mu)+\lambda=0,\quad p\mu+\nu-1=0,$$

од каде, елиминирајќи го p, добиваме

$$\frac{1-\nu}{\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu-1},$$

или

$$\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu-\lambda-\mu-\nu+1=0.$$

На основа зад. 2. е

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=\frac{\mu}{1-\mu},\quad \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}=\frac{\nu}{1-\nu},\quad \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Затоа ја добиваме, поради

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\nu}{1-\nu}=\frac{\lambda\mu\nu}{(\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu-\lambda-\mu-\nu+1)-\lambda\mu\nu}=\frac{\lambda\mu\nu}{-\lambda\mu\nu}=-1,$$

релацијата

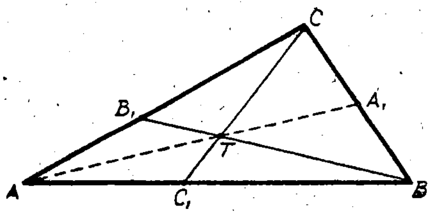
$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=-1. \tag{13}$$

Ја докажавме на тој начин теоремата на *Менелаос:*

Ако точките A_1, A_2, A_3, кои лежат на страните од еден триаголник ABC, се колинеарни, важи релацијата (13).

Важи и обратната теорема. Навистина, ако важи (13), важат, по ред, сите релации кои се пред (13). На тој начин утврдуваме дека векторите $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, ако важи (13), се колинеарни, а значи и точките A_1, B_1, C_1.

10. *Една задача за триаголник.* На две страни на еден триаголник ABC избираме две точки B_1 и C_1 (сл. 18). Ќе испитаме во каков однос ги дели отсечките BB_1, и CC_1, нивниот пресек T.



Сл. 18

Нека

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}.$$

Векторите $\overrightarrow{AC_1}$ и $\boldsymbol{a}$; $\overrightarrow{AB_1}$ и $\boldsymbol{b}$; $\overrightarrow{B_1T}$ и $\overrightarrow{B_1B}$, како и $\overrightarrow{C_1T}$ и $\overrightarrow{C_1C}$ се колинеарни; затоа постојат такви скалари p, q, λ, μ да важи

$$\overrightarrow{AC_1}=p\cdot\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AB_1}=q\cdot\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{C_1T}=\lambda\cdot\overrightarrow{C_1C},\quad \overrightarrow{B_1T}=\mu\cdot\overrightarrow{B_1B}.$$

Од друга страна е

$$\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AC}=-p\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$
$$\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AB}=-q\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

На тој начин, користејќи ја еднаквоста

$$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1T}=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1T},$$

добиваме

$$q\boldsymbol{b}+\mu\,(-q\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})=p\boldsymbol{a}+\lambda\,(-p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

или

$$(p-\mu-\lambda p)\,\boldsymbol{a}=(q-\lambda-q\mu)\,\boldsymbol{b}.$$

Бидејќи $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не се колинеарни, е

(14) $$p-\mu-\lambda p=0,\quad q-\lambda-q\mu=0.$$

Оттука добиваме

$$\lambda=\frac{q\,(p-1)}{pq-1},\quad \mu=\frac{p\,(q-1)}{pq-1},$$

а одовде

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{q\,(p-1)}{q-1},\quad \frac{\mu}{1-\mu}=\frac{p\,(q-1)}{p-1}.$$

Ставувајќи во првата од овие равенства, на основа зад. 2:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{\overrightarrow{C_1T}}{\overrightarrow{TC}},\quad \frac{q}{1-q}=\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}},\quad 1-p=\frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{AB}},$$

добиваме

$$\frac{\overrightarrow{C_1T}}{\overrightarrow{TC}}=\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{AB}};$$

а аналоген израз за $\overrightarrow{B_1T}:\overrightarrow{TB}$, што и си го поставивме за цел, го добиваме од второто равенство.

Специјално, ако е BB_1 *тежишна линија*, е $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{B_1C}$, па имаме

$$\frac{\overrightarrow{C_1T}}{\overrightarrow{TC}}=\frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{AB}}.$$

Ако е CC_1 тежишна линија, е $\overrightarrow{C_1B} : \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}$. Во тој случај имаме

$$\frac{\overrightarrow{C_1T}}{\overrightarrow{TC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}.$$

Ако се и BB_1 и CC_1 тежишни линии, следува

$$\frac{\overrightarrow{C_1T}}{\overrightarrow{TC}} = \frac{1}{2}.$$

Пресечната точка T на две тежишни линии ги дели тие линии во однос 1 : 2. Оттука следува дека низ таа точка — *тежиштето* —, врви и третата тежишна линија.

11. *Теоремата на Чева.* Во сл. 18 од предодната задача ја повлекуваме уште правата AT до нејзиниот пресек A_1 со страната BC на триаголникот.

Векторите $\overrightarrow{A_1T}$ и $\overrightarrow{A_1A}$ како и $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$ се колинеарни; затоа постојат такви скалари ν и r да е

$$\overrightarrow{A_1T} = \nu \cdot \overrightarrow{A_1A}, \quad \overrightarrow{BA_1} = r \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Со ознаките од предодната задача имаме

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1T} = pa + \lambda(-pa + b) = p(1-\lambda)\, a + \lambda b.$$

Од (14) во зад. 10 следува

$$p = \frac{\mu}{1-\lambda}, \quad q = \frac{\lambda}{1-\mu}. \tag{15}$$

Затоа добиваме за $\overrightarrow{AT}$:

$$\overrightarrow{AT} = \mu a + \lambda\, b.$$

Од друга страна имаме

$$\overrightarrow{AT} = -\overrightarrow{TA} = -(1-\nu)\,\overrightarrow{A_1A}$$

и, спрема тоа,

$$\overrightarrow{A_1A} = \frac{1}{\nu-1} \cdot \overrightarrow{AT} = \frac{1}{\nu-1} \cdot (\mu a + \lambda b).$$

Од еднаквоста

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$$

добиваме, земајќи предвид дека е $\overrightarrow{BA_1} = r \cdot \overrightarrow{BC} = r(b-a)$,

$$\frac{1}{\nu-1}(\mu a + \lambda b) = a + r(b-a),$$

а оттука

$$[\mu - (\nu-1)(1-r)]\, a = [r(\nu-1) - \lambda] \cdot b.$$

Следователно, бидејќи a и b се неколинеарни, е

$$\mu - (\nu-1)(1-r) = 0, \quad r(\nu-1) - \lambda = 0.$$

Од оваа система равенки добиваме

$$r=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

По тој начин имаме од (15) и од последното равенство:

$$\frac{p}{1-p}=\frac{\mu}{1-\lambda-\mu},\quad \frac{q}{1-q}=\frac{\lambda}{1-\lambda-\mu},\quad \frac{r}{1-r}=\frac{\lambda}{\mu},$$

и оттука

$$\frac{p}{1-p}\cdot\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1-q}{q}=1$$

или, со оглед на значењата на $\frac{p}{1-p}$, ... од зад. 2, дефенитивно

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=1. \tag{16}$$

Ја докажавме теоремата на *Чева*:

Ако правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка, а A_1, B_1, C_1 лежат респективно на BC, CA, AB, тогаш важи (16).

12. *Друг доказ на теоремата на Чева.* Доказот на оваа теорема ќе го изведеме уште на еден начин. Ќе ги измениме во неколку ознаките.

Нека е $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$. Постојат такви скалари λ, μ, ν, p, q и r да е

$$\overrightarrow{AC_1}=\lambda\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BA_1}=\mu\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CB_1}=\nu\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{AT}=p\cdot\overrightarrow{AA_1},\quad \overrightarrow{BT}=q\cdot\overrightarrow{BB_1},\quad \overrightarrow{CT}=r\cdot\overrightarrow{CC_1}.$$

Тогаш е:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b};\quad \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}=\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}.$$

Од еднаквостите

$$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{BC},$$

или

$$p(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})-q(\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a},$$

$$q(\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c})-r(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b},$$

ги добиваме, ставајќи во првата $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, а во втората $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$, еднаквостите

$$(p\mu-p-q+1)\,\boldsymbol{b}+(1-p-q\nu)\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

$$(1-q-r\lambda)\,\boldsymbol{a}+(q\nu-q-r+1)\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

Бидејќи $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, како и $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, не се колинеарни, е

$$p\mu-p-q+1=0,\quad 1-p-q\nu=0,$$

$$1-q-r\lambda=0,\quad q\nu-q-r+1=0.$$

Одовде добиваме

$$\lambda=\frac{1-q}{r},\quad \mu=\frac{p+q-1}{p},\quad \nu=\frac{1-p}{q}=\frac{q+r-1}{q}.$$

Од изразите, еднакви на ν, следува освен тоа, дека е

$$\frac{q+r-1}{1-p}=1.$$

Следователно е

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{1-q}{r+q-1},\quad \frac{\mu}{1-\mu}=\frac{p+q-1}{1-q},\quad \frac{\nu}{1-\nu}=\frac{1-p}{p+q-1}.$$

А оттука

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\nu}{1-\nu}=1,$$

со што теоремата е докажана, бидејќи е (зад. 2) $\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$, итн.

ЗАДАЧИ

1. Што следува од равенството $\mathbf{a}x = \mathbf{a}y$ при *a*) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *b*) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$?

2. Што следува од равенката $a\mathbf{p} = b\mathbf{p}$ при *a*) $\mathbf{p} \neq 0$, *b*) $\mathbf{p} = 0$?

3. Две страни на еден триаголник се поделени со точките A, B во ист однос $m : n$. Пресметај ја должината на $\overline{AB}$, ако третата страна е a, и покажи дека AB е паралелна со таа страна.

4. $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се два произволни вектори. Конструирај ги векторите $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ за кои важи

$$\mathbf{p}+2\,\mathbf{q} = \mathbf{a}, \quad -2\,\mathbf{p}+\mathbf{q} = \mathbf{b}.$$

5. Какви треба да се векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ за да бидат можни релациите $3\,\mathbf{p}+4\,\mathbf{q}=\mathbf{a}$, $6\,\mathbf{p}+8\,\mathbf{q} = \mathbf{b}$?

6. Ако за два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ важи релацијата $\mathbf{a}x+\mathbf{b}y = \mathbf{0}$, каде што барем еден од скаларите x, y не е нула, тогаш се $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ колинеарни. Доказ!

7. Покажи дека векторот $a\mathbf{b}+\mathbf{a}b$ е вектор кој е паралелен со симетралата на еден агол, на чии краци се положени векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ со должини a, b.

8. Определи го векторот, положен на симетралата на еден агол од еден триаголнок, ако на оние две негови страни што го зафаќаат тој агол се положени векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

9. Покажи дека дијагоналите на паралелограмот се сечат во точката што ги располовува.

§ 9. Определување положајот на точката со вектор. Радиус-вектор.

На примерите од предодниот § покажавме како поимот за вектор може корисно да се примени при решавањето на различни проблеми. Сега ќе укажеме на уште една примена на векторите, имено при определувањето положајот на точката во просторот, рамнината или на правата.

Во просторот (односно во рамнината или на правата) избираме една произволна точка O. Секоја точка P од просторот (односно рамнината или правата) определува тогаш еден вектор $\overrightarrow{OP}$. И обратно, секој вектор, нанесен од O, определува со својот крај една точка P.

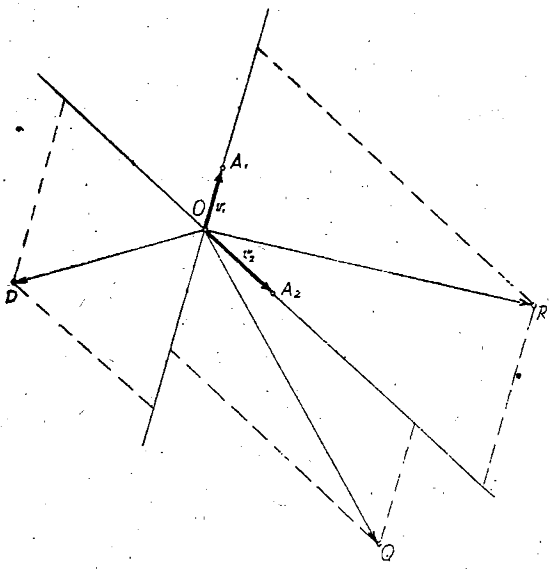
Векторот $\overrightarrow{OP}$ го викаме *радиус-вектор* на точката P, а точката O — *почеток* на радиус-векторите. Радиус-векторите ќе ги бележиме со готско $\mathfrak{r}$.

Положајот на секоја точка P во просторот, рамнината или на правата, е, значи, *определен со нејзиниот радиус-вектор* $\mathfrak{r}$ *во однос на избраниот почеток на радиус-векторите.* Тоа ќе го бележиме со $P(\mathfrak{r})$.

ПРИМЕНА

1. Дадени се две точки $A_1(\mathfrak{r}_1)$ и $A_2(\mathfrak{r}_2)$. Да се определат точките $P(-3\mathfrak{r}_1-2\mathfrak{r}_2)$, $Q(-2\mathfrak{r}_1+3\mathfrak{r}_2)$ и $R(3\mathfrak{r}_1+4\mathfrak{r}_2)$.

Решение: Од почетокот O ги нанесуваме векторите $-3\mathfrak{r}_1-2\mathfrak{r}$, $-2\mathfrak{r}_1+3\mathfrak{r}_2$, и $3\mathfrak{r}_1+4\mathfrak{r}_2$. При тоа е $\mathfrak{r}_1=\overrightarrow{OA_1}$, $\mathfrak{r}_2=\overrightarrow{OA_2}$. Крајните точки на нанесените вектори се точките P, Q, R (сл. 19).



Сл. 19

2. Дадени се точките A_1, A_2, A_3 со своите радиус-вектори $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$. Со кој радиус-вектор е определена точката A_4, која со точките A_1, A_2, A_3 образува паралелограм во кој A_1 и A_4 се спротивни темиња? Да се определи радиус-векторот на A_4!

Решение: Имаме

$$\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_4}=$$
$$=\mathfrak{r}_2+\overrightarrow{A_2A_4},$$

и

$$\overrightarrow{A_2A_4}=\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{OA_3}-$$
$$-\overrightarrow{OA_1}=\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1.$$

За $\mathfrak{r}=\overrightarrow{OA_4}$ добиваме значи

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_3+\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1.$$

3. При еден триаголник е зададено едно теме A_1, должините t_2, t_3 и правците на тежишните линии кои минуваат низ другите две темиња. Да се конструира триаголникот!

Решение: Бараниот триаголник нека е $A_1A_2A_3$, а зададените тежишни линии нека се A_2T_2 и A_3T_3. Ставуваме

$$\overrightarrow{A_2A_3}=\mathfrak{a}_1,\quad \overrightarrow{A_3A_1}=\mathfrak{a}_2,\quad \overrightarrow{A_1A_2}=\mathfrak{a}_3,\quad \overrightarrow{A_2T_2}=\mathfrak{t}_2,\quad \overrightarrow{A_3T_3}=\mathfrak{t}_3.$$

Избираме една произволна точка O како почеток на радиус-векторите и ставаме $\overrightarrow{OA_1}=\mathfrak{r}_1$, $\overrightarrow{OA_2}=\mathfrak{r}_2$, $\overrightarrow{OA_3}=\mathfrak{r}_3$. $\mathfrak{r}_1$ е даден, а $\mathfrak{r}_2$ и $\mathfrak{r}_3$ ќе треба да ги определиме.

Имаме

$$\mathfrak{r}_3 = \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_3} = \mathfrak{r}_1 - \boldsymbol{a}_2,$$

(17)

$$\mathfrak{r}_2 = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_2} = \mathfrak{r}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1.$$

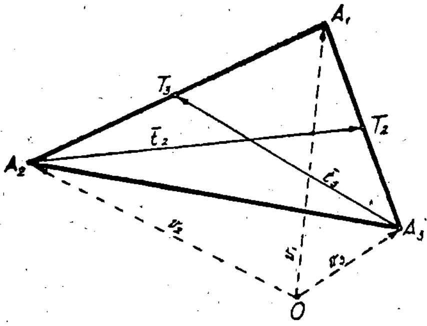
Освен тоа

$$\boldsymbol{t}_2 = \overrightarrow{A_2T_2} = \overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3T_2} =$$

$$= \overrightarrow{A_2A_3} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A_3A_1} = \boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{a}_2,$$

$$\boldsymbol{t}_3 = \overrightarrow{A_3T_3} = \overrightarrow{A_3A_1}+\overrightarrow{A_1T_3} =$$

$$= \overrightarrow{A_3A_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{a}_3,$$



Сл. 20 а

Но бидејќи е $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$, можеме во второто равенство да ставиме $\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$. Со тоа горните равенства добиваат вид

$$\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{t}_3 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2.$$

Оттука следува (зад. 6. § 8)

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{2}{3}(\boldsymbol{t}_2 - \boldsymbol{t}_3),$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{2}{3}(\boldsymbol{t}_2 + 2\,\boldsymbol{t}_3).$$

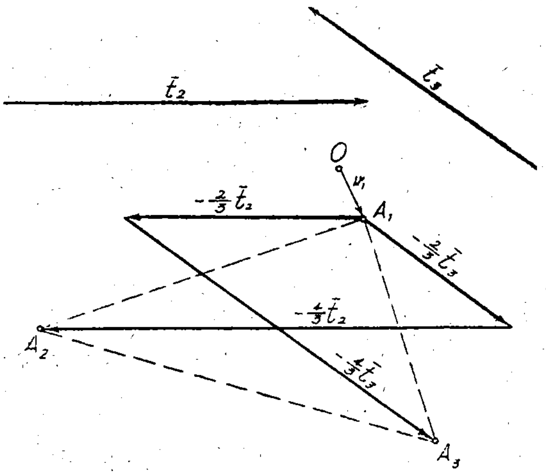
Заменувајќи ги овие изрази во (17), добиваме

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 - \frac{4}{3}\boldsymbol{t}_2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{t}_3,$$

$$\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{t}_2 - \frac{4}{3}\boldsymbol{t}_3,$$

што и се бараше.

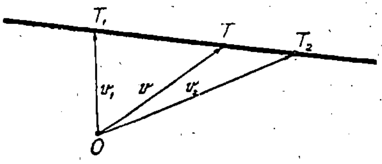
На сл. 20 б е покажано како ги конструираме точките A_2, A_3, ако е зададено A_1, $\boldsymbol{t}_2$ и $\boldsymbol{t}_3$.



Сл. 20 б

4. Поделба на отсечката во даден однос. Нека е зададена една отсечка T_1T_2 со крајните точки T_1 ($\mathfrak{r}_1$) и T_2 ($\mathfrak{r}_2$). Ќе ја определиме онаа точка T која отсечката T_1T_2 ја дели во еден даден однос λ, т. е. да важи

$$\overrightarrow{T_1T} : \overrightarrow{TT_2} = \lambda.$$



Сл. 21

Ако ставиме $\mathfrak{r}=\overrightarrow{OT}$, имаме

$$\overrightarrow{T_1T}=\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1, \quad \overrightarrow{TT_2}=\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}.$$

Затоа е

$$(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1):(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r})=\lambda,$$

или

$$\mathfrak{r}(1+\lambda)=\mathfrak{r}_1+\lambda\mathfrak{r}_2,$$

од каде

$$\mathfrak{r}=\frac{\mathfrak{r}_1+\lambda\,\mathfrak{r}_2}{1+\lambda}. \tag{18}$$

Ако односот го напишеме во вид $\lambda=\frac{m_1}{m_2}$, тогаш оваа равенка добива облик

$$\mathfrak{r}=\frac{m_2\,\mathfrak{r}_1+m_1\,\mathfrak{r}_2}{m_1+m_2}. \tag{19}$$

Специјално, ако T е средина на T_1T_2, е $\lambda=1$. За нејзиниот радиус вектор $\mathfrak{r}$ добиваме тогаш

$$\mathfrak{r}=\frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2}{2}.$$

Пример: Во еден триаголник $A_1A_2A_3$ се зададени точките T_1, T_2, T_3 кои неговите страни A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 ги разделуваат во еден ист однос $m:n$. Да се определат A_1, A_2, A_3! Конструкција за $m=2$, $n=1$!

Решение: Нека е $A_1(\mathfrak{r}_1)$, $A_2(\mathfrak{r}_2)$, $A_3(\mathfrak{r}_3)$, $T_1(\mathfrak{r}_{\rm I})$, $T_2(\mathfrak{r}_{\rm II})$, $T_3(\mathfrak{r}_{\rm III})$!

Спрема (19) имаме

$$n\,\mathfrak{r}_1+m\,\mathfrak{r}_2=(n+m)\,\mathfrak{r}_{\rm III}, \quad n\,\mathfrak{r}_2+m\,\mathfrak{r}_3=(n+m)\,\mathfrak{r}_{\rm I},$$
$$n\,\mathfrak{r}_3+m\,\mathfrak{r}_1=(n+m)\,\mathfrak{r}_{\rm II}.$$

Оттука пресметуваме:

$$\mathfrak{r}_1=\frac{m^2\mathfrak{r}_{\rm II}+n^2\mathfrak{r}_{\rm III}-mn\mathfrak{r}_{\rm I}}{m^2+n^2-mn}, \quad \mathfrak{r}_2=\frac{m^2\mathfrak{r}_{\rm III}+n^2\mathfrak{r}_{\rm I}-mn\mathfrak{r}_{\rm II}}{m^2+n^2-mn},$$

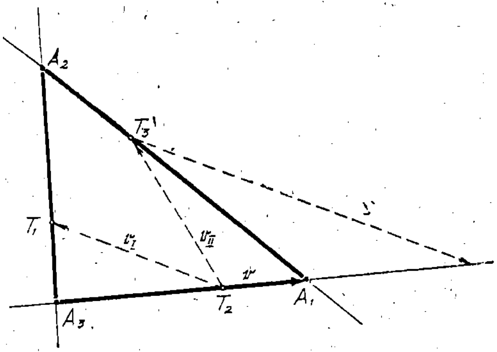
$$\mathfrak{r}_3=\frac{m^2\mathfrak{r}_{\rm I}+n^2\mathfrak{r}_{\rm II}-mn\mathfrak{r}_{\rm III}}{m^2+n^2-mn},$$

со што точките A_1, A_2, A_3 се определени.

Специјално, за $m=2$, $n=1$, добиваме на пр.:

$$\mathfrak{r}_1=\frac{4\,\mathfrak{r}_{\rm II}+\mathfrak{r}_{\rm III}-2\,\mathfrak{r}_{\rm I}}{3}.$$

Точката T_2 ќе ја избереме за почеток на радиус-векторите, значи $T_2\equiv O$. Од неа го нанесуваме тукушто пресметаниот вектор $\mathfrak{r}_1$. Со тоа ја определивме точката A_1. Потоа на правата A_1T_2 ја нанесуваме од T_2 два пати отсечката $\overline{A_1T_2}$. Со тоа ја добиваме точката A_3, бидејќи е $\overrightarrow{A_3T_2} : \overrightarrow{T_2A_1} = 2 : 1$. A_3 го соединуваме со T_1 до пресекот A_2 со A_1T_3. Бараниот триаголник е — $A_1A_2A_3$.



Сл. 22

5. *Тежиште.* Нека се дадени темињата на еден триаголник со $A_1(\mathfrak{r}_1)$, $A_2(\mathfrak{r}_2)$, $A_3(\mathfrak{r}_3)$. Радиус-векторите $\mathfrak{r}_I$, $\mathfrak{r}_{II}$, $\mathfrak{r}_{III}$ на средините T_1, T_2, T_3 на страните A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 се тогаш, спрема предодната задача,

$$\mathfrak{r}_I = \frac{\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3}{2}, \quad \mathfrak{r}_{II} = \frac{\mathfrak{r}_3+\mathfrak{r}_1}{2}, \quad \mathfrak{r}_{III} = \frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2}{2}.$$

Тежишните линии A_1T_1, A_2A_2, A_3T_3 ги разделуваме со точките T', T'', односно T''' во однос $2 : 1$.

Ако е $T'(\mathfrak{r}')$, $T''(\mathfrak{r}'')$, $T'''(\mathfrak{r}''')$, имаме

$$\mathfrak{r}' = \frac{\mathfrak{r}_1+2\,\mathfrak{r}_I}{1+2} = \frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3}{3},$$

$$\mathfrak{r}'' = \frac{\mathfrak{r}_2+2\,\mathfrak{r}_{II}}{1+2} = \frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3}{3},$$

$$\mathfrak{r}''' = \frac{\mathfrak{r}_3+2\,\mathfrak{r}_{III}}{1+2} = \frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3}{3},$$

и следствено $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}'''$. Точките T', T'', T''' совпаднуваат. Со тоа докажавме дека *трите тежишни линии во триаголникот се сечат во една точка, а пресечната точка ги дели во односот* $2 : 1$. Таа точка ја викаме *тежиште* на триаголникот.

6. Определување положбата на правата со вектори. Една права е определена со две свои точки. Нека бидат T_1, T_2 две несовпаднати точки од една права. Ако е T која да е точка на таа права, се $\overrightarrow{T_1T}$ и $\overrightarrow{T_1T_2}$ колинеарни. Затоа постои таков скалар λ да е

$$\overrightarrow{T_1T} = \lambda \cdot \overrightarrow{T_1T_2}. \tag{20}$$

И обратно, за секој λ одговара, на основа оваа еднаквост, една точка T на правата.

Точките T_1, T_2 и T нека се определени со своите радиус-вектори $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ и $\mathfrak{r}$. Бидејќи е $\overrightarrow{T_1T} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$, $\overrightarrow{T_1T_2} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$, тоа (20) добива вид

$$\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1=\lambda\,(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)$$

или

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\lambda\,(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1). \tag{21}$$

За секоја вредност од λ добиваме, со оваа равенка, по еден радиус-вектор кој определува една точка T од правата, и обратно, на секоја точка T од правата одговара еден λ. Ако се λ менува, „варира", тогаш крајот од $\mathfrak{r}$ „клизи" по правата.

По тој начин, со помошта на равенството (21), е дадена положбата на секоја точка од правата што минува низ $T_1(\mathfrak{r}_1)$ и $T_2(\mathfrak{r}_2)$.

Скаларот λ го викаме *параметар*, а самото равенство (21) — *параметарска равенка на правата* во векторски облик. Радиус-векторот $\mathfrak{r}$ до произволната точка T на правата ќе го наречуваме *променлив радиус-вектор* на правата.

На равенката (21) можеме да ѝ дадеме друг вид.

Една права е, имено, определена и со една точка и правец. Нека е $T_1(\mathfrak{r}_1)$ една точка од правата, а нејзиниот правец нека е определен со правецот на еден вектор $\boldsymbol{l}$. Крајот од векторот $\boldsymbol{l}$, нанесен од T_1, нека е $T_2(\mathfrak{r}_2)$. Тогаш е (сл. 21) $\boldsymbol{l}=\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1$, и (21) добива вид

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\lambda\,\boldsymbol{l}. \tag{22}$$

Во оваа равенка $\mathfrak{r}_1$ е радиус-вектор на една зададена точка на правата, а $\boldsymbol{l}$ — произволен вектор, паралелен со правата.

Пример: Со кои вредности од λ се определени точките $T(\mathfrak{r})$ од отсечката $T_1(\mathfrak{r}_1)\,T_2(\mathfrak{r}_2)$ со равенката (21)?

Решение: Од (21) следува

$$\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1=\lambda\cdot(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1), \quad \text{или} \quad \overrightarrow{T_1T}=\lambda\cdot\overrightarrow{T_1T_2}.$$

T е помеѓу T_1 и T_2 ако е $0<\lambda<1$.

Спрема тоа, точките од отсечката T_1T_2 се определени со равенката (21), ако е $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

7. Друг вид параметарска равенка на правата. И равенката (18), (зад. 4), определува по еден радиус-вектор $\mathfrak{r}$ за секоја точка T од правата T_1T_2. За секоја точка T од правата постои еден определен $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{T_1T}}{\overrightarrow{TT_2}}$. А и обратно, при *произволно* избран λ, радиус-векторот $\mathfrak{r}$, определен со (18), определува една точка од правата. Равенството можеме да го преобразуваме имено вака:

$$\mathfrak{r}=\frac{\mathfrak{r}_1+\lambda\,\mathfrak{r}_2}{1+\lambda}=\frac{(1+\lambda)\,\mathfrak{r}_1+\lambda\,(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)}{1+\lambda}=\mathfrak{r}_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1),$$

т. е. да му го дадеме обликот на (21) од зад. 6. А таа, навистина, при секаков коефициент пред $(\mathbf{r}_2—\mathbf{r}_1)$ определува еден радиус-вектор $\mathbf{r}$ од некоја точка на правата.

Затоа и равенството

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\lambda\,\mathbf{r}_2}{1+\lambda} \tag{23}$$

го викаме *параметарска раѓенка* на правата, определена со точките $T_1(\mathbf{r}_1)$ и $T(\mathbf{r}_2)$, а скаларот λ — *параметар*.

Пример: Две темиња A_1 и A_2 од еден триаголник се фиксни, а третото теме A_3 се движи по една права. Како се движи при тоа тежиштето на триаголникот?

Решение: Избираме една точка O како почеток на радиус-векторите. Нека е $\mathbf{r}_1=\overrightarrow{OA_1}$, $\mathbf{r}_2=\overrightarrow{OA_2}$, $\mathbf{r}_3=\overrightarrow{OA_3}$.

Правата по која се движи A_3 нека е зададена со

$$\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_0+\lambda\,\boldsymbol{l}.$$

Променливиот радиус-вектор го означивме со $\mathbf{r}_3$, бидејќи тој ја определува подвижната точка A_3. За тежиштето $T(\mathbf{r})$ имаме, значи, (зад. 5)

$$\mathbf{r}=\frac{1}{3}\,(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)=\frac{1}{3}\,(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_0+\lambda\boldsymbol{l}).$$

Сталниот вектор $\frac{1}{3}(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)$ ќе го обележиме со $\overset{*}{\mathbf{r}}_0$, а $\frac{\lambda}{3}$ со $\overset{*}{\lambda}$. Тогаш за радиус-векторот $\mathbf{r}$ од T добиваме

$$\mathbf{r}=\overset{*}{\mathbf{r}}_0+\overset{*}{\lambda}\,\boldsymbol{l}.$$

А тоа е равенката на правата која минува низ точката $T_0(\overset{*}{\mathbf{r}}_0)$ и е паралелна со $\boldsymbol{l}$. Спрема тоа, тежиштето на подвижниот триаголник се движи по една права, паралелна со правата по која се движи A_3.

ЗАДАЧИ

1. Страните на триаголникот ABC ги разделуваат точките A_1, B_1 и C_1, во ист однос. Да се докаже дека тежиштата на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ совпаднуваат.

2. Зададени се точките A_1, B_1, C_1 кои страните на еден триаголник ABC ги разделуваат во однос 1 : 2. Да се конструира триаголникот ABC.

3. Да се докаже дека средните линии на рамн.. или просторниот четириаголник (т. е. отсечките што ги соединуваат средините на спротивните страни) се располовуваат.

4. Отсечките што ги соединуваат средините на спротивните рабови на тетраедарот (со различни рабови) се пресекуваат и располовуваат. Доказ!

5. Дадени нека се точките $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ со свои радиус-вектори. Отсечката P_1P_2 ја разделуваме со T_2 во однос $m_2 : m_1$, отсечката T_2P_3 со T_3 во однос

$m_3 : (m_1+m_2)$, отсечката T_3P_4 со T_4 во однос $m_4 : (m_1+m_2+m_3)$, отсечката $T_{n-1}P_n$ со T_n во однос $m_n : (m_1+m_2+\ldots+m_{n-1})$. Определи го радиус-векторот на T_n.

Ако со m_i ги обележуваме *масите* на *материјалните точки* P_i, е T_n нивното *тежиште*. Конструкција на тежиштето за случај $n = 3$, $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 5$!

6. Ако во зад. 5 е $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, тогаш T_n го викаме *тежиште од системата точки* $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Да се докаже дека тежиштето од темињата на еден четириаголник совпаднува со средината на отсечката што ги соединува средините на дијагоналите.

7. Дадени се точките $P_i\ (\mathfrak{r}+\lambda_i\, \mathfrak{l})$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ од една права. Определи го радиус-векторот на онаа точка P која отсечката P_1P_2 ја дели во ист однос како отсечката P_3P_4. Конструкција за случај $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 5$!

8. Дадени се точките $P\,(\mathfrak{r}_0+\lambda\mathfrak{l})$, $Q\,(\mathfrak{r}_0+\mu\mathfrak{l})$; $P'(\mathfrak{r}_0+\lambda'\mathfrak{l})$, $Q'(\mathfrak{r}_0+\mu'\mathfrak{l})$. Каков услов треба да го задоволуваат $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ за да важи $\overrightarrow{PP'} : \overrightarrow{P'Q} = -\overrightarrow{PQ'} : \overrightarrow{Q'Q}$? За парот точки P, Q кажуваме во овој случај дека го раздељува *хармониски* другиот пар P', Q' (и обратно).

9. Две темиња на еден паралелограм се фиксни, а едно се движи по некоја права. Како се движи при тоа четвртото теме?

10. При каков да е четириаголник (рамнински или просторен) отсечките што ги соединуваат средините на спротивните страни и отсечката што ги соединува средините на дијагоналите се сечат во една точка, и таа ги располовува сите овие отсечки. Доказ!

11. Секој полигон со непарен број страни е определен со средините на своите страни. Доказ! Изврши конструкција за случај на петоаголник.

12. Отсечките кои ги сврзуваат темињата на кој да е тетраедар со тежиштата на спротивните страни се пресекуваат во една точка, која ги дели отсечките во однос 3 : 4. Доказ!

II ГЛАВА

АФИНИ КООРДИНАТИ НА ВЕКТОР И ТОЧКА

§ 10. Афини координати на вектор.

1. Афина координата на вектор од една система колинеарни вектори. Сите вектори, паралелни со еден даден правец, образуваат една *система колинеарни вектори*. Една таква система вектори е, спрема тоа, определена со еден, кој да е, вектор од таа система кој не е вектор нула.

Нека е $\boldsymbol{e}$ еден вектор различен од $\boldsymbol{0}$. За секој вектор $\boldsymbol{a}$ од системата колинеарни вектори, определена со $\boldsymbol{e}$, постои еден таков скалар x да важи

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e} \cdot x.$$

Кон секој вектор $\boldsymbol{a}$ од системата одговара на тој начин еден определен број x, и обратно, кон секој број x одговара еден вектор од системата, имено $e \cdot x$. Кажуваме дека меѓу секое множество колинеарни вектори и множеството реални броеви постои една *обратно-еднозначна кореспонденција* (соодветствување, пресликување).

Избраниот вектор e ќе го викаме *координатен вектор.*

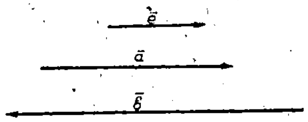
Бројот x кој го определува векторот a по формулата (1) *е афина координата на векторот a во однос на координатниот вектор e.* Тоа го бележиме симболично со

$$a = \{x\}_{(e)},$$

или кратко со $a = \{x\}$.

На сликата 23 се претставени освен координатниот вектор e и векторите

$$a = \{2\}_{(e)}, \quad b = \{-3\}_{(e)}.$$



Сл. 23

2. Координати на векторот од една система компланарни вектори.

За еден вектор $a = \overrightarrow{AB}$ кажуваме дека е паралелен со една определена рамнина, ако отсечката AB е паралелна со таа рамнина.

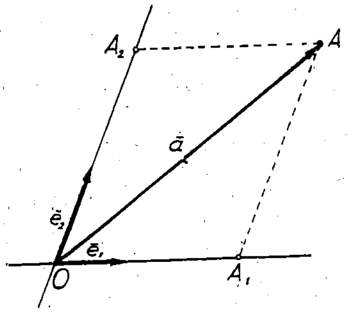
Сите вектори, паралелни со една рамнина, образуваат една система *компланарни вектори.* За три или повеќе вектори кои се паралелни со иста рамнина кажуваме дека се *компланарни.*

Една система компланарни вектори е определена со два неколинеарни вектори. Навистина, два такви вектори, нанесени од една иста точка, определуваат една рамнина, а оваа определува една система компланарни вектори — сите вектори паралелни со неа.

Нека e_1 и e_2 бидат два произволно избрани *неколинеарни* вектори од една таква система. Ќе ги наречиме *координатни вектори.*

Задачата ни е сега, само со броеви наполно да го окарактеризираме произволниот вектор a од системата.

Векторите e_1, e_2 и a ги нанесуваме од една иста точка O, а низ крајот A на векторот $a = \overrightarrow{OA}$ повлекуваме прави, паралелни со e_1 и e_2. Овие прави се сечат со правите што минуваат низ O и се паралелни со e_1 и e_2 во точките A_2 и A_1 (сл. 24). Овие пресеци сигурно постојат, бидејќи e_1 и e_2 не се колинеарни.



Сл. 24

Бидејќи векторите $\overrightarrow{OA_1}$ и e_1 се колинеарни, постои еден таков скалар x_1 да важи $\overrightarrow{OA_1} = e_1x_1$. Аналогно постои еден скалар x_2 за кој важи $\overrightarrow{OA_2} = e_2x_2$.

Од равенството

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$$

имаме на тој начин

$$a = e_1x_1 + e_2x_2. \tag{2}$$

Кон секој вектор a од посматраната система одговара, спрема тоа, една двојка броеви x_1, x_2, определена со равенство (2).

Но дали на еден ист вектор одговара само една двојка броеви? Не зависат ли скаларите x_1, x_2, определени со (2), од изборот на точката O?

Ако на еден вектор a од посматраната система одговара, на основа (2), освен едната двојка броеви x_1, x_2, уште и некоја друга двојка $\overset{*}{x}_1$, $\overset{*}{x}_2$, тогаш би можел векторот a да се претстави на два начина во обликот (2), имено

$$a = e_1x_1 + e_2x_2, \qquad a = e_1\overset{*}{x}_1 + e_2\overset{*}{x}_2.$$

Оттука би следело во тој случај

$$e_1x_1 + e_2x_2 = e_1\overset{*}{x}_1 + e_2\overset{*}{x}_2,$$

или

$$e_1(x_1 - \overset{*}{x}_1) + e_2(x_2 - \overset{*}{x}_2) = 0.$$

Бидејќи e_1 и e_2 не се колинеарни, е (зад. 7 § 7)

$$x_1 - \overset{*}{x}_1 = 0, \quad x_2 - \overset{*}{x}_2 = 0.$$

Докажавме дека е

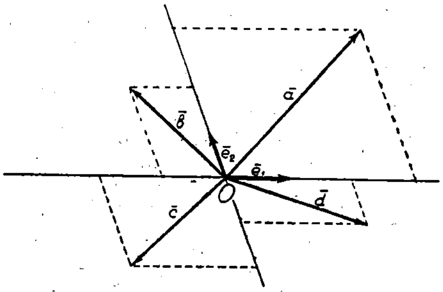
$$x_1 = \overset{*}{x}_1, \quad x_2 = \overset{*}{x}_2.$$

Со тоа покажавме *дека секој вектор* a *од системата компланарни вектори, на која и припаѓаат неколинеарните вектори* e_1, e_2, *може на еден, а и на еден сам начин да се претстави во видот* (2).

Јасно е дека и обратно, секој вектор од видот $e_1x_1 + e_2x_2$, каде што x_1 и x_2 се произволни скалари, е компланарен со e_1 и e_2. Навистина, овие вектори, нанесени од една иста точка, лежат во една рамнина.

Меѓу множеството вектори од посматраната система и множеството од двојки реални броеви, постои, значи, една *обратно-еднозначна кореспонденција*, т. е. на секој вектор a од системата одговара една единствена двојка броеви x_1, x_2, и обратно, на секоја двојка броеви x_1, x_2, во оваа распоредба, одговара еден единствен вектор a од системата. Броевите x_1, x_2 ќе ги викаме *афини кординати од* a.

Реалните броеви x_1, x_2, *кои го определуваат векторот* a *по формулата* (2), *се афини координати на векторот* a *во однос на координатните вектори* e_1 *и* e_2. Тоа го обележуваме симболично со ознаката $a = \{x_1, x_2\}_{(e_1, e_2)}$ или кратко со $a = \{x_1, x_2\}$.



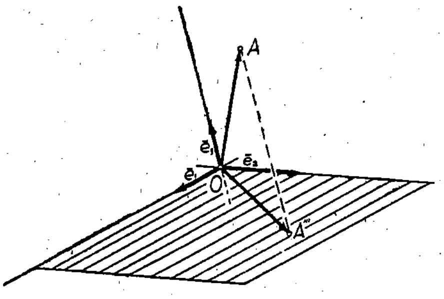
Сл. 25

За координатните вектори е, очигледно, $e_1 = \{1,0\}$, $e_2 = \{0, 1\}$. На сл. 25 се претставени освен координатните вектори e_1, e_2 и векторите $a = \{3, 3\}$; $b = \{-1, 2\}$; $c = \{-2, -2\}$ и $d = \{2, -1\}$. Векторите се нанесени од една иста точка O.

Пример. Од $\{x_1, x_2\}_{(e_1, e_2)} = \{y_1, y_2\}_{(e_1, e_2)}$ следува $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$.

3. Афини координати на произволен вектор во просторот. Во просторот избираме три кои да е некомпланарни вектори e_1, e_2, e_3. Ќе ги наречеме *координатни вектори*.

Произволен друг вектор a од просторот сакаме сега да го окарактеризираме само со броеви, како што тоа го направивме при системите колинеарни и компланарни вектори.



Сл. 26

Векторите e_1, e_2, e_3 и a ги нанесуваме од една иста точка O. Низ крајот A на векторот $a = \overrightarrow{OA}$ повлекуваме права паралелна со e_3. Таа сигурно ја сече рамнината, што минава низ точката O и е паралелна со векторире e_1 и e_2, во некоја точка A'''. Зашто во противен случај e_3 би бил паралелен со таа рамнина, а следствено, векторите e_1, e_2, e_3 би биле компланарни, спротивно на нашата претпоставка дека тие не се компланарни.

Имаме значи

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'''} + \overrightarrow{A'''A}.$$

Но $\overrightarrow{OA'''}$ е компланарен со e_1, e_2 кои се неколинеарни (инаку e_1, e_2, e_3 би биле компланарни). Затоа постоат, спрема т. 2, такви скалари x_1, x_2 да е

$$\overrightarrow{OA'''} = e_1x_1 + e_2x_2.$$

А $\overrightarrow{AA'''}$ е колинеарен со e_3; затоа постои (т. 1.) таков скалар x_3 да е

$$\overrightarrow{AA'''} = e_3x_3.$$

Спрема тоа е

$$\overrightarrow{OA} = (e_1x_1 + e_2x_2) + e_3x_3$$

или

$$\mathbf{a} = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3. \tag{3}$$

Еднозначноста на претставувањето на произволниот вектор $\mathbf{a}$ во вид (3) се докажува слично како и во случајот на компланарните вектори. Ако имено освен (3) важи и

$$\mathbf{a} = e_1\overset{*}{x}_1 + e_2\overset{*}{x}_2 + e_3\overset{*}{x}_3,$$

би било

$$e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = e_1\overset{*}{x}_1 + e_2\overset{*}{x}_2 + e_3\overset{*}{x}_3,$$

или

$$e_1(x_1 - \overset{*}{x}_1) + e_2(x_2 - \overset{*}{x}_2) + e_3(x_3 - \overset{*}{x}_3) = \mathbf{0}.$$

Ако сите коефициенти пред e_1, e_2, e_3 се нула, еднозначноста е докажана, оти тогаш е $x_1 = \overset{*}{x}_1$, $x_2 = \overset{*}{x}_2$, $x_3 = \overset{*}{x}_3$. А ако барем еден од нив е различен од нула, на пр. $x_3 - \overset{*}{x}_3 \neq 0$, би важела релацијата

$$e_3 = -\frac{x_1 - \overset{*}{x}_1}{x_3 - \overset{*}{x}_3} \cdot e_1 - \frac{x_2 - \overset{*}{x}_2}{x_3 - \overset{*}{x}_3} \cdot e_2,$$

што би значело, спрема т. 2., дека e_3 е компланарен со e_1 и e_2, што се коси со нашата претпоставка за некомпланарноста на тие вектори. Следователно сите коефициенти пред e_1, e_2, e_3 се нула, т. е.

$$x_1 - \overset{*}{x}_1 = 0, \quad x_2 - \overset{*}{x}_2 = 0, \quad x_3 - \overset{*}{x}_3 = 0,$$

со кое што е докажано дека *произволниот вектор* $\mathbf{a}$ *може на еден, а и на еден сам начин да се претстави во видот* (3).

Јасно е дека и обратно, секој израз од видот $e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3$, при *произволен* избор на скаларите x_1, x_2, x_3, претставува еден вектор.

На секој вектор $\mathbf{a}$ одговара на тој начин една единствена тројка броеви x_1, x_2, x_3, и обратно. Затоа овие броеви, кои векторот $\mathbf{a}$ наполно го определуваат, ги викаме негови *координати*.

Афини координаши на векшорош a во однос на координашниše векшори e_1, e_2, e_3 се, спрема тоа, *шројкаша скалари x_1, x_2, x_3, ойределени со иденшишешош* (3). Тоа го бележиме со $a = \{x_1, x_2, x_3\}_{(e_1,\ e_2,\ e_3)}$ или кратко со $a = \{x_1, x_2, x_3\}$.

ПРИМЕРИ

1. За координатните вектори имаме на пр.

$$e_1 = \{1, 0, 0\}, \quad e_2 = \{0, 1, 0\}, \quad e_3 = \{0, 0, 1\}.$$

2. За векторот 0 имаме $0 = e_1 \cdot 0 + e_2 \cdot 0 + e_3 \cdot 0$, па е затоа

$$0 = \{0, 0, 0\}.$$

3. Ако во некоја система е $\{x_1, x_2, x_3\} = \{y_1, y_2, y_3\}$, е $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_3$.

ЗАДАЧИ

1. Ако i-тата координата од еден вектор е нула, тој е компланарен со координатите вектори e_k, $(k \neq i)$. Доказ!

2. Кои се координатите на векторите, положени на дијагоналите од еден паралелопипед, ако координатни вектори се векторите положени на три соседни негови рабови?

§ 11. Линеарна комбинација од вектори.

1. Дефиниција. За еден вектор, определен со изразот

$$\lambda a + \mu b + \ldots + \nu c, \tag{4}$$

во кој $a, b, \ldots, c$ се какви да е вектори, а $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ произволни скалари, кажуваме дека е *линеарна комбинација* на векторите a, $b, \ldots, c$ со коефициентите λ, $\mu, \ldots, \nu$.

Изрази од овој вид се на пр. десните страни на равенствата (1), (2) и (3). Затоа можат резултатите од § 10 да се формулираат со оваа терминилогија на овој начин:

Секој вектор a од една система колинеарни вектори може да се пратстави *на еден единсшвен начин* како линеарна комбинација на еден вектор e од таа система; секој вектор a од една система компланарни вектори — како линеарна комбинација од два кои да е неколинеарни вектори e_1, e_2 од системата; а произволниот вектор a од просторот — како линеарна комбинација од три кои да е некомпланарни вектори e_1, e_2, e_3 од системата. Коефициентите на овие линеарни комбинации се, по дефиниција, афини координати на векторот a, во однос на координатниот вектор e — во првиот —, во однос на координатните вектори e_1, e_2 — во вториот —, а во однос на координатните вектори e_1, e_2, e_3 — во третиот случај.

2. Координати на една линеарна комбинација од вектори на една система колинеарни вектори. Сега се поставува прашање како се пресметуваат координатите на еден вектор кој е еднаков со линеарната комбинација (4), ако се познати координатите на векторите a, $b, \ldots, c$.

Да го разгледаме прво случајот кога векторите a, $b, \ldots, c$, ѝ припаѓаат на една система колинеарни вектори.

Нека бидат x, $y, \ldots, z$ нивните координати во однос на еден координатен вектор e, значи $a = \{x\}$, $b = \{y\}, \ldots, c = \{z\}$.

Тогаш е

$$a = ex, \quad b = ey, \ldots, \quad c = ez,$$

и оттука

$$\lambda a + \mu b + \ldots + \nu c = \lambda (e x) + \mu (e y) + \ldots + \nu (ez) =$$
$$= (\lambda x) e + (\mu y) e + \ldots + (\nu z) e,$$

или

$$(5) \qquad \lambda a + \mu b + \cdots + \nu c = (\lambda x + \mu y + \ldots + \nu z) e.$$

Координатата на векторот $\lambda a + \mu b + \ldots + \nu c$ е, значи, $\lambda x + \mu y + \ldots + \nu z$.

Изразот $\lambda x + \mu y + \ldots + \nu z$ ќе го наречеме, аналогно на изразот (4), линеарна комбинација на скаларите x, $y, \ldots, z$ со коефициентите $\lambda, \mu, \ldots, \nu$.

Сега горе добивениот резултат (5) може да се формулира вака:

Координатата на една линеарна комбинација од неколку вектори е истотаква линеарна комбинација на координатите на тие вектори, т. е. линеарна комбинација со оние коефициенти што ги има линеарната комбинација на векторите.

Пример: Ако при координатниот вектор e е

$$a = \{5\}, \quad b = \{-2\}, \quad c = \{3\},$$

тогаш е на пр.

$$4a - 6b + c = \{4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2) + 1 \cdot 3\} = \{35\}.$$

3. Координати на линеарна комбинација од компланарни вектори. Нека се сега a, $b, \ldots, c$ вектори од една система компланарни вектори, определени, во однос на координатните вектори e_1 и e_2, со своите координати, имено

$$(*) \qquad a = \{x_1, x_2\}, \quad b = \{y_1, y_2\}, \ldots, \quad c = \{z_1, z_2\}.$$

Тоа значи да тие можат да се претставаат во вид на овие линеарни комбинации од векторите e_1 и e_2:

$$a = e_1 x_1 + e_2 x_2, \quad b = e_1 y_1 + e_2 y_2, \quad \ldots, \quad c = e_1 z_1 + e_2 z_2.$$

Сменувајќи ги изразите од десните страни на овие равенства во изразот (4), добиваме, служејќи се формално со правилата на алгебрата (§ 4—6)

$$\begin{gathered}\lambda\, a+\mu\, b+\ldots+\nu\, c = \\ (\lambda\, x_1+\mu\, y_1+\ldots+\nu z_1)\, e_1+(\lambda\, x_2+\mu\, y_2+\ldots+\nu\, z_2)\, e_2\end{gathered} \tag{6}$$

Векторот $\lambda\, a+\mu\, b+\ldots+\nu\, c$ го изразивме на тој начин како линеарна комбинација од e_1 и e_2. Коефициентите во таа линеарна комбинација се, спрема § 10, неговите координати во однос на двојката координатни вектори e_1, e_2:

$$\lambda a+\mu b+\ldots+\nu c = \{\lambda x_1+\mu y_1+\ldots+\nu z_1,\ \lambda x_2+\mu y_2+\ldots+\nu z_2\}_{(e_1,\ e_2)}.$$

Секоја координата на една линеарна комбинација од неколку вектори е, значи, *еднаква на истоаква линеарна комбинација на соодветните координати на тие вектори.*

Пример: Ако два вектори a и b се дадени со своите координати: $a = \{2,\ 3\}$, $b = \{-1,\ 4\}$, тогаш за координатите на векторот $6a - 2b$ добиваме:

$$6\, a - 2\, b = \{6.\,2 - 2\,(-1),\ \ 6.\,3 - 2.\,4\} = \{14,\ 10\}.$$

4. Обопштение за простор. На наполно аналоген начин ги добиваме и координатите на линеарни комбинации на произволни вектори од просторот, ако се дадени, во однос на една тројка координатни вектори e_1, e_2, e_3, нивните координати.

За линеарната комбинација (4) на векторите

$$a = \{x_1,\ x_2,\ x_3\},\quad b = \{y_1,\ y_2,\ y_3\},\ \ldots,\quad c = \{z_1,\ z_2,\ z_3\},$$

добиваме

$$\begin{gathered}\lambda a+\mu b+\ldots+\nu c = \\ = \{\lambda x_1+\mu y_1+\ldots+\nu z_1,\ \ \lambda x_2+\mu y_2+\ldots+\nu z_2,\ \ \lambda x_3+\mu y_3+\ldots+\nu z_3\}.\end{gathered}$$

За координатите на линеарни комбинации на произволни вектори во просторот важи, значи, точно истото правило што го формулиравме при системите компланарни вектори во т. 3.

5. Сметање со симболите $\{x\}$, $\{x_1,\ x_2\}$, $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$. Во § 10 покажавме како секој вектор е определен со една, со две, односно со три координати. Затоа сме сега во состојба да ги вршиме до сега дефинираните операции со векторите (собирање, вадење, множење со скалар) наместо над самите *вектори* над нивните аналитички[1] *претставители* — над координатите, т. е. над броевите $\{x\}$, над двојките броеви $\{x_1, x_2\}$, односно над тројките броеви $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Како се врши тоа оперирање, „сметање”, со симболите $\{x\}$, $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_1, x_2, x_3\}$, е покажано веќе во овој §.

Навистина, равенство (5) можеме да го пишуваме во вид

$$\lambda \cdot \{x\} + \mu \cdot \{y\} + \ldots + \nu \cdot \{z\} = \{\lambda x + \mu y + \cdots + \nu z\}.$$

Во специјален случај имаме оттука

$$\lambda \cdot \{x\} = \{\lambda x\}, \quad \{x\} \pm \{y\} = \{x \pm y\}.$$

Овие еднаквости ни дефинираат како се собираат, вадат и множат со скалар симболите $\{x\}$.

Слично можеме равенството (6) да го пишеме, поради (*), во облик:

$$\lambda \cdot \{x_1, x_2\} + \mu \cdot \{y_1, y_2\} + \ldots + \nu \cdot \{z_1, z_2\} =$$
$$= \{\lambda x_1 + \mu y_1 + \ldots + \nu z_1, \lambda x_2 + \mu y_2 + \ldots + \nu z_2\},$$

кој ни ги определува операциите со двојките броеви $\{x_1, x_2\}$.

За множење со скалар, за собирање и вадење, важи, аналогно на горниот случај:

$$\lambda \cdot \{x_1, x_2\} = \{\lambda x_1, \lambda x_2\}$$
$$\{x_1, x_2\} \pm \{y_1, y_2\} = \{x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2\}.$$

Потполно аналогни правила важат и за тројките броеви $\{x_1, x_2, x_3\}$, имено равенството

$$\lambda \cdot \{x_1, x_2, x_3\} + \mu \cdot \{y_1, y_2, y_3\} + \ldots + \nu \cdot \{z_1, z_2, z_3\} =$$
$$= \{\lambda x_1 + \mu y_1 + \ldots + \nu z_1, \lambda x_2 + \mu y_2 + \ldots + \nu z_2, \lambda x_3 + \mu y_3 + \ldots + \nu z_3\},$$

кое ни ги определува горе спомнатите операции за тројките броеви $\{x_1, x_2, x_3\}$.

И во овој случај важи за множење со скалар, за збир и разлика сосем аналогно како при симболите $\{x\}$ и $\{x_1, x_3\}$, имено:

$$\lambda \cdot \{x_1, x_2, x_3\} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}$$
$$\{x_1, x_2, x_3\} \pm \{y_1, y_2, y_3\} = \{x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3\}.$$

---

[1] Придавката „*аналитички*“ доаѓа од терминот *анализа*, кој во математиката означува, во најширока смисла на зборот, целокупноста на оние математички дисциплини кои се засниваат на поимот број. Името доаѓа од Ојлеровото дело „*Introductio in analysin infinitorum*“ (1748).

ПРИМЕРИ

1. $5 \cdot \{3\} - 3 \cdot \{1\} + 2 \cdot \{-4\} = \{5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)\} = \{4\}.$

2. $2 \cdot \{-1\} + 4 \cdot \{2\} + 3 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{a} = ?$

$$\mathbf{a} = -\frac{2}{3}\{-1\} - \frac{4}{3}\{2\} = \left\{\left(-\frac{2}{3}\right)(-1) - \frac{4}{3} \cdot 2\right\} = \{-2\}.$$

3. $3 \cdot \{2, -3\} - \{4, 2\} + 2\{1, 2\} = \{3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1, 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 + + 2 \cdot 2\} = \{4, -7\}.$

4. Ако во некоја система важи $2 \cdot \{3, a_2\} + 4 \cdot \{b_1, -1\} = \mathbf{0}$, да се пресмета a_2 и b_1!

Решение: Имаме $\{6 + 4b_1, 2a_2 - 4\} = \{0, 0\}$, од каде следува

$$6 + 4b_1 = 0, \ 2a_2 - 4 = 0, \quad \text{или} \quad b_1 = -\frac{3}{2}, \ a_2 = 2.$$

5. $-2 \cdot \{1, 3, 4\} + 3.\{-2, 1, 3\} = \{-2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2), -2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - -2 \cdot 4 + 3 \cdot 3\} = \{-8, -3, 1\}.$

6. Од $\{a_1, 2, 3\} + \{-4, b_2, 5\} + \{1, 2, c_3\} = \mathbf{0}$ да се пресметаат a_1, b_2, c_3.

Решение: Имаме

$$a_1 - 4 + 1 = 0, \quad 2 + b_2 + 2 = 0, \quad 3 + 5 + c_3 = 0,$$

од каде: $a_1 = 3, \ b_2 = -4, \ c_3 = -8.$

ЗАДАЧИ

Зададени се векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ со своите координати. Да се определат координатите на нивната линеарната комбинација $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} + 5\mathbf{d}$!

1. $\mathbf{a} = \{3\}, \ \mathbf{b} = \{1\}, \ \mathbf{c} = \{-5\}, \ \mathbf{d} = \left\{-\frac{2}{5}\right\}.$
2. $\mathbf{a} = \{4, 2\}, \ \mathbf{b} = \{-2, 3\}, \ \mathbf{c} = \{-4, -1\}, \ \mathbf{d} = \{0, 10\}.$
3. $\mathbf{a} = \{0, 0, 1\}, \ \mathbf{b} = \{5, 0, -2\}, \ \mathbf{c} = \{-3, -2, = 5\}, \ \mathbf{d} = \{1, 2, 0\}.$
4. Да се провери дали векторите

$$\{2, 3, -1\}, \quad \{-1, -2, 4\} \text{ и } \{7, 12, -14\}$$

со компланарни. *Напат.:* векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, се компланарни ако важи $\mathbf{c} = \mathbf{a}x_1 + \mathbf{b}x_2$.

Определи го $\mathbf{r}$ од следните равенства:

5. $3 \cdot \{5, -1, 4\} - 5\mathbf{r} = 2 \cdot \{1, -10, 8\}.$
6. $4 \cdot \{2, -3\} + 2\mathbf{r} = \dfrac{\{8, -12\}}{\{-4, 6\}} \cdot \{-2, 4\}.$

7. Определи ги координатите на $\overrightarrow{BC}$, ако е $\overrightarrow{AB} = \{0, \mu, \nu\}$, $\overrightarrow{CA} = \{\lambda, 0, \nu\}$, а потоа координатите на векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, положени на тежишните линии на триаголникот ABC!

8. На три соседни раба од еден паралелопипед положени се координатните вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Кои се координатите на векторите, положени на одделни негови дијагонали (на страните и на телесните)?

Ако постојат такви скалари $\lambda, \mu, \ldots, \nu$, не сите еднакви на нула, да важи $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\ldots+\nu\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, тогаш кажуваме дека векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{c}$ се *линеарно зависни*. Покажи дека:

9. Ако се два вектора колинеарни, тие се линеарно зависни, и обратно.

10. Ако три вектора се компланарни, тие се линеарно зависни, и обратно.

11. Четири или повеќе вектори се секогаш линеарно зависни.

12. Покажи дека ако $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{c}$ се колинеарни, тогаш со нив е колинеарен и векторот $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\ldots+\nu\boldsymbol{c}$.

13. Ако $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{c}$, се компланарни, со нив е компланарен и векторот $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\ldots+\nu\boldsymbol{c}$.

14. Ако $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ се компланарни, се компленарни и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$. Дали важи и обратно?

§ 12. Координати на точките

1. Афина координата на точката од една права. Координатите на векторот што ѝ припаѓа на една система колинеарни вектори можеме да ги користиме и за определување положајот на точката од една права.

За таа цел избираме еден вектор $\boldsymbol{e}$, различен од $\boldsymbol{0}$, кој е паралелен со дадената права (сл. 27), а на самата права една точка O. Векторот $\boldsymbol{e}$ ќе го наречеме *координатен вектор*, а точката O — *координатен почеток*. Избраната двојка елементи — точката O и векторот $\boldsymbol{e}$ — ја викаме *афина координатна система* на правата и ја обележуваме обикновено со $(O;\ \boldsymbol{e})$.

Положајот на секоја точка P од правата е еднозначно определен со нејзиниот радиус-вектор $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OP}$. *Координатниот почеток O го избираме за почеток на радиус-векторите.* Тој радиус-вектор $\mathfrak{r}$ има, како еден вектор од системата колинеарни вектори, определена со координатниот вектор $\boldsymbol{e}$, една точно определена координата x, значи

$$\mathfrak{r} = \{x\}_{(e)}. \tag{7}$$

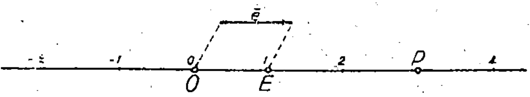
Тој број x го определува радиус-векторот $\mathfrak{r}$, а тој со својата крајна точка — точката P. И обратно, секоја точка P од правата определува еден радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$, а тој има една определена координата x.

Спрема тоа:

Меѓу множеството точки од секоја права и множеството реални броеви постои една обратно-еднозначна кореспонденција.

Затоа бројот x, определен со (7), ќе го викаме *координата*, поточно *афина координата*, на точката P во координантната система $(O; e)$. Тоа ќе го означуваме со ознаката $P(x)_{(O;\, e)}$, или, ако нема нужда од означувањето на координатната система, кратко со $P(x)$ или со (x).

Координата на точката од една права е, значи, *по дефиниција, координатата на нејзиниот радиус-вектор.*



Сл. 27

Точката E, определена со $\vec{OE}=e$, има, спрема нашата дефиниција, координата 1. Точката со координатата x се наоѓа на растојание $|x|$ единици од точката O, ако како единица за должина ја избереме должината на e; при тоа таа се наоѓа на истата или спротивна страна од O како E според тоа дали е $x > 0$ или $x < 0$.

Една права, на која е избран еден координатен вектор e, ја викаме *оска*. Смерот на e ќе го викаме *позитивен* смер на оската, а смерот спротивен на смерот од e — *негативен* смер од оската.

Една оска е, значи, определена со една точка O низ која минува, и со еден вектор e.

Координатна система може да се определи и на тој начин што на правата избираме една точка O, која треба да има координата 0, и една точка E — *единична точка* — која ќе има координата 1. Со тоа е имено освен почетокот O определен и координатниот вектор $e = \vec{OE}$. За поголема нагледност обикновено ги сигнираме на правата точките со координати ... — 3, — 2, — 1, 0, 1,. 2, 3,...

Пример. Да се определи средината Z на отсечката $\vec{XY}$, ако е $X(x)$, $Y(y)$.

Решение: Спрема зад. 4 § 9 имаме

$$\vec{OZ}=\frac{1}{2}(\vec{OX}+\vec{OY})=\frac{1}{2}\left[\{x\}+\{y\}\right]=\left\{\frac{x+y}{2}\right\}.$$

Координатата на Z е, значи, $\frac{x+y}{2}$.

2. Афини координати на точката во рамнината. Координатите на векторите од системите компланарни вектори ќе ги исползуваме сега за определување положајот на точките на една рамнина.

За таа цел избираме во рамнината една точка O — *координатен почеток*, и два неколинеарни вектори e_1, e_2, паралени со рамнината — *координатни вектори*. Кажуваме дека со изборот на точката O и векторите e_1 и e_2 воведовме во рамнината една *афина координатна система*. Ќе ја означиме со (O, e_1, e_2). *Точката O ја избираме едновремено за почеток на радиус-векторите во рамнината.*

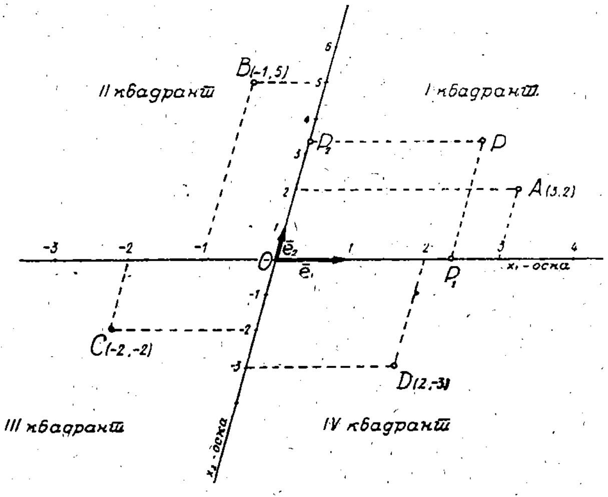
Положајот на секоја точка P од рамнината е определен со радиус-векторот $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OP}$. А овој вектор е определен со своите координати x_1, x_2 во однос на координатните вектори e_1 и e_2.

На тој начин построивме една обратно-еднозначна кореспонденција меѓу множеството точки од рамнината и двојките броеви (x_1, x_2). Овие броеви ги викаме афини координати на точките.

Афини координати на точката P во системата $(O; e_1, e_2)$ се координатите на нејзиниот радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$ во однос на координатните вектори e_1 и e_2. Тоа се бележи со $P(x_1, x_2)_{(O;\, e_1, e_2)}$, или пократко со $P(x_1, x_2)$, или само со (x_1, x_2).

Координатните вектори e_1 и e_2, нанесени од координатниот почеток O, определуваат две оски — *прва координатна оска* (x_1-оска, апсцисна оска) и *втора координатна оска* (x_2-оска, ординатна оска) (сл. 28). Координатата x_1 се вика *прва координата* (*апсциса*), а координатата x_2 — *втора координата* (*ордината*).

За да ја построиме точката $P(x_1, x_2)$, ако се дадени нејзините координати x_1 и x_2, потребно е да го нацртаме радиус-векторот $\mathfrak{r} = e_1x_1 + e_2x_2$.



Сл. 28

На x_1-оската ја избираме како единица мерка должината на e_1, а на x_2-оската должината на e_2. Единиците на двете оски, значи, не се еднакви. Крајната точка P_1 на векторот $\boldsymbol{e}_1 x_1$, нанесен од O, ќе ја добиеме сега ако на x_1-оската ги нанесеме — почнувајќи од O — x_1 единици во позитивен или негативен смер на оската, со оглед на тоа дали е $x_1 > 0$ или $x_1 < 0$. Слично ќе ја добиеме крајната точка P_2 на векторот $\boldsymbol{e}_2 x_2$, нанесен од O, со нанесување од O на x_2 единици на x_2-оската во нејзиниот позитивен или негативен смер според тоа дали е $x_2 > 0$ или $x_2 < 0$. Низ P_1 повлекуваме права, паралелна со x_2-оската, а низ P_2 права, паралелна со x_1-оската. Нивниот пресек го определува положајот на точката P, бидејќи е

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \boldsymbol{e}_2 x_2.$$

За полесно определување положајот на точките ги означуваме често пати крајните точки на радиус-векторите ..., $-3\,\boldsymbol{e}_1, -2\,\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, 2\,\boldsymbol{e}_1, 3\,\boldsymbol{e}_1, \ldots$ со ... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, а исто така крајните точки на векторите..., $-3\,\boldsymbol{e}_2, -2\,\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_2, 2\,\boldsymbol{e}_2, 3\,\boldsymbol{e}_2, \ldots$ (сл. 28).

Координатните оски ја разделуваат рамнината на четири дела — *квадранти*. Знаковите на координатите определуваат во кои од квадрантите лежи точката. Квадрантите се наречуваат обикновено *прв*, *втор*, *трет* и *четврт*. Првиот квадрант е оној при кој за координатите x_1, x_2 на точките што лежат во него важи $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; за вториот важи $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ за третиот $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, а за четвртиот $x_1 > 0$, $x_2 < 0$.

Ако во една афина координатна система должините на координатните вектори се еднакви, системата ја викаме и *косоагла картезична координатна система*. Ако освен тоа тие вектори стојат нормално еден на друг, системата ја викаме *правоагла картезична*. Во последниов случај координатите на точките ќе ги бележиме често со x, y, а на координатните оски нема да ги обележуваме координатните вектори, но ќе го назначиме само нивниот смер.

3. Параметарски равенки на една рамнина. Во една рамнина нека е зададена некоја точка M_0 со радиус-векторот $\mathfrak{r}_0$ во однос на која да е точка O во просторот; а $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нека се два неколинеарни вектори, паралелни со таа рамнина. Во однос на системата $(M_0;\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ нека има која да е точка M од рамнината координати (λ, μ); значи за секоја точка M од рамнината постојат такви λ, μ да важи $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b}$, а и за секој λ и μ одговара една точка M од рамнината. Од $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$ добиваме

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b}. \tag{8}$$

(8) определува, значи, при секој λ и μ, една точка од дадената рамнина и обратно.

Равенката (8), во која произволните броеви λ, μ се викаат *йарамейри*, се наречува *йарамейарска равенка на рамнинайа*.

ПРИМЕРИ

1. За координатниот почеток O важи $O(0, 0)$.

2. За точката $M(x_1, x_2)$ од x_1-оската важи $x_2 = 0$, а за точката $N(x_1, x_2)$ од x_2-оската е $x_1 = 0$.

3. Точките $A_1(1, 1)$, $A_2(2, 2)$, $A_3(3, 3)$, ..., $A_n(n, n)$ се колинеарни со координатниот почеток.

Навистина имаме

$$\vec{OA_1} = \{1, 1\},\ \vec{OA_2} = \{2, 2\} = 2 \cdot \{1, 1\} = 2 \cdot \vec{OA_1},\ \vec{OA_3} = \{3, 3\} = 3 \cdot \{1, 1\} =$$
$$= 3 \cdot \vec{OA_1}\ ,\ldots,\ \vec{OA_n} = \{n, n\} = n \cdot \{1, 1\} = n \cdot \vec{OA_1}$$

Равенствата $\vec{OA} = \kappa \cdot \vec{OA}$ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$ покажуваат дека векторите $\vec{OA_1}$, $\vec{OA_2}, \ldots, \vec{OA_n}$ се колинеарни. Затоа се колинеарни и точките O, A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

ЗАДАЧИ

Обележи ги на цртежот, на кој е избрана една афина система, точките од зад. 1—3.

1. (2, —1), (2, 1), (2, 3), (2, 5).
2. (— 3, — 3), (— 2, — 3), (— 1, — 3), (0, — 3).
3. (5, 2), (2, 5); (— 5, 2), (2, — 5); (— 5, — 2), (— 2, — 5).

4. Да се определат координатите на точките B, C, D, кои заедно со точката $A(2, 3)$ образуваат паралелограм чии страни се паралелни со оските на координатната система, а центарот му е во координатниот почеток.

5. Во една косоагла картезична система оските затвораат агол 60°. Определи ги координатите на темињата на правилниот шестоаголник чии две темиња се $A(2, 0)$ и $B(0, 2)$, а центарот му е во $O(0, 0)$.

6. Во една правоагла картезична координатна система е зададено едно теме $A(0, a)$ на еден рамностран триаголник чие тежиште е во $O(0, 0)$. Определи ги другите темиња.

7. Во просторот се зададени три неколинеарни точки A_1, A_2, A_3 со радиус-векторите $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Покажи дека радиус-векторот

$$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \lambda_3\mathbf{r}_3,$$

при кој важи $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, ги определува точките на рамнината $A_1 A_2 A_3$.

8. Крајните точки на една променлива отсечка се движат по две зададени прави во просторот. Покажи дека средината на отсечката се движи по една рамнина. *Упат.*: Примени ги параметарските равенки на правите!

4. Афини координати на точките во простор. За определување положајот на точката од просторот избираме три некомпланарни вектори e_1, e_2, e_3 — *координатни вектори*, и една тоака O — *коорди-*

нашен почеток. Се изразуваме дека со тоа сме воделе во просторот една *афина координатна система* $(O;\ e_1,\ e_2,\ e_3)$. Точката O ја избираме за почеток на радиус-векторите.

Координатите на произволната точка P во просторот ги дефинираме на наполно аналоген начин како што ги дефиниравме координатите на точките во случајот на рамнината и правата, имено како *координати на нејзиниот радиус-вектор* $\overrightarrow{OP}$. Тоа значи: ако за радиус-векторот $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OP}$ важи

$$\mathfrak{r} = e_1\,x_1 + e_2\,x_2 + e_3\,x_3,$$

тогаш броевите $x_1,\ x_2,\ x_3$ се, по дефиниција, координати на P во однос на координатната система $(O;\ e_1,\ e_2,\ e_3)$, што ќе го бележиме со $P\,(x_1,\ x_2,\ x_3)_{(O;\ e_1,\ e_2,\ e_3)}$ или со $P\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$, или само со $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

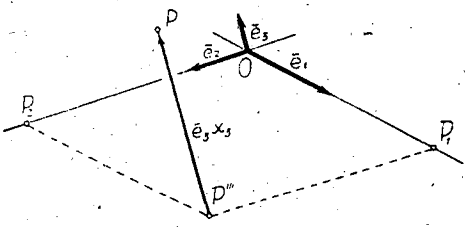
Меѓу множеството тројки броеви $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — координатите, и множеството точки во просторот постои, на тој начин, едно обратно-еднозначно соодветствие.

Оските, определени со точката O и координатните вектори $e_1,\ e_2$ односно e_3, се викаат *координатни оски*, и тоа x_1*-оска*, x_2*-оска* односно x_3*-оска*, или *прва, втора*, односно *трета координатна оска*. По две и две координатни оски определуваат по една *координатна рамнина*. Тие се викаат x_1x_2*-координатна рамнина*, x_2x_3*-координатна рамнина* и x_3x_1*-координатна рамнина* — според тоа да ли се определени со x_1- и x_2-оската, со x_2- и со x_3-оската, или со x_3- и x_1-оската. x_2x_3-, x_3x_1- одн. x_1x_2-координатната рамнина се вика понекогаш и *прва, втора* односно *трета координатна рамнина*.

Ако ни се познати координатите $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ на една точка P, ќе ја построиме точката P на тој начин, што од O ќе го нанесеме векторот $e_1\,x_1 + e_2\,x_2 + e_3\,x_3$. Тоа може да стане, на пр., на тој начин што во x_1x_2-координатната рамнина ја построjуваме првин точката $P'''\,(x_1,\ x_2)_{(O;\ e_1,\ e_2)}$, а од неа го нанесуваме векторорт e_3x_3.

Навистина, бидејќи е $\overrightarrow{OP'''} = e_1x_1 + e_2x_2$, имаме

$$\overrightarrow{OP'''} + e_3\,x_3 = e_1\,x_1 + e_2\,x_2 + e_3\,x_3.$$



Сл. 29

Координатните рамнини го разделуваат просторот во 8 дела — *октанти*. Припадноста на точката на одделни октанти е определена со знаковите на нејзините координати.

Ако во една ситсема е $|e_1| = |e_2| = |e_3|$, системата ја викаме *косоагла* *просторна картезична система;* а ако освен тоа по два и два координатни вектори се и нормални, ќе ја викаме *правоаголна просторна картезична система*. Во последниов случај координатите на точките ќе ги означуваме често со x, y, z.

Пример. Координатниот почеток O ја располовува отсечката MN, каде е $M(x_1,x_2,x_3)$, $N(-x_1, -x_2, -x_3)$.

Имаме имено:

$$\overrightarrow{OM} = \{x_1, x_2, x_3\}, \ \overrightarrow{ON} = \{-x_1, -x_2, -x_3\} = -\{x_1, x_2, x_3\} = -\overrightarrow{OM}.$$

Релацијата $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM}$ го покажува тврдението.

ЗАДАЧИ

1. За точките $M(x_1, x_2, x_3)$ кои лежат во i-тата координатна рамнина е $x_i = 0$. Доказ!

2. Ако точката $M(x_1, x_2, x_3)$ лежи на x_1-оската, е $x_2 = x_3 = 0$.

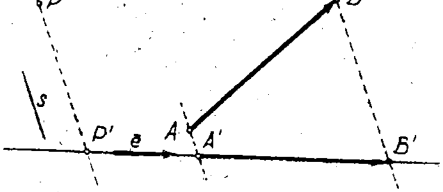
3. Отсечката $\overline{AB}$ е паралена со x_2-оската и се располовува од x_1x_3-рамнината. Ако е $A(3, 7, -1)$, определи ги координатите на B!

4. Покажи дека сите точки $M(x_1, x_2, x_3)$, за кои важи $x_1 = x_2 = x_3$, се колинеарни со координатниот почеток.

§ 13. Друго геометриско толкување на координатите. Проекции.

На координатите, дефинирани во предодниот §, можеме да им дадеме уште едно геометриско толкување. За таа цел ќе се запознаеме со поимот за проекција од вектор на оска.

1. Проекција од точка и вектор на оска (во рамнина). Во една рамнина нека ни е дадена една оска o, определена со векторот e, и една права s која не е паралелна со e.



Сл. 30

Во рамнината избираме која да е точка P. Правата низ P, паралелна со s, ја сече оската o во една точка P'. На тој начин кон секоја точка P од рамнината одговара една точка P' на оската. Точката P' ја викаме *проекција, земена паралелно со s, од точката P на оската o*, или кратко *проекција од P на o*.

Нека е сега $\overrightarrow{AB}$ кој да е вектор од таа рамнина, т. е. вектор паралелен со неа, и нанесен од некоја точка A во таа рамнина. Ако A' и B' се проекциите од A и B, тогаш бројот

$$x = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{e}$$

ќе го викаме *проекција, земена паралелно со s, од векторот $\overrightarrow{AB}$ на оската о.* Проекцијата од $\overrightarrow{AB}$ е, значи, координатата од $\overrightarrow{A'B'}$ во однос на e како координатен вектор.

Проекцијата на векторот ќе ја обележуваме со ознаката

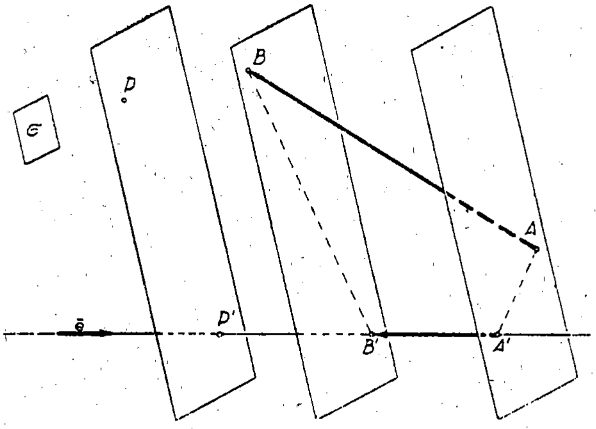
$$x = \text{пр}_e\, \overrightarrow{AB}.$$

2. Проекција од точка и вектор на оска (во простор). Во просторот даваме за проекциите аналогни дефиниции како во рамнината.

Оската нека е пак определена со еден вектор e, а место правата s во рамнинскиот случај, избираме сега една рамнина σ која не е паралелна со e. Обопштенија на дефинициите за проекции во случајот на простор се сега јасни, имено:

Проекција, земена паралелно со σ, од произволната точка P во просторот на една оска е пресекот P' на оската со рамнината, која мине низ P и е паралелна со σ.

Проекција, земена паралелно со σ, од произволниот вектор $\overrightarrow{AB}$ во просторот на една оска, чиј смер е определен со векторот e, е координатата на векторот $\overrightarrow{A'B'}$ во однос на e како координатен вектор. При тоа се A' и B' проекциите, земени паралелно со σ, од точката A, односно B, на таа оска.



Сл. 31

Ознака за проекцијата на векторот е иста како и во рамнинскиот случај.

Ќе забележиме дека отсечките AA' и BB', кои лежат во паралелни рамнини, општо, не се паралелни.

Освен тукушто дефинираните проекции на оската постојат и други проекции. Затоа овие, за разлика од другите, ги викаме *паралелни* проекции.

Во специјалниот случај, кога е $s \perp e$, односно $\sigma \perp e$, паралелната проекција ја викаме *ортогонална*.

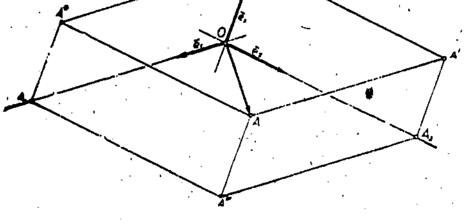
3. Координати на векторот и точката во рамнина. Ако на еден вектот a треба да му ги определиме координатите, ќе го нанесеме од пресекот O на координатните оски, така да е $a = \overrightarrow{OA}$. Потоа ќе ги построиме точките A_1 и A_2 — како што е направено во сл. 24. Спрема конструкцијата е $\dfrac{\overrightarrow{OA_1}}{e_1} = пр_{e_1}\overrightarrow{OA}$, земена паралелно со x_2-оската, а $\dfrac{\overrightarrow{OA_2}}{e_2} = пр_{e_2}\overrightarrow{OA}$, земена паралелно со x_1-оската. Но $\overrightarrow{OA_1} : e_1 = x_1$ и $\overrightarrow{OA_2} : e_2 = x_2$ се координати на векторот $\overrightarrow{OA}$ во однос на e_1 и e_2. Затоа:

Првата координата на еден вектор во рамнината е проекцијата од тој вектор на првата координатна оска, ако проекцијата е земена паралелно со втората координатна оска. Аналогно важи за втората координата.

А координатите x_1, x_2 од $\overrightarrow{OA}$ се и координати од A во однос на $(O;\ e_1,\ e_2)$. Но бидејќи, поради $\overrightarrow{OA_1} = \{x_1\}_{(e_1)}$, $\overrightarrow{OA_2} = \{x_2\}_{(e_2)}$ имаме $A_1\ (x_1)_{(O;\, e_1)}$ и $A_2\ (x_2)_{(O;\, e_2)}$, тоа важи:

Првата координата на една точка е еднаква на координатата на проекцијата од таа точка на првата координатна оска во однос на $(O;\ e_1)$, ако проекцијата е земена паралелно со втората координатна оска. Аналогно важи за втората координата.

4. Координати на векторот и точката во простор. Еден вектор a од просторот ќе го проицираме на трите оски од една координатна система, чии координатни вектори се e_1, e_2 и e_3. Векторот a го нанесуваме од координатниот почеток O, така да е $a = \overrightarrow{OA}$. Низ A положуваме рамнини паралелни со координатните вектори e_2, e_3; e_3, e_1, односно e_1, e_2. На тој начин го добиваме паралелопипедот $OA_1A'''A_2A_3A''AA'$ (Сл. 32).



Сл. 32

Очигледно е

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A'''} + \overrightarrow{A'''A}$$

и

$$\overrightarrow{A_1A'''} = \overrightarrow{OA_2}, \quad \overrightarrow{A'''A} = \overrightarrow{OA_3},$$

и затоа

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}.$$

Но бидејќи $\overrightarrow{OA_i}$ е колинеарен со e_i ($i = 1, 2, 3$), постојат такви скалари x_i ($i = 1, 2, 3$) да е $\overrightarrow{OA_i} = e_i\, x_i$. Затоа

$$\overrightarrow{OA} = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3.$$

Тројките броеви $\{x_1, x_2, x_3\}$ се, значи, координати од a.

А од друга страна, поради $x_i = \overrightarrow{OA_i} : e_i$, е

$$x_i = \text{пр}_{e_i}\, a,$$

ако проекцијата е земена паралелно со i-тата координатна рамнина. Спрема тоа:

i-тата координата на еден вектор на просторот е еднаква на проекцијата од тој вектор на i-тата координатна оска, ако проекцијата е земена паралелно со i-тата координатната рамнина.

Но (x_1, x_2, x_3) се и координати од точката A во однос на системата $(O;\ e_1, e_2, e_3)$, а x_i е координата на точката A_i од i-тата координатна оска, во однос на e_i како координатен вектор. Затоа, земајќи предвид дека A_i е проекција од точката A на x_i-оската, ако проекцијата е земена паралелно со i-тата координатна рамнина, важи теоремата:

i-тата координата на една точка во просторот е еднаква на координатата на проекцијата од таа точка на x_i-оската во однос на $(O;\ e_i)$, ако проекцијата е земена паралелно со i-тата координатна рамнина.

5. Теорема за збир од проекции. Во просторот избираме неколку вектори a, b, c и една рамнина σ. Векторите ќе ги проицираме паралелно со рамнината σ на една оска o, чиј позитивен смер е определен со векторот e. Ќе испитаме како се изразува проекцијата на нивниот збир со проекциите на самите вектори.

Нека е

(9) $$s = a + b + \ldots + c.$$

Избираме една таква координатна система во која оската o ќе е една координатна оска, на пр. првата, а другите две да бидат паралелни со σ. Првите координати на s, a, b,..., c во однос на таа координатна система нека се s_1, a_1, b_1,..., c_1. Тогаш е (§ 11)

(10) $$s_1 = a_1 + b_1 + \cdots + c_1.$$

Бидејќи е

$$s_1 = \text{пр}\, \mathfrak{s},\ a_1 = \text{пр}\, \mathfrak{a},\ b_1 = \text{пр}\, \mathfrak{b},\ \ldots,\ c_1 = \text{пр}\, \mathfrak{c},$$

следува од (10) дека

$$\text{пр}\, \mathfrak{s} = \text{пр}\, \mathfrak{a} + \text{пр}\, \mathfrak{b} + \ldots + \text{пр}\, \mathfrak{c},$$

или, поради (9)

$$\text{пр}\, (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \ldots + \mathfrak{c}) = \text{пр}\, \mathfrak{a} + \text{пр}\, \mathfrak{b} + \ldots + \text{пр}\, \mathfrak{c}.$$

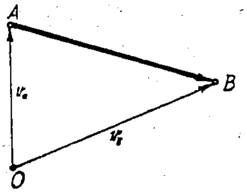
Покажавме дека:

Проекцијата од збирот на неколку вектори е збир од проекциите на тие вектори.

Истата теорема важи за збирот на векторите од една рамнина, проицирани паралелно со еден смер од таа рамнина на една оска.

§ 14. Неколку примени.

1. Координатите на векторот, определен со координатите на почетната и крајната точка. Во однос на една афина координатна система нека се дадени точките $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. За нивните радиус-вектори $\mathfrak{r}_a$ и $\mathfrak{r}_b$ и векторот $\overrightarrow{AB}$ важи (сл. 33)



Сл. 33

$$\overrightarrow{AB} = \mathfrak{r}_b - \mathfrak{r}_a = \{b_1,\ b_2,\ b_3\} - \{a_1,\ a_2,\ a_3\},$$

од каде

$$\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3\}.$$

Координатите на еден вектор се еднакви, значи, *на разликите на соодветните координати на крајната и на почетната точка на векторот.*

Пример: Векторот со почеток во (3, 4, 2), а крај во (8, — 1, 5) ги има координатите {8 — 3, — 1 — 4, 5 — 2} = {5, — 5, 3}.

Ако векторот $\overrightarrow{AB}$ е определен со две, или само со една координата, важи истата теорема, само што имаме само две, односно само една координата.

Примери. Векторот со почеток во (— 3, 2) и крај во (1, 4) ги има координатите {1 — (— 3), 4 — 2} = {4, 2}.

Векторот со почеток во (5) и со крај во (— 3) ја има координатата {— 3 — 5} = {— 8}.

2. Поделба на отсечката во даден однос. Точката $Z(\mathfrak{r})$, која ја дели отсечката $X(\mathfrak{r}_x)Y(\mathfrak{r}_y)$ во однос $\lambda : 1$, е дадена, спрема § 9, т. 4, со својот радиус-вектор

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{r}_x + \lambda \mathfrak{r}_y}{1+\lambda}.$$

Овдека место ознаките $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ за радиус-векторите ги избравме ознаките $\mathfrak{r}_x$ и $\mathfrak{r}_y$. Ако (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) се координатите од X и Y, односно од $\mathfrak{r}_x$ и $\mathfrak{r}_y$, тогаш е

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{1+\lambda}\cdot\left[\mathfrak{r}_x + \lambda\,\mathfrak{r}_y\right] = \frac{1}{1+\lambda}\cdot\left[\{x_1, x_2, x_3\} + \lambda\cdot\{y_1, y_2, y_3\}\right] =$$

$$= \left\{\frac{x_1+\lambda y_1}{1+\lambda}, \frac{x_2+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{x_3+\lambda y_3}{1+\lambda}\right\},$$

односно

$$Z\left(\frac{x_1+\lambda y_1}{1+\lambda}, \frac{x_2+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{x_3+\lambda y_3}{1+\lambda}\right).$$

Ако точките X и Y се определени со две, или само со една координата, има и Z, се разбира, само две односно една координата.

ПРИМЕРИ

1. Средината на точките X и Y ги има, бидејќи тогаш е $\lambda = 1$, координатите:

$$\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_3+y_3}{2}\right).$$

2. Дадени се точките A (3, — 2, 5) и B (— 4, 10, 6), Во кој однос ја дели отсечката AB онаа точка чија што прва координата е $z_1 = 1$? Кои се другите координати z_2 и z_3 на оваа точка?

Решение: Од

$$\frac{x_1+\lambda y_1}{1+\lambda} = z_1, \quad \text{т. е. од} \quad \frac{3-4\lambda}{1+\lambda} = 1$$

пресметуваме $\lambda = \frac{2}{5}$. Оттука $z_2 = \dfrac{-2+\frac{2}{5}\cdot 10}{1+\frac{2}{5}} = \dfrac{10}{7}$, $z_3 = \dfrac{5+\frac{2}{5}\cdot 6}{1+\frac{2}{5}} = \dfrac{37}{7}$.

3. Определи ги координатите на оние точки X, Y кои една дадена отсечка AB ја делат на три еднакви дела, ако е A (3, 2), B (6, 8).

Решење: За X и Y важи $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{AY} = 2\,\overrightarrow{YB}$. Ако е $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$, имаме тогаш:

$$x_1=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}}=4,\quad x_2=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 9}{1+\frac{1}{2}}=4;\quad y_1=\frac{3+2\cdot 6}{1+2}=5,\quad y_2=\frac{2+2\cdot 8}{1+2}=6.$$

Бараните точки се X (4, 4) и Y (5, 6).

4. Во каков однос ја дели точката C (— 3) отсечката чии крајни точки се A (— 1) и B (2)?

Решение: Имаме

$$-3=\frac{-1+\lambda\cdot 2}{1+\lambda}.$$

Одавде пресметуваме $\lambda=-\frac{2}{5}$. Значи $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=-2:5$.

3. Тежиште. Триаголникот со темињата $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ има тежиште T чиј што радиус-вектор $\mathfrak{r}$ е, спрема § 9, т. 5, даден со

$$\mathfrak{r}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Затоа е

$$\mathfrak{r}=\frac{1}{3}\left[\{a_1, a_2, a_3\}+\{b_1, b_2, b_3\}+\{c_1, c_2, c_3\}\right],$$

или

$$\mathfrak{r}=\left\{\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right\}.$$

Спрема тоа е

$$T\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right).$$

Аналогно, ако темињата се дадени со $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, тогаш тежиштето T има координати

$$T\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$

4. Параметарски равенки на правата. На равенката (21) од § 9

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\lambda(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1),$$

која претставува една права, можеме да ѝ дадеме координатен облик. Нека е

$$\mathfrak{r}=\{x_1, x_2, x_3\},\quad \mathfrak{r}_1=\{a_1, a_2, a_3\},\quad \mathfrak{r}_2=\{b_1, b_2, b_3\}.$$

Равенката гласи сега

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{a_1, a_2, a_3\}+\lambda\cdot[\{b_1, b_2, b_3\} - \{a_1, a_2, a_3\}],$$

или

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{a_1+\lambda(b_1 - a_1),\ a_2+\lambda(b_2 - a_2),\ a_3+\lambda(b_3 - a_3)\},$$

од каде следува

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1+\lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2+\lambda(b_2 - a_2) \qquad (11) \\ x_3 &= a_3+\lambda(b_3 - a_3). \end{aligned}$$

Равенките (11) ги претставуваат, при произволен λ, координатите x_1, x_2, x_3 на една точка од правата што минува низ точките (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3); и обратно, на произволната точка (x_1, x_2, x_3) од правата одговара, на основа (11), еден λ.

Равенките (11) се викаат *параметарски равенки на правата во скаларен (координатен) облик*. Тие ја заменуваат една параметарска равенка во векторски облик.

Аналогно ги добиваме од (22) (§ 9) равенките во скаларен облик на правата која минува низ точката (a_1, a_2, a_3), а е паралелна со векторот $\mathbf{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$, имено

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1+\lambda\, l_1 \\ x_2 &= a_2+\lambda\, l_2 \qquad (12) \\ x_3 &= a_3+\lambda\, l_3. \end{aligned}$$

А од (23), § 9, добиваме друг вид параметарски равенки во скаларен облик на правата која минува низ точките (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3):

$$(13) \qquad x_1 = \frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda}, \quad x_2 = \frac{a_1+\lambda b_2}{1+\lambda}, \quad x_3 = \frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda}.$$

Пример. Да се определат координатите x_1, x_2, x_3 на точката P во која правата, дадена со равенките (11), ја сече x_2x_3-координатната рамнина.

Решение: Првата координата од P е нула. Затоа

$$0 = a_1+\lambda(b_1 - a_1).$$

Оттука го пресметнуваме λ и добиваме, при претпоставка $a_1 \neq b_1$, дека е

$$\lambda = \frac{a_1}{a_1 - b_1}.$$

Сменувајќи ја оваа вредност за λ во втората и третата равенка од (11), добиваме

$$x_2 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - b_1}, \quad x_3 = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 - b_1}.$$

Значи бараната точка е

$$P\left(0, \ \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - b_1}, \ \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 - b_1}\right).$$

Ако правата лежи во рамнината во која е избрана една система $(O;\ e_1,\ e_2)$, тогаш нејзините параметарски равенки во однос на таа система ги добиваме, ако во (11), (12) и (13) ја изоставиме последната равенка.

Примери: **1.** Параметарските равенки на правата што врви низ точката (2, 3) и е паралелна со векторот $\{5, -1\}$, гласат

(*) $$x_1 = 2 + 5\lambda, \quad x_2 = 3 - \lambda.$$

2. Да се определат координатите на векторот $\overrightarrow{A_1A_2}$, ако A_1 и A_2 се пресечните точки на правата од предодниот пример со x_1- и со x_2-оската.

Решение: За точките од x_1-оската важи $x_2 = 0$, Заменувајќи $x_2 = 0$ во втората равенка од (*), добиваме $\lambda = 3$; а ако оваа вредност за λ је ставиме во првата равенка, добиваме $x_1 = 17$. Значи A_1 (17, 0). Слично добиваме $A_2\left(0, \frac{17}{5}\right)$. Спрема тоа е

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left\{0 - 17, \frac{17}{5} - 0\right\} = \left\{-17, \frac{17}{5}\right\}.$$

Ако точките од правата ги разгледуваме во однос на една координатна система на таа права, тогаш нивните координати се определени само со првата од равенките (11), (12) или (13).

ЗАДАЧИ

Да се најде средина на отсечката од една рамнина, ако крајните точки се:

1\. (3, 8), (— 1, 2). 2. $(m - n,\ p - q)$, $(m + n,\ p + q)$.

3\. $(\lambda a,\ \lambda b)$, $(\mu a,\ \mu b)$.

Да се определат координатите на средината на отсечката чии крајни точки се дадени со:

4\. (— 7, 0, 4), (1, 4, — 6). 5. (a, b, c), $(-a, -b, -c)$,

6\. (m, n, p), $(-m, -n, p)$.

Точката S е средина на отсечката AB. Да се определат координатите од B, ако се познати координатите од A и S.

7\. $A\ (a)$, $S\ (s)$. 8. $A\ (2m,\ 2n)$, $S\ (m,\ n)$,

9\. $A\ (m - 2n,\ p - 2q,\ r - 2s)$, $S\ (m - n,\ p - q,\ r - s)$.

10\. Дадени се четири точки со свои апсциси: $A\ (a)$, $B\ (b)$, $C\ (c)$ и $D\ (d)$. M е средината на AB, а N средина на CD. Да се определи апсцисата на средината на отсечката MN.

Да се најде точката која отсечката, определена со дадените две точки, ја дели во однос λ.

11. (4), (2); $\lambda = -7:5$. 13. $(2, -13)$, $(-7, -4)$; $\lambda = 5:4$.

12. (a), (b); $\lambda = a:b$. 14. (m, n), (n, m); $\lambda = (m+n):(m-n)$.

15. $(3, 5, 8)$, $(-1, 4, 2)$; $\lambda = 2:3$.

16. $(-n, 1, m+1)$, $(m, 1, 1-n)$, $\lambda = m:n$.

Да се најде тежиштето на триаголниците, на кои им се зададени координатите на темињата.

17. $(3, 8)$, $(-5, 1)$, $(-1, -6)$.

18. $(a, -b, -5c)$, $(-2a, 3b-c)$, $4a, b, 9c)$.

Да се определи тежиштето на системите точки A_1, A_2,... во кои има по ред маси m_1, m_2,...

19, $A_1(1, 2)$, $m_1 = 3$; $A_2(5, 6)$, $m_2 = 4$; $A_3(0, -8)$, $m_3 = 7$.

20. $A_1(t_1, t_1^2)$, $m_1 = t_2 t_3$; $A_2(t_2, t_2^2)$, $m_2 = t_3 t_1$; $A_3(t_3, t_3^2)$, $m_3 = t_1 t_2$.

21. $A_1(1, 3, 2)$, $m_1 = 2$; $A_2(3, -1, 4)$, $m_2 = 4$, $A_3(-5, 0, 1)$, $m_3 = 3$; $A_4(-1, -4, -6)$, $m_4 = 1$.

Дадени се три темиња од еден паралелограм. Да се определи четвртото теме. Колку решенија има?

22. $(-2, -1)$, $(3, -2)$, $(-4, 5)$. 23. (a, b), $(a+b, a-b)$, $(a-b, a+c)$.

24. $(a, b, 0)$, $(a, 0, c)$, $(0, b, c)$.

25. Средините на страните од еден триагалник се во точките $A_1(3, 2)$, $A_2(-1, 4)$, $A_3(1, -2)$, Да се определат координатите на темињата.

26. Дадени се координатите на средините од страните од еден полигон со непарен број страни $S_1(x_1, y_1, z_1)$, $S_2(x_2, y_2, z_2)$,..., $S_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1}, z_{2n-1})$. Да се определат координатите на темињата.

27. Од еден произволен полигон со парен број страни се дадени координатите од средините на сите страни освен од едната. Да се определат координатите на средината и од таа страна! Координатите на средините нека имаат исти координати како S_k во зад. 26.

28. Нацртај ја правата, определена со

$$x_1 = 2 - 3\lambda, \quad x_2 = -5 + \lambda.$$

29. Нацртај ги отсечките определени со

$$x_1 = -1 + 2\lambda, \quad x_2 = 3 - \lambda$$

$$-2 \leqq \lambda \leqq -1; \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1; \quad 2 \leqq \lambda \leqq 3; \quad 4 \leqq \lambda \leqq 5.$$

30. Да се определат координатите на средината на отсечката што од правата

$$x_1 = 5 + 2\lambda, \quad x_2 = -3 - \lambda, \quad x_3 = 1 + 5\lambda$$

ја отсекуваат x_1x_2- и x_3x_1-координатната рамнина.

31. Координатните рамнини ја сечат правата од зад. 30 во A_1, A_2, A_3. Колку е $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3}$?

§ 15. Аналитичка метода во геометријата. Аналитичка геометрија.

Во глава I видовме на повеќе примери како при решавањето на *геометриски* проблеми можеме да се служиме со правилата на *алгебрата*, применети над *геометриски* обекти — вектори.

Тој метод го проширивме потоа за решавање на друг вид геометриски проблеми, кога со воведување на поимот за радиус-вектор успоставивме тесна врска помеѓу основниот поим на векторската алгебра — векторот, и основниот поим на геометријата — точката.

Оваа метода, бидејќи ги користи *геометриските* поими (вектор, точка) и правилата на алгебрата, ја наречуваме *векторско-алгебарска метода*.

Во глава II покажавме како вектори и точки можеме да ги репрезентираме со броеви (еден број, двојка броеви или тројка броеви). Утврдивме како „сметањето" со векторите можеме да го замениме со сметањето со нивните аналитички претставици — координати (броеви).

А основниот принцип во аналитичната геометрија, што започнавме да ја изучаваме, е имено во тоа да не вршиме иследување директно на геометриските обекти и врските меѓу нив — во нашиот случај на векторите —, туку над множеството *броеви*, кои тие обекти на известен начин наполно ги определуваат, т. е. над броевите кои со множеството на тие обекти се во некое обратно-еднозначно соодветствие. Резултатите, добивени на тој начин со алгебарски (рачунски), или, како уште се изразуваме, *аналитички* методи, на крајот пак ги доведуваме во врска со соодветните геометриски обекти — резултатите ги *толкуваме геометриски*. Оваа метода на иследување во геометријата се вика *аналитичка метода*.

Оттука доаѓа и името „аналитична геометрија". Придавката „аналитична" укажува, значи, само на *методата* која се применува во оваа геометриска дисциплина, а не и на нејзинито *содржание*.

Спрема горното, аналитична геометрија е онаа геометрија при која се употребува аналитичка метода, што значи иследувањето се врши со помошта на *аналитичкиот* апарат, т. е. со средствата на алгебрата и ткн. виша анализа; таа е значи *геометрија при која се употребува аналитичка метода*.

Според нивната содржина разликуваме разни „аналитични" геометрии. Истотака ги разликуваме „аналитичните" геометрии и според тоа, со *кои* аналитички средства се служиме.

Ние ќе ги користиме иcклучиво средствата на алгебрата.

ГЛАВА III

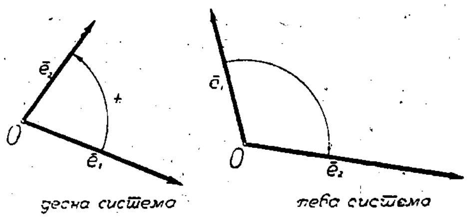
ОРИЕНТИРАНИ ПОВРШИНИ И ПРОСТОРНИНИ

I. Ориентирани површини

§ 16. Десна и лева координатна система во рамнината

1. Две ориентации на координатната система во рамнината. Една рамнинска афина координатна система е определена со една точка — координатен почеток — и со една подредена двојка неколинеарни вектори — координатни вектори. Една двојка вектори е *подредена*, ако се знае кој од векторите е прв, а кој втор.

Според тоа како се подредени координатните вектори, разликуваме два вида афини координатни системи кои сега ќе ги разгледаме.



десна система

лева система

Сл. 34

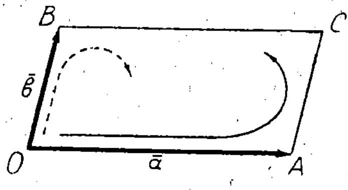
Координатниот вектор e_1 од една координатна система $(O;\ e_1,\ e_2)$ можеме да го завртиме во рамнината околу точката O на два начина за да, по завртувањето, се поклопи со e_2: така да e_2 при вртењето опише агол кој е помал од рамниот агол, или така да e_1 опише при тоа агол поголем од рамниот, но помал од полниот. Ако смерот на вртењето на e_1 во првиот од овие два случаи е спротивен од смерот на вртењето на стрелките на саатот, кажуваме дека систената $(O;\ e_1,\ e_2)$ е *десно ориентирана*, или кратко дека системата е *десна*. А во спротивниот случај, кога смерот на вртењето на e_1 е еднаков на смерот на вртењето на стрелките на саатот, викаме дека системата е *лево ориентирана* или дека системата е *лева*. За координатните вектори e_1, e_2, во оваа распоредба, кажуваме дека образуваат една *десна* одн. *лева подредена двојка вектори* во рамнината, ако системата $(O;\ e_1,\ e_2)$ е десна одн. лева.

2. Ориентирана рамнина. За една рамнина, во која е избран еден смер на вртењето како *позитивен*, ќе кажеме дека е *ориентирана*. Смерот на вртењето што е обратен на позитивниот ќе го викаме *негативен*. За позитивен смер можеме да избереме кој да е од двата можни смерови на вртењето.

Рамнините во кои е избрана некоја афина координатна система $(O;\ e_1,\ e_2)$ ќе ги ориентираме по договор, така што смерот во кој треба e_1 да се заврти околу O, за агол помал од рамниот, за да неговиот смер совпадне со смерот на e_2, ќе го избереме како позитивен

§ 17. Ориентиран паралелограм

1. Дефиниција. Два неколинеарни вектори $a = \overrightarrow{OA}$ и $b = \overrightarrow{OB}$, нанесени од една точка O во зададената ориентирана рамнина во која лежат и e_1, e_2, определуваат еден паралелограм $OACB$. За тој паралелограм кажуваме дека е *ориентиран*, ако двојката вектори a, b е подредена.



Сл. 35

„Ориентацијата" на еден паралелограм може да се окарактеризира и на друг начин. Контурата на паралелограмот $OACB$ може да се обиколи во два смера, во смерот $O \to A \to C \to B \to O$, или во смерот $O \to B \to C \to A \to O$. Тој смер може да биде позитвен или негативен. *Ако е посочен смерот на обиколувањето на контурата на паралелограмот*, кажуваме истотака дека *паралелограмот е ориентиран*. Еден паралелограм може да биде ориентиран на два начина. За секоја од тие ориентации викаме дека е *спротивна* на другата.

Двете дефиниции на ориентацијата на паралелограмот се еквивалентни.

Навистина, ако ориентацијата на паралелограмот е определена со една подредена двојка вектори, тогаш првиот вектор индуцира еден определен смер на обиколување на паралелограмот. Ако на пр. на сл. 35 векторот a го избереме како прв, тогаш тој го индуцира смерот на обиколувањето, означен на цртежот со неиспрекинатата линија; а ако b го избереме како прв, тогаш тој го индуцира смерот на обилколувањето, обележен со испрекинатата линија. При една десна двојка вектори индуцира првиот вектор (сл. 35, ако a е прв), очигледно, оној смер на обиколување кој е спротивен на смерот на вртењето на стрелките од саатот.

Ако пак, обратно, ориентацијата на паралелограмот е определена на тој начин што е посочен еден смер на обилолувањето на паралелограмот, тогаш тој смер го определува како прв оној од векторите a и b, нанесени на страните на паралелограмот од едно негово теме, чиј смер совпаднува со смерот на тоа обиколување. На сл. 35 на пр. смерот на обиколувањето, назначен со неиспрекинатата линија, го определува како прв вектор векторот a. Со тоа нашето тврдение е докажано.

2. Површината на ориентиран паралелограм во ориентирана рамнина. Површината на паралелограмот е окарактеризирана со мерен број. Тоа е број кој покажува колку површински единици содржи таа површина. Се разбира дека површината не зависи од ориентацијата. Но полезно е поимот за површина, што ни е познат од планиметријата, да го обопштиме во таа смисла, што веќе самиот мерен број да укажува на тоа како е ориентиран паралелограмот. Тоа го постигнуваме на тој начин што *на мерниот број на површината од ориентираниот паралелограм во една ориентирана рамнина му припишуваме и знак, и тоа знак + или — според тоа дали неговата ориентација е определена со позитивниот или со негативниот смер на обиколување.* Смерот на обиколувањето е позитивен, ако совпаднува со позитивниот смер на вртењето во ориентираната рамнина.

Така на пр. ако мерниот број на еден ориентиран паралелограм е + 3, тоа значи дека неговата површина изнесува 3 површински единици и дека паралелограмот е ориентиран со позитивниот смер на обиколувањето; а ако мерниот број е, на пр. — 5, тоа означува дека површината содржи 5 површински единици и дека паралелограмот е ориентиран со негативниот смер на обиколувањето.

Површината1) на ориентираниот паралелограм, определен со подредената двојка вектори a, b (т. е. ако a е првиот вектор), ќе ја бележиме со симболот (a, b). Овој симбол претставува, значи, еден позитивен или негативен број.

Ако два вектори a и b определуваат еден паралелограм, тогаш тие се неколинеарни. Но и за два вектори a и b, кои се колинеарни, можеме да кажеме дека определуваат еден „паралелограм" кој дегенерира во една отсечка и, спрема тоа, нема површина. Затоа, за кои да е два колинеарни вектори a и b ставуваме, по дефиниција,

$$(a,\ b) = 0.$$

3. Формални особини на симболот (a, b). За горе дефинираниот симбол ќе докажеме сега, на основа дефиницијата на симболот и најмал можен број теореми од планиметријата, некои основни особини.

Ако ги замениме местата на векторите a, b во симболот (a, b), се менува ориентацијата на паралелограмот што тие го определуваат, а спрема тоа и знакот на површината. Затоа важи

$$(1) \qquad (a, b) = -(b, a).$$

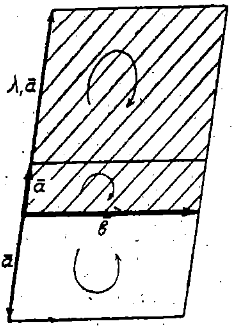
Лесно се увидува, понатаму, дека при произволен скалар λ важат идентитетите

---

1) Под терминот „површина" ќе го подразбираме мерниот број на површината.

(I) $$(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

т. е. дека *симболот* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *се множи со скалар, ако кој да е од векторите* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *се множи со тој скалар.*



Сл. 36

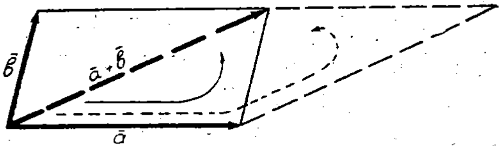
Дека површините $(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, на пр., се еднакви по апсолутната вредност, е геометриски јасно. Но тие се еднакви и по знак, затоа што подредената двојка вектори $\lambda \mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ има при $\lambda > 0$ иста ориентација како ориентираната двојка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, додека при $\lambda < 0$ тие две двојки имаат спротивни ориентации. На сл. 36 е $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

А сега ќе покажеме дека е

(II) $$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}),$$

т. е. дека *симболот* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *е еднаков на симболот кој ќе се добива од овој, ако кој да е од векторите* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *во симболот го собереме со другиот од тие вектори.*

Геометриски е евидентно дека површините $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b})$ по својата апсолутна вредност се еднакви (сл. 37). Но двете подредени двојки вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ се еднакво ориентирани, затоа површините на паралелограмите што ги определуваат се еднакви и по знак.



Сл. 37

Особините (1), (I), (II) важат, очигледно, и тогаш кога $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни.

Од особините (I) и (II) ќе дедуцираме сега и други особини, а да при тоа не ползуваме никаква геометриска теорема; ќе се служиме, значи, само со алгебарски методи.

Прво ќе покажеме дека, при секој скалар λ, важи

(2) $$(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Навистина имаме

$(\mathbf{a} + \lambda\, \mathbf{a}, \mathbf{b}) =$
$= ([1 + \lambda] \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ [множење на вектор со скалар]
$= (1 + \lambda) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ [особина (I)]
$= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ [дистрибутивност на броевите]
$= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\lambda\, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ [особина (I)].

Сега ќе покажеме дека, за секој скалар λ, важат идентитетите

$$(3)\qquad (\boldsymbol{a} + \lambda\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \lambda\, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Имаме имено

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{a} + \lambda\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{a} + \lambda\, \boldsymbol{b}, \lambda\, \boldsymbol{b}) = && [\text{особина (I)}] \\ &= \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{a}, \lambda\, \boldsymbol{b}) = && [\text{особина (II)}] \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) && [\text{особина (I)}]. \end{aligned}$$

По аналоген начин следува и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

На крајот ќе покажеме дека за произволен вектор $\boldsymbol{c}$ што лежи во дадената ориентирана рамнина, во која лежат и векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, важи

$$(4)\qquad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}).$$

Доказ: Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не се колинеарни, може $\boldsymbol{c}$ да се претстави во вид (§ 10)

$$(*)\qquad \boldsymbol{c} = \lambda\, \boldsymbol{a} + \mu\, \boldsymbol{b},$$

каде што λ и μ се некои скалари. Затоа имаме

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} + \lambda\, \boldsymbol{a} + \mu\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \\ &= (\boldsymbol{a} + \lambda\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = && [\text{особина (3)}] \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\lambda\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = && [\text{особина (2)}] \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\lambda\, \boldsymbol{a} + \mu\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = && [\text{особина (3)}] \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) && [\text{поради (*)}]. \end{aligned}$$

Со тоа идентитетот (4) е докажан за случајот да векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не се колинеарни. Но тој е верен и тогаш кога $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се колинеарни. Ако е на пр. $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$, имаме имено

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}).$$

Од докажаните особини на симболот $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ следува дека симболот

$$(\lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m\, \boldsymbol{a}_m, \mu_1\, \boldsymbol{b}_1 + \mu_2\, \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \mu_n\, \boldsymbol{b}_n),$$

во кој λ_i и μ_k се произволни скалари, а $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{b}_k$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $\kappa = 1, 2, \ldots, n$) произволни вектори во една ориентирана рамнина, е еднаков на изразот што се добива на тој начин, што векторските полиноми $\lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m\, \boldsymbol{a}_m$ и $\mu_1\, \boldsymbol{b}_1 + \mu_2\, \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \mu_n\, \boldsymbol{b}_n$ ги множиме по истите формални правила по кои се множат алгебарските полиноми, само што во резултатот место „производите" на векторите $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_k$ ги ставуваме симболите $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_k)$. При тоа треба да се внимава на тоа да во нив не се менуваат местата на тие вектори, т. е. наместо $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_k)$ да не се пишува $(\mathbf{b}_k, \mathbf{a}_i)$. Така е на пр.

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2, \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2) =$$
$$= \lambda_1 \mu_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \lambda_1 \mu_2 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + \lambda_2 \mu_1 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + \lambda_2 \mu_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2).$$

За симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ важат, значи, особини што се наполно аналогни на особините од операцијата множење на броевите. Исклучок прави само особината (1) и релацијата $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$. Поради тоа симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ го викаме и „производ" на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, поточно *надворешен производ* на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

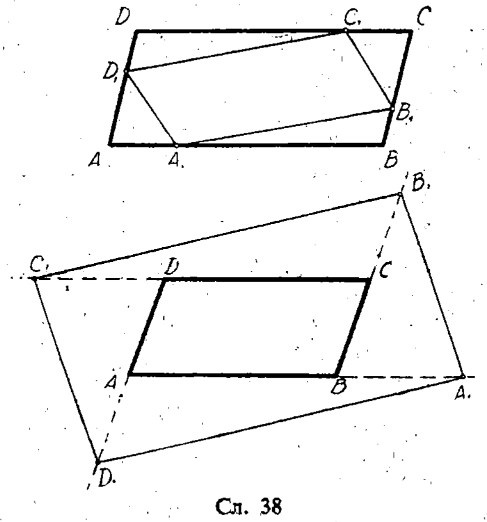
Забелешка. Сите основни особини на симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, освен особината (1), ги изведовме од особините (I), (II), кои ги докажавме ослонувајќи се на геометриски теореми. Но од нив може да се изведе и особината (1). Спрема тоа, сите особини на симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ се логични последици на особините (I), (II).

ПРИМЕРИ

1. Нека е зададен еден паралелограм $ABCD$. На секоја од неговите страни или на нивните продолженија е избрана по една од точките A_1, B_1, C_1, D_1 така да е

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} = \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = \frac{m}{n}.$$

Да се пресмета односот на површините p и p_1 на четириаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$!



Сл. 38

Решение. Нека е $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$. Тогаш е

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{DC_1} = (1 - \lambda) \mathbf{a},$$
$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{D_1D} = \lambda \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{AD_1} = (1 - \lambda) \mathbf{b},$$

каде што е $\lambda = \frac{m}{m+n}$. Прво ќе покажеме дека четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е паралелограм. Треба да се покаже дека е $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ и $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, т. е. дека $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$. Но

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BB_1} = (1 - \lambda) \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b},$$
$$\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC_1} = \lambda \mathbf{b} + (1 - \lambda) \mathbf{a},$$

и спрема тоа $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$, со што е покажано дека четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е паралелограм. За површината p_1 на овој паралелограм имаме $p_1 = (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1D_1})$, од каде поради

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD_1} = -\lambda\,\mathbf{a} + (1-\lambda)\,\mathbf{b}$$

следува

$$p_1 = ([1-\lambda]\,\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b},\ -\lambda\,\mathbf{a} + [1-\lambda]\,\mathbf{b}) =$$
$$= (1 - 2\lambda + 2\lambda^2)\cdot(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Бидејќи е $\lambda = m : (m+n)$, имаме

$$p_1 = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\cdot(\mathbf{a},\ \mathbf{b}),$$

и затоа

$$\frac{p_1}{p} = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2},$$

што е бараниот резултат.

За $m = n = 1$, добиваме на пр. $p_1 : p = 1 : 2$, а за $m = -1$, $n = 2$ добидаме $p_1 : p = 5 : 1$

2. Да се покаже дека особината (1) на симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ следува од особините (I), (II).

Решение. Имаме

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b} - [\mathbf{a}+\mathbf{b}]) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}, -\mathbf{a}) =$$
$$= (\mathbf{a} + \mathbf{b} + [-\mathbf{a}], -\mathbf{a}) = (\mathbf{b}, -\mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Значи, навистина $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

ЗАДАЧИ

1. Упрости ги симболите

a) $(2\mathbf{a}, 3\mathbf{b})$; *b*) $(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}, 3\mathbf{a})$; *c*) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, -\mathbf{a}+2\mathbf{b})$.

2. Пресметај $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b})$ и резултатот толкувај го геометриски.

3. Каков правец има векторот $\mathbf{a}$, ако при зададените два вектори $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ важи $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})$?

4. Каква релација постои меѓу векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ако е $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a})$?

5. Каква релација треба да ја задоволуваат скаларите λ, μ, ако треба да биде $(\lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}, \mu\,\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$?

6. По две и две страни на два паралелограма се паралелни и се однесуваат како $m : n$ и $p : q$. Како се однесуваат нивните површини?

7. Да се даде геометриско толкување на идентитетот $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) + (\mathbf{b}, \mathbf{n}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{n})$. Да се покаже дека од овој идентитет, при специјален избор на векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$, следува *Питагоровата теорема*.

8. При еден паралелограм, чии паралелни страни се AB, DC и BC, AD, а површината му е p, ги избираме на неговите страни точките A_1, B_1 C_1, D_1 така да е $\overrightarrow{AA_1} : \overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{CC_1} : \overrightarrow{C_1D} = m : n$, $\overrightarrow{BB_1} : \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{DD_1} : \overrightarrow{D_1A} = p : q$. Да се пресмета површината на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$!

9. Паралелограмот $A_1A_2A_3A_4$ има површина p_0. На неговите дијагонали A_1A_3 и A_2A_4 лежат темињата на еден друг паралелограм $B_1B_2B_3B_4$. При тоа е $\overrightarrow{A_1A_3} : \overrightarrow{B_1B_3} = \lambda_1$ и $\overrightarrow{A_2A_4} : \overrightarrow{B_2B_4} = \lambda_2$. Да се пресмета површината на вториот паралелограм, ако се дадени λ_1, λ_2.

10. Кој паралелограм со константен обим и исти агли има најголема површина?

11. Една права ги сече две страни на еден триаголник во односите $m : n$ и $p : q$. Како се однесуваат површините на двата дела, во кои триаголникот го расекува правата? [*Напат.*: Површината на триаголникот, на чии две страни се положени векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, е еднаква на апсолутната вредност од $\frac{1}{2}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$].

12. Точките T_1, T_2, T_3 ги разделуваат страните на еден триаголник со површина p_0 во односите λ_1, λ_2, λ_3. Пресметај ја површината на $\triangle T_1T_2T_3$!

13. Површината на еден триаголник е p_0, а страните му се a, b и c. Колкава е површината на триаголникот, чии што темиња се точките во кои симетралите на аглите на дадениот триаголник ги сечат спротивните страни. [*Напат.*: На симетралата на аголот, на чии краци лежат векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, лежи векторот $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$].

14. Покажи дека векторите, положени на тежишните линии на еден триаголник, образуваат еден триаголник, ако нивните смерови се подесно избрани. Каков е односот на површините на двата триаголници?

15. Со точките A_1, B_1, C_1 ги разделуваме страните BC, CA и AB од еден триаголник ABC со површина p_0 во ист однос $m : n$. Покажи дека векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ образуваат еден триаголник, и пресметај му ја површината!

§ 18. Аналитичен израз за површината на ориентиран паралелограм

1. Формула за површината на паралелограмот. Во една рамнина, во која се избрани координатните вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, е зададен еден ориентиран паралелограм, определен со подредената двојка вектори $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1\ b_2\}$. Имаме значи

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2.$$

Оттука е

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) =$$

$$= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_2b_1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2).$$

Бидејќи е $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 0$, $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, е спрема тоа

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2).$$

За изразот $a_1b_2 - a_2b_1$ воведуваме една специјална ознака, имено

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

и ќе го викаме *детерминанта од координатите на векторите* ***a*** *и* ***b***.

Добиениот резултат можеме сега да го дадеме во облик

(5) $$(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot (e_1 e_2).$$

Површината на ориентираниот паралелограм е дадена со тоа како функција на координатите на векторите a, b и од површината (e_1, e_2) на паралелограмот, образуван над координатните вектори.

Формулата (5) добива попрост вид, ако за единица површина ја избираме површината (e_1, e_2). Тогаш е $(e_1, e_2) = +1$, и формулата (5) добива вид

(6) $$(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Забелешка. Формулата (6) е логична последица само на особините (I), (II) и на барањето

(III) $$(e_1, e_2) = +1.$$

Равенствата (I), (II) *од* § 17 *и* (III) *можеме да ги сметаме затоа и како дефинициони равенки за симболот* (a, b).

2. Однос на површините на два ориентирани паралелограми. Површините (a, b) и (e_1, e_2) имаат ист или спротивен знак според тоа дали подредените двојки вектори a, b и e_1, e_2 имаат еднаква или спротивна ориентација. Затоа следува од (5):

Детерминантата од координатите на векторите од една подредена двојка a, b *е позитивна или негативна според тоа дали двојката* a, b *има иста или спротивна ориентација како што ја има двојката на координатните вектори.*

Оттука следува и теоремата:

Две подредени двојки компланарни вектори имаат иста или спротивна ориентација според тоа дали детерминантите на нивните координати во однос на едни исти координатни вектори (што се компланарни со нив) *имаат еднакви или спротивни знаци.*

Пример. Да се определи дали двојките вектори

$$a = \{3, 4\}, \ b = \{-2, 1\} \ \text{ и } \ c = \{-5, -1\}, \ d = \{0, -2\}$$

каде што a и c се сметаат како први вектори, имаат еднакви или спротивни ориентации.

Решение. Детерминатите од координатите на векторите од двете двојки се

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 10.$$

Тие се со еднакви знаци. Затоа двете двојки вектори имаат еднакви ориентации.

ЗАДАЧИ

Пресметај ја површината на паралелограмот чии три темиња се зададени, ако е $(e_1, e_2) = 1$. Избери една произволна ориентација.

1. $(3, 5)$, $(-2, 4)$, $(-1, -2)$. 2. (λ, λ^2), (μ, μ^2), (ν, ν^2).

3. При кои вредности за λ и μ двојката вектори $a = \{-1, \lambda - \mu\}$, $b = \{1, -\lambda - \mu\}$, каде што a е првиот вектор, е ориентирана онака како што е ориентирана двојката координатни вектори, а при кои вредности — спротивно од координатната двојка вектори.

Испитај дали дадените две подредени двојки вектори во зад. 4—5 се еднакво или спротивно ориентирани. Првиот вектор нека е оној, кој при секоја двојка е запишан прв.

4. $\{a, 0\}$, $\{o, b\}$ и $\{a + b, a - b\}$, $\{a - b, a + b\}$.

5. $\{\sin\alpha, -\cos\alpha\}$, $\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ и $\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, $\{\sin\alpha, \cos\alpha\}$.

§ 19. Некои примени на симболот (a, b)

1. Услов за колинеарност на два вектори од една рамнина. Нека се зададени векторите $a = \{a_1, a_2\}$, $b = \{b_1, b_2\}$. Ако тие се колинеарни, е $(a, b) = 0$. И обратно, ако е $(a, b) = 0$, се a и b колинеарни. Бидејќи е $(e_1, e_2) \neq 0$, следува од (5) дека:

Потребно и доволно за тоа, векторите $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$ да бидат колинеарни, е да важи

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Услов за колинеарност на три точки. Ако три точки $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$, $Z(z_1, z_2)$ се колинеарни, т. е. ако лежат на една права, тогаш се колинеарни и векторите $\overrightarrow{ZX}$, $\overrightarrow{ZY}$. Обратно, ако векторите $\overrightarrow{ZX}$ и $\overrightarrow{ZY}$ се колинеарни, точките X, Y, Z лежат на една права. Услов за колинеарност на дадените точки е и услов за колинеарност на векторите $\overrightarrow{ZX}$, $\overrightarrow{ZY}$. Но бидејќи е $\overrightarrow{ZX} = \{x_1 - z_1, x_2 - z_2\}$, $\overrightarrow{ZY} = \{y_1 - z_1, y_2 - z_2\}$, тоа:

Точките (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) *се колинеарни тогаш и само тогаш ако важи*

$$\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Услов за колинеарност на два вектора во просторот. Во однос на некоја просторна координатна система нека ни се зададени векторите

(*) $\qquad a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2. b_3\}$.

Ако a и b се колинеарни, а $a \neq 0$, постои таков λ да е $b = \lambda a$, или $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, $b_3 = \lambda a_3$. Оттука следува дека

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda a_2 & \lambda a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ \lambda a_3 & \lambda a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

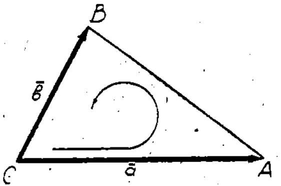
Покажавме: *Потребен услов за тоа, векторите* (*) *да бидат колинеарни е да важи*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тоа е докажано за случај $a \neq 0$. Но очигледно важи и тогаш кога е $a = 0$. Во § 34, т. 7 ќе покажеме дека горниот услов е и доволен.

4. Површина на триаголникот. Два вектора $a = \overrightarrow{CA}$, $b = \overrightarrow{CB}$, нанесени од една иста точка C, определуваат еден триаголник ABC. Со задавање на еден определен смер на обиколување на неговата контура, триаголникот го ориентираме. Тој смер може да биде определен, како при паралелограмот, со тоа што ќе се укаже кој од двата вектори треба да се смета како прв. За површината на ориентираниот триаголник важат истите конвенции како при паралелограмот. Затоа површината на $\triangle ABC$, при ориентацијата што е означена на сликата, е еднаква на

$$p = \frac{1}{2}(a, b).$$



Сл. 39

Да ја изразиме површината p како функција од координатите на темињата! Во однос на една координатна система $(O;\ e_1, e_2)$, чии координатни вектори ја определуваат ориентацијата на рамнината, нека е $A\ (x_1, x_2)$, $B\ (y_1, y_2)$, $C\ (z_1, z_2)$. Тогаш е

$$a = \{x_1 - z_1,\ x_2 - z_2\},\ b = \{y_1 - z_1,\ y_2 - z_2\},$$

и затоа

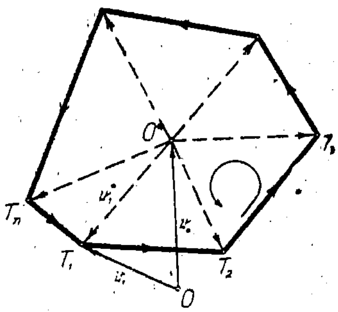
$$p = \frac{(e_1\, e_2)}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Ако точката C совпаднува со координатниот почеток, важи

$$p = \frac{(e_1\, e_2)}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

5. Површина на ориентиран конвексен многуаголник. Многуаголникот се ориентира на ист начин како и специјалните многуаголници: паралелограмот и триаголникот, имено со избирање на еден определен смер на обиколување на неговата контура.

Ќе посматраме прво еден *конвексен* многуаголник $T_1 T_2 \ldots T_n$, т. е. многуаголник при кој страните не му се пресекуваат, а секој внатрешен агол е помал од рамниот. На многуаголникот го избираме како смер на обиколување смерот $T_1 \to T_2 \to T_3 \to \ldots \to T_n \to T_1$.



Сл: 40

Нека почетокот O^* на радиус-векторите е некоја внатрешна точка на полигонот. Со отсечките O^*T_1, O^*T_2, ..., O^*T_n многуаголникот го расекуваме на n триаголници. Ориенрацијата на многуаголникот индуцира и една ориентација на овие триаголници, на пр. во $\triangle\, O^*T_2\, T_3$ ориентацијата $T_2 \to T_3 \to O^* \to T_2$. Површината p на многуаголникот е еднаква, значи, и по апсолутната вредност и по знакот на збирот од површините на овие триаголници. Затоа е

$$2\,p = (\mathfrak{r}_1{}^*,\ \mathfrak{r}_2{}^*) + (\mathfrak{r}_2{}^*,\ \mathfrak{r}^*_3) + \ldots + (\mathfrak{r}_n{}^*,\ \mathfrak{r}_1{}^*), \tag{9}$$

каде што е

$$\mathfrak{r}_i{}^* = \overrightarrow{O^*T_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Сега избираме за почеток на радиус-векторите која да е друга точка O, внатре или надвор од многуаголникот, или на неговата контура. Избирајќи ги ознаките $\overrightarrow{OO^*} = \mathfrak{r}_0$, $\overrightarrow{OT_i} = \mathfrak{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, имаме

$$\mathfrak{r}_i{}^* = \mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Затоа е

$$(\mathfrak{r}_1{}^*,\ \mathfrak{r}_2{}^*) = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0,\ \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_0),$$

или

$$(\mathfrak{r}_1{}^*,\ \mathfrak{r}_2{}^*) = (\mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2) - (\mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_0) + (\mathfrak{r}_2,\ \mathfrak{r}_0).$$

Аналогно е

$$(\mathfrak{r}_2^*, \mathfrak{r}_3^*) = (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) - (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_0) + (\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_0)$$

$$(\mathfrak{r}_3^*, \mathfrak{r}_4^*) = (\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4) - (\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_0) + (\mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_0)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(\mathfrak{r}_n^*, \mathfrak{r}_1^*) = (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_1) - (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_0) + (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_0).$$

Собирајќи ги левите и десните страни на овие идентитети, добиваме

$$(10) \qquad (\mathfrak{r}_1^*, \mathfrak{r}_2^*) + (\mathfrak{r}_2^*, \mathfrak{r}_3^*) + \ldots + (\mathfrak{r}_n^*, \mathfrak{r}_1^*) = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) + \\ + (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) + \ldots + (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_1).$$

Со оглед на (9) е, спрема тоа,

$$(11) \qquad 2\,p = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) + (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) + \ldots + (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_1).$$

Оваа формула важи, следствено, без оглед на тоа каде е избран почетокот O на радиус-векторите.

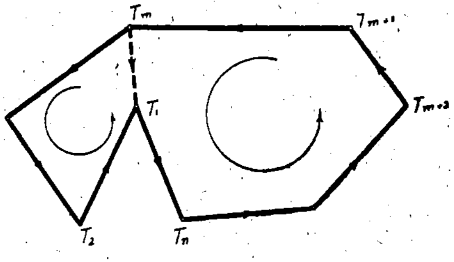
Ќе ѝ дадеме на формулата (11) и координатна форма. Нека ни се зададени координатите на темињата на многуаголникот во една система (O; e_1, e_2):

$$T_1\,(x_1', x_2'),\ T_2\,(x_1'', x_2''),\ \ldots,\ T_n\,(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}).$$

Тоа се и координатите на векторите $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots, \mathfrak{r}_n$. Затоа, користејќи ја (8), имаме:

$$(12) \qquad p = \frac{(e_1, e_2)}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' \\ x_1''' & x_2''' \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_1^{(n)} & x_2^{(n)} \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}\right].$$

6. Површина на неконвексен полигон. Во случајот да полигонот не е конвексен, но да страните не му се пресекуваат, можеме со отсечките што сврзуваат по две темиња на многуаголникот, да го расечеме на делови, од кои секој ќе е конвексен полигон. Ако првобитниот полигон е ориентиран, тогаш таа ориентација индуцира еднакви ориентации и на деловите во кои тој е расечен.



Сл. 41

Ќе претпоставиме дека првобитниот полигон сме го расекле на ориентираните полигони $T_1T_2\ldots Tm$ и $TmTm{+}_1\ldots T_nT_1$ (сл. 41). Нивните површини нека се p_1 и p_2. Ако Ti се зададени со $Ti\,(\mathfrak{r}i)$, имаме

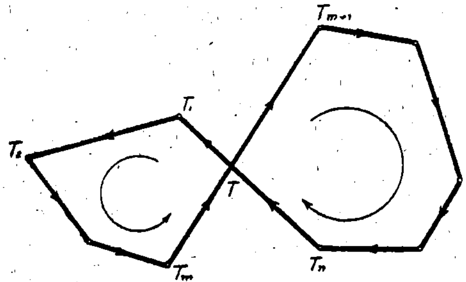
$$2\,p_1 = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) + (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) + \ldots + (\mathfrak{r}_{m-1}, \mathfrak{r}_m) + (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{r}_1)$$

$$2\,p_2 = (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{r}_{m+1}) + (\mathfrak{r}_{m+1}, \mathfrak{r}_{m+2}) + \ldots + (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_1) + (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_m).$$

Собирајќи ги овие два идентитети, и земајќи предвид дека е $(\mathfrak{r}m, \mathfrak{r}_1)+(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}m) = 0$, ја добиваме за површината $p = p_1 + p_2$ на зададениот полигон пак формулата (11), одн. (12).

Оттука следува дека формулата (12) е верна и тогаш кога полигонот е расечен на повеќе делови. *Формулата* (12) *е*, значи, *верна за секој полигон при кој страните не се пресекуваат.*

7. Површина на полигон при кој страните се пресекуваат. Ќе испитаме сега што ќе добиеме, ако формулата (11) одн. (12) ја примениме на еден ориентиран полигон, при кој страните се пресекуваат.



Сл. 42

При многуаголникот $T_1T_2\ldots T_n$ нека се пресекуваат две страни, на пр. страните T_1T_n и $T_m\ T_{m+1}$, и тоа во точката $T(\mathfrak{r})$. Важи очигледно

$$(13)\quad \begin{aligned}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}) + (\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_n) &= (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_n), \text{ и}\\ (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{r})+(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_{m+1}) &= (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{r}_{m+1}).\end{aligned}$$

Применувајќи ја сега на дадениот полигон формулата (11), и сменувајќи ги во неа место $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_n)$ и $(\mathfrak{r}m, \mathfrak{r}m{+}1)$ изразите од левите страни на (13), ја добиваме формулата

$$2p = [(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) + (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) + \ldots + (\mathfrak{r}m, \mathfrak{r}) + (\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1)] +$$
$$+ [(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_{m+1}) + (\mathfrak{r}_{m+1}, \mathfrak{r}_{m+2}) + \ldots + (\mathfrak{r}_{n-1}, \mathfrak{r}_n) + (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r})].$$

Изразот во првата средна заграда е мерниот број на двојната површина $2p_1$ на конвексниот полигон $TT_1T_2\ldots T_mT$; а изразот во втората заграда е мерниот број $2p_2$ на двојната површина на полигонот $TT_{m+1}\ldots T_nT$, кој е ориентиран спротивно од првоит полигон. Броевите p_1 и p_2 имаат, значи, различни знаци.

Бројот $p = p_1 + p_2$ нека е, по дефиниција, „површина" на ориентираниот полигон $T_1T_2\ldots T_n$. Тогаш формулата (11), одн. (12), ни ја определува површината на овој полигон.

Горното се обопштува за произволни полигони.

Применувајќи ја формулата (11), одн. (12), на каков да е полигон, добиваме за p — неговата површина — број, еднаков на збирот на површините на одделните ориентирани делови на полигонот, на кои неговата контура го исекува; при тоа секој од тие делови има онаа ориентација што му ја индуцира ориентацијата на зададениот полигон.

8. Особини на дворедните детерминанти. Особините на симболот $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ќе ги исползуваме сега за изведување на некои теореми за дворедните детерминанти, т. е. за детерминантите, дефинирани во § 18.

Во однос на кои да е координатни вектори нека се зададени векторите

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2\}, \quad \boldsymbol{c} = \{c_1, c_2\}.$$

Од $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и од (5) следува, ставувајќи $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$,

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Од $\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda\,\mathbf{a}, \mathbf{b})$ добиваме

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Најпосле од $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ се добива

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

А со директно пресметување се убедуваме дека е

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Формулите (14) — (17) изразуваат четири важни особини на дворедните детерминанти.

9. Система линеарни равенки со две непознати. Сиболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и неговите особини ќе ги исползуваме сега при решавањето на системи линеарни равенки.

Во системата равенки

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \tag{18}$$

нека се a_1, a_1, b_2, b_2, c_1, c_2 дадени константи. Да ја решиме системата (18) по x, y значи да ги најдеме сите такви двојки броеви x, y — ако постојат — кои ги задоволуваат обете равенки од системата. Коефициентите a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 ќе ги толкуваме сега како координати на вектори. Нека е — во било која координатна система —

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2\}, \quad \mathbf{c} = \{c_1, c_2\}.$$

Системата (18) можеме да ја пишеме сега во овој векторски вид:

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c}. \tag{19}$$

I. Ќе претпоставиме прво дека $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Секој вектор $\mathbf{c}$ може во овој случај да се претстави на еден единствен начин како линеарна комбинација на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, значи во вид $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y$. Решението на векторската равенка (19) е, спрема тоа, двојката на коефициентите на оваа линеарна комбинација. Решение е едно и едно само. За да го најдеме решението, ќе го „множиме" надворешно векторот $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c}$ со $\mathbf{b}$, а потоа со $\mathbf{a}$. Добиваме

$$(\mathbf{a}x + \mathbf{b}y, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{b}),$$

од каде

$$x = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b})};$$

а од

$$(\mathbf{a}x + \mathbf{b}y, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a})$$

добиваме

$$y = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{a})}{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}, \quad \text{или} \quad y = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}.$$

При $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$ решението на (19), значи, гласи

$$x=\frac{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}, \quad y=\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}.$$

Ќе ставиме

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Тогаш е $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}):(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=D_x : D$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}):(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=D_y : D$, а $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=D \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Затоа важи:

Во случај кога е $D \neq 0$, системата (18) има еден и еден сам пар решенија, именно

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D},$$

каде што D, D_x, D_y се дадени со (20).

II. Да го иследиме сега случајот кога е $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ одн. $D = 0$. Во овој случај векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се колинеарни. При секој x и y векторот $\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y$ е колинеарен со нив. Затоа, за да равенството (19) биде можно, е потребно, а и доволно, векторот $\boldsymbol{c}$ да биде колинеарен со $\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y$, и спрема тоа со $\boldsymbol{a}$ и со $\boldsymbol{b}$, т. е. да биде

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0.$$

Ако еден од овие два услови е исполнет, исполнет е — поради $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ — и вториот.

Нека е $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. Тогаш можеме едната од непознатите во (19) произволно да ја избереме, на пр. $y = y_0$; го добиваме равенството

$$\boldsymbol{a}x = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}y_0, \tag{21}$$

кое определува еден и еден сам x, бидејќи $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}y_0$ се колинеарни, а $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ (оти инаку системата (18) не би била система со две непознати). За секој избор на y_0 добиваме по еден соодветен x_0; системата (18) има во овој случај бескрајно многу решенија. Од (21) следува дека сите решенија на едната од равенките (18) се и решенија на другата од тие равенки, и обратно; тие се, значи, еквивалентни.

За да системата (18), во случајот кога е $D = 0$, биде решлива, потребно е и доволно да биде $D_x = D_y = 0$. Ако освен $D = 0$ едната од детерминантите D_x и D_y е нула, и втората е нула.

III. Ако е $c_1 = c_2 = 0$, системата (18) се вика систем*а* *хомогени* равенки. Во овој случај (19) гласи

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y = \boldsymbol{0}. \tag{22}$$

Двојката броеви $x = 0$, $y = 0$ претставуваат, секако, едно решение на оваа равенка, одн. на системата (18). Ова решение го викаме *тривијално*.

Ако (22) има некое *нетривијално* решение, т. е. решение $x = x_0$, $y = y_0$, при кое барем еден од броевите x_0, y_0 не е нула, тогаш векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, на основа (22), се колинеарни, или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, одн. $D = 0$.

Обратно, ако е $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ одн. ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се колинеарни, тогаш постојат нетривијални решенија на (18). Ако е имено $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, може y да го избереме произволно, $y = y_0$; тогаш е $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b}y_0 : \boldsymbol{a}$.

Спрема тоа, бидејќи е $(a, b) = D\cdot(e_1, e_2)$, важи:

За да системата

$$a_1x + b_1y = 0$$
$$a_2x + b_2y = 0$$

има нетривијални решенија, потребно и доволно е да биде $D = 0$.

Забелешка. Ако системата равенки е дадена во обликот

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$$
$$B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0,$$

решението ќе го запомниме во вид на оваа пропорција:

$$x_1 : x_2 : 1 = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}.$$

10. Равенка на системата колинеарни вектори. Ќе дадеме сега едно геометриско толкување на равенката од видот

$$A_1z_1 + A_2z_2 = 0, \tag{23}$$

каде што A_1, A_2 се две дадени константи. Секој пар решенија z_1, z_2 на оваа равенка ќе го толкуваме како координати од еден вектор $\{z_1, z_2\}$ во однос на некоја избрана координатна система.

Равенката (23) можеме да ја запишеме во вид

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -A_2 & A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тоа значи (т. 2) дека векторот $\{z_1, z_2\}$ е колинеарен со векторот $l = \{-A_2, A_1\}$. Секој пар решенија на (23) претставува, значи, координати на еден вектор, колинеарен со l. Но и обратно, координатите од секој таков вектор ја задоволуваат (23), бидејќи се од облик $\{-\lambda A_2, \lambda A_1\}$, па е

$$A_1(-\lambda A_2) + A_2\cdot\lambda A_1 = 0.$$

Равенката (23) *е задоволена,* значи, *со координатите на секој вектор што е колинеарен со векторот* $\{-A_2, A_1\}$, *а други решенија нема.*

11. Геометриско толкување на равенката $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$. Ќе ја разгледаме равенката

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0, \tag{24}$$

во која A_1, A_2, A_3 се дадени константи, а барем една од A_1, A_2 е различна од нула. Секој пар броеви x_1, x_2 кои ја задоволува оваа равенка ќе го толкуваме сега како координати на една точка во однос на некоја рамнинска афина координатна система. По тој начин на секој пар решенија на равенката одговара во рамнината една точка. Се прашуваме, кои се сите точки од рамнината што на тој начин ѝ одговараат на равенката (24).

Нека е $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$ едно решение од (24). Нему му одговара точката $P(p_1, p_2)$. Имаме

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 = 0.$$

Ако ова равенство го извадиме од (24), добиваме

$$A_1 (x_1 - p_1) + A_2 (x_2 - p_2) = 0. \tag{25}$$

Секое решение x_1, x_2 од (24) е и решение од (25), и обратно.

Нека е x_1, x_2 кое да е решение од (25) одн. (24). Нему нека му одговара точката $X(x_1, x_2)$. Равенката (25) покажува, на основа т. 10, дека векторот $\{x_1 - p_1, x_2 - p_2\} = \overrightarrow{PX}$ е паралелен со векторот $l = \{-A_2, A_1\}$. Точката X, која одговара на едно произволно решение од (24), лежи спрема тоа на правата што минува низ P, а е паралелна со l.

Нека е сега $X'(x_1', x_2')$ која да е точка од таа права. Векторот $\overrightarrow{PX'} = \{x_1' - p_1, x_2' - p_2\}$ е затоа паралелен со l, а неговите координати ја задоволуваат, спрема т. 10, равенката $A_1 z_1 + A_2 z_2 = 0$, т. е.

$$A_1 (x_1' - p_1) + A_2 (x_2' - p_2) = 0.$$

Координатите од X' ја задоволуваат, значи, равенката (25), а спрема тоа и равенката (24).

Со тоа покажавме дека:

Сите точки од рамнината, чии што координати x_1, x_2 ја задоволуваат равенката (24), лежат на една права p, паралелна со векторот $\{-A_2, A_1\}$, а и координатите на секоја точка од таа права ја задоволуваат равенката (24).

Равенката (24) ја викаме *равенка на правата p*. Равенката (24) е, значи, аналитички претставител на правата p. Затоа често пати место „равенка на правата p" се изразуваме кратко — „правата p".

ПРИМЕРИ

1. Определи го m во равенката $3x_1 + mx_2 - 1 = 0$ така да таа претставува права паралелна со векторот $\{1, -2\}$.

Решение: Бидејќи правата $3x_1 + mx_2 - 1 = 0$ е паралелна со векторот $\{-m, 3\}$, тоа m треба да го задоволува условот

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -m & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Оттука следува $m = \frac{3}{2}$.

2. Каква положба имаат правите

$$(26) \qquad A_1x_1 + A_3 = 0 \quad \text{и} \quad (27) \quad A_2x_2 + A_3 = 0.$$

Решение. Правата (26) е паралелна со $\{0, A_1\}$, значи и со $\{0, 1\}$; правата е паралелна со x_2-оската.

Правата (27) е паралелна со x_1-оската.

Ако во зададените равенки е $A_3 = 0$, тогаш тие се задоволени со $x_1 = x_2 = 0$. Правите врват низ координатниот почеток. Спрема тоа, равенките $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ ги претставуваат x_2-оската и x_1-оската.

ЗАДАЧИ

1. При кои вредности за λ векторите $\{4, \lambda\}$ и $\{\lambda, 1\}$ се колинеарни?

2. Покажи дека векторите $\{a, b, c\}$ и $\{a + b, b + c, c + a\}$ не се колинеарни, ако не е $a = b = c$.

Пресметај ја површината на триаголникот чии што темиња се зададени:

3. (2, — 1), (— 5, 0), (3, 3).

4. $(t_1t_2,\ t_1 + t_2)$, $(t_2t_3,\ t_2 + t_3)$, $(t_3t_1,\ t_3 + t_1)$.

5. Две темиња од еден триаголник се во точките (5, 1) и (— 2, 2), а третото е на x_1-оската. Да се определи ова теме, ако се знае дека површината на триаголникот е $15 \cdot (e_1, e_2)$.

6. Зададен е еден триаголник со темињата A (1, 2), B (8, 4), C (4, 10). Да се определат координатите на онаа точка P за да триаголниците ABP, BCP и CAP имаат еднакви површини, по апсолутна вредност и по знак, ако триаголниците се еднакво ориентирани.

7. Да се најде онаа точка од x_1-оската која е колинеарна со точките (3, 5) и (2, 3).

8. Точките $(a, b + c)$, $(b, c + a)$, (c, x_2) се колинеарни. Колку е x_2?

9. Каков услов задоволуваат координатите x_1, x_2 на точките кои се колинеарни со координатниот почеток и со (a_1, a_2)?

10. Определи го λ така да точките $(3\lambda+1, \lambda)$, $(7\lambda, \lambda - 1)$ и $(\lambda - 2, \lambda + 1)$ бидат колинеарни.

11. Пресметај ја површината на петоаголникот со темињата: (— 2, 0), (0, — 1), (4, 1), (3, 3), (1, 1), ако е $(e_1, e_2) = 1$.

12. Три темиња на еден четириаголник се A (1, 1), B (3, — 2) и C (2, 4), а четвртото теме D е на x_2-оската. Кои се координатите од D, ако површината на тој ориентиран четириаголник е нула?

13. Реши ја системата

$$\begin{aligned} x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha &= \sin\beta \\ -x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha &= \cos\beta \end{aligned}$$

по x_1, x_2.

14. При кои вредности од λ системата

$$\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + (1-\lambda)x_2 &= 0 \\ (2+\lambda)x_1 + (3-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

има нетривијални решенија по x_1, x_2?

15. Како гласи равенката на системата колинеарни вектори, на која ѝ припаѓа векторот $\{4, -7\}$?

Во една зададена афина координатна система нацртај ги правите:

16. $x_1 + x_2 + 1 = 0$. 17. $x_1 - x_2 = 0$. 18. $2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$.

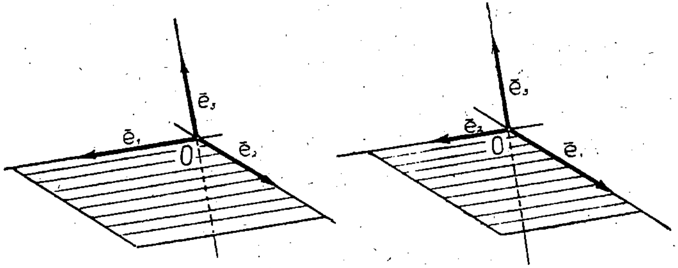
19. При која вредност од λ правите $3\lambda x_1 - 2x_2 + 7 = 0$ и $3x_1 - \lambda x_2 - 4 = 0$ се паралелни?

II Ориентирани просторнини

§ 20. Десна и лева координатна система во просторот

Една афина координатна система во просторот е определена со координатниот почеток O и со некомпланарните вектори e_1, e_2, e_3. При тоа треба да биде укажано кој од овие вектори треба да се смета као прв, кој како втор, а кој како трет вектор. Секоја аква тројка вектори, при која е утврдена меѓусебната распоредба на векторите, се вика *подредена тројка вектори.*

Координатните вектори се, значи, една подредена тројка вектори.



десна система

лево система

Сл. 43

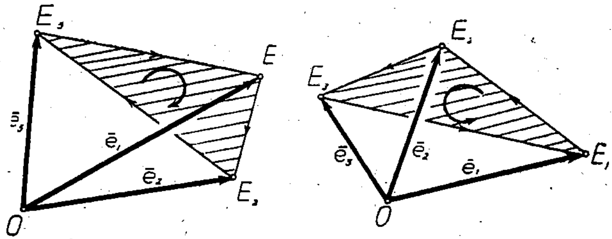
Аналогно како при рамнинската координатната система, така и при просторната разликуваме два вида координатни системи според тоа како е подредена тројката на координатните вектори.

Координатната x_1x_2-рамнина од една система (O; e_1, e_2, e_3) го разделува просторот во два полупростори. Ако векторите e_1, e_2, посматрани од оној полупростор, во кој е насочен векторот e_3, образуваат десна двојка вектори, тогаш кажуваме и за координатната система (O; e_1, e_2, e_3) дека е *десно ориентирана*, или дека е *десна*. Во спротивниот случај, кога e_1 и e_2, посматрани од истиот полупростор, образуваат лева двојка вектори, просторната система ја викаме *лева* или *лево ориентирана*.

Истотака, секоја тројка подредени вектори, кои можат да бидат избрани како координатни вектори на една десна одн. лева координатна система, ќе ја наречуваме *десна* одн. *лева тројка вектори*.

Називанието „десен" и „лев" иде оттаму што првиот, вториот и третиот вектор на една десна (одн. лева) тројка вектори се распоредени меѓусебно така као првите три прсти: палецот, казалецот и средниот прст на десната (одн. на левата) рака.

За две десни или за две леви тројки вектори ќе кажеме дека се *еднакво ориентирани* или дека имаат *еднакви ориентации;* за една десна и една лева тројка ќе кажеме дека се *спротивно ориентирани* или дека *имаат спротивни ориентации.*



десно ориентирана тројка вектори

лево ориентирана тројка вектори

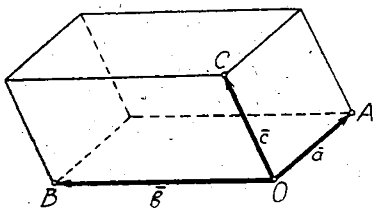
Сл. 44

Ориентацијата на една тројка вектори може да се определи и на друг начин. Крајните точки E_1, E_2 и E_3 на векторите e_1, e_2 и e_3, нанесени од O, образуваат еден триаголник. Ако смерот на обиколувањето $E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_1$ на тој триаголник, посматран од O, совпаднува со смерот на вртењето на стрелките од саатот, тогаш тројката вектори е десна, а во спротивен случај тројката е лева (види сл. 44). Ако ги замениме местата на два кои да е вектора, смерот на обиколувањето на $\triangle E_1E_2E_3$ се менува, а спрема тоа се менува и ориентацијата на тројката вектори. Но ориентацијата на тројката вектори e_1, e_2, e_3 не се менува, ако векторите e_1, e_2, e_3 ги пермутираме циклично, т. е. ако како прв, втор и трет вектор ги сметаме место e_1, e_2, e_3 векторите e_2, e_3, e_1, или векторите e_3, e_1, e_2. Во сите овие случаи смерот на обиколувањето на $\triangle E_1E_2E_3$ останува имено ист.

Ако во просторот е избрана една просторна координатна система (десна или лева), ќе кажеме дека *просторот е ориентиран.*

§ 21. Ориентиран паралелопипед и неговата просторнина

1. Дефиниција. Три некомпланарни вектори $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, нанесени од една точка O, определуваат еден паралелопипед, при кој отсечките OA, OB и OC се три негови раба со заедничкото теме O.



Сл. 45

Ако тројката вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е *подредена*, тогаш кажуваме дека и паралелопипедот што го определуваат е *ориентиран.*

Аналогно како на површината на ориентираниот паралелограм во една ориентирана рамнина му го претпишавме знакот, така му го претпишуваме сега знакот и просторнината (волуменот) на ориентираниот паралелопипед. *Просторнината*[1] *на еден ориентиран паралелопипед, определен со подредената тројка вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, *е, по дефиниција, позитивна или негативна според тоа дали тројката има иста или спротивна ориентација како тројката координатни вектори со која што просторот е ориентиран; по апсолутната вредност таа е еднаква на просторнината, дефинирана во стереометријата.*

Оваа просторнина ќе ја бележиме со симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

До сега претпоставувавме дека векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се некомпланарни. Но отсега ќе го употребуваме симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ за произволни вектори. Ако векторите се компланарни, тогаш „паралелопипедот" што го определуваат дегенерира (се сплескува во рамнинска фигура или отсечка), просторнината му е, значи, нула. За компланарните вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, и само за нив, важи, значи,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.$$

2. Формални особини на симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. На основа дефиницијата на ориентирана просторнина и на што помал можен број теореми, познати од стереометријата, ќе изведеме сега некои основни особини на симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Резултатите од претпоследниот пасус на § 20 можеме да ги изразиме сега со идентитетите:

---

[1] Под терминот „просторнина" ќе го подразбираме мерниот број на просторнината.

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$; $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$; $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}. \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$;

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

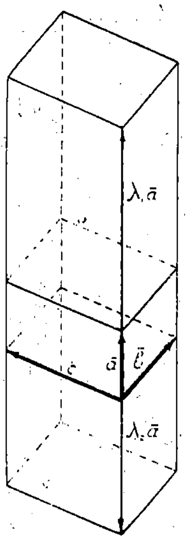
Сега ќе покажеме дека за произволен скалар λ важи

(I) $(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda \boldsymbol{c}) = \lambda \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$,

т. е. *дека сибмолот* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *се множи со скалар, ако се множи со тој скалар кој да е од векторите* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Дека еднаквоста $|(\lambda\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c})| = |\lambda| \cdot |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$

е верна, геометриски е јасно: просторнината $(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ е по апсолутна вредност $|\lambda|$ пати поголема од апсолутната вредност на просторнината $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. На сл. 46 е $\lambda_1 = +4$, $\lambda_2 = -2$. Но бидејќи при $\lambda > 0$ ориентацијата на $\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ е еднаква на ориентацијата на $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, а при $\lambda < 0$ спротивна на неа, тоа еднаквоста $(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ е верна и по знакот. По аналогија верни се и останатите идентитети од (1).

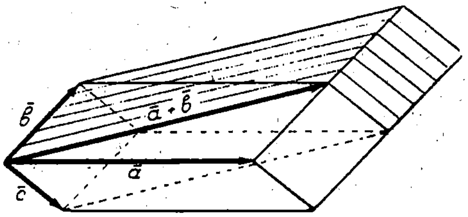


Сл. 46

А сега ќе докажеме дека е

(2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Апсолутните вредности на просторнините $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ се еднакви (сл. 47). Но тие се еднакви и по знак, бидејќи двојките вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}$ од една рамнина имаат иста ориентација, а спрема тоа и тројките вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ во просторот.



Сл. 47

Аналогно се покажува на пр. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Така ја добиваме теоремата:

(II) *Ако кој да е од векторите* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *го собереме со кој да е друг од овие вектори, тогаш симболот* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *не си ја менува вредноста.*

Користејќи ги докажаните теореми (I), (II), ќе докажеме сега, по чисто алгебарски пат, уште некои особини на симболот $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

На наполно аналоген начин како формулата (2) од § 17 се докажува дека важи

(3) $$(a+\lambda a, b, c) = (a, b, c) + (\lambda a, b, c).$$

Аналогно на (3) од § 17 докажуваме дека е

(4) $$(a+\lambda b, b, c) = (a, b, c).$$

Важи имено

$$\begin{aligned}
&(a+\lambda b, b, c) = \\
&= \frac{1}{\lambda}(a+\lambda b, \lambda b, c) = && [\text{особина (I)}]\\
&= \frac{1}{\lambda}(a, \lambda b, c) = && [\text{особина (II)}]\\
&= \quad (a, b, c) && [\text{особина (I)}].
\end{aligned}$$

И на крај ќе докажеме дека е

(5) $$(a+d, b, c) = (a, b, c) + (d, b, c).$$

Ако b и c се колинеарни, овој идентитет е верен, бидејќи тогаш сите три симболи се нула.

Да го разгледаме случајот кога b, c не се колинеарни, но a, b, c да се компланарни. Во тој случај векторот a можеме да го претставиме во вид

$$a = \lambda b + \mu c.$$

Затоа имаме, користејќи ја особината (4),

$$(a+d, b, c) = (d+\lambda b+\mu c, b, c) = (d, b, c).$$

А бидејќи е $(a, b, c) = 0$, тоа формулата (5) за овој случај е докажана.

Сега нека е $(a, b, c) \neq 0$. Тогаш векторот d може да се претстави во видот

(*) $$d = \lambda a + \mu b + \nu c.$$

Затоа е

$$\begin{aligned}
&(a+d, b, c) = (\lambda a+\mu b+\nu c+a, b, c) = \\
&= (\lambda a+a, b, c) = && [\text{особина (4)}]\\
&= (\lambda a, b, c) + (a, b, c) = && [\text{особина (3)}]\\
&= (\lambda a+\mu b+\nu c, b, c) + (a, b, c) = && [\text{особина (4)}]\\
&= (d, b, c) + (a, b, c) = && [\text{според (*)}]\\
&= (a, b, c) + (d, b, c) && [\text{комутативност на збир на броевите}].
\end{aligned}$$

Со тоа особината (5) е докажана.

Аналогно на (5) важи и

(5') $$\begin{aligned}(a, b+d, c) &= (a, b, c) + (a, d, c);\\ (a, b, c+d) &= (a, b, c) + (a, b, d).\end{aligned}$$

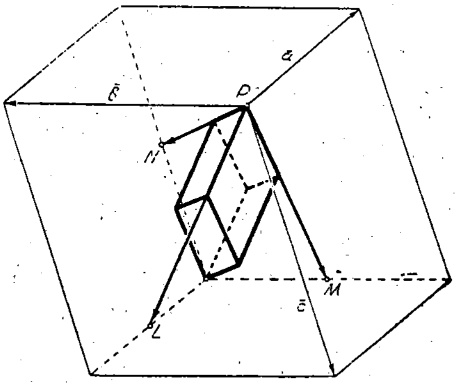
Сите докажани особини на симболот $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, со исклучок на (1), покажуваат полна аналогија со особините на производот на три броја. Таа аналгија оди и понатаму. Од горните особини (I), (II), (4), (5) и (5′) следува имено дека симболот $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, во кој $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ се линеарни комбинации од какви да е вектори, е еднаков на изразот што се добива на тој начин, што тие линеарни комбинации формално ги измножиме по правилата на обикновената алгебра, а да во резултатот „производите" на векторите ги замениме со нашите симболи од тие вектори. Така е на пр.

$$(\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2,\ \ \mu_1\boldsymbol{b}_1 + \mu_2\boldsymbol{b}_2,\ \ \nu\boldsymbol{c}) =$$
$$= \lambda_1\mu_1\nu\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \lambda_1\mu_2\nu\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) + \lambda_2\mu_1\nu\,(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \lambda_2\mu_2\nu\,(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}).$$

Поради спомнатата особина симболот $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ го викаме и *троен производ* на векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. „Троен" затоа што во симболот фигурираат три вектори.

ПРИМЕНА

Пример. Со една подредена тројка вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, нанесени од точката P, е зададен еден паралелопипед. Средините на оние негови рабови, чија што заедничка точка е темето Q, спротивно на P, нека се L, M, N. Определи ги λ, μ, ν така да векторите $\lambda \cdot \overrightarrow{PL}$, $\mu \cdot \overrightarrow{PM}$, $\nu \cdot \overrightarrow{PN}$, нанесени од P, определуваат еден паралелопипед со P и Q како спротивни темиња и пресметај му ја просторнината!



Сл. 48

Решение. $\overline{PQ}$ е заедничка дијагонална на двата паралелопипеда. Затоа е

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{PL} + \mu \cdot \overrightarrow{PM} + \nu \cdot \overrightarrow{PN}.$$

Но

$$\overrightarrow{PL} = \frac{\boldsymbol{a}}{2} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{PM} = \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{PN} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{c}}{2}.$$

Заменувајќи ги овие изрази во

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \lambda \cdot \overrightarrow{PL} + \mu \cdot \overrightarrow{PM} + \nu \cdot \overrightarrow{PN},$$

добиваме

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu + \nu\right)\boldsymbol{a} + \left(\lambda + \frac{\mu}{2} + \nu\right)\boldsymbol{b} + \left(\lambda + \mu + \frac{\nu}{2}\right)\boldsymbol{c},$$

од каде

$$\frac{\lambda}{2} + \mu + \nu - 1 = 0, \quad \lambda + \frac{\mu}{2} + \nu - 1 = 0, \quad \lambda + \mu + \frac{\nu}{2} - 1 = 0.$$

Оваа систсма има решение $\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{5}$.

Бараната просторнина е значи

$$V=\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{PL},\ \frac{2}{5}\overrightarrow{PM},\ \frac{2}{5}\overrightarrow{PN}\right)=\frac{8}{125}(\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN});$$

а

$$(\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN})=\left(\frac{a}{2}+b+c,\quad a+\frac{b}{2}+c,\quad a+b+\frac{c}{2}\right)=\frac{5}{8}(a, b, c),$$

и спрема тоа

$$V=\frac{1}{25}(a, b, c),$$

т. е. просторнината V е еднаква на $\frac{1}{25}$ од просторнината на дадениот паралелопипед.

ЗАДАЧИ

1. Упрости го симболот $(3a - 2b, a + b, 3b - 4a)$.

2. Дали тројките подредени вектори a, b, c и $a + b, b + c, c + a$ имаат еднакви или спротивни ориентации?

3. Истото прашање за тројките a, b, c и $a + b - c,\ a - b + c,\ - a + b + c$.

4. Просторнината на еден паралелопипед е V_0. Колкава е просторнината на оној паралелопипед, чии што три соседни рабови се дијагоналите на страните на дадениот паралелопипед?

5. Два паралелопипеди имаат паралелни рабови кои се однесуваат како $m_1 : m_2,\ n_1 : n_2$ и $l_1 : l_2$. Како се однесуваат просторнините на паралелопипедите?

6. Телесните дијагонални на еден паралелопипед со просторнина V_0 се паралелни на телесните дијагонали на еден друг паралелопипед. Должините на паралелните дијагонали на двата паралелопипеда се однесуваат како $l_1 : l_2$, $m_1 : m_2$ и $n_1 : n_2$. Пресметај ја просторнината на вториот паралелопипед!

§ 22. Аналитичен израз за просторнината на ориентиран паралелопипед

1. Формула за просторнината на паралелопипед. Во просторот избираме една подредена тројка вектори

$$a = \{a_1, a_2, a_3\},\ b = \{b_1, b_2, b_3\},\ c = \{c_1, c_2, c_3\},$$

зададени во однос на една тројка координатни вектори e_1, e_2, e_3. Имаме значи

$$(a, b, c) =$$
$$= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,\ c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3),$$

а спрема правилата од § 21:

$$(a, b, c) = a_1b_2c_3(e_1, e_2, e_3) + a_2b_3c_1(e_2, e_3, e_1) + a_3b_1c_2(e_3, e_1, e_2) +$$
$$+ a_1b_3c_2(e_1, e_3, e_2) + a_2b_1c_3(e_2, e_1, e_3) + a_3b_2c_1(e_3, e_2, e_1) =$$
$$=(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)\cdot(e_1, e_2, e_3).$$

За изразот во првата заграда во резултатот ја воведуваме ознаката

$$(*)\quad a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

која ја наречуваме *детерминанта* од координатите на векторите a, b, c. По тој начин важи формулата

$$(6)\qquad (a,\ b,\ c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (e_1\, e_2\, e_3).$$

Ако за единица просторнина ја избереме просторнината $(e_1,\ e_2,\ e_3)$, т. е. ако ставиме $(e_1,\ e_2,\ e_3) = +1$, добиваме

$$(7)\qquad (a,\ b,\ c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Забелешка. Формулата (7) е логична последица на особините (1), (I), (II) и барањето $(e_1,\ e_2,\ e_3) = +1$. Но за особините (1) може лесно да се покаже — како за особината (1) од § 17 — дека можат да се дедуцираат од (I) и (II). Затоа особините (I), (II) и $(e_1, e_2, e_3) = +1$ можеме да ги сметаме и како дефинициони особини на симболот $(a,\ b,\ c)$.

2. Знак на детерминантата на координатите од векторите на една подредена тројка вектори. Од (6) следува теоремата:

Детерминантата од координатите на векторите на една тројка подредени вектори a, b, c *е позитивна или негативна според тоа дали тројката* a, b, c *има еднаква или спротивна ориентација како тројката координатни вектори.*

За две подредени тројки вектори следува од докажаната теорема:

Две подредени тројки вектори се еднакво или спротивно ориентирани според тоа дали детерминантите од нивните координати во однос на една иста координатна система имаат еднакви или различни знаци.

ЗАДАЧИ

1. За кои вредности од λ подредената тројка вектори $\{1,\ 1,\ 1\}$, $\{1, -2, \lambda\}$, $\{1,\ 4,\ \lambda^2\}$ има иста ориентација како тројката координатни вектори?

При кои вредности на a имаат подредените тројки вектори, зададени во зад. 2 и 3, еднакви ориентации?

2. $\{a, 1, 0\}$, $\{0, a, 1\}$, $\{1, 0, a\}$.

3. $\{a, 1, 1\}$, $\{a, 1, a\}$, $\{a, a, 1\}$.

§ 23. Примена на тројниот производ

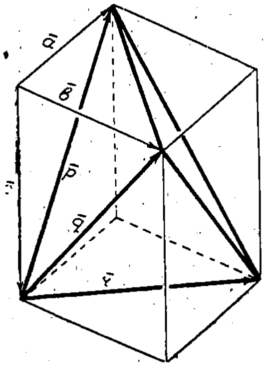
1. Услов за компланарност на три вектори. Видовме (§ 21) дека потребно и доволно за тоа, три вектори a, b, c да бидат компланарни, е да важи $(a, b, c) = 0$. Со оглед на (7) важи значи:

Потребен и доволен услов за компланарност на три вектори е, детерминантата од нивните координати да биде нула.

2. Просторнина на ориентиран тетраедар. Три вектори $a_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$, $a_2 = \overrightarrow{A_0A_2}$, $a_3 = \overrightarrow{A_0A_3}$, нанесени од една точка A_0, определуваат еден тетраедар $A_0A_1A_2A_3$. Тетраедарот нека е, по дефиниција, *ориентиран*, ако тројката вектори a_1, a_2, a_3 е подредена. Ако тројката a_1, a_2, a_3 има иста ориентација како тројката координатни вектори што го ориентираат просторот, на просторнината на тетраедарот ѝ претпишуваме знак +, а во спротивниот случај знак —.

Од елементарна геометрија е познато дека апсолутните вредности на просторнините на призми и пирамиди со еднакви основи и еднакви висини се однесуваат како 3 : 1. Тетраедарот $A_0A_1A_2A_3$ има со паралелопипедот, определен со a_1, a_2, a_3, иста висина, а површините на соодветните основи им се однесуваат како 1 : 2. Затоа просторнината V на ориентираниот тетраедар, определен со подредената тројка вектори a_1, a_2, a_3, е дадена со формулата

$$V = \frac{1}{6}(a_1, a_2, a_3).$$



Сл. 49

ПРИМЕРИ

1. Да се пресмета просторнината V на тетраедарот чии што рабови се дијагоналите од страните на еден паралелопипед со просторнина V_0.

Решение. Паралелопипедот нека биде определен со векторите a, b, c. Тогаш тетраедарот е определен со векторите (сл. 49) $p = a - c$, $q = b - c$, $r = a + b$. Неговата просторнина е тогаш

$$V = \frac{1}{6}(p, q, r) = \frac{1}{6}(a-c, b-c, a+b),$$

или

$$V = \frac{1}{3}(a, b, c), \text{ т. е. } V = \frac{V_0}{3}.$$

2. На рабовите OA, OB и OC од еден тетраедар ги избираме точките A_1, B_1, C_1 така да е

$$\overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{A_1A} = m : n, \quad \overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{B_1B} = p : q, \quad \overrightarrow{OC_1} : \overrightarrow{C_1C} = r : s.$$

Да се пресмета просторнината V_1 на тетраедарот $OA_1B_1C_1$, ако е позната просторнина V на тетраедарот $OABC$.

Решение. Бидејќи е

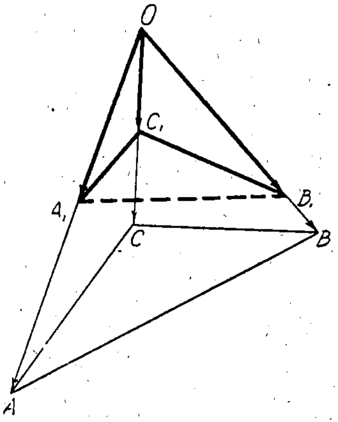
$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OB_1} = \frac{p}{p+q}\cdot\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{OC_1} = \frac{r}{r+s}\cdot\overrightarrow{OC},$$

имаме

$$V_1=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{OB_1},\ \overrightarrow{OC_1})=\frac{1}{6}\left(\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA},\ \frac{p}{p+q}\cdot\overrightarrow{OB},\ \frac{r}{r+s}\cdot\overrightarrow{OC}\right),$$

или, бидејќи е $V=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC})$, ја добиваме за бараната просторнина формулата

$$V_1=\frac{mpr}{(m+n)\ (p+q)\ (r+s)}\cdot V.$$



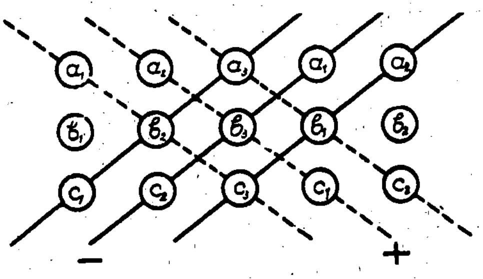
Сл. 50

3. Особини на детерминантите од трет ред. Детерминатата

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

е дефинирана со (*) во § 22. т. 1. Деветте броеви $a_1, a_2, \ldots, c_2, c_3$, од кои е формирана детерминантата, ги викаме нејзини *елементи*, а самата детерминанта (8) — *детерминанта од девет елементи, трoредна детерминанта* или *детерминанта од трет ред*. За елементите a_1, a_2, a_3 кажуваме дека лежат во првиот ред, а аналогно за елементите b_1, b_2, b_3 и c_1, c_2, c_3 дека лежат во вториот одн. третиот ред; а за тројките елементи a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 и a_3, b_3, c_3 дека се наоѓаат во првата, втората одн. во третата колона.

Детерминантата (8) е, спрема дефиницијата, збир од шест члена, од кои секој е производ од по три елемента на детерминантата. Долната шема покажува, кои елементи се фактори во одделните членови и каков знак има секој член. Шемата ги содржи елементите од детерминантата, на кои им се додадени од десната страна првата и втората колона.



Правилото за пресметување на детерминантата по оваа шема се вика „*правило на Сарус*".

По правилото на Сарус се проверува дека е

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

т. е. дека:

Детерминантата не си ја менува вредноста, ако ги замениме редовите со соодветните колони и обратно.

Оттука следува дека:

[1] *Сите особини што важат за редовите на детерминантите важат и за колоните.*

Останатите особини на детерминантите ќе ги изведеме од особините на тројниот производ, изразувајќи го со координатите на векторите на основа формулата (7).

Сменувајќи ги во равенствата (I) тројните производи со соодветните детерминанти, добиваме.

Една детерминанта се множи со бројот λ, *ако со тој број ги множиме елементите од кој да е ред или* — со оглед на [1] — *елементите од која да е колона.*

За $\lambda = 0$ добиваме:

Ако елементите од кој да е ред или која да е колона се нула, вредноста на детерминантата е нула.

Тројниот производ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ го менува својот знак, ако во него ги промениме местата на кои да е два од векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Затоа:

Детерминантата го менува знакот, ако ги замениме местата на соодветните елементи во кои да е два нејзини реда или во кои да е две колони.

Идентитетот $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, и други нему аналогни, ни го даваат правилото:

Ако кон елементите на кој да е ред (или колона) од една детерминанта додадеме еднакви, но произволни, линеарни комбинации од соодветните елементи од другите редови (одн. колони), детерминантата не си ја менува вредноста.

На пр. детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & —3 & —6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

е еднаква на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 —3\cdot 1 + 2\cdot 5 & —3 —3\cdot 3 +2\cdot 6 & —6 —3\cdot 4 +2\cdot 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix},$$

која ја добиваме на тој начин што на елементите од првиот ред ги додаваме соодветните елементи од вториот ред, помножени со —3, и соодветните елементи од третиот ред, помножени со 2.

Ако во тројниот производ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ кои да е два од векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ се колинеарни, тој производ е нула. Оттука:

Една детерминанта, во која соодветните елементи од кои да е два реда или од кои две колони се пропорционални, е еднаква на нула.

Последната особина што ќе ја добиеме непосредно од изучените особини на тројниот производ ќе ни ја даде идентитетот

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}),$$

и нему аналогните. Одавде го добиваме, имено, ова правило за собирање на детерминантите:

Ако елементите од кој да е ред или од која да е колона на една детерминанта се збирови од по два броја, тогаш детерминантата може да се претстави во вид на збир од две детерминанти онака како што го покажува долниот пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 & c_3+d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

4. Производ на две детерминанти. Сега ќе покажеме како производ од две детерминанти од трет ред може да се претстави пак како една детерминанта од ист ред. Нека ни бидат дадени координатите l_i, m_i, n_i $(i = 1, 2, 3)$ на векторите $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ во однос на една тројка координатни вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Тогаш важи (§ 22, (6)):

$$(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \tag{9}$$

Во однос на една друга тројка координатни вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ нека имаат векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ координати a_i, b_i одн. c_i $(i = 1, 2, 3)$. Ќе ставиме $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = +1$. Тогаш е

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Ќе ги пресметаме координатите на $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ во однос на координатните вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Бидејќи е

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l} &= l_1 \boldsymbol{a} + l_2 \boldsymbol{b} + l_3 \boldsymbol{c} = \\ &= l_1 \cdot \{a_1, a_2, a_3\} + l_2 \cdot \{b_1, b_2, b_3\} + l_3 \cdot \{c_1, c_2, c_3\}, \end{aligned}$$

ги добиваме за координатите на $\boldsymbol{l}$ изразите

$$l_1 a_i + l_2 b_i + l_3 c_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{11}$$

и аналогно за координатите на $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ изразите

$$m_1 a_i + m_2 b_i + m_3 c_i \quad \text{и} \quad n_1 a_i + n_2 b_i + n_3 c_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Внесувајќи ја детерминантата од (10) и изразите (11) и (12) во идентитетот (9), добиваме

$$\begin{vmatrix} l_1 a_1 + l_2 b_1 + l_3 c_1 & l_1 a_2 + l_2 b_2 + l_3 c_2 & l_1 a_3 + l_2 b_3 + l_3 c_3 \\ m_1 a_1 + m_2 b_1 + m_3 c_1 & m_1 a_2 + m_2 b_2 + m_3 c_2 & m_1 a_3 + m_2 b_3 + m_3 c_3 \\ n_1 a_1 + n_2 b_1 + n_3 c_1 & n_1 a_2 + n_2 b_2 + n_3 c_2 & n_1 a_3 + n_2 b_3 + n_3 c_3 \end{vmatrix} = \tag{13}$$

$$= \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Овој идентитет е докажан при претпоставка да е $(a, b, c) \neq 0$, односно да детерминантата од (10) е различна од нула; докажан е, значи, за случај кога барем една од детерминантите што треба да се множат е различна од нула. Но идентитетот е верен и тогаш кога обете детерминанти се нула.

На сличен начин се множат детерминантите од втор ред. Важи имено

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1a_1 + l_2b_1 & l_1a_2 + l_2b_2 \\ m_1a_1 + a_2b_1 & m_1a_2 + m_2b_2 \end{vmatrix}$$

Производ од две детерминанти од ист ред е детерминанта од ист ред чиј што елемент од i-тиот ред и к-тата колона е збир од производите на соодветните елементи од i-тиот ред на првата и од к-тата колона на втората детерминанта.

5. Матрици. Пред да разгледаме други примени на тројниот производ, ќе се запознаеме со еден нов поим — со поимот за *матрица*.

Дефиниција. Една правоаголна шема броеви, како на пр.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \end{Vmatrix} \tag{14}$$

се вика *матрица*. Броевите од кои е формирана се викаат нејзини *елементи*. Тие се распоредени во *редови* и *колони*. Матрицата (14) има на пр. три реда и пет колони. Ако бројот на редовите е еднаков со бројот на колоните, матрицата се вика *квадратна*. Ние ќе ги разгледаме само матриците кои немаат повеќе од три реда и матриците кои немаат повеќе од три колони.

Ранг на една матрица. Од една зададена матрица можеме да образуваме разни квадратни матрици на тој начин што во неа ќе бришеме известен број редови и колони. Детерминантата, образувана од елементите на една така добиена квадратна матрица, ќе ја наречеме *поддетерминанта* од дадената матрица. Од матрицата (14) добиваме на пр., со бришење на вториот ред и првата, третата и четвртата колона, квадратната матрица

$$\begin{Vmatrix} b_1 & e_1 \\ b_3 & e_3 \end{Vmatrix}.$$

Детерминантата

$$\begin{vmatrix} b_1 & e_1 \\ b_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

е, значи, една поддетерминанта од матрицата (14).

Важна улога во теоријата на матриците игра највисокиот ред на поддетерминантите од една матрица кои не се нула. Тој ред се вика *ранг* на матрицата.

Една матрица со три реда (или со три колони) има значи ранг 3, ако барем една нејзина поддетерминанта од трет ред е различна од нула; таа има ранг 2, ако сите нејзини троредни детерминанти се нула, а има барем една поддетерминанта од втор ред што е различна од нула; а има ранг 1, ако сите нејзини поддетерминанти од втор и трет ред се нула, но ако сите нејзини елементи — „детерминанти од прв ред" — не се нула; ако сите нејзини елементи се нула, таа има ранг нула.

Услов за колинеарност и компланарност на векторите во просторот. Некои теореми, докажани порано, добиваат сега попроста формулација. На пр. ставот за колинеарност на два вектори (§ 19, т. 3) може сега да се формулира вака:

Потребен и доволен услов за да два вектора $\{a_1, a_2, a_3,\}$ и $\{b_1\ b_2, b_3\}$ *бидат колинеарни е, матрицата од нивните координати*

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\|,$$

да има ранг помал од 2.

Истотака гласи условот за колинеарност на повеќе вектори.

Како втор пример ќе го формулираме условот за компланарност на неколку вектори. Нека ги имаат на пр. векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ соодветно координатите a_i, b_i, c_i, d_i, e_i $(i = 1, 2, 3)$. Од § 23, т. 1. следува дека потребен и доволен услов за компланарност на овие вектори е да сите можни тројни производи од по три од овие вектори бидат нула, односно да бидат нула сите троредни детерминанти (§ 21, 22) од матрицата (14). Покажавме, значи, дека:

За да бидат неколку зададени вектори компланарни, потребно е и доволно матрицата од нивните координати да има ранг помал од 3.

6. Системи од три линеарни равенки. Горе добиените рззултати ќе ги исползуваме сега при иследувањето на системи линеарни равенки, слично како во § 19, т. 9.

Система од три нехомогени равенки со три непознати. Правило на *Крамер*. Прво ќе ја разгледаме системата

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3, \end{aligned} \tag{15}$$

во која a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, 3)$ се дадени константи. Треба да се испита дали равенките од (15) имаат некое заедничко решение по непознатите x, y, z, т. е. дали постојат такви броеви x_1, y_1, z_1 за да сите равенки од (15) се задоволени за $x = x_1, y = y_1, z = z_1$. Секоја таква тројка броеви x_1, y_1, z_1, ако постои, се вика *едно решение* на системата равенки (15).

Коефициентите пред една иста непозната ќе ги толкуваме како координати на еден вектор, а истотака и коефициентите d_i, ткн. слободни членови; ставуваме значи

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\},\ \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\},\ \boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\},\ \boldsymbol{d} = \{d_1, d_2, d_3\}.$$

Системата (15) можеме сега да ја запишеме во векторски облик, имено

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z = \boldsymbol{d}. \tag{16}$$

Место да ја иследуваме системата (15) од три скаларни равенки, ќе студираме една векторска равенка — равенката (16).

Ќе го разгледаме прво случајот кога е $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0$, т. е. кога векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ не се компланарни .Во овој случај постои една и една сама тројка броеви x, y, z што ја задоволува равенката (16). Тоа се имено координатите на векторот $\boldsymbol{d}$ во однос на векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ како координатни вектори.

Сега ќе ја пресметаме таа тројка решенија. Го образуваме тројниот производ на векторите $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Со оглед на равенката (16), во која наместо x y, z си ги мислиме заменети решенијата, кои сигурно постојат, имаме

$$(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\,x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

А бидејќи десната страна на овој идентитет е еднаква на $x \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, добиваме

$$x = \frac{(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}. \tag{17}$$

Аналогно, пресметувајќи ги производите $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$ и користејќи ја (16), се добива

$$y = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad z = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}. \tag{18}$$

Детерминантата D од координатите на векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ќе ја викаме *детерминанта на системата* (15). Детерминантите кои се добиваат од D, ако во неа елементите што се коефициенти пред x, пред y одн. пред z во (15) ги заменуваме со слободните членови d_1, d_2, d_3 од системата (15), ќе ги бележиме со Dx, Dy одн. Dz. Значи ги воведуваме следните ознаки:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad Dy = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

При тоа редовите во детерминантите ги заменивме со колоните.

Решенијата (17) и (18) добиваат сега овој вид:

$$x = \frac{Dx}{D}, \quad y = \frac{Dy}{D}, \quad z = \frac{Dz}{D}. \tag{20}$$

Бидејќи $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0$, тоа $D \neq 0$.

Системата (15), *во случај да нејзината детерминанта* D *на системот е различна од нула, има едно и едно само решение по* x, y, z. *Решението е дадено со формулите* (20), *заедно со* (19).

Формата од решението на системата (15), дадена со (19) и (20), се вика *правило на Крамер*.

Правило на *Кронекер—Капели*. Системата (15) е решлива, ако е $D \neq 0$. Сега треба да го разрешиме прашањето за решливоста на (15), ако е $D=0$, односно кога е $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. При тоа ќе претпоставиме да барем еден од векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ е различен од $\boldsymbol{0}$.

Векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ се во овој случај компланарни. Со нив е компланарен и секој вектор даден во обликот $\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z$, каде што x, y, z се произволни скалари. Ако постои, значи, за (16) некое решение, треба векторот $\boldsymbol{d}$ $(=\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y+$ $+\boldsymbol{c}z)$ да биде компланарен со векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. — А ако векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ се дури колинеарни, со нив е колинеарен и секој вектор од видот $\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y+\boldsymbol{c}z$. Спрема тоа, ако во овој случај (16) има решение, треба $\boldsymbol{d}$, кој има облик $\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y+\boldsymbol{c}z$, да биде колинеарен со $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Со тоа покажавме дека:

За да равенкаша (16), *во случај да* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, *биде решлива, пошребно е векшорош* $\boldsymbol{d}$ *да ѝ ӣриӣаѓа на онаа сисшема комӣланарни одн. колинеарни векшори шшо ја оӣределуваат векшориѿе* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Но овој случај е и *доволен* за решливоста на равенката (16).

Навистина, нека се $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарни, но не и колинеарни вектори, а со нив нека е компланарен и $\boldsymbol{d}$. Меѓу векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ постојат тогаш барем два кои не се колинеарни. Ако се тоа $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, ќе ја пишеме (16) во вид

$$(16') \qquad \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}z.$$

Векторорт $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}z$, при *произволен* z, е компланарен со $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, па затоа може (§ 10) на еден единствен начин да се претстави како линеарна комбинација на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. во облик $\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y$. Равенката (16), а спрема тоа и системата (15), има во овој случај решение, а при тоа за z може да се избере произволна вредност.

Да претпоставиме сега дека векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ ѝ припаѓаат на една иста система колинеарни вектори и дека е на пр. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Тогаш е секој вектор од видот $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b}y - \boldsymbol{c}z$, при произволен y и z, колинеарен со $\boldsymbol{a}$; постои, значи, еден и еден сам таков скалар x да важи, при произволно избрани вредности за y и z, еднаквоста

$$(16'') \qquad \boldsymbol{a}x = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b}y - \boldsymbol{c}z.$$

Бидејќи (16″) е само во друг вид запишана равенката (16), тоа со ова е покажано дека и во овој случај равенката (16) има решение, а да при тоа дури за y и z можеме да избереме произволни вредности.

Со тоа покажавме дека горе формулираниот услов е, навистина, и доволен за тоа, равенката (16) да биде решлива. Сега овој услов ќе го формулираме уште на друг начин. Ги формираме матриците

$$(21) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\| ; \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\|$$

Првата од овие матрици ќе ја викаме *проста*, а втората — *проширена матрица на системата* (15).

За да векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, како и векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, бидат компланарни, но не и колинеарни, е потребно и доволно (т. 5) сите троредни детерминанти од матриците (21) да бидат нула, но не и сите дворедни поддетерминанти во секоја од двете матрици: двете матрици треба да имаат ранг 2. А потребно и доволно, векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и векторите $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ да бидат колинеарни е, сите тро- и дворедни поддетерминанти од матриците (21) да бидат нула; но поради тоа што сите вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ не се $\boldsymbol{0}$, сите елементи во матриците не се нула: рангот на двете матрици е 1. На крај, ако претпоставиме да е $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, тогаш рангот на простата матрица е нула и равенката (16) добива вид

$$\boldsymbol{0} \cdot x + \boldsymbol{0} \cdot y + \boldsymbol{0} \cdot z = \boldsymbol{d},$$

која е решлива тогаш и само тогаш кога е и $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$, т. е. кога и рангот на проширената матрица е нула.

На тој начин го докажавме ова правило на *Кронекер-Капели*:

Системата линеарни равенки (15) *е решлива по x, y, z тогаш и само тогаш кога простата и проширената матрица на системата, т. е. матриците* (21), *имаат ист ранг.*

За една система линеарни равенки за која овој услов не е исполнет, која значи не е решлива, кажуваме дека е *противречна.*

Правилото на *Руше.* Доказот на правилото Кронекер-Капели ни ја дава и методата за практично пресметување на решенијата на една решлива система линеарни равенки.

Ако рангот на матриците (21) е еднаков на 3, ја решаваме системата по правилото на Крамер. Треба, значи, да ги разгледаме уште случаите кога тој ранг е 2 или 1.

Кога рангот на матриците (21) е 2, тогаш простата матрица има барем една дворедна поддетерминанта $\triangle$ која е различна од нула. Меѓу векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ има тогаш барем два што не се колинеарни. Ако е на пр.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

се $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколинеарни (т. 5). Ако сега во (16′) за непознатата z избереме една произволна вредност, има таа равенка, како што покажавме погоре, едно и едно само решение по x, y. Практично ќе ја решиме оваа равенка, односно равенката (16), на тој начин што од системата (15) ќе ги избереме само оние две равенки чии што коефициенти фигурираат во $\triangle$, т. е. во нашиов случај првата и третата. На левата страна ги оставаме само оние членови чии што коефициенти се елементи од $\triangle$, а останатите ги пренесуваме на десната страна. По тој начин добиената система

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= d_1 - c_1z \\ a_3x + b_3y &= d_3 - c_3z, \end{aligned}$$

во која z го сметаме како произволно избран број, ја решаваме по x и y спрема правилото на Крамер. Тоа е можно, бидејќи нејзината детерминанта на системата, т. е. $\triangle$, е различна од нула. Секое решение x, y на оваа система, заедно со избраниот веќе број z, е едно решение на системата (15). А други решенија, освен овие, системата (15) нема.

Ако матриците (21) на една решлива система (15) имаат ранг 1, тогаш барем еден од векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ е различен од $\boldsymbol{0}$. Нека е тоа $\boldsymbol{a}$. Тогаш системата (15) можеме да ја запишеме во векторскиот вид (16″). За y и z можеме, како што констатиравме горе, да избереме произволни вредности, а потоа да ја решиме по x, за кој добиваме едно само решение. Тоа може да стане практично на тој начин што од системата (15) избираме една сама равенка, имено некоја од оние при кои коефициентот пред x не е нула, која, поради $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, сигурно постои. Решенијата на таа равенка се и решенија на (15), а тоа се и сите решенија на системата.

На крајот, ако ранговите на (21) се 0, тогаш, очигледно, секоја тројка броеви x, y, z е решение на системата (15).

Со тоа го докажавме за системата линеарни равенки (15) ова *правило на Руше:*

Ако простата и проширената матрица од системата равенки (15) *имаат ист ранг r* ($r=1, 2, 3$), *системата е еквивалентна на која да е систем од r равенки.*

од системата (15) *чија проста матрица има ранг r. Избираме една од овие системи, ги оставаме на левите страни членовите со оние r непознати да детерминантата од нивните коефициенти биде различна од нула, а останатите членови ги пренесуваме на десната страна. Сметајќи ги непознатите од десната страна како произволно зададени броеви, ја решаваме добиената система по правилото на Крамер. Со тоа ги добиваме точно сите решенија на системата* (15).

Систeма од три хомогени линеарни равенки со три непознати. Ако равенката (16) има вид

$$\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y+\boldsymbol{c}z=\boldsymbol{0}, \tag{16'''}$$

т. е. ако е $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$, одн. ако коефициентите d_1, d_2, d_3 во (15) се нула, тогаш линеарните равенки во (15) се викаат *хомогени*.

Една система хомогени линеарни равенки има секогаш барем едно решение. Навистина равенката (16‴) има, при произволно избрани вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, решение $x=y=z=0$. Ова решение го викаме *тривијално решение*.

А ако една система хомогени линеарни равенки има некое нетривијално решение, т. е. такво решение x, y, z, каде што барем еден од броевите x, y, z не е нула, тогаш важи релацијата (16‴), во која не сите коефициенти x, y, z се нула. Во тој случај векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ се компланарни (§ 10), и затоа е $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$, односно детерминантата на системот (15) е нула. Ако е, обратно, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$, тогаш $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ се компланарни, и затоа постојат такви броеви x, y, z што не се сите нула, а важи (16‴) (Зад. 10, § 11). Равенката (16‴) има, значи, во тој случај нетривијални решенија. Со тоа ја докажавме оваа важна теорема:

Потребен и доволен услов за тоа да една система од три хомогени линеарни равенки со три непознати има нетривијални решенија е, детерминантата на системата да биде еднаква на нула.

Система од три хомогени линеарни равенки со четири непознати. Нашиот доказ за правилото на Руше во овој § лесно се обопштува и за системи од три линеарни равенки со произволен број непознати. Како пример ќе ја решиме една система од три хомогени равенки со четири непознати, и тоа за случај кога матрицата на системата има ранг 3.

Нека ни е зададена, значи, една система равенки

$$\begin{aligned} a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1 u&=0\\ a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2 u&=0\\ a_3 x+b_3 y+c_3 z+d_3 u&=0, \end{aligned} \tag{22}$$

односно, толкувајќи ги a_i, b_i, c_i, d_i $(i=1, 2, 3)$ како координати на четири вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ одн. $\boldsymbol{d}$, векторската равенка

$$\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y+\boldsymbol{c}z+\boldsymbol{d}u=\boldsymbol{0}. \tag{22'}$$

Бидејќи, по претпоставка, рангот на матрицата од (22) е 3, тоа барем една од нејзините троредни поддетерминанти е различна од нула, а тоа значи дека барем три од векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ не се компланарни. Нека е на пр. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})\neq 0$. На непознатата u ѝ избираме една произволна вредност, ја решаваме системата (22) по правилото на Крамер, па добиваме, запишано во векторски облик:

$$x=\frac{(-\boldsymbol{d}u, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad y=\frac{(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{d}u, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad z=\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{d}u)}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Тоа можеме да го пишеме и во облик

$$x : y : z : u = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) : -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Во оваа формула тројните производи треба да ги замениме со детерминантите од координатите на соодветните вектори.

7. Равенка на една система компланарни вектори. Нека ни е зададена една линеарна хомогена равенка

$$A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 = 0. \tag{23}$$

Секое решение z_1^0, z_2^0, z_3^0 на оваа равенка ќе го толкуваме како координати на еден вектор $\{z_1^0, z_2^0, z_3^0\}$ во однос на некоја афина координатна система. Да испитаме какви вектори може на тој начин да претставува равенката (23), за која ќе претпоставиме да во неа барем еден од коефициентите A_1, A_2, A_3 е различен од нула!

Нека е на пр. $A_3 \neq 0$. Тогаш (23) можеме да ја решиме по z_3, и таа добива облик

$$z_3 = a_1 z_1 + a_2 z_2. \tag{23'}$$

Сите решенија од (23′) ги добиваме, ако во неа за z_1 и z_2 ставаме произволни вредности. Ставувајќи $z_1 = 0$, $z_2 = 1$; $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, добиваме две специјални решенија

$$\{0,\ 1,\ a_2\} \quad \text{и} \quad \{1,\ 0,\ a_1\}.$$

Произволното решение од (23′) е

$$z_1 = \lambda, \quad z_2 = \mu, \quad z_3 = a_1\lambda + a_2\mu,$$

каде што λ, μ можат да се избираат произволно. Ова решение можеме да го запишеме во облик

$$\{z_1, z_2, z_3\} = \lambda \cdot \{1, 0, a_1\} + \mu \cdot \{0, 1, a_2\}. \tag{24}$$

Десната страна од оваа еднаквост претставува една линеарна комбинација на два неколинеарни вектори. Затоа сите вектори $\{z_1, z_2, z_3\}$, дадени со (24), при произволен избор на λ и μ, се компланарни со тие два вектори. Но во вид на една линеарна комбинација од два неколинеарни вектори може да се изрази секој вектор што е компланарен со нив. Со тоа ја докажавме оваа теорема:

Решенијата на равенката (23), *толкувани како координати на вектори, претставуваат вектори од една система компланарни вектори, а и координатите на секој вектор од таа система претставуваат едно решение на равенката* (23).

Затоа ќе кажеме дека (23) е *равенка на една система компланарни вектори.*

Меѓу решенијата-вектори на равенката (23) спаѓаат и векторите

$$(25) \qquad \{-A_2, A_1\ 0\},\ \{-A_3, 0, A_1\},\ \{0, -A_3, A_2\},$$

од кои барем два не се колинеарни (бидејќи барем еден од коефициентите A_1, A_2, A_3 не е нула). *Векторите, определени со* (23), *се компланарни*, спрема тоа, *со векторите* (25).

8. Геометриско значење на равенката $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$. Во равенката

$$(26) \qquad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$$

нека биде барем еден од коефициентите A_1, A_2, A_3 различен од нула.

Секоја тројка броеви x_1, x_2, x_3 кои ја задоволуваат равенката (26), т. е. секоја тројка нејзини решенија, ќе ја толкуваме сега како координати на некоја *точка* во просторот — во однос на некоја афина координатна система.

Нека биде $x_1 = p_1, x_2 = p_2, x_3 = p_3$ едно решение од (26). Нему му одговара точката $P\ (p_1, p_2, p_3.)$ Имаме значи

$$A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 + A_4 = 0.$$

Ако оваа равенка ја извадиме од (26), добиваме

$$(27) \qquad A_1(x_1 - p_1) + A_2(x_2 - p_2) + A_3(x_3 - p_3) = 0.$$

Решенијата од (26) се и решенија од (27), и обратно.

Нека е x_1, x_2, x_3 едно *кое било* решение од (27) одн. од (26). Нему му одговара една точка $X\ (x_1, x_2, x_3)$. Равенката (27) покажува дека координатите на векторот $\overrightarrow{PX} = \{x_1 - p_1,\ x_2 - p_2,\ x_3 - p_3\}$ ја задоволуваат равенката

$$(28) \qquad A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3 = 0.$$

Значи $\overrightarrow{PX}$ е компланарен со векторите, определени со (25) (т. 7). Спрема тоа, точката X, чии што координати се која да е тројка решенија од (26), лежи во рамнината што минува низ P, а е паралелна со векторите (25).

Нека е сега $X'(x_1', x_2', x_3')$ која да е точка од таа рамнина. Векторот $\overrightarrow{PX'} = \{x_1' - p_1,\ x_2' - p_2,\ x_3' - p_3\}$ е паралелен со неа, ѝ припаѓа, значи, на системата компланарни вектори (28). Координатите од $\overrightarrow{PX}$ ја задоволуваат, спрема тоа, равенката (28), па имаме

$$A_1(x_1' - p_1) + A_2(x_2' - p_2) + A_3(x_3' - p_3) = 0.$$

Оваа равенка покажува дека координатите од X' ја задоволуваат равенката (27) одн. (26).

Со тоа покажавме:

Точките, чии што координати x_1, x_2, x_3 *ја задоволуваат равенката* (26), *лежат во една рамнина, паралелна со векторите*

$$\{-A_2, A_1, 0\}, \ \{-A_3, 0, A_1\} \text{ и } \{0, -A_3, A_2\};$$

а и координатите на секоја точка од оваа рамнина ја задоволуваат равенката (26).

Равенката (26) ја викаме затоа *равенка на таа рамнина.*

Системата вектори, компланарни со рамнината определена со (26), *има равенка* (28).

ЗАДАЧИ

При кои вредности од t зададените вектори во зад. 1—3 се компланарни?

1. $\{t, 1, 1\}, \{1, t, 1\}, \{1, 1, t\}$.

2. $\{t, t, t\}, \{-t, t, 2\}, \{-t, -t, 2\}$.

3. $\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_1 + a_2 - t, a_3\}, \{a_1, a_2, a_2 + a_3 - t\}$.

4. Соодветните рабови на два слични тетраедри се однесуваат како $m : n$. Како се однесуваат нивните просторнини?

5. Темињата на еден тетраедар се во тежиштата на страните на еден друг тетраедар. Како се однесуваат просторнините на двата тетраедра?

6. Докажи ја *теоремата на Штајнер:* Просторнината на еден тетраедар не се менува, ако два негови спротивни раба се лизгаат по две прави, не менувајќи си ја при тоа должината.

7. Отсечките AB, CD, EF имаат една заедничка точка. Покажи дека просторнината на телото $ACEBDF$ не се менува, ако отсечките ги поместуваме паралелно во просторот, но така стално да имаат една заедничка точка.

8. Да се пресмета просторнината на тетраедарот на кој му се дадени темињата $(t, 2t, 3t), (-t, 2t, 3t), (t, -2t, 3t), (t, 2t, -3t)$.

9. Три темиња на еден тетраедар се $(1, 2, 1), (-1, 1, 1)$ и $(2, 1, 1)$, а четвртото е на x_3-оската. Да се определат неговите координати, ако се знае дека просторнината на тетраедарот е $10 (e_1, e_2, e_3)$

10. Провери дали системата

$$4x_1 + 7x_2 - 14x_3 = 10, \ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \ x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

има решение. Потоа, во случај на позитивен одговор, да се реши.

Реши ја системата:

11. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 1 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 14 &= 0. \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} a_1 x_2 + a_2 x_1 &= a_3 \\ a_3 x_1 + a_1 x_3 &= a_2 \\ a_2 x_3 + a_3 a_2 &= a_1. \end{aligned}$$

13. Има ли системата

$$\begin{aligned} (1+a_1 b_1) x_1 + (1+a_1 b_2) x_2 + (1+a_1 b_3) x_3 &= 0 \\ (1+a_2 b_1) x_1 + (1+a_2 b_2) x_2 + (1+a_2 b_3) x_3 &= 0 \\ (1+a_3 b_1) x_1 + (1+a_3 b_2) x_2 + (1+a_3 b_3) x_3 &= 0 \end{aligned}$$

нетривијални решенија по x_1, x_2, x_3?

14. Дадени се векторите $\mathbf{a} = \{1, 2, -2\}$, $\mathbf{b} = \{-3, 0, 1\}$, $\mathbf{c} = \{4, -2, 3\}$ и $\mathbf{d} = \{-5, 12, -16\}$. Да се определат такви скалари x, y, z, u да важи $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z + \mathbf{d}u = \mathbf{0}$.

15. Определи ги координатите на векторот $\mathbf{d}$ во однос на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ како координатни вектори, ако во некоја координатна афина система важи $\mathbf{a} = \{2, 3, 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 1, 4\}$, $\mathbf{c} = \{-3, -2, 1\}$, $\mathbf{d} = \{-9, -1, 15\}$.

16. Да се покаже: Ако равенката $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$ ги има решенијата x_1', x_2', x_3' и x_1'', x_2'', x_3'', а да при тоа x_1', x_2', x_3' не се соодветно пропорционални на x_1'', x_2'', x_3'', тогаш кое да е решение x_1, x_2, x_3 од равенката може да се запише во облик

$$x_1 = \lambda' x_1' + \lambda'' x_1'', \; x_2 = \lambda' x_2' + \lambda'' x_2'', \; x_3 = \lambda' x_3' + \lambda'' x_3''.$$

17. Векторите $\{2, 1, 3\}$ и $\{-1, 2, -4\}$ ѝ припаѓаат на една система компланарни вектори. Определи ја нејзината равенка!

18. Една система компланарни вектори е определена со векторите $\{1, -2, 4\}$ и $\{2, 3, 1\}$. Определи ги оние вектори од оваа система, кои се компланарни со координатните вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$!

19. Кои вектори ѝ припаѓаат на системата компланарни вектори, определена со векторите $\{1, 1, 1\}$, $\{1, -1, 1\}$, и на системата, определена со векторите $\{2, 3, 4\}$, $\{-1, 0, 2\}$?

20. Каква е заемната положба на рамнините чии што равенки во однос на една иста координатна система се разликуваат само во слободниот член (член кој не содржи променливи)?

ГЛАВА IV

СКАЛАРЕН И ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД НА ДВА ВЕКТОРА

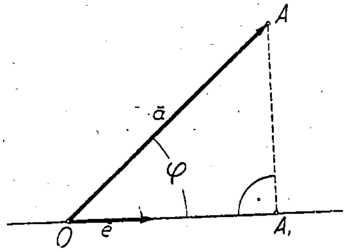
I. Скаларен производ

§ 24. Ортогонална проекција на вектор

1. Проекција од вектор на оска. Ортогоналната проекција од еден вектор на некоја оска се изразува едноставно со должината на векторот и со аголот што векторот го затвора со оската, т. е.

со координатниот вектор што го определува смерот на оската, ако во просторот е избрана една отсечка која служи за единица мерка на сите должини.

Под агол меѓу два вектори во просторот го подразбираме оној од двата агли, определени со тие вектори, нанесени од една иста точка, кој не е поголем од рамниот агол.



Сл. 51

Нека ни е зададен еден вектор $\boldsymbol{a}$ во просторот и една оска, чиј смер го определува векторот $\boldsymbol{e}$. Должината на $\boldsymbol{e}$ нека биде единица за должина на сите отсечки и вектори во просторот. Аголот помеѓу $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$ нека е φ. За φ важи, значи, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Од правоаглиот триаголник OA_1A (сл. 51) следува тогаш

$$\left|\text{пр}_e \boldsymbol{a}\right| = \left|a \cdot \cos\varphi\right|.$$

Кога е $\varphi < \frac{\pi}{2}$, е $\text{пр}_e \boldsymbol{a} > 0$ и $\cos\varphi > 0$; а кога е $\varphi > \frac{\pi}{2}$, е $\text{пр}_e \boldsymbol{a} < 0$ и $\cos\varphi < 0$. Затоа $\text{пр}_e \boldsymbol{a}$ и $a \cdot \cos\varphi$ се еднакви не само по апсолутната вредност, туку и по знакот. Со тоа покажавме дека е

$$\text{(1)} \qquad \text{пр}_e \boldsymbol{a} = a \cdot \cos\varphi.$$

Ортогонална проекција од еден вектор на една оска е производ од мерниот број на должината на тој вектор и косинусот на аголот што векторот го зафаќа со оската

ПРИМЕНА

Пример. Да се пресмета збирот $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n - 1)\varphi$, користејќи ја горната теорема.

Решение. Ги избираме векторите $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ со еднакви должини и такви смерови да точките $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на еден круг со радиус 1. Нека е S центар на тој круг, а $\sphericalangle A_0SA_1 = 2\varphi$. Од складните рамнокраки триаголници $SA_0A_1, SA_1A_2, \ldots, SA_{n-1}A_n$ следува

$$\text{(2)} \qquad \overline{A_i A_{i+1}} = 2\sin\varphi \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Векторите $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $\overrightarrow{A_0S}$ и $\overrightarrow{SA_n}$ ќе ги проицираме ортогонално на една оска, која со $\overrightarrow{A_0A_1}$ затвора агол φ. Бидејќи е

$$\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_0S} + \overrightarrow{SA_n},$$

е и (§ 13, 3. 5)

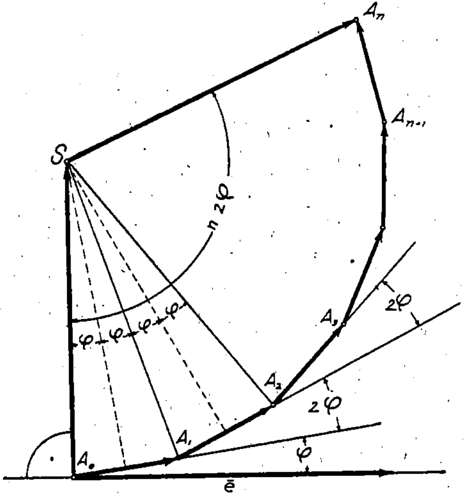
$$\text{(3)} \qquad \text{пр}_e \overrightarrow{A_0A_1} + \text{пр}_e \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \text{пр}_e \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \text{пр}_e \overrightarrow{A_0S} + \text{пр}_e \overrightarrow{SA_n}.$$

Лесно се проверува дека е, на основа (1) и (2):

$$\pi p_e \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \cos(\varphi + i \cdot 2\varphi) = 2\sin\varphi \cdot \cos(1 + 2i)\varphi$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\pi p_e \overrightarrow{A_0S} = 0, \quad \pi p_e \overrightarrow{SA_n} = \cos\left(2n\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2n\varphi.$$



Сл. 52

Внесувајќи ги овие вредности за проекциите во (3), добиваме

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cdots + \cos(2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi},$$

што и се бараше.

Проицирајќи ги истите вектори на една оска која е нормална на гореизбраната оска, добиваме на сличен начин

$$\sin\varphi + \sin 3\varphi + \cdots + \sin(2n-1)\varphi = \frac{1 - \cos 2n\varphi}{2\sin\varphi}.$$

2. Проекција од вектор на вектор. Ако една отсечка *e* е избрана како единица мерка за должина, тогаш под ортогонална проекција од еден вектор *b* на еден друг вектор *a* ја подразбираме ортогоналната проекција од векторот *b* на една оска, чиј смер е определен со единичниот вектор *e*, кој има ист правец и смер како *a*. Ние оваа проекција ќе ја обележуваме со $\pi p_{(a)}\, b$. Дефинираме значи:

$$\pi p_{(a)}\, b = \pi p_e\, b, \quad e = \frac{a}{|a|}.$$

ЗАДАЧИ

1. Проицирајќи ги на една подесно избрана оска векторите положени на страните на еден правилен полигон, да се докаже:

$$\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\varphi+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left[\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]=0.$$

2. Проицирај ги векторите од примерот во т. 1 на една подесно избрана оска и пресметај ги изразите

а) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi$;

b) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi$.

§ 25. Скаларен производ од два вектора

1. Дефиниција. Со до сега дефинираните операции над векторите — со собирањето и вадењето на векторите, со множењето на вектор со скалар, со надворешниот и тројниот производ — успеавме да решиме разни задачи. Но за разрешување на задачите кои се сведуваат на определувањето должини на отсечките, на големините на аглите и односите меѓу нив — при таканаречените *метрични проблеми* — овие опреации не ни стигаат. Затоа ќе воведеме уште две операции над векторите, во овој § — скаларен производ, а подоцна (§ 30) — векторски производ.

Под скаларен производ на два вектора a *и* b*, кои затвораат агол* φ*, го подразбираме скаларот* $|a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi$, кој кратко ќе го бележиме со симболот $a\cdot b$ или ab. Векторите a и b ги викаме *множители* на скаларниот производ ab. Спрема дефиницијата е, значи,

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi. \tag{4}$$

2. Особини на скаларниот производ. Од дефиниционото равенство (4) добиваме наеднаш едно геометриско толкување на скаларниот производ. Бидејќи е имено (§ 24)

$$|a|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_{(b)}\,a,\qquad |b|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_{(a)}\,b,$$

важи

$$a\cdot b=|a|\cdot\text{пр}_{(a)}\,b=|b|\cdot\text{пр}_{(b)}\,a. \tag{5}$$

Скаларен производ на два вектора е производ од должината на едниот вектор и проекцијата од другиот вектор на првиот.

Ако е $b=e$ единичен вектор, следува од (5) дека

$$\text{пр}_e\,a=a\cdot e.$$

Називот „производ од два вектора a и b" за изразот $|a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi$ е избран затоа што тој израз има во однос на a и b аналогни особини како што ги има производот од два броја, што ќе покажеме сега.

На основа дефиницијата (4) на скаларниот производ е јасно дека за секој вектор $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и за секој скалар λ важи

(I) $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

(II) $$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Идентитетот (I) покажува дека скаларниот производ е *комутативен*, а идентитетот (II) — дека скаларниот производ се множи со скалар, ако со тој скалар се множи кој да е од неговите множители.

Една наредна особина на скаларниот производ добиваме од идентитетите (5). Ако $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се три произволни вектори, важи

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_{(\mathbf{c})} (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Но десната страна на овој идентитет е еднаква на (§ 13, т. 5)

$$|\mathbf{c}| \cdot (\text{пр}_{(\mathbf{c})}\, \mathbf{a} + \text{пр}_{(\mathbf{c})}\, \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_{(\mathbf{c})}\, \mathbf{a} + |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_{(\mathbf{c})}\, \mathbf{b},$$

или, спрема (5), на $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. Затоа важи идентитетот

(III) $$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

кој го изразува *дистрибутивниот закон*, што го врзува скаларното множење со собирањето на векторите.

Од особините (I), (II) и (III) следува — како во скаларната алгебра — дека два векторски многучлена се множат скаларно по истите формални правила по кои се множат и алгебарските многучлени. Да го покажеме тоа за многучлени со два члена! Имаме

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \cdot (\mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2) =$$
$$= (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \cdot (\mu_1 \mathbf{b}_1) + (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \cdot (\mu_2 \mathbf{b}_2) = \qquad \text{[особина (III)]}$$
$$= (\lambda_1 \mathbf{a}_1)(\mu_1 \mathbf{b}_1) + (\lambda_2 \mathbf{a}_2)(\mu_1 \mathbf{b}_1) + (\lambda_1 \mathbf{a}_1)(\mu_2 \mathbf{b}_2) + (\lambda_2 \mathbf{a}_2)(\mu_2 \mathbf{b}_2) = \text{[особина (III)]}$$
$$= \lambda_1 \mu_1 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1) + \lambda_2 \mu_1 (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1) + \lambda_1 \mu_2 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2) + \lambda_2 \mu_2 \cdot (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2). \text{ [особина (II)].}$$

Добиениот резултат би го добиле, навистина, и со формалното измножување на двата множители $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ и $\mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2$ по познатите правила од скаларната алгебра — што и требаше да се докаже.

За сите досега докажани особини на скаларниот производ постојат аналогни особини при множењето на броевите. Но за производ од два или повеќе броја важат и такви особини кои немаат аналогон при скаларниот производ на векторите. За броевите важи, на пр., асоцијативниот закон, т. е. за три броја a, b, c важи

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

Но за скаларниот производ овој закон, очигледно, не важи. Навистина, изразот $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ претставува вектор $\mathbf{c}$, помножен со скаларот $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, т. е. еден вектор колинеарен со $\mathbf{c}$; а изразот $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ претставува еден вектор колинеарен со $\mathbf{a}$. Овие два вектори имаат, општо, различни правци и должини, и спрема тоа не се еднакви. Следствено

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \tag{6}$$

Асоцијативниот закон при скаларниот производ не важи.

И теоремата дека „производ од два броја е нула тогаш и само тогаш кога барем еден од множителите е нула” нема свој аналогон при скаларниот производ. Од

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \text{ односно } |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi = 0$$

следува, имено, дека барем еден од множителите $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\cos\varphi$ е нула, т. е. дека важи барем една од еднаквостите

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

[1] *Скаларен производ од два вектора е нула тогаш и само тогаш кога барем еден од векторите е нула, или ако векторите се заемно нормални.*

Ќе спомнеме уште едно правило од скаларната алгебра кое не смее да се користи при скаларниот производ, имено правилото за скратување. Ако за три броја a, b, m, каде што $m \neq 0$, важи $am = bm$, тогаш важи и $a = b$. Последната еднаквост ја добиваме „со скратување со m”, т. е. со изоставување на m од првото равенство. За три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ не важи аналогно. Навистина, од

$$\mathbf{a}\mathbf{m} = \mathbf{b}\mathbf{m} \tag{7}$$

следува

$$\mathbf{a}\mathbf{m} - \mathbf{b}\mathbf{m} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{m} = 0,$$

од каде добиваме, на основа [1], дека е или $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{a} - \mathbf{b} \perp \mathbf{m}$, т. е. може да биде и $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Затоа:

Скратување со вектор во равенството од видот (7) *не е дозволено,* *ЗАДАЧА.* Нека се $A_1, A_2, \ldots, A_n$ темињата на еден правилен n-аголник со центар во O. Квадрирај го скаларно збирот на векторите $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$, и провери го идентитетот

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\cos i\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}, \quad (n>2).$$

§ 26. Примена на скаларниот производ

1. Должина на векторот. Квадратот од должината a на еден вектор $\boldsymbol{a}$ е еднаков, очигледно, на $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$. Скаларниот производ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ ќе го означуваме со симболот $\boldsymbol{a}^2$ и ќе го читаме „$\boldsymbol{a}$ скаларно на квадрат". Имаме, значи,

(8) $$a^2 = \boldsymbol{a}^2.$$

ПРИМЕРИ

1. *Косинусна теорема.* Да се пресмета должината на третата страна на еден триаголник, на кој му се зададени должините a и b на две страни и аголот γ што тие го зафаќаат.

Решение. Дадениот триаголник нека е $\triangle ABC$. Ги избираме векторите

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}.$$

Тогаш е

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}.$$

Квадрирајќи ги двете страни на ова равенство, добиваме

$$\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^2,$$

или, со оглед на (4) и (8),

(9) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

т. е. бараната страна c.

Формулата (9) ја изразува *косинусната теорема*, позната од тригонометријата.

2. Да се пресмета должината d на телесната дијагонала OD на паралелопипедот што го определуваат векторите $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$.

Решение. Нека е $\sphericalangle < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > = \gamma$, $\sphericalangle < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} > = \alpha$, $\sphericalangle < \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} > = \beta$. Очигледно е

$$\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Со скаларно квадрирање добиваме

$$\overrightarrow{OD}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 + 2\,\boldsymbol{ab} + 2\,\boldsymbol{ac} + 2\,\boldsymbol{bc},$$

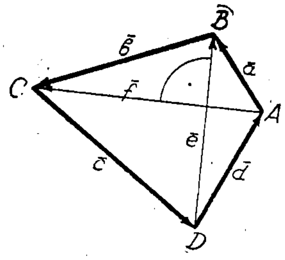
од каде, на основа (4) и (8),

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab\cos\gamma + 2\,ac\cos\beta + 2\,bc\cos\alpha.$$

2. Услов за нормалност на два вектори. Од [1] следува дека *два вектора, различни од $\mathbf{0}$, се нормални тогаш и само тогаш кога нивниот скаларен производ е нула.*

ПРИМЕРИ

1. Каков услов треба да постои меѓу должините на страните од еден четириаголник за да неговите дијагонали бидат заемно нормални?



Сл. 53

Решение. На страните на четириаголникот ги положуваме*) векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ така да е

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

а на дијагоналите векторите $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ така што

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b},\ \mathbf{f} = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Тогаш е

$$\mathbf{ef} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\ (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

или

(10) $$\mathbf{ef} = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc} + \mathbf{b}^2.$$

Со скаларно квадрирање на двете страни од идентитетот $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{d}$ добиваме

(11) $$a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(\mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc}) = d^2.$$

Елиминирајќи го од (10 и (11) изразот $\mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$, добиваме

(12) $$2\,\mathbf{ef} = (b^2 + d^2) - (a^2 + c^2).$$

Дијагоналите се нормални тогаш ако е $\mathbf{ef} = 0$, значи ако е

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Потребен и доволен услов за тоа, еден четириаголник да има заемно нормални дијагонали е, збирот од квадратите на едниот пар негови спротивни страни да биде еднаков со збирот на квадратите на другиот пар спротивни страни.

Теоремата важи и за просторните четириаголници.

2. Да се докаже теоремата: *Ако два пара спротивни рабови на еден тетраедар се заемно нормални, е нормален и третиот пар спротивни рабови.*

Решение. Дадениот тетраедар нека е $ABCD$. На неговите рабови ги положуваме векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ онака како е покажано на сл. 53. Два спротивни раба во еден тетраедар можеме да ги сметаме како дијагонали во просторниот четириаголник, образуван со другите четири негови рабови. Ако претпоставиме дека се нормални спротивните рабови AC, BD и AD, BC, следува од прим. 1 дека

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2,\quad b^2 + d^2 = e^2 + f^2.$$

А одавде добиваме $a^2 + c^2 = e^2 + f^2$, што, према прим. 1, е потребниот и доволниот услов за нормалноста на рабовите AB и CD. Со тоа теоремата е докажана.

---

*) Место да кажеме дека избираме еден вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, ќе се изразуваме кратко дека на страната AB положуваме еден вектор.

Едновремено покажавме и дека:

Релациите $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = e^2 + f^2$ *го изразуваат потребниот и доволниот услов за тоа, спротивните рабови a, c; b, d; e, f на еден тетраедар да бидат нормални.*

3. Да се докаже дека висините во триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека во еден даден триаголник *ABC* висините, спуштени од темињата *A* и *B*, се пресекуваат во точката *O*. Ги избираме векторите $\mathbf{a} = \vec{OA}$, $\mathbf{b} = \vec{OB}$ и $\mathbf{c} = \vec{OC}$. Бидејќи висините се нормални на страните на кој се спуштени, е

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0, \quad \vec{OB} \cdot \vec{AC} = 0,$$

или

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0, \quad \mathbf{b}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0,$$

од каде следува

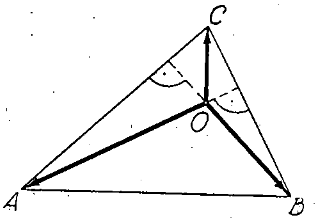
$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,\mathbf{c}, \quad \mathbf{b}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b},$$

а оттука

$$\mathbf{a}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}\,\mathbf{c}, \text{ или } (\mathbf{b} - \mathbf{a})\,\mathbf{c} = 0,$$

односно

$$\vec{AB} \cdot \vec{OC} = 0.$$



Сл. 54

Следствено, отсечката *OC* е нормална на страната *AB*. Со тоа теоремата е докажана.

3. Агол меѓу два вектори. За аголот φ меѓу два вектори **a** и **b** следува од (4)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}. \tag{13}$$

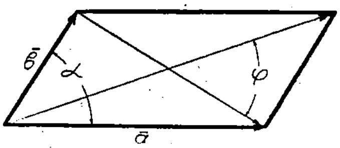
ПРИМЕРИ

1. Да се пресмета аголот меѓу два спротивни рабa на еден тетраедар на кој му се познати сите рабови.

Решение. Спротивните рабови*) на тетраедарот нека бидат *a, c; b, d; e, f*. Тогаш на пр. за аголот φ меѓу рабовите *e* и *f* следува од (12) и (13)

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + d^2 - (a^2+c^2)}{2e \cdot f}.$$

2. Да се пресмета аголот φ меѓу дијагоналите на еден паралелограм чии страни се еднакви на *a* и *b*, а аголот помеѓу нив на α.



Сл. 55

Решение. На две соседни страни од паралелограмот ги положуваме векторите **a** и **b**, а на дијагоналите векторите **e** и **f** (сл. 55). Тогаш е

---

*) Под терминот *раб* или *страна* ќе го подразбираме често, а да тоа нема да биде посебно нагласено, *мерниот број* на работ одн. на страната.

(14) $$\cos\varphi = \frac{e \cdot f}{|e| \cdot |f|}.$$

Бидејќи е $e = a + b$, $f = a - b$, имаме

$$e \cdot f = (a + b)(a - b), \quad \text{или} \quad e \cdot f = a^2 - b^2.$$

Освен тоа е

$$|e|^2 = (a + b)^2, \quad |f|^2 = (a - b)^2,$$

или

$$|e| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}, \quad |f| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

Сменувајќи ги добиените изрази за $e \cdot f$, $|e|$ и $|f|$ во (14), ја добиваме бараната релација:

$$\cos\varphi = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha}}.$$

За *правоаголникот* со страни a и b добиваме оттука, ставувајќи $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

За *ромбот* следува, ставувајќи $a = b$, дека $\cos\varphi = 0$. Значи, *дијагоналите при ромбот се сечат под прав агол.*

ЗАДАЧИ

1. Ако е $a = 3p + 4q$, $b = 12p - 5q$, да се пресмета $a \cdot b$; при тоа е $|p| = 2$, $|q| = 3$, а аголот меѓу p и q е $\varphi = 60°$.

2. При податоците од зад. 1 да се пресметаат должините на a и b.

3. Да се пресмета аголот помеѓу $a + b$ и $a - b$, ако е $|a| = |b|$. Геометриско толкување!

4. Ако векторите $a+b$ и $a - b$ имаат еднакви должини, тогаш a е нормален на b. Доказ!

5. Покажи дека векторот $a \cdot (b \cdot c) - b \cdot (c \cdot a)$ е нормален на c.

6. Ако $a - b$ е нормален на $a+b$, а $b - c$ нормален на $a+c$, да се покаже дека $c - a$ е нормален на $c + a$.

7. На што е еднаков збирот $ab+bc+ca$, ако a, b, c се вектори со должина 1 кои го задоволуваат условот $a + b + c = 0$.

8. Покажи дека скаларниот производ на два вектори не се менува ако кон едниот од нив додадеме некој вектор што е нормален на другиот множител.

9. Колкава е должината на $a = \lambda p + \mu q + \nu r$, ако p, q, r се три зададени заемно нормални вектори?

10. Да се даде геометриско толкување на идентитетите

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2),$$
$$(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

11. Разликата од квадратите на две непаралелни страни во паралелограмот е еднаква на производот на една дијагонала и проекцијата од другата дијагонала на неа. Доказ!

12. Една четвртина од разликата на квадратите од дијагоналите на паралелограмот е еднаква на производот на една страна и проекцијата од нејзе непаралелната страна на неа. Доказ!

13. Да се пресметаат должините на тежишните линии во триаголникот чии страни се a, b, c.

14. ABC е еден триаголник, а T неговото тежиште. Покажи дека за произволната точка O од рамнината на триаголникот важи

$$AB^2+BC^2+CA^2 = 3\,(OA^2+OB^2+OC^2) - 9\,OT^2.$$

15. Страните на еден триаголник се a, b, c, а растојанијата на темињата до тежиштето l, m, n. Докажи дека е

$$a^2+b^2+c^2 = 3\,(l^2+m^2+n^2).$$

16. Ако средните линии во еден четириаголник се еднакви, тогаш дијагоналите се сечат нормално, и обратно. Доказ!

17. Ако дијагоналите во еден четириаголник (рамнински или просторен) се еднакви, тогаш средните линии се нормални, и обратно. Доказ!

18. Ако телесните дијагонали на еден паралелопипед се еднакви, паралелопипедот е правоаглен. Доказ!

19. Да се пресмета висината на тространата пирамида, при која бочните рабови a, b, c се заемно нормални.

20. Колкава е должината на векторот $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, ако должините на векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ се по ред a, b, c, d, e, f. *Напат.*: Користи го идентитетот $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$.

21. Да се пресметаат висините на триаголникот чии страни се a, b, c.

22. Бочните рабови a, b, c на една тространа пирамида се заемно нормални. Да се пресмета должината на радиусот на топката, опишана околу пирамидата.

23. Каков услов треба да постои меѓу бочните рабови a, b, c и основните рабови l, m, n на една тространа пирамида, за да подножјето на висината совпадне со тежиштето на основата?

24. Пресметај ја должината на отсечката што врвот на една тространа пирамида го сврзува со тежиштето на нејзината основа. Бочните рабови се a, b, c, а основните l, m, n.

25. Една права ги сече два спротивна раба на една еднакворабна тространа пирамида и стои на нив нормално. Да се пресмета должината на отсечката што на правата ја отсечуваат тие рабови, ако работ на пирамидата е a.

26. Покажи дека симетралите на страните во триаголникот се сечат во една точка.

27. Да се пресметаат аглите во триаголникот чии страни се a, b, c.

28. Какви агли зафаќаат тежишните линии на триаголникот со страните? Дадени се страните a, b, c на триаголникот.

29. Во еден триаголник се дадени две страни a, b и аголот γ меѓу нив. Да се пресмета должината на симетралата на γ помеѓу темето и нејзиниот пресек со спротивната страна.

30. Пресметај ги аглите што висината на една тространа пирамида ги зафаќа со бочните рабови a, b, c, ако овие стојат еден на друг нормално.

31. Три соседни раба a, b, c на еден паралелопипед зафаќаат помеѓу себе еднакви агли α. Какви агли зафаќаат по две и две телесни дијагонали на паралелопипедот?

32. Покажи: Ако две спротивни страни на еден четириаголник се еднакви, тогаш тие зафаќаат еднакви агли со средната линија на другите две страни.

33. Покажи дека за паралелните страни a, c, краците b, d и дијагоналите e, f на трапезот важи релацијата

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2\,ac.$$

§ 27. Аналитичен израз за скаларен производ во правоагли координати

Ќе испитаме сега како се изразува скаларниот производ на два вектора со нивните координати во однос на *правоаголните* координатни системи.

Нека се дадени векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ со своите координати a_i, b_i, $(i = 1, 2, 3)$ во однос на една правоагла система $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Тогаш е

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3,$$

Координатните вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ се заемно нормални единични вектори. Нивните должини се земени за единица должина на сите отсечки. Скаларен производ на два различни координатни вектори е значи 0, а скаларен квадрат на секој координатен вектор сам со себе е 1. Спрема тоа е

$$(15) \qquad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = \begin{cases} 0, & \text{ако } i \neq k \\ 1, & \text{ако } i = k \end{cases} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

За скаларниот производ на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ добиваме, користејќи ги равенствата (15),

$$(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \cdot (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Скаларниот производ на векторите $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ *и* $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ *е еднаков на*

$$(16) \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

ако координатите на векторите се однесуваат до која да е правоагла координатна система.

Аналогно го добиваме и аналитичкиот израз за скаларен производ на два вектори, зададени со по две координати. Имаме:

За да два вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$ *и* $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$, *чии координати се однесуваат до некоја правоагла координатна система, важи*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{17}$$

При правоаглите координати важи, значи,

$$\{a_1, a_2, a_3\} \cdot \{b_1, b_2, b_3\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

односно

$$\{a_1, a_2\} \cdot \{b_1, b_2\} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

§ 28. Примена

Координатите на точките и векторите во овој § се правоагли.

1. Должина на векторот. За должината a на векторот $\mathbf{a}=\{a_1, a_2\}$ ја добиваме од $a^2 = \mathbf{a}^2$ формулата

$$a^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2, \tag{18}$$

а за векторот $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ формулата

$$a^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2. \tag{19}$$

2. Растојание на два точки. Во рамнината нека се зададени точките $X(x_1, x_2)$ и $Y(y_1, y_2)$. За растојанието $d = \overline{XY}$ важи $d^2 = \overrightarrow{XY}^2$. При тоа е

$$\overrightarrow{XY} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2\}.$$

За должината d на $\overrightarrow{XY}$ следува од (18)

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}. \tag{20}$$

По формулата (20) *се пресметува растојанието* d *меѓу точките* (x_1, x_2) *и* (y_1, y_2).

Растојанието d на точките $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$ од просторот е должината на векторот

$$\overrightarrow{XY} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3\}.$$

Од (19) следува

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}. \tag{21}$$

Формулата (21) *іо даба расшојанието d на шочките* (x_1, x_2, x_3) *и* (y_1, y_2, y_3).

3. Услов за нормалност на два вектора. Два вектори $a \neq 0$ и $b \neq 0$ се нормални тогаш и само тогаш кога е $a \cdot b = 0$. Затоа следува од (17):

Векторите $a = \{a_1, a_2\}$ и $b = \{b_1, b_2\}$ *се нормални шоіаш и само шоіаш, ако важи*

(22) $$a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

А од (16) следува:

Векторите $\{a_1, a_2, a_3\}$ *и* $\{b_1, b_2, b_3\}$ *се заемно нормални шоіаш и само шоіаш, ако е*

(23) $$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

4. Геометриско толкување на коефициентите во равенките на правата во рамнината и рамнината во просторот во однос на една правоагла система. Во рамнината нека ни е зададена во однос на една правоагла система правата

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0.$$

Таа е паралелна со векторите $\{z_1, z_2\}$ чии координати ја задоволуваат равенката (§ 19, т. 10, 11)

(24) $$A_1z_1 + A_2z_2 = 0.$$

А оваа равенка е услов за нормалност на векторот $\{z_1, z_2\}$ и $\{A_1, A_2\}$. Спрема тоа:

Векторот $\{A_1, A_2\}$ *е еден нормален вектор на йравата* (24), *ако йроменливите* x_1, x_2 *се йравоаіли координати на точките во рамнината.*

По аналоген начин ја добиваме и теоремата:

Векторот $\{A_1, A_2, A_3\}$ *е еден нормален вектор на рамнината*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0,$$

ако йроменливите x_1, x_2, x_3 *се йравоаіли координати на точките во йросторот.*

5. Агол меѓу два вектора. За аголот φ меѓу векторите $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$ ја добиваме од (13), (17) и (18) формулата

(25) $$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}},$$

Слично, од (13), (16) и (19), следува за аголот φ помеѓу векторите $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ формулата

$$(26) \qquad \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

ПРИМЕРИ

1. Да се пресмета аголот φ меѓу векторите $a = \{1, 3, 2\}$ и $b = \{-1, 0, 1\}$.

Решение: Спрема (26) имаме

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot(-1)+3\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}, \quad \text{или} \quad \cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{7}} .$$

Оттука добиваме

$$\log\cos\varphi = 0,27\,642 - 1,$$

од каде следува $\varphi \approx 79^\circ\ 6'\ 23''$.

2. Каква релација постои меѓу аглите α_1, α_2, α_3 што ги зафаќа еден единичен вектор $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ со координатните оски на правоаглата система.

Решение. Бидејќи е $e_1 = \{1, 0, 0\}$, добиваме од (26) дека е $\cos\alpha_1 = e_1$. Аналогно добиваме $\cos\alpha_2 = e_2$, $\cos\alpha_3 = e_3$.

Координатите на единичниот вектор e, *кој со координатните оски зафаќа агли* α_1, α_2, α_3, *се дадени, значи, со*

$$e = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3\}.$$

Бидејќи е $e^2 = 1$, тоа е

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1.$$

Тоа е бараната релација.

6. Проекција од вектор на вектор. За ортогоналната проекција од векторот b на векторот a ја добиваме од (5) формулата

$$(27) \qquad \pi p_{(a)}\, b = \frac{a\cdot b}{|a|} .$$

Ако a и b се дадени со

$$a = \{a_1, a_2\}, \quad b = \{b_1, b_2\},$$

важи

$$(28) \qquad \pi p_{(a)}\, b = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} ;$$

а за векторите $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ важи

$$(29) \qquad \pi p_{(a)}\, b = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} .$$

7. Правоагли координати на векторите како скаларни производи. За скаларен производ на еден вектор $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ сó координатниот вектор e_1 добиваме

$$a \cdot e_1 = \{a_1, a_2, a_3\} \cdot \{1, 0, 0\} = a_1.$$

Аналогно добиваме $a \cdot e_2 = a_2$, $a \cdot e_3 = a_3$. Спрема тоа:

i-тата правоагла координата a_i на еден вектор a е еднаква на скаларниот производ на тој вектор со i-тиот координатен вектор, значи

(30)
$$a_i = a \cdot e_i.$$

Теоремата важи и за векторите, определени со по две правоагли координати.

§ 29. Аналитичен израз за скаларен производ на два вектори во произволни афини координати

Видовме дека скаларен производ на два вектора се изразува со координатите на тие вектори многу едноставно, ако применуваме правоагла система. Сега ќе испитаме каков е тој израз, ако координатите не се правоагли.

Нека ни се зададени два вектора

$$a = \{a_1, a_2\}, \quad b = \{b_1, b_2\}$$

во однос на кои да е координатни вектори e_1, e_2. Имаме

$$a = a_1e_1 + a_2e_2, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2.$$

За скаларниот производ $a \cdot b$ добиваме

(31)
$$a \cdot b = (a_1e_1 + a_2e_2) \cdot (b_1e_1 + b_2e_2) =$$
$$= a_1b_1 (e_1 \cdot e_1) + a_1b_2 \cdot (e_1 \cdot e_2) + a_2b_1 \cdot (e_2 \cdot e_1) + a_2b_2 \cdot (e_2 \cdot e_2).$$

Ќе ги воведеме сега овие ознаки

$$e_1 \cdot e_1 = g_{11}, \quad e_1 \cdot e_2 = g_{12}, \quad e_2 \cdot e_1 = g_{21}, \quad e_2 \cdot e_2 = g_{22}.$$

Очигледно е $g_{12} = g_{21}$. Равенството (31) може сега да се запише во вид

$$a \cdot b = g_{11}a_1b_1 + g_{12}a_1b_2 + g_{21}a_2b_1 + g_{22}a_2b_2,$$

или кратко

(32)
$$a \cdot b = \sum_{i,\, k=1}^{2} g_{ik}a_ib_k.$$

Аналогно ќе постапиме, ако векторите се определени со по три координати во однос на произволните координатни вектори e_1, e_2, e_3:

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad b = \{b_1, b_2, b_3\}.$$

Ставуваме

$$e_i \cdot e_k = g_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Тогаш е

$$a \cdot b = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)\,(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) =$$

$$= a_1b_1 \cdot (e_1 \cdot e_1) + a_1b_2 \cdot (e_1 \cdot e_2) + a_1b_3 \cdot (e_1 \cdot e_3) + \ldots + a_3b_3\,(e_3 \cdot e_3) =$$

$$= g_{11}a_1b_1 + g_{12}\,a_1b_2 + g_{13}a_1b_3 + g_{21}a_2b_1 + \ldots + g_{33}\,a_3b_3,$$

или кратко

$$a \cdot b = \sum_{i,\,k=1}^{3} g_{ik}a_ib_k. \tag{33}$$

ЗАДАЧИ

Координатите во зад. 1—12 се правоагли.

1. Пресметај ги должините на векторите:

$\{1, 2, -3\}$, $\{-5, -1, -3\}$, $\{6, -6, -3\}$, $\{1 - t, 1 + t, t\}$.

2. Пресметај ги аглите меѓу дадените вектори.

a) $\{1, -2, 2\}$ и $\{3, 0, 4\}$; *b*) $\{4, -6, 5\}$ и $\{9, 1, -6\}$;

c) $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 2, 1\}$.

3. Пресметај го аголот меѓу правите што координатниот почеток го сврзуваат со точките (— 4, 4, 2) и (2, 1, 2).

4. Пресметај ги растојанијата на дадените точки.

a) (1, — 1) и (— 6, 3); (0, 5) и (— 6, 3); (0, 0) и (— 4, 3).

b) (0, 0, 0) и (3, — 1, 2); (1, 1, 1) и (— 2, 3, 0).

5. На x_3-оската да се најде точката еднакво оддалечена од точките (3, 5,—2) и (— 4, 1, 7).

6. На x_1-оската да се најде точката, еднакво оддалечена од координатниот почеток и од (18, — 6).

7. Какви агли зафаќа векторот $\{6, -2, 9\}$ со координатните оски?

8. Еден вектор со должина 4 зафаќа со x_1-оската и x_2-оската на една просторна система агли од 60°. Определи ги координатите на векторот!

9. Еден паралелограм *ABCD* е даден со векторите $\overrightarrow{AB} = \{1, 3, -1\}$ и $\overrightarrow{AD} = \{-2, 4, 2\}$. Определи ја проекцијата од дијагоналата $\overrightarrow{AC}$ на дијагоналата $\overrightarrow{BD}$!

10. Во x_1x_2-рамнината да се определи оној вектор со должина $\sqrt{10}$ кој со векторот $\{1, -3, 2\}$ образува прав агол.

11. Векторот $\boldsymbol{a}$ од x_1x_3-рамнината зафаќа со x_1-оската агол од 45°, а векторот $\boldsymbol{b}$ од x_2x_3-рамнината агол 45° со x_2-оската. Колкав е аголот помеѓу $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$?

12. Пресметај ги должините на компонентите на векторот $\{2, -3, 4\}$, ако тој е разложен во правците на векторите $\{-1, 2, 2\}$, $\{3, -2, 6\}$ и $\{4, 3, -12\}$! Потоа определи ги аглите меѓу компонентите! (Ако еден вектор се претставува во вид на збир на два или три вектора, тогаш секој собирок го викаме една *компонента* на дадениот *вектор*, а за векторот — дека е *разложен* во компоненти).

13. Напиши ги формулите за должината на вектор, за растојанието на две точки, за аголот меѓу два вектора, за проекцијата од вектор, ако зададените вектори од една рамнина или од просторот се дадени со своите координати во однос на некоја афина система.

14. Во однос на координатните вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, за кои, при некоја избрана единица за должина, важи $|\boldsymbol{e}_1| = 2, |\boldsymbol{e}_2| = 1, |\boldsymbol{e}_3| = 3$; $\sphericalangle < \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 > = \sphericalangle < \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 > = \sphericalangle < \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 > = 60°$, се дадени векторите $\{-1, 2, -4\}$ и $\{2, 1, 3\}$. Пресметај ги нивните должини и аголот меѓу нив!

II Векторски производ

§ 30. Векторски производ од два вектора

1. Дефиниција. Во § 25 дефинираме еден вид производ на два вектора — скаларен производ. Скаларниот производ е скалар. А сега ќе воведеме уште еден производ на два вектора, кој не ќе е скалар — векторски производ. Под тој производ ќе подразбираме еден *вектор* кој со дедените два вектори е, на извесен начин, наполно определен. Имено:

Векторски производ на два вектора $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$, *кои зафаќаат агол* φ, *е оној вектор* $\boldsymbol{c}$ *при кој:*

a) должината му е еднаква на

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\varphi;$$

b) правецот му е нормален на двата вектори $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*;*

c) смерот му е таков да векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *земени во оваа распоредба, образуваат една десна тројка вектори.*

При тоа за мерење на сите отсечки е избрана една иста единица мерка e, а квадратот со страна e — како единица мерка за површини.

Векторот $\boldsymbol{c}$ ќе го бележиме со ознаката

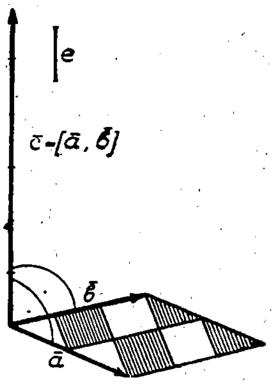
$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Освен оваа ознака, во литературата се употребуваат и други ознаки за векторскиот производ, на пр. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Со условите *a*), *b*) и *c*) на дефиницијата на векторот $\boldsymbol{c}$, тој е наполно определен, ако се зададени векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Овие вектори ги викаме *множители* на векторскиот производ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Од условот *a*) следува дека мерниот број на должината од $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ е еднаков на мерниот број од површината на паралелограмот, на чии што страни се нанесени векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. На сл. 56 е $\varphi = 45°$, $|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}| = 3$; значи $|\boldsymbol{c}| =$

$$= 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45° = 6.$$



Сл. 56

2. Некои особини на векторскиот производ. Називот „производ" за векторот $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ќе го оправдаме, ако покажеме дека барем некои од особините на производот од два броја ги има и симболот $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Тоа ќе го направиме подоцна. А сега ќе спомeнеме две особини на симболот $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ кои немаат свој аналогон при производот на броевите.

Од условот *a*) на дефиницијата следува дека е $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$ тогаш кога е или $|\boldsymbol{a}|=0$, или $|\boldsymbol{b}|=0$, или $\varphi=0$, или $\varphi=180°$. Спрема тоа:

[1] *Ако векторите* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *се колинеарни, е*

(1) $$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0},$$

и обратно, ако важи (1), *векторите* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *се колинеарни.*

Векторскиот производ од два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ може да биде, значи, $\boldsymbol{0}$ и тогаш кога ниеден од множителите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не е $\boldsymbol{0}$.

Да споменеме сега уште една особина. Векторите $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ имаат, спрема дефиницијата на векторскиот производ, иста должина и правец, но спротивни смерови. Смеровите се спротивни затоа што подредените тројки вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ имаат спротивни ориентации. Спрема тоа важи

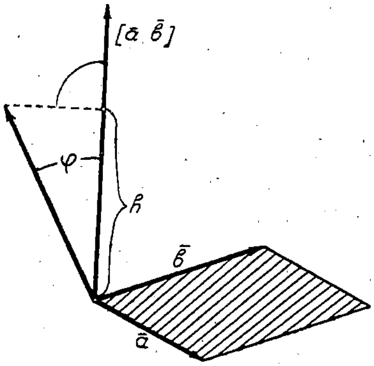
(I) $$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}].$$

Векторскиот производ не е *комутативен*, туку — како што се изразуваме — *антикомутативен*.

§ 31. Мешан производ

За скаларен производ од еден векторски производ $[a, b]$ со некој вектор c употребуваме често пати специјален назив, имено *мешан производ* на векторите a, b, c (во оваа распоредба).

Ќе испитаме какво геометриско толкување може да му се даде на мешаниот производ.



Сл. 57

Просторот го ориентираме со избор на една *десна* тројка координатни вектори. Векторите a, b, c, од кои a и b нека не бидат колинеарни, ги нанесуваме од една точка O. Тие определуваат еден ориентиран паралелопипед чија просторнина е (a, b, c). Ако за негова основа го избереме паралелограмот, на чии што страни се нанесени векторите a и b, тогаш неговата висина h во однос на таа основа е еднаква на апсолутната вредност од ортогоналната проекција $\text{пр}\, c$ од векторот c на векторот $[a, b]$ (сл. 57), т. е. $h = \pm \text{пр}\, c$. А бидејќи е

$$[a, b] \cdot c = |[a, b]| \cdot \text{пр}\, c = \pm |[a, b]| \cdot h,$$

а $|[a, b]|$ е еднаков на површината од основата на паралелопипедот, тоа $[a, b] \cdot c$ по својата апсолутна вредност е еднаков на апсолутната вредност на просторнината (a, b, c) на паралелопипедот. Но ќе покажеме дека броевите $[a, b] \cdot c$ и (a, b, c) не се еднакви само по апсолутната вредност, туку и по знакот.

Рамнината, определена со точката O и векторите a и b, го разделува просторот во два полупростори. Ако аголот φ меѓу $[a, b]$ и c е остер, тогаш векторите $[a, b]$ и c се насочени во еден ист полупростор, а ако φ е тап — во различни полупростори. Затоа во првиот случај $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ тројките подредени вектори a, b, c и a, b, $[a, b]$ се еднакво ориентирани, т. е. десно, па е затоа $(a, b, c) > 0$; а во вториот случај $\left(\varphi > \frac{\pi}{2}\right)$ тие тројки вектори се спротивно ориентирани и затоа $(a, b, c) < 0$. Но при $\varphi < \frac{\pi}{2}$ е и $[a, b] \cdot c = |[a, b]| \cdot |c| \cdot \cos\varphi > 0$; а при $\varphi > \frac{\pi}{2}$ е $[a, b] \cdot c < 0$. Со тоа покажавме дека при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ мешаниот производ $[a, b] \cdot c$ е еднаков на тројниот производ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. А бидејќи броевите $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c}$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ се еднакви и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, како и во случајот кога векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се колинеарни, имено двата еднакви на 0, тоа за произволните вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ важи идентитетот

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Со тоа добивме и едно геометриско толкување за мешаниот производ, имено:

Мешаниот производ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c}$ е еднаков на мерниот број од просторнината на ориентираниот паралелопипед, определен со подредената тројка вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, ако просторот е ориентиран со една десна подредена тројка вектори.

§ 32. Правоагли координати на векторскиот производ

Спрема § 28, т. 7, i-тата правоагла координата на векторот $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ е еднаква на скаларниот производ на тој вектор со i-тиот координатен вектор, значи

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_1,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_2,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_3\}.$$

Нека е $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Тогаш, ако правоаглата система $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ е десна, е

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

или

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогно добиваме

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \quad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Спрема тоа е

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} \right\}. \tag{2}$$

Правоаглите координати (во десна система) од векторскиот производ на векторите $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, во оваа распоредба, се дадени со (2).

Практично координатите на векторскиот производ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ќе ги добиваме по ова мнемотехничко правило:

Кон матрицата од координатите на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ја додаваме од десната страна нејзината прва и втора колона, со што ја образуваме матрицата

(3) $$\left\| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array} \right\|.$$

i-тата координата од $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *е еднаква на онаа дворедна детерминанта од матрицата (3) која е формирана од елементите на оние две нејзини колони што стојат непосредно десно од нејзината i-та колона.*

Втората координата, на пр., е еднаква на детерминантата, формирана од елементите од оние две колони што стојат непосредно после втората колона, т. е. од елементите на третата и четвртата колона.

§ 33. Две особини на векторскиот производ

Во овој § ќе покажеме дека за векторскиот производ на два вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ важат покрај особините, изведени во § 30, и такви формално-алгебарски особини што ги има и производот на броевите. А тоа ќе го оправда, како што веќе беше спомнато, називот „производ" за векторот $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нека бидат определени со своите координати a_i одн. b_i $(i = 1, 2, 3)$ во однос на една правоагла десна система.

Прво ќе докажеме дека за произволен скалар λ важи идентитетот

(II) $$[\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}] = \lambda \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Дека овој идентитет (II) е верен, се проверува лесно ако ги сравниме координатите на векторите $[\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}]$, $\lambda \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Првите координати на овие три вектори се на пр. еднакви на

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

А овие три изрази се, на основа особините на детерминантите, еднакви. Аналогно се покажува за вторите и третите координати, со што точноста на идентитетот (II) е докажана.

Идентитетот (II) покажува дека за векторскиот производ важи *асоцијативниот* закон, ако еден од трите множители е скалар.

На сличен начин ќе докажеме дека за векторскиот производ важи *дистрибутивност*, т. е. дека за произволни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ важи

(III) $$[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

Навистина, координатите на векторот на левата страна од (III) се еднакви на соодветните координати на векторот-збир од десната страна. Првите координати на тие два вектори се, на пр., еднакви соодветно на изразите

$$\begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

кои, според правилото за собирање на детерминантите, се еднакви. На ист начин се докажува дека се еднакви вторите и третите координати. Верноста на идентитетот (III) со тоа е докажана.

Од докажаните особини (II) и (III) следува, наполно аналогно како при симболот $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, дека векторскиот производ од два векторски полиноми можеме практично да го добиеме на тој начин што тие два полинома ги „множиме” по истите **формални** правила што важат за множење на скаларни полимони. При тоа, во резултатот како „производи” на векторите треба да ги ставиме векторските производи на тие вектори. Поради антикомутативноста на векторскиот производ треба при тоа да се внимава, местата на множителите да не се менуваат. Така е на пр.

$$[\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2,\ \mu_1\mathbf{b}_1 + \mu_2\mathbf{b}_2] =$$
$$= \lambda_1\mu_1 \cdot [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1] + \lambda_1\mu_2 \cdot [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] + \lambda_2\mu_1 \cdot [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] + \lambda_2\mu_2 \cdot [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2].$$

ЗАДАЧИ

1. Упрости ги производите $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, ако $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ се единични вектори кои образуваат една лева тројка.

2. Ако се зададени векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, дали постои секогаш таков вектор $\mathbf{c}$ да важи $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$?

3. Ако е $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, е $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$. Доказ!

4. Покажи дека векторите $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{d}]$ се компланарни!

5. Какво е геометриското значење на изразот $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$?

6. Пресметај ги координатите на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ во однос на една десна тројка заемно нормални единични вектори $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$, ако е $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + 5\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = -4\mathbf{p} + \mathbf{q} - 2\mathbf{r}$!

7. Истото прашање како во зад. 6, ако $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ е една лева тројка вектори.

8. Во една десна правоагла система се дадени векторите $\mathbf{a} = \{4, 4, -8\}$ и $\mathbf{b} = \{-3, 0, 4\}$. Определи ги координатите на единичниот вектор $\mathbf{e}$ кој е нормален на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а има таков смер да векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$, при оваа распоредба, образуваат една лева тројка!

§ 34. Примена на векторскиот производ

1. Површината на паралелограмот во просторот. Нека се дадени три темиња на еден паралелограм, имено $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$, $Z(z_1, z_2, z_3)$, во однос на една правоагла десна система. На страните ZX и ZY ги положуваме векторите

$\overrightarrow{ZX}$ и $\overrightarrow{ZY}$. Должината на векторот $[\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}]$ е еднаква на површината од паралелограмот, определен со $\overrightarrow{ZX}$ и $\overrightarrow{ZY}$. Затоа бараната површина p на паралелограмот е еднаква на

$$p = |\,[\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}]\,|.$$

Од $\overrightarrow{ZX} = \{x_1 - z_1, x_2 - z_2, x_3 - z_3\}$, $\overrightarrow{ZY} = \{y_1 - z_1, y_2 - z_2, y_3 - z_3\}$ следува

$$[\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}] = \left\{ \begin{vmatrix} x_2-z_2 & x_3-z_3 \\ y_2-z_2 & y_3-z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3-z_3 & x_1-z_1 \\ y_3-z_3 & y_1-z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1-z_1 & x_2-z_2 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

А бидејќи е

$$p^2 = |\,[\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}]\,|^2 = [\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}]^2,$$

тоа за површината p ја добиваме формулата

$$(4) \qquad p^2 = \begin{vmatrix} x_2-z_2 & x_3-z_3 \\ y_2-z_2 & y_3-z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3-z_3 & x_1-z_1 \\ y_3-z_3 & y_1-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-z_1 & x_2-z_2 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 \end{vmatrix}^2.$$

2. Растојание на точка до отсечка. Растојанието d на една точка X до отсечката YZ е еднаква на висината h во паралелограмот чиишто три темиња се точките X, Y, Z, а основа е отсечката YZ. Ако точките X, Y, Z имаат исти координати како истоимените точки во т. 1, тоа површината p на тој паралелограм е дадена со (4). А бидејќи должината o на основата е еднаква на растојанието на точките Y и Z, т. е.

$$(5) \qquad o = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (z_3 - y_3)^2},$$

тоа од формулата за површината на паралелограмот $p = o \cdot h$ следува поради $d = h$ дека е

$$d = \frac{p}{o}.$$

Во оваа формула p и o се определени со (4) и (5).

3. Растојание на точка до права. По формулата, изведена во т. 2, ќе го пресметаме сега растојанието d на една точка P_1 $(\mathfrak{r}_1)$ до правата

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda \cdot \boldsymbol{a}$$

(види § 9, (22)). Растојанието d е висината на паралелограмот, определен со векторите $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0$ и $\boldsymbol{a}$, и со основата еднаква на $|\boldsymbol{a}|$. Затоа е

$$d = \frac{|\,[\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0, \boldsymbol{a}]\,|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

4. Висина на паралелопипедот. Висината h на еден паралелопипед, определен со векторите $\overrightarrow{ZX}$, $\overrightarrow{ZY}$, $\overrightarrow{ZU}$, спуштена од темето U на спротивната страна како основа, е еднаква на количникот на неговата просторнина и површината на основата, значи

$$h = \frac{|\,(\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}, \overrightarrow{ZU})\,|}{|\,[\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}]\,|}.$$

5. Растојание на точка до рамнина. Растојанието d на една точка $P_1(\mathbf{r}_1)$ до рамнината (§ 12, (8))

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$$

ќе го најдеме на сличен начин. Навистина, тоа е висината на паралелопипедот, определен со векторите $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, спуштена од P_1 на паралелограмот, определен со векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, како на основа. Спрема тоа имаме

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|} .$$

6. Развивање на троредните детерминанти. Секоја детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

можеме да ја сметаме како детерминанта од правоаглите десни координати на три вектори

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \ \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \ \mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\},$$

и затоа еднаква на тројниот производ на тие вектори, т. е.

$$\Delta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Користејќи ги особините на $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ќе можеме да изведеме еден нов начин за пресметување на троредните детерминанти, различен од правилото на Сарус. Од идентитетот $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ го добиваме имено, земајќи предвид дека е

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \left\{ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right\},$$

и сменувајќи ги колоните при средната од горните детерминанти, за детерминантата $\Delta = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ изразот

$$\Delta = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Аналогно ги добиваме од идентитетите

$$\Delta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{c}]; \ \Delta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

формулите

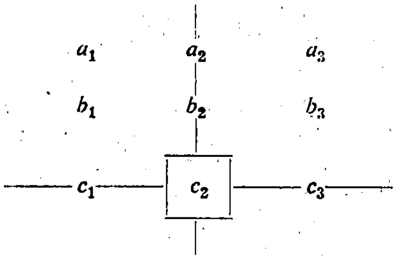
$$\Delta = -b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} , \tag{7}$$

$$\Delta = c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} . \tag{8}$$

Дворедните детерминанти, кои фигурираат во добиените формули, се поддетерминанти во матрицата $\|\Delta\|$ на елементите од кои е формирана детерминантата Δ. Секоја од нив е помножена во овие формули со оној елемент од таа матрица кој лежи во оној ред и колона на кои не им припаѓаат елементите од соодветната дворедна детерминанта. Детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

од последната формула, на пр., ја образуваме практично на тој начин што во матрицата на елементите од $\triangle$ ги отфрлиме (цртаме) сите елементи од онаа колона и оној ред на кои им припаѓа елементот c_2, и формираме детерминната од останатите елементи (види ја шемата!).



За знаковите на одделните членови на десните страни на формулите (6), (7), (8) лесно може да се провери дека знакот на онаа детерминанта $\triangle_{ik}$, пред која во овие формули стои како множител елементот од i-тиот ред и k-тата колона на матрицата $\|\triangle\|$, е еднаков на знакот од $(-1)^{i+k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Изразот $(-1)^{i+k} \cdot \triangle_{ik}$ го викаме *алгебарски комплемент* на тој елемент. За елементот c_2, на пр., алгебарски комплемент е

$$(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Важи, спрема тоа, оваа теорема:

Една троредна детерминанта е еднаква на збирот од производите на елементите на кој да е ред со алгебарските комплементи на тие елементи.

Поради § 23, [1], оваа теорема важи и за колоните.

Ако детерминантата $\triangle$ ја пишеме во вид (6), (7) или (8), кажуваме дека *детерминантата ја развивме* по првиот, вториот одн. третиот ред. Јасно е што значи детерминантата да ја развиеме по некоја од нејзините колони.

ПРИМЕРИ

1. **Површина на триаголникот.** Да се претстави површината на еден триаголник во рамнината, на кој му се зададени координатите на темињата, во вид на една троредна детерминанта.

Решение. Темињата на триаголникот нека се зададени во однос на некоја афина координатна система $(O;\ e_1,\ e_2)$ со

(*) $$A\,(x_1, x_2),\quad B\,(y_1, y_2),\quad C\,(z_1, z_2).$$

За површината p на триаголникот важи (§ 19, (7))

$$p = \frac{(e_1, e_2)}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата од десната страна е еднаква, очигледно, на детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 & 1 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Во тоа се убедуваме, ако последната детерминанта ја развиеме по третиот ред. На детерминантата Δ ќе ѝ дадеме посиметричен облик на тој начин што елементите од последната колона, помножени со z_1, ќе ги додадеме кон соодветите елементи од првата колона, а потоа истите елементи, помножени со z_2, ќе ги додадеме кон соодветните елементи од втората колона. Бидејќи при тоа детерминантата не си ја менува вредноста (§ 23, т. 3), добиваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

За површината p на триаголникот важи, значи, формулата

$$p = \frac{(e_1, e_2)}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

2. Услов за колинеарност на три точки во рамнината. Ако точките A, B, C од прим. 1 се колинеарни, е $p = 0$. И обратно, ако е $p = 0$, точките A, B, C се колинеарни. Од (9) следува затоа:

Точките (*) се колинеарни тогаш и само тогаш, ако е

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако во оваа равенка координатите од B и C се фиксни, а $x_1. x_2$ променливи, тогаш таа претставува, очигледно, *равенка на правата* што минува низ A и B.

3. Векторски производ. Векторскиот производ $[a, b]$ можеме да го пишеме и во детерминантен облик, имено

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Ако имено „детерминантата" од десната страна на (10) ја развиеме по првиот ред по правилата што важат за детерминантите, добиваме една линеарна комбинација од e_1, e_2, e_3, чии коефициенти се токму координатите на $[a, b]$, ако е $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$.

7. Услов за колинеарност на два вектори од просторот. Нека ни се дадени два вектора $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, чии координати се однесуваат до некоја афина система. Ќе испитаме што е потребно и доволно, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ да бидат колинеарни.

Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се колинеарни, тогаш, при секаков вектор $\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, важи $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. Користејќи го развивањето на детерминантите, имаме (§ 22)

$$\text{(11)} \qquad \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} = c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Десната страна е нула при секакви вредности за c_1, c_2, c_3. Ако ставиме по ред $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$; $c_2 = 1$, $c_1 = c_3 = 0$; $c_3 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$, добиваме

$$\text{(12)} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако се, значи, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ колинеарни, важи (12), што покажавме веќе и во § 19, т. 3.

Обратно, ако важи (12), тогаш е, на основа (11), $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ при *секој* $\boldsymbol{c}$. Оттука следува дека $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се колинеарни. Навистина, ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не би биле колинеарни, би можеле да избереме таков $\boldsymbol{c}$ да биде $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0$. Докажавме, значи:

Векторите $\{a_1, a_2, a_3\}$ *и* $\{b_1, b_2, b_3\}$ *се колинеарни тогаш и само тогаш, ако важи* (12).

8. Детерминанти од четврт ред. Детерминантата од трет ред може да се дефинира со кој да е од изразите на десните страни од (6), (7) или (8), ако детерминантите од втор ред веќе се дефинирани.

На аналоген начин ќе ги дефинираме *детерминантите од четврт ред*, при претпоставка дека детерминантите од трет ред се веќе дефинирани. Изразот

$$-d_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + d_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} - d_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} + d_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

кој е обопштение на изразот од десната страна на (8), ќе го бележиме со симболот

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

и ќе го викаме *детерминанта од четврт ред*.

Користејќи ги веќе докажаните особини на детерминантите од трет ред, може да се провери без тешкотии дека и за детерминантите од четврт ред важат аналогни особини.

9. Просторнина на тетраедар. Во однос на една афина система $(O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ни се дадени темињата на еден тетраедар:

$$A\,(x_1, x_2, x_3),\quad B\,(y_1, y_2, y_3),\quad C\,(z_1, z_2, z_3),\quad D\,(u_1, u_2, u_3,).$$

Ставуваме $\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{DB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{DC}$. Подредената тројка вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ определува една ориентација на тетраедарот. Неговата просторнина V е

$$V = \frac{1}{6}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Од

$$\mathbf{a} = \{x_1 - u_1, x_2 - u_2, x_3 - u_3\},\quad \mathbf{b} = \{y_1 - u_1, y_2 - u_2, y_3 - y_3\},$$
$$\mathbf{c} = \{z_1 - u_1, z_2 - u_2, z_3 - u_3\}$$

и од § 22, (6) следува

$$V = \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{6}\cdot \begin{vmatrix} x_1 - u_1 & x_2 - u_2 & x_3 - u_3 \\ y_1 - u_1 & y_2 - u_2 & y_3 - u_3 \\ z_1 - u_1 & z_2 - u_2 & z_3 - u_3 \end{vmatrix}.$$

Детерминатата од десната страна на оваа формула е еднаква, спрема т. 8, на детерминантата

$$\begin{vmatrix} x_1 - u_1 & x_2 - u_2 & x_3 - u_3 & 1 \\ y_1 - u_1 & y_2 - u_2 & y_3 - u_3 & 1 \\ z_1 - u_1 & z_2 - u_2 & z_3 - u_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

во што се убедуваме, ако оваа детерминанта ја развиеме по четвртиот ред. Ако елементите од последната колона од (13), помножени со u_1, ги додадеме кон соодветните елементи на првата колона, — потоа истите елементи, помножени со u_2, кон соодветните елементи на втората колона, — и најпосле, ако тие елементи, помножени со u_3, ги собереме со соодветните елементи од третата колона, детерминантата (13) добива облик

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Формулата за просторнината V на тетраедарот гласи, значи,

$$V = \frac{(e_1, e_2, e_3)}{6} \cdot \Delta. \tag{15}$$

10. Услов за компланарност на четири точки. Четири точки A, B, C, D се компланарни, т. е. лежат во една рамнина, тогаш и само тогаш кога просторнината на тетраедарот со темињата A, B, C, D е еднаква на нула. Затоа следува од (14) и (15) дека:

Точките $A\,(x_1, x_2, x_3)$, $B\,(y_1, y_2, y_3)$, $C\,(z_1, z_2, z_3)$ и $D\,(u_1, u_2, u_3)$ се компланарни тогаш и само тогаш кога важи

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

11. Равенка на рамнина што мине низ три неколинеарни точки. Ако координатите на точките B, C и D во (16) се фиксни, а x_1, x_2, x_3 променливи, тогаш равенката (16) претставува *равенка на рамнината* што минува низ неколинеарните точки B, C и D.

12. Систeма од четири хомогени линеарни равенки со четири непознати. Онака како што троредните детерминанти ги ползуваме за решавање на системи од три линеарни равенки, така ги користиме четирiредните детерминанти при решавањето на системите од четири линеарни равенки. Но за геометриската теорија како на детерминантите од четврт и повисок ред, така и на системите од четири и повеќе равенки од прва степен, е потребно да се воведе поимот за таканаречениот *простор од четири или повеќе димензии*, како и поимот за *вектори* во нив. Бидејќи ова излегува од рамките на нашата програма, ќе се задоволиме само со тоа што ќе ја изведеме теоремата за решливоста на една систeма од четири хомогени линеарни равекни со четири непознати — што ќе ни биде нужно за во иднина.

Ќе испитаме кога една систeма равенки од обликот

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1u &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2u &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3u &= 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4u &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

има решение по x, y, z, u.

Јасно е дека систeмата (17), при секакви значења на коефициентите a_i, b_i, c_i и d_i, има барем едно решение по x, y, z, u, имено $x = y = z = u = 0$. Ова решение — *тривијалното решение* — не претставува никаков интерес. Но важно е под какви услови систeмата (17) има и „*нетривијални*" решенија, т. е. такви решенија $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $u = u_0$ да барем еден од броевите x_0, y_0, z_0, u_0 не е нула.

За да испитаме тоа, избираме од системата (17) три кои да е равенки, на пр. првите три:

$$
\begin{aligned}
&a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0 \\
(18) \qquad &a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0 \\
&a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = 0.
\end{aligned}
$$

Ставуваме $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, $c = \{c_1, c_2, c_3\}$, $d = \{d_1, d_2, d_3\}$. Координатите нека се однесуваат до една десна правоагла координатна система.

Нека рангот на матрицата на системата (18) е 3. Нејзиното решение можеме тогаш да го пишеме во вид (§ 23, т. 6)

$$(19) \quad x = -(b, c, d) \cdot t, \quad y = (c, d, a) \cdot t, \quad z = -(d, a, b) \cdot t, \quad u = (a, b, c) \cdot t,$$

каде што t е еден произволен број. Овие решенија, при $t \neq 0$, се нетривијални, бидејќи, поради тоа што рангот е 3, барем еден од тројните производи од десната страна на (19) е различен од нула. Секое нетривијално решение на системата (17) е и едно нетривијално решение на системата (18). Значи, ако (17) има некое нетривијално решение, тоа е од обликот (19) при некој $t \neq 0$. Вредностите за x, y, z, u од (19) ја задоволуваат во тој случај, значи, и четвртата равенка од (17), имено

$$-a_4(b, c, d) + b_4(c, d, a) - c_4(d, a, b) + d_4(a, b, c) = 0.$$

Но левата страна е еднаква на (т. 8) детерминантата

$$(20) \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Спрема тоа, ако (17) има нетривијални решенија, е $\triangle = 0$.

Да претпоставиме сега дека рангот на матрицата на системата (17) е 2 или 1. Тогаш се нула сите троредните детерминанти на таа матрица, а следствено и на матрицата на системата (18). Во овој случај е, значи, $\triangle = 0$.

Ќе испитаме сега дали условот $\triangle = 0$ е и доволен за тоа, системата (17) да има нетривијални решенија. Нека биде, значи, по претпоставка, $\triangle = 0$. Ако рангот на матрицата од (18) е 3, тогаш е барем една нејзина троредна поддетерминанта различна од нула. Да претпоставиме дека е на пр. $(b, c, d) \neq 0$. Од

$$0 = \triangle = -a_4(b, c, d) + b_4(c, d, a) - c_4(d, a, b) + d_4(a, b, c)$$

следува дека $x = -(b, c, d)$, $y = (c, d, a)$, $z = -(d, a, b)$, $u = (a, b, c)$ е едно решение на четвртата равенка од (17); но тоа е и едно решение на (18) (види (19)), а затоа и од системата (17). Ова решение е поради $(b, c, d) \neq 0$ нетривијално.

Ако рангот на матрицата е 2, барем една од нејзините двоередни поддетерминанти е различна од нула. Нека е тоа една од оние дворедни поддетерминенти чии што елементи се коефициенти во првите две равенки од (17). Бидејќи во тој случај сите троредни детерминанти на матрицата се нула, тоа, на основа § 23, т. 6., сите решенија од системата што ја образуваат првите две равенки од (17) се и решенија на секоја од останатите равенки од таа система. Тоа следува оттаму што секоја од тие равенки заедно со првите две образува една система од три равенки чија што матрица има ранг 2. А овие систреми имаат дури безкрајно многу нетривијални решенија (*правило Руше*). — Аналогно следува дека и во случајот кога рангот на матрицата од (17) е 1, системата има нетривијални решенија.

Ја докажавме со тоа теоремата:

За да системата хомогени линеарни равенки (17) *има нетривијални решенија по x, y, z, u, потребно е и доволно, детерминантата* (20) *на системата да биде нула.*

ЗАДАЧИ

Координатите во зад. 1—7 се правоагли.

1. Да се пресмета висината на паралелопипедот, определен со векторите $\{3, 2, -5\}$, $\{1, -1, 4\}$ и $\{1, -3, 1\}$, земајќи една од неговите страни како основа.

2. Пресметај ги висините во паралелограмот $ABCD$, ако е $A\ (2, -3, 5)$, $B\ (-1, 1, 1)$, $D\ (0, 2, 3)$, а AB и AD се две соседни страни!

3. Пресметај го растојанието на координатниот почеток до отсечката AB, ако е $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$!

4. Пресметај ги висините во триаголникот ABC, ако е $A\ (x_1, y_1, z_1)$, $B\ (x_2, y_2, z_2)$, $C\ (x_3, y_3, z_3)$.

5. Да се пресмета растојанието од точката $(-2, 3, 5)$ до правата што минува низ точката $(1, 1, 2)$, а е паралелна со векторот $\{-3, 1, 4\}$!

6. Пресметај ја просторнината на тетраедарот $ABCD$, ако е зададено: $A\ (1/4, 1/2, 3/4)$, $B\ (4, 3, 2)$, $C\ (-1/3, -4/3, 2/3)$, $D\ (2, -3, -4)$!

7. Да се најде онаа точка од x_1-оската која од правата што минува низ точките $(2, 1, -2)$ и $(0, 3, 4)$ има растојание d!

8. Која точка од x_1x_2-рамнината е колинеарна со точките $(3, 5, -8)$ и $(-1, -2, 4)$!

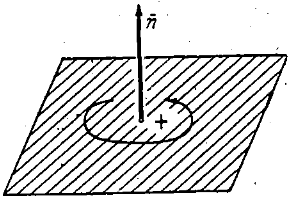
9. Која точка на x_2-оската е компланарна со точките $(-3, -2, 5)$, $(0, 4, -3)$ и $(1, 1, 2)$?

§ 35. Геометриско толкување на правоаглите координати на векторскиот производ

1. Ориентација на една рамнина положена во просторот. Ориентацијата на рамнината е определена (§ 16, т. 2) на тој начин што во неа е избран еден смер на вртењето како позитивен. Но ако смееме да употребиме и геометриски обекти надвор од таа рамнина, т. е. оние кои се дефинирани во околниот простор — во тој случај кажуваме дека *рамнината е положена во просторот* — тогаш определувањето на ориентацијата на рамнината може да стане и на друг начин.

Избираме еден вектор $\mathbf{n}$ кој е нормален на дадената рамнина и нанесен од која да е нејзина точка. *Како позитивен смер на вртењето во рамнината ќе го сметаме оној смер кој, посматран од крајот на избраниот нормален вектор, изгледа обратен од смерот на вртењето на стрелките од саатот.* Ако е, спрема тоа, избран еден нормален вектор, ориентацијата е определена. Обратно, ако ориентацијата е определена со изборот на еден смер на вртење како позитивен, тогаш тој смер на вртењето определува еден *смер* на нормалните вектори на рамнината — оној смер кој треба да го има кој да е нормален вектор, нанесен од некоја точка на рамнината, за да позитивниот смер на вртењето, посматран од крајот на векторот, изгледа обратен од смерот на вртењето на стрелките од саатот. Спрема тоа:

Ориентацијата на една рамнина во просторот е определена со изборот на еден вектор, нормален на неа.



Сл. 58

Смерот на избраниот нормален вектор ќе го викаме *позитивен смер на нормалите* на рамнината. Сега горната дефиниција можеме да ја формулираме и вака:

Ориентацијата на една рамнина во просторот е определена со изборот на еден смер на нејзините нормали како позитивен.

Координатните рамнини од просторните правоагли координатни системи ќе ги ориентираме секогаш со смеровите на оние координатни вектори од системата кои не лежат во таа рамнина. Така, на пр., ориентацијата во x_1x_2-рамнината ја определува смерот на векторот e_3 одн. на x_3-оската.

2. Ортогонална проекција од точка, вектор и ориентиран паралелограм на една рамнина. Нека е P која да е точка, а π' која да е рамнина во просторот. Правата која е нормална на π' и минува низ P ја сече π' во една точка P'. Точката P' ја викаме *ортогонална проекција од точката P на рамнината π'.*

Нека е сега $\overrightarrow{AB}$ еден вектор од просторот. Ортогоналните проекции од точките A и B на π' нека се A' и B'. Векторот $\overrightarrow{A'B'}$ го викаме *ортогонална проекција од векторот $\overrightarrow{AB}$ на рамнината π'.*

На сличен начин ги дефинираме ортогоналните проекции од ориентираните полигони на една рамнина. Нека е $ABC\ldots E$ еден полигон што лежи на една рамнина π, различна од π'. Него го ориентираме на тој начин што на неговата контура избираме еден смер на обиколување. Нека биде тој смер $A\to B\to C\to\ldots\to E\to A$. Проекциите од $A, B, C, \ldots, E$ на π' нека се $A', B', C', \ldots, E'$. Ориентираниот полигон $A'B'C'\ldots E'$, чија што ориентација е дадена со смерот $A'\to B'\to C'\to\ldots\to E'\to A'$, го викаме *ортогонална проекција од ориентираниот полигон $ABC\ldots E$ на π'.* Специјално, ако еден ориентиран паралелограм е определен со една подредена двојка вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, тогаш ориентацијата на неговата проекција е определена со подредената двојка вектори $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A'C'}$, кои се проекции од $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ на π'.

3. Координати на векторскиот производ. Во однос на една правоагла система $(O;\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ нека ни бидат зададени точките $X\,(x_1, x_2, x_3)$, $Y\,(y_1, y_2, y_3)$ и $Z\,(z_1, z_2, z_3)$. Нивните ортогонални проекции на x_1x_2-рамнината се

$$X'''\,(x_1, x_2, 0),\quad Y'''\,(y_1, y_2, 0),\quad Z'''\,(z_1, z_2, 0).$$

Координатите на овие точки во однос на системата $(O;\ e_1,\ e_2)$ се $X'''\,(x_1,\ x_2)$, $Y'''\,(y_1,\ y_2)$ и $Z'''\,(z_1,\ z_2)$. Ортогоналните проекции $\overrightarrow{Z'''X'''}$ и $\overrightarrow{Z'''Y'''}$ од векторите $\overrightarrow{ZX}$ и $\overrightarrow{ZY}$ на x_1x_2-рамнината се дадени во таа система, значи, со

$$\overrightarrow{Z'''X'''} = \{x_1 - z_1, x_2 - z_2\},\quad \overrightarrow{Z'''Y'''} = \{y_1 - z_1, y_2 - z_2\}.$$

Спрема тоа, проекцијата од ориентираниот паралелограм, определен со подредената двојка вектори $\overrightarrow{ZX}$, $\overrightarrow{ZY}$, на ориентираната x_1x_2-рамнина има површина еднаква на

$$(\overrightarrow{Z'''X'''},\ \overrightarrow{Z'''Y'''}) = \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

А тоа е токму (§ 34, т. 1) третата координата на векторскиот производ $[\overrightarrow{ZX},\ \overrightarrow{ZY}]$ во системата $(O;\ e_1,\ e_2,\ e_3)$.

Ако со X', Y', Z' одн. X'', Y'', Z'' ги обележиме ортогоналните проекции од X, Y, Z на x_2x_3-одн. на x_3x_1-рамнината, добиваме на аналоген начин

$$(\overrightarrow{Z'X'},\ \overrightarrow{Z'Y'}) = \begin{vmatrix} x_2 - z_2 & x_3 - z_3 \\ y_2 - z_2 & y_2 - z_3 \end{vmatrix},\ (\overrightarrow{Z''X''}, \overrightarrow{Z''Y''}) = \begin{vmatrix} x_3 - z_3 & x_1 - z_1 \\ y_3 - z_3 & y_1 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Овие детерминанти се токму првата и втората координата од $[\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY}]$.

При пресметувањето на горните површини е ставено $(e_1,\ e_2) = (e_2,\ e_2) = (e_3,\ e_1) = +1$. Значи ориентациите на координатните рамнини се такви како што е забележено во т. 1. Со тоа ја докажавме теоремата:

Правоаголите координати на еден векторски производ $[a,\ b]$ *се еднакви на површините на ортогоналните проекции од ориентираниот паралелограм, определен со подредената двојка вектори* a *и* b, *на првата, втората одн. третата координатна рамнина; ориентацијата на координатните рамнини е определена при тоа со смерот на првата, втората одн. третата координатна оска.*

4. Површина на проекцијата на еден ориентиран полигон од една ориентирана рамнина на друга. Површината p' од ортогоналната проекција на ориентираниот паралелограм, определен со подредената двојка вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, на i-тата координатна рамнина е еднаква на i-тата правоагла координата од $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. А оваа координата е еднаква (§ 28, т. 7) на

$$(21) \qquad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_i = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| \cdot |\boldsymbol{e}_i| \cdot \cos \alpha_i = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| \cdot \cos \alpha_i,$$

каде што α_i е агол помеѓу $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и $\boldsymbol{e}_i$.

Сега ќе ја ориентираме и рамнината на која лежи паралелограмот, избирајќи еден вектор $\boldsymbol{n}$, нормален на неа. Површината p на ориентираниот паралелограм во неа ќе ја бележиме со $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Аголот помеѓу $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{n}$ нека е φ.

Ако $\boldsymbol{n}$ има ист смер како $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, е $\alpha_i = \varphi$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0$. Затоа е $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\cos \alpha_i = \cos \varphi$.

А ако $\boldsymbol{n}$ има спротивен смер од $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, е $\alpha_i = \pi - \varphi$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0$. Затоа е $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\cos \alpha_i = -\cos \varphi$.

Во двата случаи е, спрема тоа, $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| \cdot \cos \alpha_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot \cos \varphi$.

Со оглед на (21), имаме

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot \cos \varphi.$$

Поради $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{e}_i = p'$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = p$ следува оттука

$$(22) \qquad p' = p \cdot \cos \varphi.$$

Аголот меѓу два вектори кои ги определуваат ориентациите на две рамнини е, по дефиниција, *агол меѓу тие ориентирани рамнини.*

Формулата (22), докажана за паралелограм, важи, очигледно, и за триаголник. А оттука лесно се обопштува и за произволен полигон. Ја докажавме спрема тоа теоремата:

За површината p на еден ориентиран полигон кој лежи во една ориентирана рамнина π, површината p' од неговата ортогонална проекција на ориентираната рамнина π' и аголот φ меѓу π и π' важи релацијата (22).

ПРИМЕНА

Пример. Каква релација постои меѓу површините p', p'', p''' на ортогоналните проекции од еден полигон на три заемно нормални рамнини?

Решение. Дадените ранмини ги избираме за координатни рамнини на една правоагла система. Аглите меѓу координатните рамнини и рамнината на полигонот нека се φ', φ'', φ'''. Тогаш е, на основа (22),

$$(23) \qquad p' = p \cos \varphi', \quad p'' = p \cos \varphi'', \quad p''' = p \cos \varphi'''.$$

Аглите φ', φ'', φ''' се агли што еден единичен вектор, нормален на рамнината на полигонот, ги зафаќа со координатните оски. Затоа е (§ 29, 3. 5, прим. 2)

$$\cos^2\varphi' + \cos^2\varphi'' + \cos^2\varphi''' = 1.$$

Од (23) добиваме затоа

$$\left(\frac{p'}{p}\right)^2 + \left(\frac{p''}{p}\right)^2 + \left(\frac{p'''}{p}\right)^2 = \cos^2\varphi' + \cos^2\varphi'' + \cos^2\varphi''' = 1,$$

или

$$p^2 = p'^2 + p''^2 + p'''^2.$$

Ја докажавме со тоа оваа интересна теорема:

Квадратот од површината на еден полигон е еднаков на збирот од квадратите на површините на ортогоналните проекции од тој полигон на три кои да е заемно нормални рамнини.

ЗАДАЧИ

1. Векторот $\{a_1, a_2, a_3\}$ го проицираме на трите координатни рамнини. Кои се координатите на тие вектори!

2. Должините на проекциите од еден вектор a на координатните рамнини се a', a'', a'''. Пресметај ја должината на a.

3. Даден е еден конвексен полиедар. На секоја негова страна е нанесен во некоја нејзина точка еден вектор, нормален на неа, а усмерен спрема надворешноста на полиедарот. Должината на секој вектор е еднаква на површината на страната на која е нанесен. Провери дека збирот на сите овие вектори е $\boldsymbol{0}$!

4. Да се пресмета површината на основата од една тространа пирамида чии што бочни рабови се заемно нормални и имаат должини 4, 2 и 5!

§ 36. Производи од повеќе вектори

Разгледувањето на векторската алгебра ќе го завршиме со изведувањето на некои важни векторски идентитети.

1. Производ од два тројни производа. Две тројки вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ нека ни бидат зададени со своите координати a_i, b_i, c_i и p_i, q_i, r_i во однос на некоја правоагла система. За производот на $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ имаме, спрема § 22, (7),

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Помножувајќи ги детерминатите од десната страна по правилото од § 23, т. 4, добиваме

$$(24) \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \Sigma a_i p_i & \Sigma b_i p_i & \Sigma c_i p_i \\ \Sigma a_i q_i & \Sigma b_i q_i & \Sigma c_i q_i \\ \Sigma a_i r_i & \Sigma b_i r_i & \Sigma c_i r_i \end{vmatrix}.$$

Знакот Σ означува дека треба да се сумира од 1 до 3, на пр., $\Sigma b_i q_i = b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_3 q_3$. Секој елемент од добиената детерминанта е (§ 27) еден скаларен производ на два вектори. Така е, на пр., $\Sigma b_i q_i = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q}$. Затоа од (24) следува идентитетот

(25)
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} ap & bp & cp \\ aq & bq & cq \\ ar & br & cr \end{vmatrix}.$$

ПРИМЕНА

Пример. Да се пресмета просторнината V на еден паралелопипед, на кој три соседни рабови имаат должини a, b, c, и ако рабовите a и b, b и c, c и a ги зафаќаат аглите γ, α одн. β.

Решение. На рабовите a, b, c ги положуваме векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. За квадратот на просторнината V добиваме тогаш од (25)

$$V^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix},$$

или, користејќи го геометриското значење на скаларниот производ,

$$V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}.$$

Заедничките множители на елементите од една иста колона и ред ги изнесуваме пред знакот за детерминанта. Со тоа ја добиваме формулата

$$V^2 = a^2 b^2 c^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Троен векторски производ. Применувајќи ја два пати формулата (2) можеме да ги пресметаме координатите на векторот $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$.

Векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ нека имаат исти координати како во т. 1. Добиваме

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] &= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3))\,\mathbf{e}_1 + (a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - \\ &\quad - a_1(b_1c_2 - b_2c_1))\,\mathbf{e}_2 + (a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2))\,\mathbf{e}_3 = \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) - \\ &\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Спрема тоа

(26)
$$[\mathbf{a}\,[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Векторот $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ можеме, значи, да го претставиме као линеарна комбинација од векторите $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ што го образуваа производот $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

Очигледно е

(27)
$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] \neq [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}],$$

зашто векторот од левата страна на нееднаквоста (27) е линеарна комбинација на $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, а векторот од десната страна — линеарна комбинација на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пример. Да се покаже дека важи идентитетот

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0} \tag{28}$$

Решение. Користејќи (26), добиваме за левата страна од (28) израз

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b},$$

кој е идентично еднаков на $\mathbf{0}$, што и требаше да се докаже.

3. **Векторски производ од два векторски производа.** Од (26) ќе го пресметаме лесно производот $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]]$.

Ставувајќи $[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = \mathbf{p}$, Имаме

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{p}] = -[\mathbf{p}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]].$$

Но, ако просторот е десно ориентиран, т. е. ако е ориентиран со една десна координатна тројка вектори, тогаш имаме, на основа § 31,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) = (\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Затоа е

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{a} \tag{29}$$

Векторски производ од два векторски производа може, спрема тоа, да се претстави во вид на една линеарна комбинација на векторите на еден од тие два производи.

ПРИМЕНА

Пример. Да се изведе синусната теорема на сферната тригонометрија.

Решение. Три единични вектори, на пр. $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, нанесени од центарот O на една топка со радиус 1, ги определуваат на површината на таа топка со своите крајни точки темињата A, B, C на еден таканаречен *сферичен триаголник*. Така ја наречуваме геометриската фигура на површината на една топка, составена од лаковите на три главни топкини кругови. Овие лакови, мерени со агловни (лачни) единици, се викаат *страни*, а аглите меѓу рамнините што топката ја сечат по овие страни — *агли* на сферичниот триаголник. Страните (т. е. мерните броеви) на нашиот сферичен триаголник нека се a, b, c, а аглите α, β, γ (Види сл. 59). Исти страни и агли имаат и сферичните триаголници на секоја топка со центар во O, чии темиња ги исекуваат на топката правите OA, OB, OC.

Ние ќе се ограничиме на такви сферични триаголници при кои страните и аглите се помали од рамниот агол.

Применувајќи го за векторот $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{a}, \mathbf{c}]]$ идентитетот (29), добиваме

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{30}$$

Можеме да претпоставиме дека $(a, b, c) > 0$. Тогаш добиваме, земајќи ги апсолутните вредности од двете страни на (30),

$$|[[a, b], [a, c]]| = (a, b, c).$$

За левата страна добиваме

$$|[[a, b], [a, c]]| = |[a, b]| \cdot |[a, c]| \cdot \sin <[a, b], [a, c]> =$$
$$= \sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha.$$

Затоа е

(31) $\quad (a, b, c) = \sin \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c.$

По аналогија важи

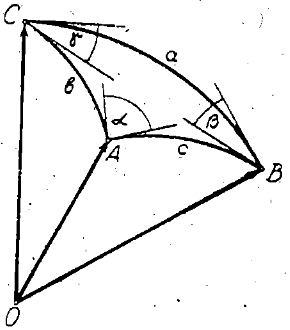
(32) $\quad (b, c, a) = \sin \beta \cdot \sin c \cdot \sin a$

(33) $\quad (c, a, b) = \sin \gamma \cdot \sin a \cdot \sin b.$

Бидејќи левите страни на (31), (32) и (33) се еднакви, важи

$$\sin \alpha \sin b \sin c = \sin \beta \sin c \sin a = \sin \gamma \sin a \sin b.$$

Делејќи ги овие равенки со $\sin a \sin b \sin c$, ги добиваме формулите



Сл. 59

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c},$$

кои ја изразуваат *синусната теорема на сферната тригонометрија* — што требаше да се изведе.

4. Скаларен производ на два векторски производа. Од (26) ќе го пресметаме сега и производот $[a, b] \cdot [c, d]$. Ставувајќи $[c, d] = p$, имаме за десно ориентиран простор:

$$[a, b] \cdot [c, d] = [a, b] \cdot p = (a, b, p) = (b, p, a) = [b, p] \cdot a.$$

Но

$$[b, p] = [b, [c, d]] = (b \cdot d) c - (b \cdot c) \cdot d.$$

Затоа е

$$[a, b] \cdot [c, d] = \big((b \cdot d) \cdot c - (b \cdot c) \cdot d\big) \cdot a,$$

или

$$[a, b] \cdot [c, d] = (a \cdot c)\ (b \cdot d) - (b \cdot c) \cdot (a \cdot d).$$

Овој идентитет можеме да го пишеме и во овој попрегледен облик

(34) $$[a, b] \cdot [c, d] = \begin{vmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{vmatrix}.$$

Дефинициите на скаларниот и векторскиот производ од два вектора не зависат од ориентацијата на просторот. Затоа *идентитетот* (34) *важи општо.*

ПРИМЕРИ

1. Да се изведе Хероновата формула за површината на триаголникот.

Решение. На страните на еден триаголник чии должини се a, b, c ги нанесуваме векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и $\mathbf{c}$ така да важи

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

За површината p на триаголникот имаме тогаш, на основа (34),

$$4p^2 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}.$$

Но $2ab = a^2+b^2-(a-b)^2 = a^2+b^2-c^2$; затоа е

$$4p^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) & b^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c^2 \\ a^2+b^2-c^2 & 2b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}[(a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2] = -\frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab-c^2)(a^2+b^2-c^2+2ab) =$$

$$= -\frac{1}{4}[(a-b)^2-c^2] \cdot [(a+b)^2-c^2] = -\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a-b+c).$$

Ставувајќи

$$a+b+c = 2s,$$

добиваме

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

што е бараната *формула на Херон*.

2. Да се изведе косинусната теорема на сферната тригонометрија.

Решение. Нека важат истите ознаки како во прим. во т. 3.

Користејќи ја формулата (34) за производот $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, добиваме

$$(35) \qquad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{ba} \\ \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \end{vmatrix} = \mathbf{a}^2 \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

Изразот на левата страна е еднаков на

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \cdot |[\mathbf{a}, \mathbf{c}]| \cdot \cos\varphi = \sin c \cdot \sin b \cdot \cos\varphi,$$

каде што φ е аголот меѓу векторите $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$. Овие вектори се нормални на рамнината OAB одн. OAC. Затоа φ е еднаков на едниот од аглите под кои се сечат овие рамнини, значи на α или на $\pi - \alpha$. Ако рамнината OAC ја завртиме за извесен агол, тоа за тој агол ќе се заврти и нејзиниот нормален вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$. Да си ја мислиме таа рамнина завртена околу OA како оска за аголот α во оној смер да рамнината OAC совпадне со рамнината OAB. Тогаш ќе совпадне и смерот на $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ со смерот на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. А при тоа векторот $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ ќе го завртиме за α. Затоа е $\varphi = \alpha$. На тој начин имаме, значи,

$$(36) \qquad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \cos\alpha \cdot \sin b \cdot \sin c.$$

А бидејќи за десната страна од (35) важи

$$(37)\qquad \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) = \cos a - \cos b\cdot\cos c,$$

тоа од (35, (36) и (37) следува формулата:

$$\cos a = \cos b\cdot\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha,$$

која ја изразува *косинусната теорема на сферната тригонометрија* што требаше да се изведе.

5. Троен производ од три векторски производи. Од идентитетот

$$(38)\qquad (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]\cdot\boldsymbol{r}$$

следува, ако ставиме $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$, $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}]$,

$$(39)\qquad ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}], [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}]) = [[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]]\cdot[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}].$$

За десната страна на (39) добиваме, приложувајќи го на нејзиниот прв множител идентитетот (29),

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\}\cdot[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}] =\\ &= (\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}])\cdot(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}])\cdot(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) =\\ &= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}).\end{aligned}$$

Со тоа докажавме дека важи идентитетот

$$(40)\qquad ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}], [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}).$$

Бидејќи во дедукцијата ги употребивме формулите (38) и (29) кои важат само во десно ориентираниот простор, важи и овој идентитет за *десно ориентиран* простор.

ЗАДАЧИ

1. Да се пресмета просторнината на тетраедарот чии рабови се a, b, c, d, e, f!

2. Дадени се страните a, b, c на еден трираб. Да се пресметаат неговите агли!

3. Три соседни рабови од еден паралелопипед образуваат помеѓу себе еднакви агли α. Какви агли зафаќаат страните на паралелопипедот меѓу себе?

4. Да се покаже дека тројката вектори $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, земени во оваа распоредба, е десна!

5. Како гласат идентитетите (29) и (40), ако просторот е *лево* ориентиран?

ГЛАВА V

ПОЛАРНИ КООРДИНАТИ

§ 37. Агол во ориентирана рамнина

1. Дефиниција на ориентиран агол. Во § 24 дефиниравме агол помеѓу два вектораа. Сега ќе го обопштиме поимот за агол во извесна смисла за случај да векторите што го определуваат ѝ припаѓаат на една ориентирана рамнина.

Во една ориентирана рамнина, т. е. во една рамнина во која е избран еден смер на вртенето како позитивен, нека ни се зададени два вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Овие два вектори, нанесени од една точка O во рамнината, определуваат еден агол. Ако при тоа е уште и посочено кој од тие два вектори треба да го сметаме како прв, тогаш аголот ќе го наречуваме *ориентиран*. И така:

Една подредена двојка вектори што лежат во една ориентирана рамнина, нанесени од една нејзина точка, определува еден ориентиран агол.

Сега треба да се договориме како ќе ги мериме ориентираните агли. Под мерен број на ориентираниот агол што го определува една подредена двојка вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ е првиот вектор) ќе го подразбираме, по договор, оној број кој покажува за колку агловни единици (радијани) треба да го завртиме во рамнината векторот $\boldsymbol{a}$ за да неговиот смер совпадне со смерот на $\boldsymbol{b}$; при тоа *тој број ќе е позитивен или негативен според тоа дали вртењето на* $\boldsymbol{a}$ *беше извршено во позитивниот или во негативниот смер.* Мерниот број на овој агол ќе го бележиме, исто како при неориентираните агли, со грчки букви или, за поголема јасност, со симболот $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>$.

На секој ориентиран агол одговараат бескрајно многу мерни броеви. Навистина, ако φ_0 е мерен број на еден таков агол, определен со подредената двојка вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, тогаш и броевите $\varphi_0+2k\pi$, $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ се негови мерни броеви. Совпаднувањето на смерот од $\boldsymbol{a}$ со смерот од $\boldsymbol{b}$ е можно имено да се постигне на безброј многу начини: $\boldsymbol{a}$ треба да се заврти за φ_0 радијани, а потоа да направи, евентуално, и произволен број цели завртувања, било во позитивниот било во негативниот смер на вртењето. При секое завртување векторот $\boldsymbol{a}$ опишува агол 2π одн. — 2π радијани.

Место да пишеме $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> = \varphi_0 + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, ќе пишеме

$$<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi}$$

и ќе читаме „*аголот* $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>$ *е конгруентен со* φ_0 *модуло* 2π", што значи дека $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>$ се разликува од φ_0 за кој да е мултиплум од 2π (полниот агол).

За мерните броеви на ориентираните агли важат, на основа нивната дефиниција, овие важни релации

$$<a, b> + <b, a> \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$$<a, b> + <b, c> + <c, a> \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

2. Синус и тангенс на ориентираниот агол. Во рамнината нека е зададена една правоагла координатна система $(O;\ e_1,\ e_2)$. Рамнината е ориентирана така да е $(e_1, e_2) = +1$. Во неа е зададен еден ориентиран агол со подредената двојка вектори $a = \{a_1,\ a_2\}$, $b = \{b_1, b_2\}$.

Прво ќе го пресметаме *косинусот* на тој агол. Функцијата косинус е парна, т. е. не се менува, ако нејзиниот аргумент го промени знакот; а освен тоа таа е периодична со периода 2π. Затоа за косинусот на ориентирани агли важи во § 28, т. 5 изведената формула, имено

$$\cos <a, b> = \cos <b, a> = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \tag{1}$$

Формулата за *синус* ќе ја добиеме од формулата за површината на ориентираниот паралелограм. Имено имаме (§ 18, (6))

$$(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Освен тоа ќе покажеме дека е

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \sin <a, b>. \tag{3}$$

Дека апсолутните вредности на изразите од двете страни на (3) се еднакви, е евидентно. Но изразите се еднакви и по знак. Ако имено двојките a, b и e_1, e_2 се еднакво ориентирани, тогаш најмалата позитивна вредност φ од $<a, b>$ е помала од π, значи $\sin <a, b>$ е позитивен; бидејќи во овој случај е $(a, b) > 0$, тоа обете страни од (3) се позитивни. А ако a, b и e_1, e_2 се спротивно ориентирани, е $\varphi > \pi$ и затоа $\sin <a, b> < 0$; но тогаш е и $(a, b) < 0$, значи, двете страни од (3) се негативни. Идентитетот (3) е, спрема тоа, верен. Од (2) и (3) следува, земајќи предвид дека е $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, бараната формула за синус на ориентиран агол во вид:

$$\sin <a, b> = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tag{4}$$

Од (1) и (4) следува и формулата за *тангенс* на ориентиран агол

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tg} <\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_1 + a_2 b_2}.$$

Формулите (1), (4) и (5) важат за ориентирани агли, зададени со векторите $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2\}$ во однос на некоја десна или лева координатна система, ако рамнината е ориентирана така да е $<\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2> = +\pi/2$.

ПРИМЕРИ

1. Да се определат правоаглите координати на векторот $\boldsymbol{a}$ чија должина е a, а $<\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}> = \varphi$.

Решение. Нека е $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}$. Тогаш добиваме од (1) и (4)

$$\cos <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}> = \frac{a_1}{a}, \quad \sin <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}> = \frac{a_2}{a} \quad \text{или} \quad a_1 = a \cos \varphi, \quad a_2 = a \cos \varphi.$$

Покажавме дека во однос на правоаглата $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$-система важи

$$\boldsymbol{a} = \{a \cdot \cos <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}>, \ a \cdot \sin <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}>\}.$$

2. Да се докажат адиционите теореми за синус и косинус.

Решение. Дадени нека ни се два единични вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тие нека ги зафаќаат со првиот координатен вектор $\boldsymbol{e}_1$ од една правоагла система ориентираните агли α и β, т. е. $<\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}> = \alpha$, $<\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}> = \beta$. Во однос на таа координатна система е тогаш, на основа прим. 1,

$$\boldsymbol{a} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}, \quad \boldsymbol{b} = \{\cos \beta, \sin \beta\}.$$

Од

$$<\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}> + <\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}> + <\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1> \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

добиваме

$$<\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}> \equiv - <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}> - <\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1> \equiv <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}> - <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}> \equiv \alpha - \beta.$$

Применувајќи ги формулите (1) и (4) за аголот $<\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}> = \alpha - \beta$ ги добиваме формулите

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Овие формули се верни за произволните ориентирани агли α и β. Верни се, значи, и тогаш кога во нив β го замениме со $-\beta$. На тој начин ги добиваме и формулите

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

кои ги изразуваат таканаречените *адициони теореми за синус и косинус.*

3. Да се пресметаат координатите на векторот $\boldsymbol{a}'$, кој со еден зададен вектор $\boldsymbol{a}$ го зафаќа ориентираниот агол φ и има иста должина како $\boldsymbol{a}$,

Решение. Нека е во однос на една правоагла система

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \boldsymbol{a}' = \{a_1', a_2'\}.$$

Зададено е a_1, a_2 и $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'> = \varphi$, а се бара a_1', a_2'. Од (1) и (4) ги добиваме, земајќи предвид дека е $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a_1'^2 + a_2'^2}$, формулите

$$a_1'a_1 + a_2'a_2 = (a_1^2 + a_2^2) \cos \varphi$$
$$-a_1'a_2 + a_2'a_1 = (a_1^2 + a_2^2) \sin \varphi.$$

Тоа е една система линеарни равенки за a_1' и a_2'. Нејзиното решение е

$$a_1' = a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi$$
$$a_2' = a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi.$$

Покажавме дека векторот $\boldsymbol{a}'$, кој се добива со завртување на зададениот вектор $\boldsymbol{a}$ за агол φ, е определен со

$$\boldsymbol{a} = \{a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi,\ a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi\}.$$

Ако е на пр. $\varphi = +\pi/2$, ќе е $\boldsymbol{a}' = \{-a_2, a_1\}$.

Координатите a_1, a_2 од векторот $\boldsymbol{a}$ се и координати на неговата крајна точка, ако тој е нанесен од координатниот почеток. Затоа добиениот резултат може и вака да се формулира:

За правоаглите координати x_1', x_2' на точката M', во која прејдува точката M (x_1, x_2) по завтувањето на рамнината за ориентираниот агол φ околу координатниот почеток, важат релациите .

(*)
$$x_1' = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi$$
$$x_2' = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi.$$

ЗАДАЧИ

Да се определи аголот, зададен со подредената двојка вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ во зад. 1—4. Координатите во зад. 1—7 се правоагли.

1. $\boldsymbol{a} = \{\sqrt{3}, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, \sqrt{3}\}$. 2. $\boldsymbol{a} = \{1, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{2\ 1\}$.

3. $\boldsymbol{a} = \{-1, 4\}$, $\boldsymbol{b} = \{5, -3\}$. 4. $\boldsymbol{a} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$, $\boldsymbol{b} = \{\sin \varphi, \cos \varphi\}$.

5. Зададени се темињата O (0, 0) и A (3, 4) на еден рамностран триаголник OAB. Определи го темето B, ако двојката $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ има иста ориентација како двојката координатни вектори e_1, e_2!

6. Координатите на точките на една права p ја задоволуваат равенката $x_2 = x_1 . \operatorname{tg} \varphi + 1$. Која релација ќе ја задоволуваат координатите на точките од правата во која ќе прејде дадената права по завртувањето на рамнината за агол φ околу координатниот почеток?

7. Координатите на зададените точки ја задоволуваат равенката $x_1^2 - x_2^2 = 1$. Која равенка ќе ја задоволуваат координатите на точките во кои ќе прејдат зададените точки по завртувањето на рамнината за агол $\pi/4$ околу точката (0, 0)?

8. Изведи ги формулите за синус и тангенс на ориентиран агол, ако векторите што го определуваат се зададени

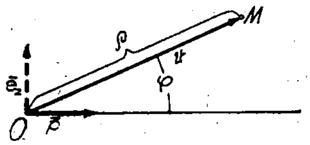
а) во однос на една косоагла картезична система;

b) во однос на која да е афина координатна система!

§ 38. Поларни координати во рамнината

Афините координати на точки во рамнината, со кои работевме до сега, претставуваат само еден од безброј многу начини за определување положајот на точките во рамнината со броеви, т. е. со координати. Освен афини координати постојат и безброј многу други типови координати. Покрај афините нарочно важни се таканаречените *поларни координати*, со кои ќе се запознаеме сега.

1. Обикновени поларни координати. Во една ориентирана рамнина избираме една оска чиј смер е определен со единичниот вектор $\boldsymbol{p}$ и една точка O на неа. Оската ќе ја викаме *поларна оска*, а точката O — *пол*. Положбата на една произволна точка M во рамнината е определена со радиус-векторот $\overrightarrow{OM} = \mathfrak{r}$. А овој е определен со својата должина $\rho = |\mathfrak{r}|$ и со ориентираниот агол $\varphi = <\boldsymbol{p}, \mathfrak{r}>$. При тоа е $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$. На секоја точка од рамнината, различна од полот, одговара на тој начин по еден ρ и φ. А и обратно, на секоја зададена двојка броеви (ρ, φ) одговара една точка M во рамнината, имено крајната точка на оној вектор $\mathfrak{r}$ од рамнината, нанесен од O, чија должина е ρ, и кој со $\boldsymbol{p}$ го зафаќа ориентираниот агол φ. Меѓу двојките броеви ρ, φ, за кои важи $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, и точките од рамнината, со исклучок на полот, постои, значи, една обратно-еднозначна кореспонденција. Двојките броеви ρ, φ се, според тоа, еден вид координати на точки. Ги наречуваме *обикновени поларни координати* на точки. Првата координата ρ ја викаме *поларен радиус-вектор*, а втората координата φ — *поларен агол* или *амплитуда на точката* M. За избраниот пол и поларната оска кажуваме дека образуваат една поларна система $(O; \boldsymbol{p})$. Ако ρ и φ се поларни координати на некоја точка M во однос на таа система, ќе пишуваме $M\ (\rho, \varphi)_{(O;\ \boldsymbol{p})}$, или пократко $M\ (\rho\ \varphi)$.



Сл. 60

Точките кои имаат различни амплитуди, но ист поларен радиус-вектор, лежат на еден круг со центар во O, а точките кои имаат иста амплитуда лежат на една полуправа чија почетна точка е во полот. За полот е $\rho = 0$, а амплитудата му е неопределена.

2. Премин од поларните во правоаглите картезични координати. Освен поларната система $(O; \boldsymbol{p})$ избираме во рамнината уште и една правоагла картезична система. Нека е $\boldsymbol{p}$ нејзиниот прв координатен вектор, т. е. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1$, а полот нека совпадне со координатниот почеток. Ориентацијата на системата нека е таква да е $<\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2> = +\pi/2$. Во прим. 1. § 37 покажавме дека векторот $\mathfrak{r}$, чија што должина е ρ и кој со e_1 го зафаќа ориентираниот агол φ, има во однос на оваа координатна система координати x_1, x_2, дадени со

$$(6) \qquad x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi.$$

Но бидејќи за крајната точка M на векторот $\mathfrak{r}$, нанесен од O, важи $M(\rho, \varphi)_{(O;\,p)}$ и $M(x_1, x_2)_{(O;\, e_1,\, e_2)}$, тоа формулите (6) ни ја даваат и врската што постои меѓу поларните координати ρ, φ и правоаглите картезични координати x_1, x_2 на една иста точка во однос на избраните координатни системи. Од (6) следува

$$(7) \qquad \begin{gathered} \rho = + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \end{gathered}$$

Ако ни се дадени ρ, φ, ги пресметуваме x_1, x_2 со помошта на (6); а ако се зададени x_1, x_2, ги пресметуваме ρ, φ со помошта на (7).

ПРИМЕРИ

1. Да се пресмета растојанието d на точките $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$.

Решение. Ставувајќи $\mathfrak{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ и $\mathfrak{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$, имаме

$$d^2 = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)^2 = \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - 2\, \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\, \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Задачата можеме да ја решиме и со помошта на формулата за растојание ((20), § 28) при употребата на правоаглите координатаи. Нека е во однос на така избрана координатна система како во т. 2, $M_1(x_1', x_2')$, $M_2(x_1'', x_2'')$. Тогаш е

$$\begin{gathered} d^2 = (x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_1')^2 = \\ = (\rho_2 \cos \varphi_2 - \rho_1 \cos \varphi_1)^2 + (\rho_2 \sin \varphi_2 - \rho_1 \sin \varphi_1)^2 = \\ = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\, \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{gathered}$$

2. При ознаките од предодната задача да се пресмета површината p на триаголникот OM_1M_2, ориентиран со смерот $O \to M_1 \to M_2 \to O$ на обиколувањето.

Решение. Имаме

$$2p = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} =$$

$$= \rho_1 \cos \varphi_1 \cdot \rho_2 \sin \varphi_2 - \rho_2 \cos \varphi_2 \cdot \rho_1 \sin \varphi_1 = \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

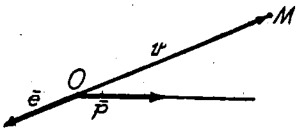
Значи

$$p = \frac{\rho_1 \rho_2}{2} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

3. Обопштени поларни координати. Поларните координати, воведени погоре, имаат еден недостаток на кој сега ќе укажеме. Желателно е, координатите на точките од каков да е вид да ја имаат таа особина да се менуваат континуално (непрекинато), т. е. така да не прават скокови, ако точката се движи континуално во рамнината. Оваа особина ја поседуваат, очигледно, афините координати. Но тоа не е случај и при обикновените поларни координати. Ако една точка M се движи, имено, по една права која минува низ полот, тогаш првата координата на M—радиус-векторот ρ —, навистина, се менува континуално, но не и втората — амплитудата. Ако M се движи *кон* полот, ρ се намалува, станува нула кога M совпадне со полот, и почнува пак да расте кога M го премине O и се оддалечува од него. Но амплитудата φ останува неизменета сè додека M се најдува на истата страна од O, и *ираѓи скок* π радијани кога M го минува O.

Амплитудата прави скок и тогаш кога точката при своето движење во рамнината ја преминува полуправата $\varphi = 0$. Ќе го покажеме тоа за случај кога точката се движи по некој круг со центар во полот. При тоа радиус-векторот не се менува, туку стално е еднаков на радиусот на кругот, а амплитудата стално расте — ако M се движи во позитивниот смер на вртењето — сè додека не ја мине полуправата $\varphi = 0$, кога *ираѓи скок* од 2π на 0 радијани.

Овие недостатоци ќе ги отстраниме на тој начин што обикновените поларни координати ќе ги обопштиме на известен начин.



Сл. 61

Во рамнината избираме пак една точка O — *иол*, и една оска што минува низ него, а е определена со еден вектор $\boldsymbol{p}$ — *иоларна оска*. Обопштените поларни координати ρ и φ на произволната точка M ги дефинираме на следниот начин. На правата OM избираме еден произволен единичен вектор $\boldsymbol{e}$. Тој може да има ист или спротивен смер како векторот $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OM}$. Двојката броеви ρ, φ, дефинирани со

$$\rho = \mathfrak{r}/\boldsymbol{e}, \quad \varphi = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e} \rangle,$$

ги викаме ***обоиштени иоларни координати*** од M во однос на поларната система $(O; \boldsymbol{p})$ и пишуваме, како при обикновените поларни координати, $M(\rho, \varphi)_{(O;\boldsymbol{p})}$. При тоа за ρ и φ не правиме никакви ограничувања; секој од нив може да заземе произволна крајна вредност, позитивна и негативна.

На тој начин на секоја двојка броеви (ρ_0, φ_0), при $\rho_0 \neq 0$, одговара една сама точка од рамнината. Но не важи и обратно. Навистина, лесно се увидува дека на секоја точка од рамнината одговараат безкрајно многу подредени двојки на горе дефинираните броеви (ρ, φ). Очигледно, двојките $(\rho_0, \varphi_0 + 2k\pi)$, каде што е $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, се координати на една иста точка. Но освен овие координати има и други, безброј многу, обопштени поларни координати на таа точка. Ако, имено, при некој избран смер на $\boldsymbol{e}$ е $M(\rho_0, \varphi_0)$, тогаш при спротивниот смер на $\boldsymbol{e}$ двојките броеви $(-\rho_0, \varphi_0 +$

$+\pi + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, се координати на истата точка M. Спрема тоа:

Ако (ρ_0, φ_0) *се поларни координати (обикновени или обопштени) на една точка, тогаш се и*

$$\rho = (-1)^n \rho_0, \quad \varphi = \varphi_0 + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

нејзини обопштени поларни координати.

Лесно се проверува дека обопштените поларни координати ги немаат недостатоците што ги спомнавме при обикновените поларни координати. Но затоа имаат тој недостаток што на една точка не одгогара еден сам пар координати, туку безброј парови.

4. Премин од обопштени поларни координати во правоаглни картезични. Ако векторот $\boldsymbol{e}$ има ист смер како и векторот $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OM}$, тогаш обопштените координати ρ, φ од M се идентични со обикновените поларни координати ρ, φ од M во донос на истата поларна система, ако вредностите за φ ги ограничиме на $0 \leqq \varphi < 2\pi$. Во тој случај за обопштените поларни координати ρ, φ и за правоаглите координати x_1, x_2 во однос на правоаглата картезична система, избрана во т. 2, за една иста точка важат, следствено, релациите (6). А ако смерот на $\boldsymbol{e}$ е спротивен на смерот од $\mathfrak{r}$, т. е. ако е $\mathfrak{r}/\boldsymbol{e} < 0$, тогаш за обопштените координати ρ, φ од M важи

$$\rho = -\rho_0, \quad \varphi \equiv \varphi_0 + \pi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Бидејќи е

$$\rho \cos \varphi = -\rho_0 \cdot \cos(\varphi_0 + \pi) = \rho_0 \cos \varphi_0 = x_1$$
$$\rho \sin \varphi = -\rho_0 \cdot \sin(\varphi_0 + \pi) = \rho_0 \sin \varphi_0 = x_2,$$

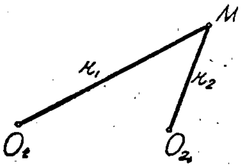
тоа релациите (6) важат и во овој случај. Овие равенки ги решаваме по ρ и φ и добиваме

$$\rho = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$
$$\cos \varphi = \pm \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin \varphi = \pm \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \tag{8}$$

во кои треба да се земе насекаде горниот или насекаде долниот знак. Со изборот на горниот одн. долниот знак го избираме на векторот $\boldsymbol{e}$ оној смер што го има $\overrightarrow{OM}$ одн. нему спротивниот. И така:

Формулите (6) *ни овозможуваат премин од обопштените поларни во правоаглни координати, а формулите* (8), *обратно, од правоаглите во обопштени поларни.*

5. Биполарни координати. Положбата на една точка M во рамнината ја определуваме понекогаш и со нејзините растојанија r_1, r_2 од две фиксни точки O_1 и O_2 во таа рамнина. Броевите r_1, r_2 ги викаме *биполарни координати* од точката M во однос на биполарната координатна система (O_1, O_2) што се обележува со $M(r_1,r_2)_{(O_1\,O_2)}$, или само со M (r_1, r_2). Биполарните координати се еднозначно определени, ако е зададена точката M. Но ако се зададени координатите r_1, r_2, тогаш ним им одгогараат две точки симетрични во однос на правата O_1, O_2 како симетрала, или една сама точка на таа права, и тоа само тогаш, ако важи



Сл. 62

$$|r_1 - r_2| \leqq \overline{O_1O_2} \leqq r_1 + r_2. \qquad (9)$$

Точките, за чии што координати важи $r_1 + r_2 = \overline{O_1O_2}$ или $r_1 - r_2 = \pm\,\overline{O_1O_2}$, лежат на правата O_1O_2.

Биполарните координати r_1, r_2 ги задоволуваат релациите (9).

ЗАДАЧИ

Обележи ги на цртежот, на кој е избрана една поларна система, точките чии што обикновени поларни координати се зададени.

1. $(4, \pi/3)$. 2. $(2, \pi)$. 3. $(3, \pi/2)$. 4. $(1, 3\pi/2)$. 5. $(5, 11\pi/6)$.

Каде лежат точките за чии обикновени поларни координати важат зададените релации.

6. $\varphi=\pi/3$. 7. $\varphi=\pi/2$. 8. $\varphi=4\pi/3$. 9. $1=\sin(\varphi-\pi/6)$.

10. $\pi/6 \leqq \varphi \leqq \pi/3$. 11. $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $1 \leqq \rho \leqq 2$. Направи скици!

12. $\rho = 2$. 13. $\rho^2 - 4\rho + 3 = 0$. 14. $\rho^2 - 3\rho + 2 < 0$.

Ако правоаглите координати x_1, x_2 на една точка ја задоволуваат дадената равенка, каква равенка задоволуваат обикновените поларни координати на таа точка?

15. $x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha.- p = 0$. 16. $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. 17. $x_1^2 - x_2^2 = a^2$.

Обикновените поларни координати ρ, φ на една точка ја задоволуваат дадената равенка. Која равенка ја завоволуваат правоаглите картезични координати на таа точка?

18. $1/\rho = A\cos\varphi + B\sin\varphi$. 19. $\rho\cos\varphi = a$. 20. $\rho = a\cos\varphi$.

21. Пресметај ја површината на триаголникот со темињата A_1 (ρ_1, φ_1), A_2 $(\rho_2, \varphi)_2$, A_3 (ρ_3, φ_3) при ориентацијата $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$!

Обележи ги на цртежот, во чија што рамнина е избрана една поларна система, точките чии обопштени поларни координати се зададени!

22. $(2, 3\pi)$. 23. $(-3, \pi/2)$ 24. $(-1, -\pi/3)$. 25. $(-3/2, 7\pi/2)$.

Кои точки ги определуваат зададените релации, во кои ρ, φ се обопштени поларни координати?

26. $\rho = 1$. 27. $\rho = -1$. 28. $\rho^2 + \rho - 12 = 0$ 29. $\varphi = 0$

30. $\varphi = 5\pi/6$. 31. $\operatorname{tg} 2\varphi = 1$. 32 $\sin^2 \varphi \leqq 1/2$. 33. $\rho^2 - \rho - 2 = 0$, $\cos^2 \varphi < 3/4$.

34. Нацртај неколку точки чии што координати ρ, φ ја задоволуваат релацијата $\rho = \varphi/\pi$, и тоа

a) ако ρ, φ се обикновени поларни координати, избирајќи ги за φ по ред вредностите $k \cdot \pi/8$, $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$;

b) ако ρ, φ се обопштени поларни координати, избирајќи ги за φ по ред вредностите $k \cdot \pi/8$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$!

§ 39. Поларни координати во просторот

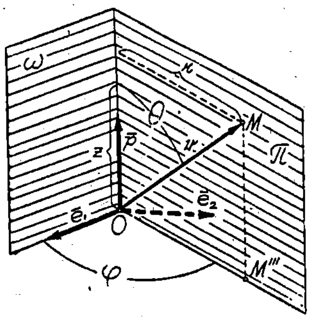
Како во рамнината, така и во просторот постојат, освен познатите ни веќе афини координати, и безброј многу други. Тука ќе се запознаеме со поларните координати кои, покрај афините, се најважни.

1. Поларни или сферични координати. Во просторот избираме една точка O — *пол* и една оска која минува низ O, а е определена со еден вектор $\boldsymbol{p}$ — *поларна оска*. (Види сл. 63). Низ таа оска положуваме една рамнина која оската ја дели во две полурамнини. Избираме една од нив, ќе ја бележиме со ω, и ќе ја викаме *поларна полурамнина*. Полот, поларната оска и поларната полурамнина образуваат една просторна поларна система. Да би го определиле положајот на една зададена точка M во однос на таа система, ја положуваме низ неа онаа рамнина што минува низ поларната оска. Оската ја дели во две полурамнини. Онаа од нив во која лежи M ќе ја бележиме со π. Векторот $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OM}$ нека има должина ρ, а со $\boldsymbol{p}$ нека затвора агол θ, т. е. $\theta = \langle \boldsymbol{p}, \mathfrak{r} \rangle$. Аголот $\varphi = \langle \omega, \pi \rangle$ нека е аголот за кој треба да ја завртиме ω за да совпадне со π, ако вртењето станува во еден избран смер на вртење околу поларната оска; ние ќе го избереме оној смер, за да произволниот вектор $\boldsymbol{e}$ кој лежи во ω и е нанесен од O, векторот $\boldsymbol{e}'$ во кои преjдува $\boldsymbol{e}$ после завртувањето на ω, и векторот $\boldsymbol{p}$, образуваат една десна тројка. Со секоја тројка броеви ρ, φ, θ, за кои важи

$$\rho \leqq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \tag{10}$$

векторот $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OM}$ е наполно определен, а со тоа и точката M, а и обратно. Исклучок прави само полот O во кој θ и φ се неопределени, и точките од поларната оска за кои важи $\theta = 0$ или π, а φ е неопределен. Затоа (ρ, φ, θ) ги викаме координати, поточно *поларни координати*, на точката M во однос на системата $(O; \boldsymbol{p}, \omega,)$ и пишуваме $M(\rho, \varphi, \theta)_{(O; \boldsymbol{p}, \omega)}$ или $M(\rho, \varphi, \theta)$. Координатата ρ ја викаме *поларен радиус-вектор* од M, координатата φ — нејзина *должина* или *азимут*, а координатата θ — нејзино *зенитно растојание*.

2. Премин од поларни во правоагли картезични координати. Покрај избраната веќе поларна система избираме уште една десна правоаглa картезична система. Нејзиниот координатен почеток нека совпаднува со полот, третиот координатен вектор e_3 со p, а првиот координатен вектор, нанесен од O, нека лежи во полурамнината ω. Положбата на e_2 е со тоа определена. Ќе покажеме како правоаглите координати x_1, x_2, x_3 на една произволна точка M во однос на вака избраната система се изразуваат со поларните координати ρ, φ, θ од таа точка. M''' нека е ортогоналната проекција од M на x_1x_2-рамнината. Векторот $\overrightarrow{OM}$ има во однос на координатните вектори p, $\overrightarrow{OM'''}/\overline{OM'''}$ координати $\{\rho \cos\theta,\ \rho \sin\theta\}$. Значи $x_3 = \rho \cos\theta$, а $\overline{OM'''} = \rho \sin\theta$. Векторот $\overrightarrow{OM'''}$ има во однос на координатните вектори e_1, e_2 координати



Сл. 63

$$x_1 = \overline{OM'''} \cdot \cos\varphi = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad x_2 = \overline{OM'''} \cdot \sin\varphi = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$

а тоа се и првата и втората правоагла координата од $\overrightarrow{OM}$ одн. од M. Затоа имаме

$$(11) \qquad x_1 = \rho \cos\varphi \sin\theta, \quad x_2 = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad x_3 = \rho \cos\theta.$$

Тоа се бараните формули кои *ги врзуваат поларните и правоаглите декартови координати на точките во просторот.*

Овие формули покажуваат повторно дека секоја тројка броеви ρ, φ, θ, за кои важи (10), определува една точка во просторот, што порано геометриски го покажавме.

3. Обопштени поларни координати. Како што при рамнинските обикновени поларни координати при континуалното менување на положбата на точката може да се јави дисконтинуираност на нејзините координати, така станува тоа и при просторните поларни координати. И тука ја избегнуваме таа дисконтинуиранаст со обопштување на координатите, на сличен начин како во рамнинскиот случај.

На правата OM (сл. 63) избираме еден произволен единичен вектор e, нанесен од O. Рамнината во која лежат e и p, нанесени од O, ја дели поларната оска во две полурамнини, од кои онаа во која лежи крајот на e ќе ја бележиме со π. Како обопштени поларни координати од M ја дефинираме тогаш тројката броеви

$$\rho = \mathbf{r}/e, \quad \varphi = <\omega, \pi>, \quad \theta = <p, e>,$$

каде што е $-\infty < \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$, $0 < \theta \leqq \pi$.

Ако ρ, φ, θ се обопштените поларни координати на една точка M, а ρ_0, φ_0, ρ_0 нејзините обикновени поларни коордниати, тогаш во случајот да смерот на $\boldsymbol{e}$ е таков да е $\mathfrak{r}/\boldsymbol{e} > 0$, важи

$$\rho = \rho_0, \quad \varphi \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \theta = \theta_0;$$

а ако $\boldsymbol{e}$ има спротивен смер, т. е. ако е $\mathfrak{r}/\boldsymbol{e} < 0$, важи

$$\rho = -\rho_0, \quad \varphi \equiv \varphi_0 + \pi \pmod{2\pi}, \quad \theta = \pi - \theta_0$$

Општо важи, значи

$$\rho = (-1)^n \rho_0, \quad \varphi = \varphi_0 + n\pi, \quad \theta = \pi/2 - (-1)^n (\pi/2 - \theta_0)$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Заменувајќи ги добиените изрази за ρ, φ, θ во (11), се убедуваме дека трансформационите равенки важат и во овој случај. И така, *со помошта на релациите* (11) *можеме да минеме од обопштените поларни координати* ρ, φ, θ *во правоаглите* x_1, x_2, x_3.

4. Полуполарни или цилиндрични координати. Ги задржуваме ознаките од т. 1 и избираме една поларна система (O; $\boldsymbol{p}$, ω). Со секоја точка M што не лежи на поларна оска е определена една полурамнина π. Положбата на точката M можеме да ја определиме сега и на друг начин одошто при поларните координати. Нека е пак $\varphi = \langle \omega, \pi \rangle$. Растојанието од M до оската нека е r, а проекцијата од $\mathfrak{r}$ на $\boldsymbol{p}$ нека е z. Ако ја избереме истата правоагла система како во т. 2, и ако во однос на неа M ги има координатите x_1, x_2, x_2, тогаш е

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z. \tag{12}$$

Навистина, $x_3 = \mathit{пр}_{\boldsymbol{p}}\,\mathfrak{r} = z$; потоа $\overline{OM'''} = r$, $\varphi = \langle \boldsymbol{e}_1, \overrightarrow{OM'''} \rangle$, и затоа

$$\overrightarrow{OM'''} = \{r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\}_{(\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2)},$$

од каде следува (12). Тоа докажува дека тројката броеви r, φ, z, за кои важи $r \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, наполно ја определува положбата на точката M во однос на системата (O; $\boldsymbol{p}$; ω). Броевите r, φ, z ги наречуваме нејзини *полуполарни* или *цилиндрични координати.*

Равенките (12) покажуваат дека полуполарните координати се добиваат од правоаглите, ако кај последните место првата и втората координата ги воведеме во x_1x_2-рамнината обикновените рамнински поларни координати. Оттука доаѓа и називот полуполарни координати.

За точките од поларната оска е $r = 0$, а φ е неопределен.

ЗАДАЧИ

Ако ρ, φ, θ се обикновени поларни коордниати во просторот, кои точки се определени со равенките, зададени во зад. 1—9?

1. $\rho = 1$. 2. $\rho^2 - 3\rho + 2 > 0$. 3. $\varphi = \pi/4$. 4. $\operatorname{tg}^2\varphi < 3$. 5. $\theta = 3\pi/4$.

6. $\theta \leqq \pi/3$. 7. $\rho = 2, \varphi = 0$. 8. $\varphi = \pi/2$, $\theta = \pi/6$. 9. $\rho = 5$, $\theta = 3\pi/4$.

Ако правоаглите координати x_1, x_2, x_3 на една точка ја задоволуваат равенката, зададена во зад. 10—12, која равенка ја задоволуваат поларните координати на таа точка?

10. $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2$. 11. $x_1^2+x_2^2 - x_3^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = 0$. 12. $a_1x_1+a_2x_2 = 0$.

Нека r, φ, z се цилиндрични координати. Кои точки ги определуваат равенките:

13. $r = \text{const}$. 14. $\varphi = \text{const}$. 15. $z = \text{const}$.

Ако правоаглите координати x_1, x_2, x_3 од M ја задоволуваат некоја од равенките, зададени во зад. 16— 18, каква равенка задоволуваат цилиндричните координати од M?

16. $x_1^2+x_2^2 = R^2$. 17. $x_1^2+x_2^2 - x_3^2 = 0$. 18. $x_1^2+x_2^2 + x_3^2 = 1$.

ГЛАВА VI

ТРАНСФОРМАЦИЈА НА КОРДИНАТИ АФИНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

I. Трансформација на афини координати

§ 40. Трансформација на координатите на векторите

1. Трансформација на координатите на векторите од една рамнина. Во рамнината нека ни бидат зададени координатните вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и еден произволен вектор $\boldsymbol{a}$. Нека е

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}_{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}. \tag{1}$$

Сега избираме уште една двојка координатни вектори $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, определени со своите координати во однос на „старите” координатни вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, имено

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= \{e_{11}, e_{12}\} \\ \boldsymbol{e}_2' &= \{e_{21}, e_{22}\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Векторот $\boldsymbol{a}$ нека има во однос на овие „нови” координатни вектори $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ координати a_1', a_2'. Тогаш е (§ 10)

$$\boldsymbol{a} = a_1'\boldsymbol{e}_1' + a_2'\boldsymbol{e}_2'. \tag{3}$$

Ставувајќи ги во овој идентитет наместо a, e_1', e_2' соодветните симболи од десните страни на (1) и (2), добиваме

(4) $$\{a_1, a_2\} = a_1' \cdot \{e_{11}, e_{12}\} + a_2' \cdot \{e_{21}, e_{22}\},$$

или

(5) $$\{a_1, a_2\} = \{e_{11}a_1' + e_{21}a_2',\ e_{12}a_1' + e_{22}a_2'\},$$

од каде

(6) $$\begin{aligned} a_1 &= e_{11}a_1' + e_{21}a_2' \\ a_2 &= e_{12}a_1' + e_{22}a_2'. \end{aligned}$$

Меѓу „старите” и „новите” координати на векторот a постојат, значи, релациите (6) — *трансформационите равенки за координатите на векторите.* Посматрајќи ги коефициентите пред a_1' и a_2' во (6) и координатите (2) од новите координатни вектори во однос на старите, забележуваме дека *во трансформационите равенки* (6) *коефициентите пред a_1' и a_2' се координатите на e_1' одн. на e_2' во однос на старите координатни вектори.*

Десните страни од равенките (6) се линеарни и хомогени во однос на a_1', a_2'. Затоа кажуваме дека *трансформационите формули за координатите на векторите се хомогено-линеарни.*

Детерминантата од коефициентите пред a_1' и a_2' во (6) е детерминантата од координатите на векторите e_1' и e_2'. Бидејќи овие, како координатни вектори, не се колинеарни, тоа е

(7) $$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ако обратно, за координатите a_1, a_2 од еден вектор важат релациите (6), при произволно избрани коефициенти e_{ik}, но само да важи (7), тогаш a_1' и a_2' се координати на истиот вектор во однос на координатните вектори (2); зашто ако важи (6), важи и (5), и (4), одн. (3). Спрема тоа:

Со равенките (6), *заедно со условот* (7), *се изразуваат координатите a_1, a_2 на еден вектор со координатите a_1', a_2' на истиот вектор во однос на векторите $\{e_{11}, e_{12}\}$ и $\{e_{21}, e_{22}\}$ како координатни вектори.*

2. Обопштение за простор. Истото испитување можеме да го повториме за просторот. Новите координатни вектори нека се зададени во тој случај со

(8) $$\begin{aligned} e_1' &= \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\} \\ e_2' &= \{e_{21}, e_{22}, e_{23}\} \\ e_3' &= \{e_{31}, e_{32}, e_{33}\}. \end{aligned}$$

За старите координати a_1, a_2, a_3 и новите координати a_1', a_2', a_3' на еден ист вектор ги добиваме на ист начин како во рамнинскиот случај релациите

$$(9)\qquad \begin{aligned} a_1 &= e_{11}a_1' + e_{21}a_2' + e_{31}a_3' \\ a_2 &= e_{12}a_1' + e_{22}a_2' + e_{32}a_3' \\ a_3 &= e_{13}a_1' + e_{23}a_2' + e_{33}a_3', \end{aligned}$$

кои се наполно аналогни на релациите (6). И тука коефициентите пред a_i' се координати од координатниот вектор e_i' во однос на старите координатни вектори. А поради некомпланарноста на векторите e_1', e_2', e_3' следува дека детерминантата од нивните координати е различна од нула, значи

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обратно, релациите (9), при произволно зададени коефициенти e_{ik}, за кои е исполнет само условот (10), претставуваат релации меѓу „старите" координати a_i на векторот и неговите „нови" координати a_i'; при тоа новите координатни вектори се определени во однос на старите со (8).

Пример. Меѓу старите и новите координатни вектори постојат релациите $e_3' = e_1 + e_2, e_1' = e_2 + e_3, e_2' = e_3 + e_1$. Напиши ги трансформационите равенки за координатите на векторите.

Решение. Имаме

$$e_1' = \{0,\ 1,\ 1\},\ e_2' = \{1,\ 0,\ 1\},\ e_3' = \{1,\ 1,\ 0\}.$$

Трансформационите равенки гласат, спрема тоа,

$$a_1 = a_2' + a_3',\quad a_2 = a_1' + a_3'\quad a_3 = a_1' + a_2'.$$

ЗАДАЧИ

1. Да се определат трансформационите равенки на координатите на векторите од една рамнина, ако новите координатни вектори се положени на дијагоналите од паралелограмот, определен со старите два координатни вектори. Колку можности постојат?

Да се напишат трансформационите равенки за координатите на векторите, ако новите два координатни вектори се зададени во однос на старите (зад. 2—3).

2. $e_1' = \{-2, 1\}$, $e_2' = \{1, 3\}$. 3. $\{0, 2\}$, $\{-3, 5\}$,

4. Аналогна задача како во зад. 2—3, ако новите координатни вектори во просторот се зададени во однос на старите со:

$$e_1' = \{-3,\ 1,\ 2\},\ e_2' = \{2, -5,\ 4\},\ e_3' = \{6,\ 1, -1\},$$

5. Избери такви нови координатни вектори да векторот, кој во однос на старите координатни вектори има координати $\{5, -3\}$, во однос на новите има координати $\{1, 1\}$! Колку решенија има?

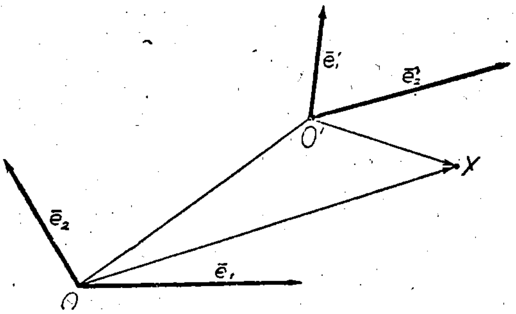
6. Определи ги новите координатни вектори така за да векторите, кои во однос на старите координатни вектори имаат координати $\{-3, 4\}$ и $\{2, 5\}$, во однос на нив имаат координати $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$!

7. Во однос на дадените координатни вектори се зададени векторите $\{1, 1, 1\}$, $\{-5, 0, 6\}$, $\{2, 3, -1\}$. Определи ги такви нови координатни вектори, во однос на кои дадените вектори да имаат по ред координати: $\{-1, 1, 1\}$; $\{1, -1, 1\}$, $\{1, 1, -1\}$!

§ 41. Трансформација на координатите на точките

1. Трансформациони равенки за рамнински координати. Сега ќе испитаме какви релации постојат помеѓу афините координати од една иста точка во рамнината во однос на две афини координатни системи во неа.

Во рамнината нека ни е зададена една афина координатна система $(O; e_1, e_2)$ и една произволна точка X со своите координати x_1, x_2. Покрај оваа система избираме уште една нова координатна система $(O'; e_1', e_2')$. Координатите на новиот координатен почеток O' во однос на старата система нека се x_1^0, x_2^0, а координатите на новите координатни вектори e_1', e_2' во однос на старите нека се зададени пак со (2). Координатите на X во однос на новата система нека се x_1', x_2'. Затоа е (§ 12)



Сл. 64

$$\overrightarrow{O'X} = e_1'x_1' + e_2'x_2'.$$

Во равенството $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$, односно во

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + e_1x_1' + e_2'x_2'$$

ставуваме $\overrightarrow{OX} = \{x_1, x_2\}$, $\overrightarrow{OO'} = \{x_1^0, x_2^0\}$, а за e_1', e_2' симболите од десните страни на (2). Ја добиваме релацијата

$$\{x_1, x_2\} = \{x_1^0, x_2^0\} + x_1' \cdot \{e_{11}, e_{12}\} + x_2' \cdot \{e_{21}, e_{22}\},$$

од која следува

$$\{x_1, x_2\} = \{x_1^0 + e_{11}x_1' + e_{21}x_2', x_2^0 + e_{12}x_1' + e_{22}x_2'\},$$

или

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_1 &= e_{11}x_1' + e_{21}x_2 + x_1^0 \\ x_2 &= e_{12}x_1' + e_{22}x_2' + x_2^0. \end{aligned}$$

Овие равенки ги врзуваат новите и старите координати. Тоа се *трансформациони равенки за координатите на точките*. Нивните десни страни се линеарни по однос на x_1', x_2'. Затоа кажуваме дека *трансформационите равенки за координатите на точките се линеарни.*

Коефициентите пред x_i' во трансформационите равенки (11) се координати од векторот e_i', а „слободните” членови x_i^0 се координати од новиот координатен почеток во однос на старата систeма. И тука, поради неколинеарноста на e_1', e_2', важи (7).

Обратно, *секои релации од видот* (11), при каков да е избор на коефициентите e_{ik}, x_i^0, само ако тие го задоволуваат условот (7), ни определуваат еден премин од старите координати x_i во новите координати x_i' на една произволна точка, т. е. *релации помеѓу координатите x_1, x_2 на која да е точка во некоја дадена систeма и координатите x_1', x_2' на истата точка во некоја нова систeма; новиот координатен почеток има при тоа во однос на старата систeма координати x_1^0, x_2^0, а новите координатни вектори во однос на старите се зададени со* (2). Тоа се проверува, ако нашето изведување го проследиме по обратен пат.

2. Обопштение за простор. За просторот добиваме, по наполно ист начин, аналогни резултати. Ако во однос на старата систeма новиот координатен почеток ги има координатите x_1^0, x_2^0, x_3^0, а новите координатни вектори на новата координатна систeма се зададени со (8), тогаш меѓу старите координати x_i и новите координати x_i' од една иста, но произволна, точка важат релациите

$$(12)\qquad \begin{aligned} x_1 &= e_{11}x_1' + e_{21}x_2' + e_{31}x_3' + x_1^0 \\ x_2 &= e_{12}x_1' + e_{22}x_2' + e_{32}x_3' + x_2^0 \\ x_3 &= e_{13}x_1' + e_{23}x_2' + e_{33}x_3' + x_3^0. \end{aligned}$$

Обратно, при какви да е коефициенти e_{ik} и x_i^0, само да е задоволен условот (10), релациите (12) претставуваат трансформациони равенки за координатите на точките во просторот. Коефициентите пред x_i' се при тоа координати на новите кординатни вектори во однос на старите, а слободните членови x_i^0 се координати на новиот координатен почеток во однос на старата систeма.

§ 42. Обратни формули.

Трансформационите равенки за координатите на векторите и точките ни позволуваат, старите координати да ги изразиме со новите. Но често пати е потребно да и новите координати ги изразиме со старите. Ние ќе го сториме тоа само за координатите на векторите и точките во просторот. За рамнинските координати важи сѐ наполно аналогно.

Трансформационите равенки (9) можеме да ги сметаме како една система линеарни равенки по a_1', a_2', a_3'. Детерминантата (10), чија вредност ќе ја обележиме со e, е детермината на таа система. И бидејќи е $e \neq 0$, тоа системата (9) има едно и само едно решение по a_1', a_2', a_3'. За a_1' добиваме, на пр., по *правилото на Крамер:*

$$a_1' = \frac{1}{e} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & e_{21} & e_{31} \\ a_2 & e_{22} & e_{32} \\ a_3 & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix}$$

Развивајќи ја детерминантата по првата колона и означувајќи го алгебарскиот комплемент на елементот e_{ik} во детерминантата (10) со E_{ik}, добиваме оттука

$$a_1' = \frac{1}{e}(a_1E_{11} + a_2E_{12} + a_3E_{13}).$$

Ако ставиме

$$\frac{E_{ik}}{e} = \varepsilon_{ik},$$

добиваме

$$a_1' = \varepsilon_{11}a_1 + \varepsilon_{12}a_2 + \varepsilon_{13}a_3.$$

Аналогни изрази добиваме и за a_2' и a_3'. На тој начин ги добиваме бараните трансформациони равенки, имено

$$\begin{aligned} a_1' &= \varepsilon_{11}a_1 + \varepsilon_{12}a_2 + \varepsilon_{13}a_3 \\ a_2' &= \varepsilon_{21}a_1 + \varepsilon_{22}a_2 + \varepsilon_{23}a_3 \\ a_3' &= \varepsilon_{31}a_1 + \varepsilon_{32}a_2 + \varepsilon_{33}a_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Трансформационите равенки (14) *ни овозможуваат да ги пресметаме новите координати на векторите, ако ни се познати старите.*

Коефициентите во овие равенки имаат аналогно геометриско значење како коефициентите во равенките (9). Ако ставиме во (14), на пр., $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$, ги добиваме координатите на векторот e_1 во новата система, имено ε_{11}, ε_{21}, ε_{31}, а тоа се коефициенти пред a_1 во (14). Според тоа, кофициентите пред a_i во (14) се координати од векторот e_i во однос на новата система.

За да ги изразиме новите координати на точките со старите, ќе постапиме на аналоген начин; ќе ја решиме, имено, системата (12) по x_1', x_2', x_3'. Ако таа система ја запишеме во вид

$$
(15) \qquad \begin{aligned}
e_{11}x_1' + e_{21}x_2' + e_{31}x_3' &= x_1 - x_1^0 \\
e_{12}x_1' + e_{22}x_2' + e_{32}x_3' &= x_2 - x_2^0 \\
e_{13}x_1' + e_{23}x_2' + e_{33}x_3' &= x_3 - x_3^0,
\end{aligned}
$$

забележуваме дека таа е идентична со системата (9), ако во последната место a_i' ставиме x_i', а место a_i да ставиме $x_i - x_i^0$. Затоа решението на (15) по x_i' гласи

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \varepsilon_{11}(x_1 - x_1^0) + \varepsilon_{12}(x_2 - x_2^0) + \varepsilon_{13}(x_3 - x_3^0) \\
x_2' &= \varepsilon_{21}(x_1 - x_1^0) + \varepsilon_{22}(x_2 - x_2^0) + \varepsilon_{23}(x_3 - x_3^0) \\
x_3' &= \varepsilon_{31}(x_1 - x_1^0) + \varepsilon_{32}(x_2 - x_2^0) + \varepsilon_{33}(x_3 - x_3^0).
\end{aligned}
$$

Ако ставиме

$$
-(\varepsilon_{i1}x_1^0 + \varepsilon_{i2}x_2^0 + \varepsilon_{i3}x_3^0) = \breve{x}_i^0, \quad (i = 1, 2, 3),
$$

тогаш горните равенки добиваат вид

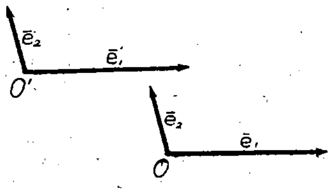
$$
(16) \qquad \begin{aligned}
x_1' &= \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 + \breve{x}_1^0 \\
x_2' &= \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 + \breve{x}_2^0 \\
x_3' &= \varepsilon_{31}x_1 + \varepsilon_{32}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 + \breve{x}_3^0.
\end{aligned}
$$

Равенките (16) се бараните трансформациони равенки за координатите на точките. Тие ни овозможуваат да ги пресметаме новите координати, ако ни се познати старите.

За коефициентите ε_{ik} е речено веќе какво геометриско значење имаат. А коефициентите $\breve{x}_1^0$, $\breve{x}_2^0$, $\breve{x}_3^0$ се координати на стариот координатен почеток во однос на новата система. Навистина, ако во (16) ставиме $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, добиваме $x_1' = \breve{x}_1^0$, $x_2' = \breve{x}_2^0$, $x_3' = \breve{x}_3^0$.

§ 43. Некои специјални типови трансформации на афини координати

1. Паралелно преместување на координатната система. Ако новата система се разликува од старата само по положбата на координатните почетоци, а соодветните координатни вектори да им се еднакви, т. е. ако $e_i = e_i'$, тогаш кажуваме дека новата система настанала со *паралелно преместување* на старата система (сл. 65). Во тој случај е, значи, во рамнината $e_1' = \{1, 0\}$, $e_2' = \{0, 1\}$.



Сл. 65

Ако е $O'(x_1^0, x_2^0)_{(O;\, e_1,\, e_2)}$, го добиваат релациите (11) сега овој прост вид

$$x_1 = x_1' + x_1^0, \quad x_2 = x_2' + x_2^0. \tag{17}$$

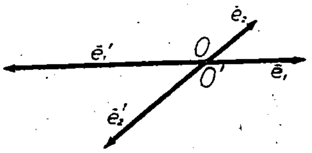
Тоа се трансформационите равенки за координатите на точките при паралелно преместување на координатната система.

За просторот важи, аналогно на (17),

$$x_i = x_i' + x_i^0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

2. Новите координатни вектори се колинеарни со старите. Нека двете координатни системи имаат ист координатен почеток, а соодветните координатни вектори нека се колинеарни. Тогаш постојат, во рамнинскиот случај, такви скалари λ_1, λ_2 да важи $e_1' = \lambda_1 e_1$, $e_2' = \lambda_2 e_2$. Тогаш е

$$e_1' = \lambda_1 e_1 = \lambda_1 \cdot \{1, 0\} = \{\lambda_1, 0\}, \quad e_2' = \lambda_2 e_2 = \lambda_2 \cdot \{0, 1\} = \{0, \lambda_2\}.$$



Сл. 66

Бидејќи $O \equiv O'$, тоа е $x_1^0 = x_2^0 = 0$. Спрема тоа, трансформационите равенки (11) добиваат сега овој облик:

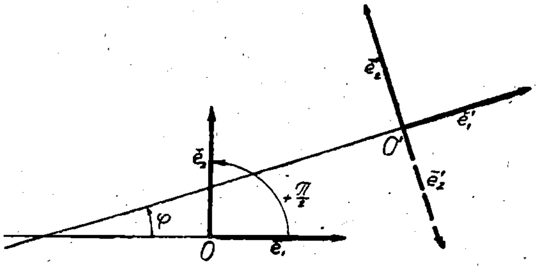
$$x_1 = \lambda_1 x_1', \; x_2 = \lambda_2 x_2'. \tag{18}$$

За просторот ги добиваме на ист начин трансформационите равенки

$$x_i = \lambda_i x_i', \; (i = 1, 2, 3).$$

3. Премин од една правоагла система во рамнината во друга правоагла система во неа. Како старата, така и новата координата система нека бидат правоагли картезични. Рамнината нека е ориентирана така да е $<\!e_1, e_2\!> = +\pi/2$. Нека е зададен ориентираниот агол $\varphi = <\!e_1, e_1'\!>$. Бидејќи е $|e_i| = |e_i'| = 1$, имаме (§ 37, т. 2. пр. 1)

$$e_1' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}_{(e_1, e_2)}.$$



Сл. 67

Ако обете системи се еднакво ориентирани, е $\langle e_1', e_2' \rangle = +\pi/2$, а ако се ориентирани спротивно, е $\langle e_1', e_2' \rangle = -\pi/2$. Во првиот случај е $\langle e_1, e_2' \rangle = \varphi + \pi/2$, а во вториот $\langle e_1, e_2' \rangle = \varphi - \pi/2$. Затоа е, во однос на e_1, e_2:

$$e_2' = \{\cos(\varphi \pm \pi/2), \sin(\varphi \pm \pi/2)\} = \{\mp \sin\varphi, \pm \cos\varphi\}.$$

При тоа треба да се земаат горните или долните знакови според тоа дали системите се еднакво или спротивно ориентирани.

Спрема тоа, *трансформационите равенки за координатите на точките при преминување од една правоагла система во друга гласат:*

$$(19) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1' \cos\varphi \mp x_2' \sin\varphi + x_1^0 \\ x_2 &= x_1' \sin\varphi \pm x_2' \cos\varphi + x_1^0. \end{aligned}$$

Ако ориентациите на системите се еднакви, важат горните знакови, а ако се спротивни — долните.

Трансформацијата на координатите од една правоагла картезична система во друга се вика *ортогонална*.

Ако е $O' \equiv O$, и ако обете системи имаат иста ориентација, тогаш преминувањето кон новата система се вика *ротација* на координатната система.

4. Ортогонална трансформација на координатите во просторот. Нека ни претставуваат сега равенките (12) трансформациони равенки при премин од една правоагла картезична координатна система во друга. Да испитаме некои особини на коефициентите e_{ik}!

За новите координатни вектори важи

$$e_i' = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}\}_{(e_1, e_2, e_3)}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Бидејќи e_i' се единични вектори, тоа (§ 28, т. 5, прим. 2) координатата e_{i1} е косинус на аголот помеѓу e_1 и e_i'; аналогно важи за e_{i2} и e_{i3} Значи

$$(20) \qquad e_{ik} = \cos \langle e_i', e_k \rangle, \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Со тоа добиваме едно геометриско значење за e_{ik}.

За векторот e_k, бидејќи е единичен, важи

$$e_k = \{\cos\langle e_1', e_k \rangle, \cos\langle e_2', e_k \rangle, \cos\langle e_3', e_k \rangle\}_{(e_1', e_2, 'e_3')},$$

односно, поради (20),

$$(21) \qquad e_k = \{e_{1k}, e_{2k}, e_{3k}\}_{(e_1', e_2', e_3')}.$$

Да ја посматраме сега матрицата од координатите на векторите e_i' во однос на e_1, e_2, e_3:

$$(22) \qquad \begin{Vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{Vmatrix}$$

Елементите од првиот, вториот и третиот ред се координати од e_1', e_2', одн. e_3' во однос на старата система; а елементите од првата, втората и третата колона се координати од e_1, e_2, одн. e_3 во однос на новата система.

Оттука следуваат други особини на e_{ik}. Бидејќи координатните вектори e_1, e_2, e_3, како и e_1', e_2', e_3', се заемно нормални, тоа скаларните производи $e_i \cdot e_k$ и $e_i' \cdot e_k'$ се 1 за $i = k$, а се еднакви на нула за $i \neq k$. Тоа ќе го запишеме пократко, ако избереме еден симбол, дефиниран со

$$\delta_{ik} = 1 \text{ за } i = k; \quad \delta_{ik} = 0 \text{ за } i \neq k; \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Имаме значи

$$e_i \cdot e_k = \delta_{ik}, \quad e_i' \cdot e_k' = \delta_{ik}.$$

Одавде следуваат две групи од по 9 равенки:

$$\begin{aligned} &(23) \qquad e_{i1} \cdot e_{k1} + e_{i2} \cdot e_{k2} + e_{i3} \cdot e_{k3} = \delta_{ik} \\ &(24) \qquad e_{1i} \cdot e_{1k} + e_{2i} \cdot e_{2k} + e_{3i} \cdot e_{3k} = \delta_{ik} \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Коефициентите e_{ik} ги избравме така да важеше (23) — ги избравме координатите на нормалните единични вектори e_i'. Но потоа покажавме дека важи (21), а спрема тоа и (24). Равенките (24) се, значи, последица од (23). Се разбира, важи и обратно.

Една матрица, при која важи едната од двете групи равенки (23) и (24) (и спрема тоа и двете), се вика *ортогонална*.

Секоја трансформација од видот (12), *при која матрицата* (22) *е ортогонална, може да се толкува како една ортогонална трансформација.* Навистина, елементите од хоризонталите на матрицата можат да се толкуваат како правоагли координати на три заемно нормални единични вектори — новите координатни вектори.

Да ја пресметаме сега детерминантата, формирана од елементите на (22). Означувајќи ја со e, добиваме (§ 22, (6))

$$(e_1', e_2', e_3') = e \cdot (e_1, e_2, e_3).$$

Спрема тоа е $e = +1$ или $e = -1$, според тоа дали тројките e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' имаат еднакви или спротивни ориентации.

Пример. Да се покаже дека секој елемент од една ортогонална матрица (22) е еднаков на својот алгебарски комплемент со ист или обратен знак.

Решение. Ја формираме матрицата

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix},$$

каде што е $\varepsilon_{ik} = E_{ik} : e$. Елементите од k-тата колона на оваа матрица се, спрема § 42, токму координатите од e_k во однос на e_1', e_2', e_3'. А такво значење имаат и елементите од k-тата колона во (22). Спрема тоа е $e_{ik} = \varepsilon_{ik}$. Но бидејќи е $e = (e_1', e_2', e_3') = \pm 1$, тоа е $\varepsilon_{ik} = E_{ik} : e = \pm E_{ik}$, и затоа

$$e_{ik} = \pm E_{ik}.$$

Горниот знак важи, ако тројките e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' се еднакво ориентирани, а долниот — ако тие се спротивно ориентирани.

ЗАДАЧИ

1. Пренеси ја паралелно рамнинаската афина система така што точката $(a + b, a - b)$ во новата система да има координати (a, b)!

2. Пренеси ја паралелно просторната афина система така што точката (a_1, a_2, a_3) во новата система да има координати (b_1, b_2, b_3).

3. Во рамнината се дадени точките A (3, — 5) и B (7, 4). Промени ги должините и евентуално смеровите на координатните вектори така што точката A во новата система да има координати (— 1, 1). Кои координати има во оваа система точката B?

4. Старите и новите координати на точки во рамнината се врзани со равенките

$$x_1' = 5x_1 - 6x_2 + 8, \quad x_2' = -2x_1 + 4x_2.$$

Изрази ги e_1, e_2 со e_1', e_2', и обратно. Нацртај ги e_1'; e'_2, ако се зададени e_1, e_2.

5. Дадена е системата $(O;\, e_1, e_2)$. Избираме нова система $(O';\, e_1', e_2')$, зададена со $O'\ (3, 2)_{(O;\, e_1, e_2)}$, $e_1' = \{-3, 5\}_{(e_1, e_2)}$, $e_2' = \{2, 4\}_{(e_1, e_2)}$. Цртеж! Напиши ги трансформационите равенки!

6. Темињата на еден триаголник се A (5, 3), B (— 4, 2) и C (— 3, — 1). Кои координати има координатниот почеток во однос на системата $(A;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

7. Во просторот се зададени точките A (— 3, 2, 1), B (5,4, — 9), C (0, 3, 2) и D (1, — 1, 2). Кои координати има точката P (1, 1, 1) во однос на системата $(D;\, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$?

8. Една правоагла система во рамнината се завртува за + 45° околу координатниот почеток. Напиши ги трансформационите равенки на координатите на точките!

9. Дадена е равенка на правата $x_1/a_1 + x_2/a_2 - 1 = 0$. Во која система равенката на ова права гласи $x_1' + x_2' - 1 = 0$?

10. Координатите x_1, x_2 од една точка ја задоволуваат равенката $2x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_1 + 12x_2 + 24 = 0$. Која равенка ја задоволуваат нејзините координати, ако системата ја преместиме паралелно така да новиот координатен почеток биде (3, — 2)?

11. Почетокот на една просторна координатна система не се менува, а координатните вектори треба да се менат така што точките (5, 3, 2), (8 — 2, 5) и (1, 1, 1) во новата система да имаат по ред координати (0, 1, 1), (1, 0, 1) и (1, 1, 0). Напиши ги трансформационите равенки!

12. Координатите x_1, x_2 на точката M се врзани со релацијата $5x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0$. Ја извршуваме трансформацијата на координатите: $x_1' = x_1 + 2x_2 + 1$, $x_2' = x_1 - x_2$. Да се најде релацијата што ќе ја задоволуваат новите координати x_1', x_2' на точката M!

13. Координатите x_1, x_2 на точките M ја задоволуваат релацијата $8x_1^2 + 12x_1x_2 - 8x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 + 3 = 0$. Премести ја паралелно координатната система така да во релацијата што ќе ја задоволуваат новите координати x_1', x_2' на точките M нема да ги има членовите со x_1' и x_2'!

14. Правоаглите координати x_1, x_2 на точките M ја задоволуваат релацијата $x_1 . x_2 = 2$. Која релација ќе ја задоволуваат координатите од M во системата која од старата се добива со ротација за агол 45° околу координатниот почеток?

15. Покажи дека изразот $x_1^2 + x_2^2$ не си ја менува својата вредност, ако над x_1, x_2 извршиме која да је отрогонална трансформација! Аналогно прашање за изразот $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$!

16. Покажи: Ако во рамнината се зададени равенките на две непаралелни прави $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$, $B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0$, тогаш трансформационите равенки $x_1' = \rho_1 \cdot (A_1x_1 + A_2x_2 + A_3)$, $x_2' = \rho_2 \cdot (B_1x_1 + B_2x_2 + B_3)$, каде што $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ се произволни, претставуваат премин кон една нова афина система, при која дадените прави се координатни оски.

17. Определи ги трансформационите равенки за рамнинските координати на точки, ако новите координатни оски се правите $2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$, $4x_1 - 5x_2 - 3 = 0$, а точката (— 5, 2) треба во новата система да има координати (1, 1).

18. Рамнините $x_1 + x_2 + 1 = 0$, $x_2 + x_3 + 1 = 0$, $x_3 + x_1 = 0$ се координатните рамнини на една нова координатна система, во која стариот координатен почеток треба да има координати (4, — 3, 5). Напиши ги трансформационите равенки!

II Афини пресликувања

§ 44. Друго толкување на трансформационите равенки

Во § 42 покажавме дека равенките од обликот

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31} \qquad (1)$$
$$x_2' = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32},$$

каде што е

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (2)$$

можат да се толкуваат како трансформациони равенки на координатите на точките при премин од една афина рамнинска координатна система во друга. Но на равенките (1) може да им се даде и едно друго важно геометриско толкување.

Нека ни се зададени две рамнини π и π'. Во секоја од нив избираме по една афина координатна система; во првата $(O; e_1, e_2)$, а во втората $(O'; e_1', e_2')$. Ако двојките броеви x_1, x_2 и x_1', x_2', врзани со равенките (1), ги толкуваме геометриски како координати на точките во рамнината π одн. π' во однос на избраните координатни системи, тогаш кажуваме дека равенките (1) ни определуваат едно *пресликување* на точките од рамнината π во точките од рамнината π'. Ако, имено, во π избереме која да е точка $P(x_1^0, x_2^0)$, тогаш равенките (1) определуваат во π' една точка $P'(x_1^{0'}, x_2^{0'})$ чии координати $x_1^{0'}, x_2^{0'}$ се еднакви на оние вредности од x_1', x_2' што се добиваат од (1), ако во нив ставиме $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$. Кажуваме дека на точката P ѝ *одговара* или *кореспондира* точката P'. Ако на секоја точка P од дадената рамнина π ѝ кореспондира на некој начин, по некое правило, една точка P' на некоја друга рамнина π', велиме дека со тоа е определено едно *пресликување* на точките P од π во точките P' во π'. Точката P се вика *оригинална*, а нејзе кореспондентната точка P' — нејзина *слика*. Специјалното пресликување што го определуваат на горе опишаниот начин равенките (1) се вика *афино пресликување*.

Равенките (1) определуваат едно пресликување, наречено пак афино, и тогаш кога условот (2) не е исполнет. Но ние во иднина под терминот „афино" пресликување ќе ги подразбираме само оние афини пресликувања (1) при кои важи (2).

Афините пресликувања, определени со (1) и (2), имаат таа особина да не само на секоја точка P од π ѝ кореспондира една точка P' од π', туку секоја точка P' од π' е слика на само една точка P од π. Ако се зададени, имено, координатите $x_1^{0'}, x_2^{0'}$ на една точка P', тогаш системата (1), во која е ставено $x_1' = x_1^{0'}$, $x_2' = x_2^{0'}$, има едно и само едно решение по x_1, x_2, што го определува единствениот оригинал P од P'. Поради оваа особина нашето пресликување се вика *обратно-еднозначно*. Спрема тоа:

Равенките (1), *заедно со условот* (2), *определуваат меѓу точките* $P(x_1, x_2)$ *од рамнината* π *и точките* $P'(x_1', x_2')$ *од рамнината* π' *едно обратно-еднозначно пресликување, наречено афино, ако* x_1, x_2 *и* x_1', x_2' *ги толкуваме како координати на точките во однос на некои избрани афини координатни системи во* π *одн.* π'.

Рамнините π и π' можат да имаат во просторот произволна заемна положба. Тие можат и да совпаднат, т. е. $\pi \equiv \pi'$. Во тој случај кажуваме дека имаме пресликување на рамнината π сама во себе. При тоа системите $(O; e_1, e_2)$ и $(O'; e_1', e_2')$ можат да бидат различни или не.

§ 45. Особини на афини пресликувања меѓу две рамнини

За да ги иследиме особините на афините пресликувања, ќе воведеме во рамнината π место координати x_i нови координати x_i^*, определени со

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31} \tag{3}$$
$$x_2^* = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{33}.$$

Равенките на афиното пресликување, дефинирано со (1) и (2), гласат сега

$$x_1^* = x_1', \quad x_2^* = x_2'. \tag{4}$$

Покажавме, значи:

Во две рамнини, меѓу точките на кои е определено какво да е афино пресликување, можат секогаш да се изберат такви афини координатни системи што хомологните координати на кореспондентните точки да бидат еднакви, т. е. такви да трансформационите равенки добијат вид (4).

Равенките (4) претставуваат, значи, најопшт вид афино пресликување.

Дадени нека ни се сега две точки X и Y во π и нивните слики X' и Y' во π' при пресликувањето (4). Бидејќи хомологните координати на X и X', како и на Y и Y', во избраните координатни системи се еднакви, тоа и *хомологните координати на векторите* $\overrightarrow{XY}$ *и* $\overrightarrow{X'Y'}$ *се еднакви.*

Во рамнината π избираме четири точки A, B, C, D за кои важи $\overrightarrow{CD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, каде λ е некој скалар, и нивните слики A', B', C', D' во π' — при пресликувањето (4). Ако по однос на избраната система во π важи $\overrightarrow{AB} = \{a_1, a_2\}$, тогаш е $\overrightarrow{CD} = \lambda \cdot \{a_1, a_2\} = \{\lambda a_1, \lambda a_2\}$. За векторите $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ важи по однос на избраната система во π' дека $\overrightarrow{A'B'} = \{a_1, a_2\}$, $\overrightarrow{C'D'} = \{\lambda a_1, \lambda a_2\} = \lambda \cdot \{a_1, a_2\} = \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}$. Важи, значи:

[1] *Ако на точките A, B, C, D при едно афино пресликување им одговараат по ред точките A', B', C', D', тогаш релацијата $\overrightarrow{CD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ ја има за последица релацијата $\overrightarrow{C'D'} = \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}$.*

Одавде следат други важни особини на афини пресликувања.

Да разгледаме прво во што се пресликува една отсечка AB. За точките C на таа отсечка важи $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Но и за сликите A', B', C' од A, B, C, при било кое афино пресликување, важи, според [1], дека $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Значи C' лежи на отсечката $A'B'$. И обратно, секоја точка C' од отсечката $A'B'$ е слика, при избраното пресликување, на една точка C од AB. Значи:

Афина слика на отсечка е отсечка.

Од горното следува дека векторот $\overrightarrow{AB}$ се пресликува во векторот $\overrightarrow{A'B'}$. Значи, пресликувањето (4) определува и едно пресликување на векторите помеѓу рамнините π и π'. Имаме:

Афиното пресликување (4) го пресликува секој вектор $\mathbf{a} = \{a_1^*, a_2^*\}$ од рамнината π во оној вектор $\mathbf{a}' = \{a_1', a_2'\}$ од рамнината π' за кој важи

(4') $$a_1^* = a_1', \quad a_2^* = a_2'.$$

Бидејќи за два колинеарни вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и нивните слики $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{C'D'}$ следува од [1] дека $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{C'D'}$, тоа важи:

[2] *Два колинеарни вектора прејдуваат при секое афино пресликување пак во два колинеарни вектора, а при тоа нивниот однос не се менува.*

Одавде следува дека точките од една права се пресликуваат, при секое афино пресликување, во точки кои лежат пак на некоја права. Секоја точка P од некоја права p се пресликува во една точка на некоја права p', а секоја точка P' од p' е слика на некоја точка од p. Важи, значи:

[3] *Афина слика на права е права. Паралелни прави се пресликуваат во паралелни прави.*

Да испитаме сега уште како се менува површината на еден полигон од рамнината π, ако над неа го извршиме пресликувањето (4). Бидејќи секој полигон може да се исече на триаголници, доволно ќе е да се задржиме на триаголникот. На две страни на еден триаголник нека бидат нанесени векторите $\mathbf{a} = \{a_1^*, a_2^*\}$, $\mathbf{b} = \{b_1^*, b_2^*\}$. Ако координатните вектори на системата x_i^* ги означиме со $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, а координатните вектори при системата x_i' со $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, тоа за површината p на триаголникот и површината p' на пресликаниот триаголник важи

$$p = \frac{(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1^* & a_2^* \\ b_1^* & b_2^* \end{vmatrix}, \qquad p' = \frac{(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2' \end{vmatrix}.$$

Оттука следува, поради $a_i^* = a_i'$, $b_i^* = b_i'$:

(5) $$\frac{p'}{p} = \frac{(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')}{(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)}.$$

Изразот од десната страна не зависи од изборот на триаголникот. Затоа, ако ги бележиме со P и p површините на кои да е два триаголници во π, а со P' и p' површините на нивните афини слики во π', имаме

$$P'/P = p'/p, \quad \text{или} \quad P/p = P'/p'.$$

Со тоа покажавме дека:

[4] *Односот на површините на две фигури од една рамнина останува при секое афино пресликување на рамнината неизменет.*

Ако имаме едно афино пресликување на една рамнина сама во себе, и ако x_i и x_i' се однесуваат до една иста координатна система, тогаш следува од (3) дека

$$e_1' = e_1 = \{a_{11}, a_{12}\}_{(e_1^*,\ e_2^*)},\ e_2' = e_2 = \{a_{21}, a_{22}\}_{(e_1^*\ e_2^*)}.$$

Затоа е

$$(e_1', e_2') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot (e_1^*, e_2^*),$$

и релацијата (5) добива сега овој вид

$$p' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot p. \tag{6}$$

Формулата (6) ни ја определува површината p' на фигурата во која се пресликува една фигура со површина p при афиното пресликување (1) на рамнината сама во себе, ако при тоа x_i и x_i' се однесуваат на една иста координатна система.

Од (6) следува дека при горното пресликување ориентацијата на еден полигон останува иста или се менува според тоа дали детерминантата (2) е позитивна или негативна.

На крајот ќе испитаме уште, со колку точки е определено едно афино пресликување меѓу две рамнини, т. е. за колку точки треба да бидат зададени нивните слики, па да пресликувањето биде еднозначно определено. Ќе покажеме дека:

[5] *Едно афино пресликување меѓу две рамнини е определено со три неколинеарни точки,* т. е. *постои едно и само едно афино пресликување кое три зададени неколинеарни точки од една рамнина ги пресликува во три зададени неколинеарни точки од една друга рамнина.*

Во рамнината π избираме кои да е три неколинеарни точки A, B, C, а истотака и во рамнината π' три произволни неколинеарни тоаки A', B', C'. Ќе покажеме дека постои едно и само едно афино пресликување меѓу π и π', при кое на точките A, B, C им кореспондираат по ред точките A', B', C'.

Во π ја избираме системата $(O; e_1, e_2)$, а во π' системата $(O'; e_1', e_2')$, каде што е $C \equiv O$, $C' \equiv O'$, $e_1 = \overrightarrow{CA}$, $e_2 = \overrightarrow{CB}$, $e_1' = \overrightarrow{C'A'}$, $e_2' = \overrightarrow{C'B'}$.

Координатите на точките од π во однос на избраната система ќе ги бележиме со x_1, x_2, а координатите на точките од π' во однос на избраната система со x_1', x_2'. Тогаш равенките

$$(7) \qquad x_1' = x_1, \; x_2' = x_2$$

определуваат едно афино пресликување меѓу π и π'. При ова пресликување им одговараат на точките A, B, C токму точките A', B' одн. C'. Навистина, точките C и C' имаат во избраните системи еднакви координати (0, 0), точките B и B' еднакви координати (0, 1), а точките A и A' еднакви координати (1, 0). Со тоа е покажано дека со три неколинеарни точки е определено барем едно афино пресликување.

А сега ќе покажеме дека добиеното пресликување е единствено пресликување кое A, B, C ги пресликa по ред во A', B', C'. Ако освен туку што конструираното пресликување постои и некое друго, тогаш тоа ќе се изразува аналитички, во однос на веќе избраните координатни системи, со равенки од облик (1). Но бидејќи точките од π со координати (0, 0), (0, 1) и (1, 0) треба да прејдат во оние точки од π' кои имаат исти хомологни координати, т. е. ставувајќи во (1) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, треба да се добие $x_1' = 0$, $x_2' = 0$ итн., тоа за коефициентите од (1) следува дека

$$a_{31} = a_{32} = 0; \; a_{11} = 1, \; a_{12} = 0; \; a_{21} = 0, \; a_{22} = 1.$$

По тој начин (1) совпаднува со (7). Со тоа горната теорема е докажана.

§ 46. Примери на афини пресликување меѓу две рамнини

1. Хомотетично пресликување. Ќе го испитаме пресликувањето на една рамнина сама во себе, при кое за оригиналот P и сликата P' важи $\overrightarrow{OP'} : \overrightarrow{OP} = k$, каде што O е една произволна фиксна точка од рамнината, а k една зададена константа, различна од нула.

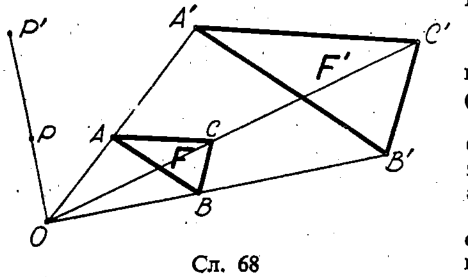
Го избираме O за почеток на која да е координатна система во рамнината. Во однос на неа нека е $P(x_1, x_2)$, $P'(x_1', x_2')$. Затоа е $\overrightarrow{OP} = \{x_1, x_2\}$ и $\overrightarrow{OP'} = \{x_1', x_2'\}$. Имаме, значи, поради $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$:

$$\{x_1', x_2'\} = k \cdot \{x_1, x_2\},$$

или

$$(8) \qquad x_1' = kx_1, \; x_2' = kx_2.$$

Овие равенки се од облик (1), затоа нашето пресликувањето е афино.



Сл. 68

Да испитаме некои од оние особини на ова специјално афино пресликување што ги немаат сите афини пресликувања. Нека две точки A, B имаат свои слики во A' и B'. Тогаш е

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA} = k \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Пресликаниот вектор $\overrightarrow{A'B'}$ е, значи, колинеарен со оригиналниот вектор $\overrightarrow{AB}$, а нивниот однос е k. Секој полигон **F** при ова пресликување се пресликува, значи, во еден полигон **F**$'$ чии страни се паралелни и пропорционални со соодветните страни на оригиналниот полигон. Освен тоа, секој пар кореспондентни точки на нив е колинеарен со фиксната точка O. За вакви полигони **F** и **F**$'$ кажуваме дека се *слични и слично йоложени* или дека се *хомойешични*. Вака ќе ја наречеме и секоја друга фигура **F** во рамнината и нејзината слика **F**$'$ што се добива при пресликувањето (8). Затоа ова пресликување го викаме *хомойешично*. O е *ценйар*, а k — *однос на хомойешијайа*.

Каква е ориентацијата на две хомотетични фигури во зависност од знакот на односот k?

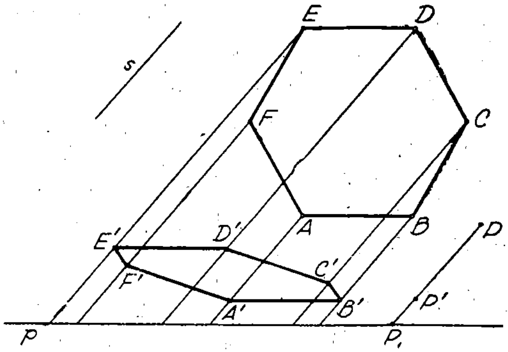
2. Стегање. Во една рамнина нека е дадена една права p и еден правец s што не е паралелен со p. На секоја точка P од рамнината нека ѝ кореспондира онаа точка P' за која важи $\overrightarrow{P_1P'} : \overrightarrow{P_1P} = k$, каде што PP_1 е паралелно со s, P_1 пресек на PP' со p, а k една зададена константа, различна од нула.

Избираме една система (O; e_1, e_2), таква да O и e_1 лежат на p, а e_2 да има правец на s. Во однос на оваа система нека е P (x_1, x_2), P' (x_1', x_2'). Тогаш е $\overrightarrow{OP_1} = e_1x_1 = e_1x_1'$ $\overrightarrow{P_1P} = e_2x_2$, $\overrightarrow{P_1P'} = e_2x_2'$. Оттука следува, поради $\overrightarrow{P_1P'} = k\overrightarrow{P_1P}$,

$$(9) \quad x_1' = x_1, \; x_2' = kx_2.$$

Ова пресликување, наречено *сйегање*, е значи афино, зашто трансформационите равенки (9) се од облик (1).

Прашања. Каква положба во однос на p имаат две кореспондентни фигури во однос на знакот од k? Каква е нивната ориентација? Како се пресликуваат отсечките што се паралелни со p? На сл. 69 е $k = 1/4$.



Сл. 69

3. Конгруентно пресликување. Сега ќе го разгледаме она специјално афино пресликување (1) при кое матрицата

$$(10) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

е ортогонална (забел. § 43, т. 4), а координатните системи во π и π', на кои се однесуваат x_i и x_i', се правоагли картезични. Воведувајќи во рамнината π нови координати x_i^*, дефинирани со (3), ги добиваме за нашето пресликување равенките (4) одн. (4'). И новите координати x_i^* се однесуваат, поради ортогоналноста на (10), на една правоагла картезична система.

Нека е $\boldsymbol{a} = \{a_1^*, a_2^*\}$ кој да е вектор во π. Тој се пресликува во еден вектор $\boldsymbol{a}' = \{a_1', a_2'\}$ во π'. Поради $a_i^* = a_i'$ имаме

$$a_1^{*2} + a_2^{*2} = a_1'^2 + a_2'^2,$$

што значи дека секој вектор се пресликува, при изучуваното пресликување, во еден вектор *со иста должина*. Истото важи, се разбира, и за отсечките. Пресликувањето, при кое секоја отсечка се пресликува во една отсечка со иста должина, се вика *конгруентно* или *изометрично пресликување*. Одавде, по правилата за складноста на триаголниците, следува, а наеднаш се проверува и аналитички, дека при конгруентното пресликување секоја оригинална фигура е складна или конгруентна со својата слика.

Нека е зададено сега, обратно, едно конгруентно пресликување помеѓу π и π'. Во π избираме три такви точки A, B, C да е $\overline{AC}=\overline{BC}=1$, $<\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}>=\pi/2$. Тогаш важи за нивните слики A', B', C' аналогно, имено $\overline{A'C'}=\overline{B'C'}=1$, $<\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}>==\pi/2$. Во однос на системите (C; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$) одн. (C'; $\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{C'B'}$) добиваат, на основа § 45, т. 8, трансформационите равенки облик (4). Ако од правоаглата система x_i^* преjдеме во која да е друга правоагла система x_i, ќе бидат координатите x_i и x_i' на кореспондентните точки врзани со равенките од видот (1) со ортогоналната детерминанта (2). Значи:

Равенките (1) *определуваат едно конгруентно пресликување меѓу две рамнини, ако матрицата* (2) *е ортогонална, а координатните системи на кои се однесуваат* x_i *и* x_i' *се правоагли; а и секое ортогонално пресликување се претставува аналитички на овој начин.*

Ако рамнините π и π', меѓу кои е определено едно конгруентно пресликување, совпаднуваат, т. е. $\pi\equiv\pi'$, тогаш тоа пресликување го викаме *движење* во рамнината π. При тоа кај нас овој термин не означува исто што во кинематиката. Во геометријата под *движење* подразбираме само процес при кој е определена само почетната и крајната положба на секоја точка од рамнината.

Ако при движењето една точка останува фиксна, движењето го викаме *ротација* или *вртење*. Равенките (*), § 37, се равенки на ротацијата околу координатниот почеток за агол φ.

Разликуваме две врсти движења, оние при кои ориентацијата на фигурите не се менува, и оние при кои таа се менува. Првите ги викаме *движења од прва врста*, а вторите *движења од втора врста*. Ако движението е дадено со равенките (1), при кои x_i и x_i' се однесуваат до една иста правоагла система, тогаш тоа движење е, со оглед на § 45, т. 7, од прва или втора врста спрема тоа дали детерминантата на ортогоналната матрица (10) е позитивна или негативна.

ПРИМЕНА

Афините пресликувања можат да се применат за изведување на разни теореми, ако се познати извесни специјални случаи на тие теореми. Ќе го илустрираме тоа со два примери.

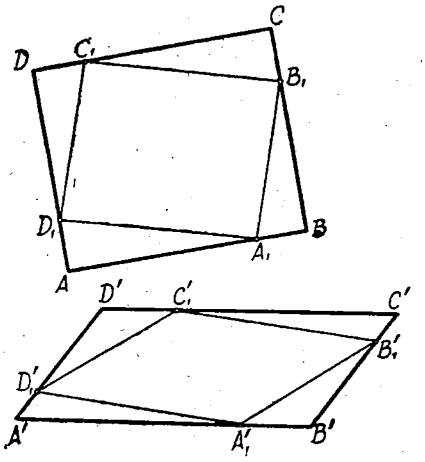
1. Сметајќи ја како позната теоремата дека во рамностраниот триаголник тежишните линии се сечат во една точка која ги дели во односот 1 : 2, да се докаже аналогна теорема за произволниот триаголник.

Решение. Нека бидат A, B, C темињата на еден рамностран триаголник во π, а AA_1, BB_1 и CC_1 неговите тежишни линии, кои се сечат во T. Ако во некоја рамнина π' избереме каков да е триаголник A', B', C', тогаш постои, спрема § 45, [5], едно афино пресликување меѓу π и π', при кое $\triangle ABC$ се пресликува во $\triangle A'B'C'$. При тоа, согласно § 45, [2], средините A_1, B_1, C_1 од страните BC, CA и AB преjдуваат во средините A_1', B_1' одн. C_1' на страните $B'C'$, $C'A'$ одн. $A'B'$. Тоа значи дека тежишните линии на $\triangle ABC$ преjдуваат во соодветни тежишни линии на $\triangle A'B'C'$. Тежишните линии се сечат во оригиналната фигура во една точка T. Затоа се сечат и нивните слики во една точка T'. Со тоа е покажано дека тежишните линии во произволно избраниот триаголник $A'B'C'$ се сечат во една точка. А бидејќи односот $\overline{A_1T} : \overline{TA} = 1 : 2$ на паралелните отсечки A_1T

и TA при пресликувањето (§ 45, [2]) не се менува, тоа е и $\overline{A_1'T'} : \overline{T'A'} = 1 : 2$. Со тоа теоремата е докажана.

2. Да се пресмета површината на оној четириаголник чии што темиња ги разделуваат страните од еден паралелограм, чија површина е P, во однос $m : n$!

Решение. Во некоја рамнина π избираме еден квадрат $ABCD$ чија страна нека е еднаква на a. На неговите страни ги избираме точките A_1, B_1, C_1, D_1 така да е $\overline{AA_1} : \overline{A_1B} = \overline{BB_1} : \overline{B_1C} = \overline{CC_1} : \overline{C_1D} = \overline{DD_1} : \overline{D_1A} = m : n$. Ако во рамнината π' е зададен каков да е паралелограм $A'B'C'D'$, постои едно такво афино пресликување меѓу π и π' кое точките A, B, C ги пресликува во A', B' одн. C'. А бидејќи паралелни прави се пресликуваат пак во паралелни прави, тоа правите AD и DC се пресликуваат во правите $A'D'$ и $D'C'$, паралелни на $B'C'$ одн. $A'B'$. Квадратот се пресликува, значи, во нашиот паралелограм. Од § 45, [2] следува дека точките A_1, B_1, C_1, D_1 се пресликуваат во точките A_1', B_1', C_1' одн. D_1' кои страните на паралелограмот ги делат во ист однос $m : n$. Четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$, за кој лесно се покажува дека е квадрат, се пресликува, спрема тоа, во четириаголникот $A_1'B_1'C_1'D_1'$, кој е, поради § 45, [3], паралелограм. Од *Питагоровата теорема* следува



Сл. 70

$$\overline{A_1D_1}^2 = \overline{AA_1}^2 + \overline{AD_1}^2 = \left(\frac{m}{m+n} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{n}{m+n} \cdot a\right)^2 = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} \cdot a^2.$$

Односот на површините на квадратите $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ е еднаков на односот на површините p и P на паралелограмите $A_1'B_1'C_1'D_1'$ и $A'B'C'D'$. Значи

$$\frac{p}{P} = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2},$$

од каде ја добиваме бараната формула

$$p = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} \cdot P.$$

§ 47. Паралелно проицирање

Дадени нека ни се две непаралелни рамнини π и π'. Точките од π ги проицираме паралелно на π'. Една права која е паралелна со правецот на проицирањето, а не минува низ пресекот p на π и π', нека ја сече π во E, а π' во E'. На p положуваме еден вектор e_1 со почеток во некоја точка O. Ставувајќи $e_2 = \overrightarrow{OE}$, $e_2' = \overrightarrow{OE'}$ ја избираме на π координатната система $(O;\ e_1,\ e_2)$, а на π' системата

$(O;\ e_1', e_2')$, каде што е $e_1 = e_1'$. Освен тоа во просторот ја избираме системата $(O;\ e_1, e_2', e_2)$. За која да е точка P од π важи

$$P\,(x_1, x_2)_{(O;\ e_1,\ e_2)} \equiv P\,(x_1, 0, x_2)_{(O;\ e_1, e_2', e_2)},$$

а за која да е точка P' од π'

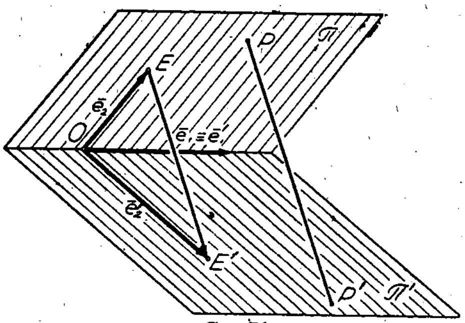
$$P'\,(x_1', x_2')_{(O; e_1', e_2')} \equiv P'\,(x_1', x_2', 0)_{(O;\ e_1, e_2', e_2)}.$$

Ако P' е проекцијата од P, треба да е $PP' \parallel EE'$, значи векторот $\overrightarrow{PP'} = \{x_1' - x_1,\ x_2', -x_2\}$ треба да е колинеарен со векторот $\overrightarrow{EE'} = \{0, 1, -1\}$. За тоа е потребно и доволно да биде

$$(x_1' - x_1) : x_2' : -x_2 = 0 : 1 : -1,$$

од каде следува

$$x_1 = x_1',\ x_2 = x_2'.$$



Сл. 71

Точките P и P' имаат во однос на $(O; e_1, e_2)$ и $(O; e_1', e_2')$ еднакви координати. Спрема тоа, пресликувањето, при кое на секоја точка P ѝ кореспондира нејзината проекција P', е афино.

Истото важи, ако π и π' се паралелни. Навистина, ако x_1x_2-рамнината совпаднува со π, а x_3-оската има правец на проицирањето, тогаш кореспондентните точки ги имаат првите две координати соодветно еднакви. А овие две координати можеме да ги сметаме како рамнински афини координати на кореспондентните точки во рамнината π одн. π', со што тврдението е докажано. Покажавме, спрема тоа, дека:

Пресликувањето што се створува при паралелно проицирање на точките од една рамнина во точките на друга рамнина е афино пресликување.

§ 48. Афини пресликувања во просторот.

Иследуванијата од претходните §§, за случај да рамнините π и π' се совпаднати, можат лесно да се обопштат за простор. Равенките

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41} \\ x_2' &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42} \\ x_3' &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}, \end{aligned} \tag{14}$$

каде што е

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

можат да се толкуваат како едно *обратно-еднозначно пресликување на просторот сам во себе*, т. е. како пресликување при кое на секоја точка од просторот одговара една точка, која, од друга страна, е кореспондент само на една точка. Координатите x_1, x_2, x_3 на *оригиналната точка* и координатите x_1', x_2', x_3' на нејзината *слика* можат да се однесуваат при тоа на една иста, или на две различни афини системи. Тоа пресликување се вика *афино* и има наполно аналогни особини како афините пресликувања на една рамнина сама во себе. Така, на пр., секоја рамнина се пресликува во рамнина; паралелни рамнини се пресликуваат во паралелни рамнини; две паралелни отсечки прејдуваат во паралелни отсечки со ист однос; односот на просторнините на два полиедра (и општо, тела) при пресликувањето не се изменува.

Ако матрицата од чии елементи е формирана детерминантата во (12) е ортогонална, дефинираат (11) едно специјално афино пресликување. Ако, освен тоа, координатните системи на кои се однесуваат координатите x_i и x_i' на точките се *правоагли картезични*, тогаш при тоа пресликување должините на отсечките се запазуваат, а спрема тоа и аглите. Вакво пресликување го викаме *изометрично* или *конгруентно*. Се покажува дека секое изометрично пресликување се претставува аналитички на овој начин. Сите докази се наполно аналогни на оние што ги изведовме во рамнинскиот случај.

ЗАДАЧИ

1. Да се напишат равенките на она афино пресликување при кое точките $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-1, 1)$ се пресликуваат по ред во точките $A'(0, 0)$, $B'(-2, 0)$ и $C'(0, -3)$! Потоа да се провери дека тежиштето на $\triangle ABC$ се пресликува во тежиштето на $\triangle A'B'C'$.

2. Определи го она афино пресликување на просторот при кое темињата $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ и $D(0, 0, 0)$ на еден тетраедар се пресликуваат во тежиштата на неговите страни! Испитај дали тежиштето на системата точки A, B, C и D се пресликува при ова пресликување во тежиштето на системата кореспондентни точки A', B', C' и D'!

3. Во што прејдува при афините пресликувања една низа еквидистантни точки, т. е. такви точки A, B, C, D,... да важи $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \ldots$?

4. Определи ги равенките на она афино пресликување на една рамнина сама во себе при кое еквидистантните точки $(2 + 2t', 3 + t')$, $t' = 0, 1, 2, 3, \ldots$ прејдуваат во точките $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3), \ldots$, а еквидистантните точки $(2 + t'', 3 + 4t'')$, $t'' = 1, 2, 3, \ldots$ во точките $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0), \ldots$

5. При едно афино пресликување точките $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ се пресликуваат по ред во точките $(2, 3)$, $(-3, -4)$, $(-4, 2)$. Колкава е површината на парале-

лограмот во кој се пресликува паралелограмот, определен со векторите $\{-5, 1\}$ и $\{6, -2\}$? Координатите се однесуваат до иста система $(O; e_1, e_2)$, а $(e_1, e_2) = +1$.

6. Да се напишат равенките на онаа хомотетија чиј центар е (3, 5), а односот на хомотетијата е 3!

7. При една хомотетија со однос —2 се пресликува точката (8, 7) во точката (—5, 4). Напиши ги равенките на хомотетијата!

8. При едно стегање, чија оска е x_1-оската на координатната система, точката (2, 3) се пресликува во точката (2, —1). Во која точка се пресликува точката (8, — 6)?

9. Испитај го пресликувањето $x_1' = x_1 + \lambda x_2, x_2' = x_2$, каде што λ е една произволна константа! Какви се површините на кореспондентните фигури?

§ 49. Група пресликувања и класификација на геометриските дисциплини

1. Поим за група пресликувања. Сега ќе го разгледаме множеството од сите можни пресликувања на една рамнина π сама во себе. Таа целокупност ќе ја означиме кратко со S.

Прво ќе забележиме дека меѓу пресликувањата од S има и такво пресликување кое секоја точка од рамнината ја остава на место, т. е. такво при кое оригиналот совпаднува со сликата. Ова пресликување го викаме *идентично пресликување.* Значи:

[1] *Во* S *постои идентично пресликување.*

Нека е σ кое да е пресликување од S. Јасно е дека во S постои и она пресликување кое произволно избраната точка P од π ја пресликува во онаа точка P' од π, која σ ја пресликува во P. Оваа пресликување се вика *обратно* на пресликувањето σ. Спрема тоа:

[2] *За секое пресликување од* S *постои и обратно пресликување.*

За едно пресликување на рамнината π сама во себе, кое се добива на тој начин што над точките од π извршуваме прво едно пресликување σ_1, а над така добиените точки едно друго пресликување σ_2, се вика *составено од* σ_1 *и* σ_2 (а не од σ_2 и σ_1!), или дека е *производ од пресликувањата* σ_1 *и* σ_2.

Ќе покажеме дека пресликувањето што е составено од две афини пресликувања σ_1 и σ_2 е афино. При подесен избор на координатните системи во π, равенките на пресликувањето σ_1 гласат $x_i = x_i'$, а на пресликувањето σ_2 : $x_i' = x_i''$ $(i = 1, 2)$. Пресликувањето, составено од σ_1 и σ_2, е определено со $x_i = x_i''$, каде што x_i одн. x_i'' се однесуваат на оние исти координатни системи на кои се однесуваат x_i и x_i'' при пресликувањето σ_1 одн. σ_2. Ова пресликување е афино, и затоа му припаѓа на S. Покажавме, значи:

[3] *Пресликувањето, составено од кои да е две пресликувања на* S, *му припаѓа на* S.

Множеството S, како и секое друго множество на обратно-еднозначни пресликувања на една рамнина (или простор) во себе, кои ги имаат особините [1], [2] и [3], играат во математиката важна улога. Затоа носат и специјално име, имено:

За какво да е множество S *на обратно-еднозначни пресликувања на една рамнина (или простор) во себе, за кое важат особините* [1], [2] *и* [3], *кажуваме дека образуваат една група пресликувања.*

Спрема тоа, множеството од сите афини пресликувања на една рамнина сама во себе образува една група — *афина група* во рамнината. По ист начин се убедуваме дека и множеството од сите афини пресликувања на просторот образуваат една група — *афина група во просторот.*

Јасно е дека и за множеството на сите движења во рамнината (или во просторот) важат особините [1], [2] и [3]. Затоа и овие множества пресликувања образуваат групи, првата — група *движења* или *изометрична група во рамнината*, а другата — *група движења* или *изометрична група во просторот.*

Ако веќе еден дел од пресликувањата на некоја група образува за себе една група пресликувања, тогаш оваа последнава ја викаме *подгрупа* во првата.

Секое изометрично пресликување е едно специјално афино пресликување, значи ѝ припаѓа на афината група. Затоа, групата движења во рамнината (во просторот) е една подгрупа во афината група во рамнината (во просторот).

2. Метрични особини и метрична геометрија. Кога во таканаречената *елементарна геометрија* изучуваме особини на некоја геометриска фигура, тогаш при тоа не нè интересува каде во рамнината одн. во просторот се наоѓа таа. Кога кажуваме, на пр., дека еден квадрат е определен (зададен) ако е позната должината на една негова страна, не мислиме при тоа на некој определен квадрат во рамнината, со точно означена положба, туку на кој да е квадрат во рамнината чии страни ја имаат зададената должина. Сите квадрати во рамнината кои се складни помеѓу себе се за нас тука, значи, рамноправни. Нас нè интересуваат при тоа, имено, само оние особини од овие квадрати што на сите им се заеднички, но не нè инересуваат оние нивни особини по кои тие се разликуваат — нивната меѓусебна положба. Истото важи, се разбира, и за секоја друга фигура, обект, кој се изучува во елементарната геометрија. Во оваа математичка дисциплина ги сметаме, спрема тоа, сите фигури, што се конгруентни на една дадена фигура, само како одделни *претставители* на една иста *класа* фигури. Или, како уште се изразуваме, сите меѓу себе складни фигури ги сметаме во елементарната геометрија како *еквивалентни* или *изоморфни*.

Користејќи ја терминологијата, воведена во т. 1, можеме овие констатации да ги формулираме на еден друг начин, кој ќе ни сугерира потоа извесно обопштување.

Сите фигури во рамнината, одн. во просторот, кои се конгруентни на една зададена фигура, можеме да ги добиеме, ако таа зададена фигура ја пресликаме при секое пресликување од изометричната група на рамнината одн. просторот. А произволни две складни фигури можат да бидат пресликани една во друга при некое пресликување од оваа група. Затоа дефиницијата на поимот за еквивалентноста на фигурите во елементарната геометрија можеме сега да ја формулираме вака:

Во елементарната геометрија велиме за две фигури дека се еквивалентни, ако во групата движења постои такво пресликување кое едната од нив ја пресликува во другата.

Во оваа дисциплина изучуваме, како што е речено горе, особини што се заеднички на сите еквивалентни фигури. Елементарната геометрија ги изучува, значи, оние особини на геометриските фигури кои се запазуваат, ако над тие фигури извршиме кое да е пресликување од изометричната група. Затоа овие особине ги викаме *метрични*, а елементарната геометрија уште и *метрична геометрија*. Теоремите што ги изразуваат метричните особини на геометриските фигури ќе ги викаме *метрични*. А и секој поим кој се запазува при секое пресликување од изометричната група ќе го викаме *метричен*. Спрема тоа:

[4] *Теореми и поими кои се запазуваат при секое пресликување од изометричната група се метрични.*

А за содржината на елементарната геометрија можеме сега да кажеме:

[5] *Елементарната или метричната геометрија е целокупност на метричните поими и теореми.*

3. Афини поими и теореми. Афина геометрија. При дефинициите за еквивалентноста на геометриските фигури во елементарната геометрија, како и во определението на самата оваа дисциплина, игра основна улога изометричната група. Тоа ни ја наметнува идејата да дефинираме аналогни поими и при афината група пресликувања. Така:

За две фигури, кои можат да бидат пресликани една во друга при некое пресликување од афината група, ќе кажеме дека се еквивалентни или изоморфни во однос на таа група, или кратко дека се афино еквивалентни.

Вака дефинираниот поим за еквивалентност има, навистина оние особини што секој поим за еквивалентност (еднаквост) треба да ги има. Ако е имено F една фигура, тогаш од оваа дефиниција и особината [1] следува — означувајќи ја еквивалентноста на две фигури со знакот $\sim$ — дека $F \sim F$; ако F_1 и F_2 се две еквивалентни фигури, т. е. $F_1 \sim F_2$, тогаш следува од особината [2] дека $F_2 \sim F_1$; а ако F_1, F_2, F_3 се три фигури за кои важи $F_1 \sim F_2$ и $F_2 \sim F_3$, тогаш следува од [3] дека $F_1 \sim F_3$. Особините [1], [2] и [3], карактеристични за една група, ни гарантираат, значи, да нашиот поим за еквивалентност ги има тукушто спомнатите особини што секој таков поим треба да ги има, имено *рефлексивност, симетричност и транзитивност.*

Потоа дефинираме, аналогно на [4] и [5]:

Секој геометриски поим или теорема, кој се запазува при секое пресликување од афината група, го викаме афин поим одн. теорема.

Целокупноста од сите афини поими и теореми во рамнината одн. во просторот се вика афина геометрија во рамнината одн. во просторот.

Да спомeнеме неколку примери на афини поими и теореми!

Сите триаголници во рамнината се, на пр., афино еквивалентни, бидејќи секој триаголник може (§ 45, т. 8) афино да се преслика во кој да е друг триаголник. Триаголникот е, спрема тоа, еден афин поим. — Сите паралелограми се истотака афино еквивалентни, бидејќи секој паралелограм може да биде афино пресликан во кој да е друг паралелограм. И паралелограмот е, значи, еден афин поим. — Две паралелни прави се пресликуваат при секое афино пресликување пак во две паралелни прави. Паралелизмот е, значи, еден афин поим. — Две нормални прави, напротив, не се пресликуваат при секое афино пресликување во еден пар нормални прави. Нормалноста, значи, не е афин поим. — Должините на отсечките и големините на аглите не се запазуваат при сите афини пресликувања. Должини и агли (нивните големини) не се, значи, афини поими. — Теоремата дека „тежишните линии во триаголникот се сечат во една точка што ги дели во однос 1 : 2" е (§ 46, прим. 1) очигледно афина. — Правилата за пресметувањето на површините на геометриските фигури и за просторнините на геометриските тела не спаѓаат, на пр., во афината геометрија.

Сите наброени афини поими и теореми се и метрички. Ќе покажеме дека тоа важи општо, имено дека:

Секоја афина особина, поим или теорема е и метрична особина, поим одн. теорема.

Изометричната група е, имено, една подгрупа во афината група, т. е. изометричните пресликувања се специјални афини пресликувања. Затоа, ако некоја особина се запазува при сите афини пресликувања, таа се запазува и при сите изометрични пресликувања. Обратно, се разбира, не важи. Со тоа е, на основа дефиницијата на еквивалентноста, горната теорема докажана.

4. Аналитичко изразување на афини особини. Во досегашното излагање видовме на многу места како геометриските особини можат да се изразат аналитички, ако во рамнината одн. во просторот е избрана една координатна система. Така, на пр., паралелноста на два вектори се изразува аналитички со релациите од § 19, т. 1 и 3., каде што координатите на векторите се однесуваат до една произволна афина координатна система. А условот за нормалноста на два вектори, на пр., е даден со релацијата (22) одн. (23) § 28, во која координатите на векторите се однесуваат само на која да е правоагла картезична, а не на која било афина координатна система. Условот за норманост може, навистина, да се изрази и со релацијата која важи за секоја афина система, но во неа фигурираат тогаш величини [(32), (33) § 29] кои зависат од изборот на координатната система.

Ако некоја геометриска особина на некоја фигура може аналитички да се изрази на ист начин во секоја афина координатна система, како што е случај при првиот пример, тогаш таа особина ја имаат и сите оние фигури, во кои се пресликува дадената фигура при кои да е афини пресликувања. Тоа следува оттаму што равенките за премин од една афина система во друга можеме да ги толкуваме и како равенки на афините пресликувања. Вакви особини се запазуваат, значи, при сите афини пресликувања, па затоа се афини. Покажавме, спрема тоа:

Една геометриска особина, која аналитички може да се изрази во секоја афина координатна система на ист начин, т. е. така да во аналитичките изрази што ја определуваат нема параметри кои зависат од изборот на координатната система, е афина.

5. Поим за класификација на геометриските особини според групниот принцип. Ние до сега геометријата ја поделивме во две области, во метрична и во афина. Во основа на првата лежи при оваа наша расподелба изометричната група, а при втората — афината група, која ја содржува првата како своја подгрупа. Оваа класификација можеме да ја продолжиме на тој начин што би избрале една нова група обратно-еднозначни пресликувања на рамнината сама во себе, одн. на просторот, „поопсежна" од афината, т. е. таква која би ја содржала афината група како подгрупа. Сите оние геометриски обекти кои се добиваат, ако на едниот од нив ги извршиме сите пресликувања од една ваква група, ќе ги наречеме *еквивалентни во однос на таа група* и ќе кажеме дека образуваат една *класа еквивалентни фигури.* За онаа геометриска дисциплина која ги изучува особините, што се заеднички на фигурите од која да е класа еквивалентни фигури во однос на избраната група, ќе речеме дека тоа е *геометрија што ѝ припаѓа на таа група*. Потоа можеме да избираме сè поопсежни групи, така да секоја од нив би ги содржала сите порано избрани групи како подгрупи. Секоја една од овие групи определува по една геометрија што ѝ припаѓа. Геометриските обекти, еквивалентни во однос на која да е од овие групи, се еквивалентни, се разбира, и во однос на сите нејзини подгрупи, т. е. тие се еквивалентни во сите геометрии што им припаѓаат на тие подгрупи. Но тие не мора да се еквивалентни во однос на поопсежните групи.

Над геометриските обекти, како над нивните особини, извршуваме на тој начин една аналогна класификација, расподелба, како што се класифицирани, на пр., животните во зоологијата. Оваа научна дисциплина ги групира животните според нивната сродност во овие групи: врста, род, фамилија, ред, класа и коло. Во секоја една од овие групи влегуваат животните кои имаат извесни заеднички особини. При тоа особините што ги имаат сите животни од една од овие прупи, ги имаат и животните од соодветните пониски групи (т. е. во нашата редица на лево од посматраната група), а ги немаат сите животни во повисоките групи. На пр., особините што ги имаат животните од фамилијата мачки, ги имаат сите животни од родот мачки или животните од врстата мачки, но ги немаат сите животни од редот на ѕверови, на класата цицачи итн.

Како во зоологијата животните, така во геометријата ние ги расподелуваме обектите што таа ги иследува, според заедничките особини што ги имаат, во класи еквивалентни обекти. Оваа класификација, при која групите пресликувања играат фундаментална улога, потекнува од големиот немски математичар *Ф. Клајн* (1849—1925).

Ние се задоволуваме во овој курс со оваа бегло скицирана идеја, бидејќи поподробно изучување на ова прашање излегува од рамките на нашата програма.

ЗАДАЧИ

1. Во што се трансформира изразот $(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_1b_1 + a_2b_2)$, ако над векторите $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$, зададени во една правоагла система, извршиме едно изометрично пресликување во рамнината? Кој метричен поим изразува овој израз?

2. Кои од поимите: тежиште, ортоцентар и центар на впишаниот круг на триаголникот се афини, а кои метрични?

3. Во која геометрија, афината или метричната, спаѓаат: *a*) теоремите за пропорционални отсечки; *b*) Питагоровата теорема; *c*) теоремите за складност; *d*) теоремите за сличност?

4. Покажи дека сите хомотетии во рамнината со еден ист центар образуваат една група!

5. Покажи дека афините особини на фигурите од една рамнина се запазуваат, ако фигурите ги проицираме паралелно на некоја друга рамнина!

Втор дел

КРИВИ И ПОВРШИНИ

Увод

§ 50. Геометриско толкување на равенките

1. Геометриско толкување на равенките со две непознати. Во § 19, т. 11 покажавме како може да се добие еден геометриски репрезентант на една линеарна равенка со две непознати. Тој репрезентант беше една права линија. Истиот метод ќе го примениме сега за произволни равенки.

Нека е зададена каква да е равенка $\varphi(x_1, x_2) = 0$ со две непознати. Во зависност од обликот на таа равенка и од нејзините коефициенти таа може да има безброј решенија, може да ги има само краен број, а може да нема ниедно решение. Да го илустрираме тоа на три примери! Равенката

$$x_2 - x_1^3 = 0 \tag{1}$$

има безброј решенија, зашто за x_1 можеме да избереме една произволна вредност t и ја замениме во (1), со што добиваме $x_2 = t^3$. При каков да е број t е, значи,

$$x_1 = t,\ x_2 = t^3 \tag{2}$$

едно решение од (1). — Равенката

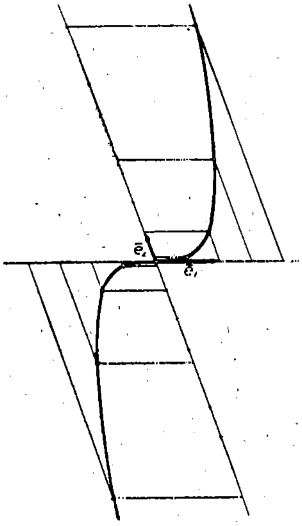
$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \tag{3}$$

има само едно решение, имено $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Навистина, важи $x_1^2 \geqq 0$, $x_2^2 \geqq 0$, а збир од два ненегативна броја е нула само тогаш ако двата се нула. — И на крај, еден пример на равенка што нема решенија е равенката

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0, \tag{4}$$

бидејќи нејзината лева страна е, при секакви вредности за x_1, x_2, позитивна, значи различна од нула.

Аналогно како во § 19, т. 11, ќе го толкуваме геометриски секое решение од равенката $\varphi(x_1, x_2) = 0$, во колку ги има, како координати на некоја точка во однос на една избрана афина координатна система во рамнината. На тој начин одговара на секое решение x_1^0, x_2^0 на равенката $\varphi(x_1, x_2) = 0$, т. е. на секој таков пар броеви x_1^0, x_2^0 за кои важи $\varphi(x_1^0, x_2^0) = 0$, една точка $P(x_1^0, x_2^0)$ во рамнината. По тој начин се издвојува од точките на рамнината едно множество на точки P. Координатите на секоја од овие точки P ја задоволуваат равенката $\varphi(x_1, x_2) = 0$, а и секој пар нејзини решенија претставува координати на една точка од тоа множество точки. Множеството од овие точки, во колку постои, ќе го викаме „*крива линија*" — или кратко „*крива*" — што е претставена со равенката $\varphi(x_1, x_2) = 0$. А за самата равенка ќе кажеме дека е *равенка на таа крива*. Значи:



Сл. 72

Крива, чија што равенка во однос на афините координати x_1, x_2 *е* $\varphi(x_1, x_2) = 0$, *е множеството на сите оние точки во рамнината чии што координати* x_1, x_2 *ја задоволуваат таа равенка.*

Често пати кажуваме просто „*крива* $\varphi(x_1, x_2) = 0$" место „*крива, определена со равенката* $\varphi(x_1, x_2) = 0$".

Кривата што ја претставува равенката (1) е дадена на сл. 72. Координатите на одделните точки од таа крива ги добиваме на горе спомнатиот начин и ги подредуваме во една табела, на пр.:

x_1	-2	$-1^1/_2$	-1	$-^1/_2$	0	$^1/_2$	1	. . .
x_2	-8	$-3^3/_8$	-1	$-^1/_8$	0	$^1/_8$	1	. . .

Во избраната координатна система ги маркираме точките (— 2,—8), (— $1^1/_2$, — $3^3/_8$),..., кои потоа ги сврзуваме со една линија која приближно ќе ни дава претстава за кривата, определена со дадената равенка. — „Кривата", определена со (3), е точката (0, 0). — Најпосле, равенката (4) геометриски не претставува ништо.

2. Параметарски равенки на една крива. Кривата (1) е определена аналитички и со равенките (2), во кои за t можеме да избираме произволни вредности. Координатите x_1, x_2 на нејзините точки се изразени како функции на една променлива t, наречена *параметар*. Општо, ако координатите x_1, x_2 на која да е точка од некоја крива се дадени како функции од една променлива t, ако е значи

$$(5) \qquad x_1 = \varphi_1(t), \; x_2 = \varphi_2(t),$$

каде што функциите $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ се дефинирани во некој заеднички интервал за t, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, кажуваме дека (5) се *параметарски равенки* на кривата. Променливата t ја викаме *параметар*. За секоја вредност на t во дадениот интервал равенките (5) определуваат координати на една точка $M(x_1, x_2)$ на кривата.

Равенките (2) се, значи, параметарски равенки на кривата (1). Друг пример на параметарски равенки се параметарските равенки на правата во § 14, т. 4.

Ако од (5) го елиминираме t, добиваме една релација меѓу x_1, x_2:

$$\varphi(x_1, x_2) = 0. \tag{6}$$

Секоја двојка броеви x_1, x_2, што ја добиваме ако во (5) за t ставиме која да е вредност од дадениот интервал, ја задоволува оваа равенка (6). Затоа сите точки од кривата, дефинирана со (5), лежат на кривата (6). Но освен овие точки кривата (6) може да содржи и точки кои не лежат на првата крива. Значи:

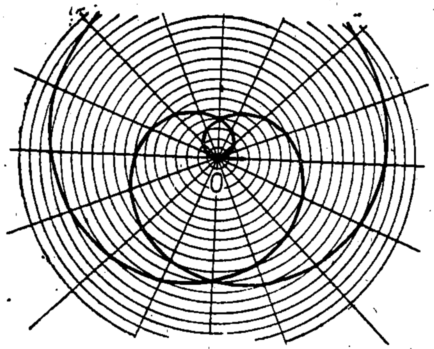
Равенката (6), *која е резултат на елиминацијата на параметарот t од* (5), *ја задоволуваат координатите од секоја точка на кривата, определена со* (5); *но обратно не важи.*

Пример. Да ја испитаме кривата, чии што параметарски равенки се $x_1 = a_1 \cos t$, $x_2 = a_2 \cos t$, каде што t може да заземе каква да е вредност.

Решение. Ако од дадените равенки го елиминираме t, добиваме $a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0$. Тоа е една права. На неа лежат сите точки од испитуваната крива. Но бидејќи е, при секакви вредности за t, $-1 \leqq \cos t \leqq +1$, тоа на испитуваната крива лежат само оние точки од правата за кои важи $-a_1 \leqq x_1 \leqq +a_1$, $-a_2 \leqq x_2 \leqq +a_2$. Бараната крива е, значи, отсечката со крајните точки $A(-a_1, -a_2)$ и $B(a_1, a_2)$, а не целата права AB.

3. Крива, определена со една равенка меѓу координатите на точките во однос на која да е координатна система во рамнината. Една равенка $\varphi(x_1, x_2) = 0$ можеме геометриски да ја репрезентираме и на тој начин што секое нејзино решение x_1, x_2 го толкуваме како координати на една точка не во некоја афина, туку во која да е друга координатна система, на пр. во поларната, биполарната и сл. Потполно аналогни дефиниции како во т. 1 важат и во овој случај.

Ако избираме, специјално, една поларна система, ќе се служиме со ознаките $x_1 \equiv \rho$, $x_2 \equiv \varphi$, а ако избереме една биполарна система, ќе ставиме $x_1 \equiv r_1$, $x_2 \equiv r_2$. Спрема тоа, при една избрана поларна система, равенката $F(\rho, \varphi) = 0$ претставува една крива; а истотака, при една избрана биполарна система, равенката $F(r_1, r_2) = 0$ претставува некоја крива — во колку тие равенки изопшто имаат решенија.

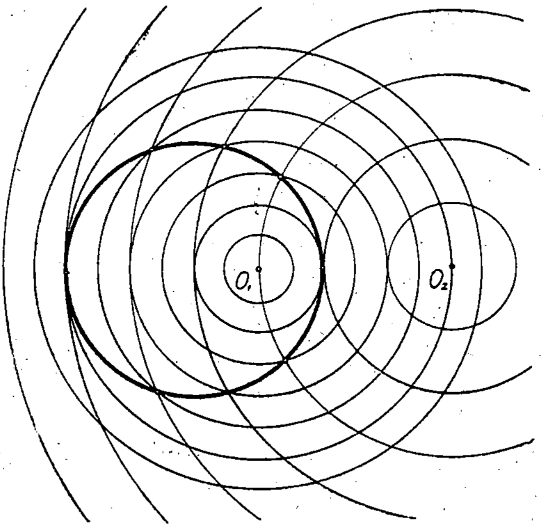


Сл. 73

ПРИМЕРИ

1. Архимедова спирала. Тоа е крива чија што равенка е $\rho = \varphi$. На сл. 73 е дадена скица на таа крива. Поларната система е обопштена. Точката (ρ_0, φ_0) од кривата се добива како пресек на кругот со центар во полот O и со радиус ρ_0 и на онаа полуправа со почеток до O, која со поларната оска затвора агол φ_0.

2. Да се нацрта кривата $r_1 = 2r_2$ во однос на една биполарна система (O_1, O_2). Точката (r_1^0, r_2^0) од таа крива се најдува како пресек на кругот со центар во O_1 и радиус r_1^0 и на кругот со центар во O_2 и радиус r_2^0. Кривата е дадена на сл. 74.



Сл. 74

4. Две основни задачи на аналитичната геометрија во рамнината. Една од основните задачи на аналитичната геометрија во рамнината е да ги иследува особините на кривите, определени со равенките од најразличен вид. Иследувањето на овие особини се сведува на иследувањето на аналитичките особини на нивните равенки.

Една друга важна задача е обратна на оваа. Предмет на испитување на аналитичната геометрија можат да бидат, имено, и кривите, дефинирани геометриски. Тоа се такви множества од точки во рамнината, кои од другите точки во рамнината се разликуваат по тоа што сите задоволуваат некој зададен геометриски услов. Вакви множества од точки ги викаме *геометриски места*. При иследувањето на овие геометриски места ќе испитуваме прво какви се нивните равенки, а потоа од особините на равенките ќе ги изведеме и особините на самите криви-геометриските места.

Пример. Да испитаме што е геометриско место на точките, кои имаат еднакви растојанија до точките $(a, 0)$ $(-a, 0)$, зададени во однос на некоја правоагла система.

Решение. Нека е (x_1, x_2) која да е точка од геометриското место. Растојанието од (x_1, x_2) до $(a, 0)$ е $\sqrt{(x_1-a)^2+x_2^2}$, а растојанието од (x_1, x_2) до $(-a, 0)$ е $\sqrt{(x_1+a)^2+x_2^2}$. Спрема условот на задачата е $\sqrt{(x_1-a)^2+x_2^2}=$ $=\sqrt{(x_1+a)^2+x_2^2}$, од каде се добива, по упростувањето, $x_1 = 0$. Бараното геометриско место е, значи, x_2-оската, т. е. правата што стои нормално на отсечката што ги сврзува дадените точки и ја располовува.

5. Геометриско толкување на равенките со три непознати. Една равенка со три непознати

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{7}$$

ќе ја толкуваме сега геометриски аналогно како што ја толкувавме во § 23, т. 8 една линеарна равенка. Секое решение на равенката (7) — една тројка броеви — ќе го сметаме како афини координати на некоја точка во просторот во однос на некоја избрана координатна система. Целокупноста на сите вакви точки ќе ја викаме *површина, определена со равенката* (7), а самата равенка — *равенка на таа површина.* Одделни точки на површината ќе ги добиеме, ако во (7) избереме за две од непознатите произволни вредности, а од така добиената равенка, во колку има решенија, ги пресметаме кореспондентните значења на третата непозната. Тоа е нарочно згодно, ако (7) е дадена во обликот $x_3 = f(x_1, x_2)$. Се разбира дека во овој случај избираме произволни вредности за x_1, x_2.

Аналогно ги интерпретираме геометриски и равенките меѓу координатите на точките во однос на која да е друга, неафина, координатна система.

Површините ќе ги испитуваме преку иследувањето на аналитичките особини на нивните равенки.

Обратно, ако е зададена задача да се испита едно *геометриско место во простор,* т. е. целокупноста на сите оние точки во просторот што имаат заедничка една определена геометриска особина, ќе постапуваме слично како во рамнинскиот случај. Таа заедничка особина ќе ја изразиме алгебарски, со што ќе ја добиеме равенката на геометриското место. Испитувањето на особините на геометриското место се сведува со тоа на иследувањето на таа равенка.

*
* *

Од спомнатите две основни задачи на аналитичната геометрија (т. 4 и 5) ние ќе се задржиме главно на првата. Нејзе ѝ се посветени пред сѐ три најголеми глави: I, III и V.

Во гл. I ќе ги разгледаме подробно најважните равенки во аналитичната геометрија — линеарните равенки помеѓу координатите на точките во рамнината и просторот.

Во гл. II ќе ги изучиме најважните особини на кругот и топката.

Во гл. III ќе ги иследиме подробно некои специјални квадратни равенки помеѓу координатите на точките во рамнината (елипса, хипербола, парабола) и просторот (елипсоид, хиперболоиди, параболоиди,, конуси и цилиндри од втор ред).

Во глава IV ќе разгледаме некои поважни типови површини. А најпосле, во глава V, ќе ги испитаме подробно квадратните равенки помеѓу координатите на точките во таканаречената *комплексна рамнина* и *комплексниот простор*.

Со тоа ќе се запознаеме со сите оние најважни криви и површини, кои се изучуваат во почетните курсеви по аналитична геометрија.

ЗАДАЧИ

Во зад. 1—6 се дадени равенки на криви во однос на некоја афина система. Да се нацртаат кривите, пресметувајќи ги координатите на извесен број точки.

1. $x_2 = x_1^3 - x_1$ 2. $x_1 x_2^2 = 1$. 3. $x_2 = \sqrt{1 - x_1}$.
4. $2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$ 5. $x_2 = \sin x_1$. 6. $x_1 = \cos^2 x_2$.

Во зад. 7—10 се дадени равенки на криви во однос на една поларна система. Да се нацртаат!

7. $\rho\varphi = \pi$. 8. $\rho = 5 \sin \varphi$. 9. $\rho = \sin 2\varphi$. 10. $\rho = 2 \cos 3\varphi$.

Да се нацртаат кривите, чии равенки во однос на една биполарна система се дадени во зад. 11—13. При тоа нека е $\overline{O_1O_2} = 4$.

11. $r_1 - r_2 = 0$. 12. $r_1 - r_2 = 1$. 13. $r_1 + r_2 = 10$.

Нацртај ги кривите, чии параметарски равенки се дадени во зад. 14—16. При тоа е $-\infty < t < +\infty$.

14. $x_1 = t^2, x_2 = t^3$. 15. $x_1 = t^3, x_2 = 1/t$. 16. $x_1 = \cos t, x_2 = \sin t$.

Во зад. 17—21 се дадени равенки на кривите во правоагли координати. Како гласат равенките на тие криви во поларни координати?

17. $x_1^2 + x_2^2 = 1$. 18. $x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0$. 19. $(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1x_2(x_1^2 - x_2^2) = 0$.
20. $x_1 - x_2 = 0$. 21. $x_2^2 = 2px_1 - p^2$.

Равенките на кривите во поларни координати, зададени во зад. 22—25, да се трансформираат во равенки во правоагли координати!

22. $\rho = R$. 23. $\varphi = \alpha$ 24. $\rho = \sin \varphi$. 25. $\rho = \varphi$.

26. Дадена е површината $x_1 + x_2 = x_3^3$. Ако една точка M лежи на неа, тогаш лежат на неа и сите точки од правата што мине низ M и е паралелна со векторот $\{1, -1, 0\}$. Да се провери тоа!

27. Нека биде P која да е точка на површината $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$. Да се покаже дека сите точки на правата што P ја сврзува со координатниот почеток лежат на неа!

28. Која површина е дадена со равенката $(x_1 + x_2)^2 - x_3^2 = 0$?

ГЛАВА I

ПРАВА ВО РАМНИНАТА
РАМНИНА И ПРАВА ВО ПРОСТОРОТ

А. АФИНИ ОСОБИНИ

I. Афини особини на правата во рамнината

§ 51. Разни видови равенки на правата

1. Општа равенка. Во § 19, т. 11 утврдивме дека равенката на секоја права, при каква да е афина координатна система, може да се доведе во облик

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0, \tag{1}$$

каде што барем еден од коефициентите A_1, A_2 не е нула. Правата (1) е паралелна со векторот $\{-A_2, A_1\}$. Обратно, секоја равенка од видот (1), ако барем еден од коефициентите A_1, A_2 не е нула, претставува некоја права. Равенката (1) ја викаме затоа *општа равенка на правата.*

2. Параметарски равенки. Ако е зададена една точка $P(p_1, p_2)$ на една права и еден вектор $\mathfrak{l} = \{l_1, l_2\}$, паралелен со неа, тогаш равенките

$$x_1 = p_1 + \lambda l_1, \quad x_2 = p_2 + \lambda l_2 \tag{2}$$

ги определуваат, како што покажавме во § 14, т. 4, координатите x_1, x_2 на секоја точка од правата, ако на параметарот λ му задаваме севозможни вредности. Равенките (2) ги викаме *параметарски равенки на правата.*

Ставувајќи $\mathfrak{r}_0 = \{p_1, p_2\}$ и $\mathfrak{r} = \{x_1, x_2\}$, параметарските равенки (2) добиваат векторски облик, имено

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda \cdot \mathfrak{l}. \tag{3}$$

3. Симетрична равенка. Како резултат од елиминацијата на λ од (2) добиваме

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Оваа релација е задоволена за оние x_1, x_2, кои се добиваат од (2), ако во нив за λ ставиме каков да е број. А други решенија равенката (4) нема, бидејќи како линеарна по x_1, x_2 таа е задоволена само со координатите на точките од една права. Равенката (4) е, значи, равенка на правата, зададена со (2).

Ако е $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, равенката (4) може да се напише во симетричниот облик

$$\frac{x_1 - p_1}{l_1} = \frac{x_2 - p_2}{l_2}. \tag{5}$$

Обратно, секоја равенка од облик (5) е равенка на една права, имено на онаа што врви низ точката (p_1, p_2) и е паралелна со векторот $\{l_1, l_2\}$. Овој вид равенка го викаме *симетрична равенка* на правата.

4. Доволен услов за совпаднување на две прави. Ако равенката (1) ја помножиме со кој да е број $\lambda \neq 0$, ја добиваме равенката

$$\lambda \cdot (A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3) = 0, \tag{6}$$

чии решенија се, очигледно, и решенија од (1), и обратно. Равенките (1) и (6) се, значи, еквивалентни. Тие претставуваат иста целокупност точки (x_1, x_2), значи — една иста права.

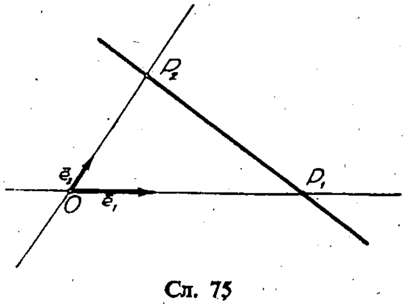
Во обликот (6) може да се напише секоја линеарна равенка по x_1, x_2 чии што коефициенти се соодветно пропорционални со коефициентите на (1). Затоа:

Ако соодветните коефициенти во равенките на две прави се пропорционални, тогаш равенките претставуваат една иста права.

5. Параметри на правата. Една права во рамнината е наполно определена, ако ни е зададена нејзината равенка, на пр. во обликот (1), т. е. ако во неа, при зададената координатна система, ги знаеме коефициентите A_1, A_2, A_3. Спрема т. 4 можеме сите овие коефициенти да ги помножиме со било кој број, различен од нула. Ако е на пр. $A_1 \neq 0$, ја помножуваме равенката со $1/A_1$, и добиваме равенка од облик $x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$. Аналогно, ако е $A_2 \neq 0$, ја доведуваме равенката на правата во облик $a_1' x_1 + x_2 + a_3' = 0$. Секоја од овие две равенки е определена, а спрема тоа и правата, ако се зададени две константи, a_2 и a_3 одн. a_1' и a_3'. Броевите што ја определуваат положбата на една права ќе ги викаме нејзини *параметри*. Значи:

Една права во рамнината е определена аналитички со два параметра.

6. Сегментен облик на равенката на правата. Нека ни е зададена, во однос на некоја система $(O;\ e_1,\ e_2)$, една равенка (1), во која сите коефициенти се различни од нула. Множејќи ја равенката со



Сл. 75

$\lambda = 1/A_3$, таа добива облик $(A_1/A_3)\,x_1 + (A_2/A_3)\,x_1 + 1 = 0$, или, ставувајќи $a_1 = -A_3/A_1$, $a_2 = -A_3/A_2$, облик

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 1. \tag{7}$$

Да испитаме какво геометриско значење имаат параметрите a_1 и a_2! Равенката (7) е задоволена за $x_1 = a_1, x_2 = 0$ и за $x_1 = 0$, $x_2 = a_2$. Затоа, ако со P_1 и P_2 ги означиме пресечните точки на зададената права со x_1- одн. со x_2-оската, имаме $P_1\,(a_1, 0)$, $P_2\,(0, a_2)$. Со оглед на геометриското значење на афините координати (§ 13), имаме

$$a_1 = \frac{\overrightarrow{OP_1}}{e_1}, \quad a_2 = \frac{\overrightarrow{OP_2}}{e_2}.$$

Броевите a_1 и a_2 се, значи, по својата апсолутна вредност мерните броеви на отсечките (сегментите) OP_1 одн. OP_2, што правата ги отсекува на координатните оски, земајќи ги должините на e_1 одн. e_2 како единици за должина за оските; знаковите на a_1, a_2 покажуваат на која страна од координатниот почеток O се наоѓаат точките P_1 и P_2. Броевите a_1, a_2 ќе ги викаме кратко *отсечоци* или *сегменти* на оските. Затоа обликот на равенката (7) го викаме *сегментен облик*.

Во сегментен облик можат да се напишат, поради $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$, само равенките на оние прави што не врват низ координатниот почеток и кои не се паралелни со некоја од координатните оски.

Пример. Сегментниот облик на равенката на правата $2x_1 + 3x_2 + 5 = 0$ гласи

$$\frac{x_1}{-5/2} + \frac{x_2}{-5/3} = 1.$$

ЗАДАЧИ

Равенките во зад. 1—3 да се доведат во сегментен облик.

1. $3x_1 + 4x_2 + 12 = 0$. 2. $x_2 = kx_1 + n$. 3. $x_1 = px_2 + q$.

4. Да се определи равенката на правата, која со координатните оски затвора триаголник со површина (e_1, e_2), а минува низ точката (2, 3). Земи ги предвид двете можни ориентации на триаголникот!

5. Да се определи, во однос на една косоагла картезична система, равенката на правата која минува низ $P(p_1, p_2)$, а на оските отсекува:

a) еднакви отсечоци; *b*) отсечоци во однос $m_1 : m_2$.

6. Да се напише равенката на онаа права што врви низ точката $P(3, 1)$, ако отсечката што на неа ја отсечуваат координатните оски: *a*) ја располовува точката P; *b*) точката P ја дели во однос $2 : 5$.

7. Експлицитен облик на равенката на правата. Ако во равенката (1) е $A_2 \neq 0$, можеме да ја решиме по x_2. Добиваме

$$x_2 = kx_1 + a_2, \tag{8}$$

каде што е

$$k = -\frac{A_1}{A_2}, \quad a_2 = -\frac{A_3}{A_2}.$$

Равенката (8) ја викаме *експлицитна равенка на правата.*

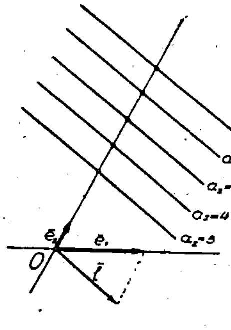
Да видиме какво геометриско значење имаат парметрите k и a_2!

Равенката е задоволена за $x_1 = 0$, $x_2 = a_2$. Затоа параметарот a_2 има исто геометриско значење како при сегментната равенка — отсечок на x_2-оската.

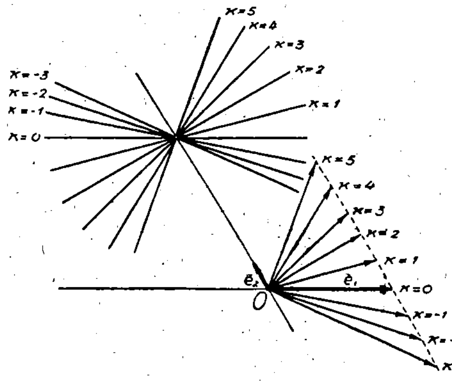
Правата (8) е паралелна (§ 19, т. 11) со векторот $\mathbf{l} = \{1, k\}$. Коефициентот k го определува, спрема тоа, правецот на правата. Го викаме *аглов коефициент* на правата. Тој е еднаков на количникот од втората и првата координата од $\mathbf{l}$. Но бидејќи кој да е вектор, колинеарен со $\mathbf{l}$, може да се претстави во вид $t \cdot \mathbf{l} = \{t, tk\}$, каде што t е некој скалар, тоа и при овој вектор односот на втората и првата координата е еднаков на k. Спрема тоа:

[1] *Агловиот коефициент k на една права е односот на втората и првата координата на кој да е вектор што е паралелен со неа.*

Бидејќи векторот $\{1, k\}$, при ниедна вредност за k, не е паралелен со x_2-оската, тоа во експлицитниот облик (8) можат да се доведат само равенките на оние прави што не се паралелни со таа оска.



Сл. 76*а*



Сл. 76*б*

На сл. 76*а* се нацртани неколку прави со ист аглов коефициент $k = -2$, а со различни отсечоци a_2 на x_2-оската. На сл. 76*b* се нацртани неколку прави со исти отсечоци $a_2 = 7$, а со различни аглови коефициенти k. Правецот на секоја од овие прави е правецот на соодветниот вектор l, кој го нанесовме од O.

8. Равенка на правата, определена со една точка и агловиот коефициент. Зададена нека ни е една точка $P(p_1, p_2)$ од некоја права и нејзиниот аглов коефициент k. Ќе ја изведеме равенката на таа права. Нека е $X(x_1, x_2)$ која да е точка на правата. На неа лежи тогаш векторот $\overrightarrow{PX} = \{x_1 - p_1, x_2 - p_2\}$. Затоа е, на основа [1],

$$\frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1} = k.$$

Одавде добиваме

$$x_2 - p_2 = k \cdot (x_1 - p_1). \tag{9}$$

Бидејќи оваа равенка ја задоволуваат координатите од секоја точка X на зададената права, тоа таа е бараната равенка.

ЗАДАЧИ

Да се напише равенката на правата што минува низ дадената точка P и го задоволува дадениот услов.

1. $P(3, -8)$; паралелна со правата $3x_1 - 2x_2 + 1 = 0$.
2. $P(-1, 3)$; паралелна со векторот $\{-2, 5\}$.
3. $P(a_1, a_2)$; паралелна со правата $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$.
4. $P(-5, 2)$; паралелна со правата $x_2 = 7$.
5. $P(a, b)$; паралелна со x_2-оската.
6. $P(p_1, p_2)$; паралелна со правата што координатниот почеток го сврзува со точката $Q(q_1, q_2)$.

7. Да се определи равенката на правата што е паралелна со паралелните прави

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0, \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3' = 0,$$

а минува во средината помеѓу нив.

9. Равенка на правата, определена со две зададени точки. На една права нека ни се зададени две точки $P(p_1, p_2)$ и $Q(q_1, q_2)$. Ако е $X(x_1, x_2)$ која да е точка на таа права, тогаш векторите $\overrightarrow{PQ} = \{q_1 - p_1, q_2 - p_2\}$ и $\overrightarrow{PX} = \{x_1 - p_1, x_2 - p_2\}$ се колинеарни. Затоа, спрема условот за колинеарност, следува

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Оваа релација ја задоволуваат координатите од секоја точка X на таа права. Тоа е, спрема тоа, бараната равенка.

Оваа равенка можеме да ја добиеме и директно од (4), земајќи го за l векторот $\overrightarrow{PQ}$.

Равенката (10) можеме да ја запишеме и во облик

$$\frac{x_1-p_1}{q_1-p_1}=\frac{x_2-p_2}{q_2-p_2}, \tag{11}$$

или во облик

$$x_2-p_2=\frac{q_2-p_2}{q_1-p_1}\cdot(x_1-p_1). \tag{12}$$

Равенката на правата што минува низ P и Q се добива лесно и со исползувањето на условот за колинеарност на три точки. Спрема тој услов, една произволна точка $X(x_1, x_2)$ лежи со P и Q на една права (§ 34, т. 6), ако важи

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

И тоа е, значи, еден облик на равенката на правата што минува низ точките P и Q.

Забелешка. Во вид (10) и (13) може да се доведе равенката на секоја права; во вид (11) само тогаш кога $q_1-p_1 \neq 0$, $q_2-p_2 \neq 0$, т. е. кога отсечката PQ не е паралелна со ниедна од координатните оски; а во облик (12) само тогаш кога е $q_1-p_1 \neq 0$, т. е. кога отсечката PQ не е паралелна со x_2-оската.

ЗАДАЧИ

Да се најде равенката на правата што ги сврзува дадените две точки.

1. $(4, 5)$, $(-1, 2)$. 2. $(0, a_2)$, $(a_1, 0)$. 3. $(0, 0)$, (a_1, a_2). 4. $(1, a^2)$, $(b^2, 1)$.

5. Напиши ги равенките на тежишните линии на триаголникот со темињата (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2).

§ 52. Меѓусебна положба на две прави

1. Услов за паралелност. Зададени нека ни се две прави

$$\begin{aligned} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 &= 0 \\ B_1x_2 + B_2x_2 + B_3 &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Првата од нив е паралелна со векторот $\{-A_2, A_1\}$, а втората со $\{-B_2, B_1\}$. Правите се паралелни тогаш и само тогаш, ако се паралелни овие вектори, значи ако е

$$\begin{vmatrix} -A_2 & A_1 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Спрема тоа, *постоењето на релацијата* (15) *е потребен и доволен услов за тоа, правите* (14) *да бидат паралелни.*

2. Услов за совпаднување на две прави. Ако условот (15) е задоволен, правите (14) можат и да совпаднат. Во § 51, т. 4 го изведовме доволниот услов за совпаднување на две прави. Сега ќе покажеме дека тој услов е и потребен.

Ќе претпоставиме затоа дека правите (14) совпаднуваат. Векторите $\{-A_2, A_1\}$ и $\{-B_2, B_1\}$ се, значи, колинеарни. Постои спрема тоа, таков скалар λ да е $\{-B_2, B_1\} = \lambda \cdot \{-A_2, A_1\}$, или

$$(16) \qquad B_1 = \lambda \cdot A_1, \; B_2 = \lambda \cdot A_2.$$

Равенките (14) гласат сега

$$(17) \qquad \begin{aligned} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 &= 0 \\ \lambda A_1x_1 + \lambda A_2x_2 + B_3 &= 0. \end{aligned}$$

Нека е $M_0(x_1^0, x_2^0)$ една точка на совпаднатите прави. Нејзините координати ги задоволуваат двете равенки (17). Ставувајќи во нив $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, множејќи ја првата со λ и вадејќи потоа една од друга, добиваме $\lambda A_3 = B_3$. За правите (14) важи, значи, поради (16),

$$(18) \qquad B_1 = \lambda A_1, \; B_2 = \lambda A_2, \; B_3 = \lambda A_3.$$

Потребен и доволен услов за тоа да правите (14) *бидат совпаднати е постоењето на релациите* (18).

Ако е $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $B_3 \neq 0$, релациите (18) можеме да ги пишеме и во вид:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}.$$

Бидејќи равенките на две совпаднати прави се еквивалентни, тоа од § 23 т. 6 следува дека горниот критериј може и вака да се формулира:

Потребен и доволен услов за совпаднување на правите (16) *е, матрицата*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{Vmatrix}$$

да има ранг 1.

ЗАДАЧИ

1. Да се покаже: Ако правите $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$ и $B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0$ совпаднуваат, постои таков λ да важи идентично, т. е. за сите вредности од x_1, x_2, $B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 \equiv \lambda \cdot (A_1x_1 + A_2x_2 + A_3)$.

2. Определи го λ така да правата $(3 + 2\lambda)x_1 + (-1 + \lambda)x_2 - 4\lambda = 0$ биде паралелна со правата $2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$.

3. Равенките $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$ и $x_2 = kx_1 + a_2$ нека претставуваат иста права. Какви релации постојат меѓу нивните коефициенти?

4. Кој е условот за паралелност, но не и за совпаднување, на правите (14), даден во матричен облик?

5. Од условот за совпаднување на две прави да се покаже: Равенките $A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3 = 0$ и $B_1z_1 + B_2z_2 + B_3z_3 = 0$ се еквивалентни тогаш и само тогаш, ако важи $A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3$.

3. Пресек на две прави. Заедничките точки на две прави ги викаме нивни *пресечни точки* или кратко — *пресеци*. Тоа се точките чии што координати ги задоволуваат равенките на двете прави. Нека правите (14) не бидат паралелни, т. е. детерминантата од левата страна на (15) нека не е нула. Системата (14) има тогаш, според правилото на Крамер, едно и едно само решение, имено решението x_1, x_2 што е дадено со

$$x_1 : x_2 : 1 = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Ако правите (14) *не се паралелни, имаат една пресечна точка, чии координати* x_1, x_2 *се дадени со* (19).

ЗАДАЧИ

Да се определат пресечните точки на зададените две прави.

1. $x_1/a_1 + x_2/a_2 = 1$, $x_1/a_2 + x_2/a_1 = 1$.
2. $x_1 + x_2 + 1 = 0$, $(1 + \lambda)x_1 + (1 - \lambda)x_2 + 1 + 2\lambda = 0$.

3. Верифицирај аналитички: *а*) дека сите точки на две совпаднати прави им се заеднички; *b*) дека две паралелни несовпаднати прави немаат заеднички точки.

Задачи за геометриски места

1. Една произволна точка P од правата $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$ ја сврзуваме со координатниот почеток O. Да се определи равенката на геометриското место на точките M, кои отсечката OP ја делат во однос $m_1 : m_2$. Цртеж!

2. Две подвижни прави со непроменливи правци ги сечат две зададени прави во A, B, C, D. Какво е геометриското место на пресекот на дијагоналите на трапезот $ABCD$?

3. Низ една фиксна точка O е повлечена една подвижна права која ги чесе две фиксни паралелни прави во точките P и Q. Низ P и Q повлекуваме прави

со фиксни (непроменливи) правци. Да се покаже дека геометриското место на нивниот пресек е една права.

4. AA' и BB' се произволни отсечки, паралелни со страните на еден зададен паралелограм; страните на паралелограмот минуваат низ A, A', B, B'. Какво е геометриското место на пресеците од AB и $A'B'$?

§ 53. Сноп прави

1. Равенка на сноп прави со центар. Во рамнината избираме две прави, зададени со равенките

$$
\begin{aligned}
&L_1(X) \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \\
&L_2(X) \equiv B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Левите страни на равенките ги обележивме со $L_1(X)$ и $L_2(X)$, за да избегнеме често пишување на линеарните триноми што овие симболи ги означуваат. Ако во овие триноми треба x_1, x_2 да ги замениме со координатите на некоја точка P, ќе го бележиме тоа со $L_1(P)$ одн. со $L_2(P)$.

Ќе претпоставиме прво дека правите (20) не се паралелни, и ќе ја разгледаме равенката

$$\lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) = 0, \tag{21}$$

или, уредена по x_1, x_2,

$$(\lambda_1A_1 + \lambda_2B_1)\,x_1 + (\lambda_1A_2 + \lambda_2B_2)\,x_2 + \lambda_1A_3 + \lambda_2B_3 = 0, \tag{21'}$$

во која λ_1 и λ_2 се две произволни константи. Оваа равенка е линеарна по x_1, x_2, па затоа таа претставува една права, ако двата коефициенти пред x_1 и x_2 не се еднакви на нула, т. е. ако не е

$$\lambda_1A_1 + \lambda_2B_1 = 0, \quad \lambda_1A_2 + \lambda_2B_2 = 0. \tag{22}$$

Ова е една система хомогени линеарни равенки по λ_1, λ_2; нејзината детерминанта, бидејќи правите (20) — по претпоставка — не се паралелни, е различна од нула, и затоа равенките (22) се задоволени само за $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Равенката (21) претставува, значи, секогаш една права, освен за случајот $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ако P е пресечната точка на правите (20), е $L_1(P)=0$ и $L_2(P)=0$, а затоа и $\lambda_1L_1(P) + \lambda_2L_2(P)=0$, и тоа без оглед на тоа какви се константите λ_1, λ_2. А тоа значи дека точката P лежи на правата (21), т. е. правата (21) минува низ пресекот на правите (20).

Обратно, равенката на секоја права што минува низ P може да се напише во облик (21). Една произволна таква права е определена со која да е точка Q, различна од P. Ставувајќи ги координатите од Q наместо x_1, x_2 во (21), добиваме

$$\lambda_1 \cdot L_1(Q) + \lambda_2 \cdot L_2(Q) = 0. \tag{23}$$

Оваа равенка определува еден однос $\lambda_1 : \lambda_2$, бидејќи обата коефициенти пред λ_1 и λ_2 не се нула. Ако беше имено $L_1(Q) = L_2(Q) = 0$, тогаш Q ќе лежеше на обете прави, што е спротивно на претпоставката дека Q не е пресек на тие прави. За $\lambda_1 = L_2(Q)$, $\lambda_2 = -L_1(Q)$ равенката (23) е задоволена. Ставувајќи ги овие вредности за λ_1, λ_2 во (21), добиваме

$$L_2(Q) \cdot L_1(X) - L_1(Q) \cdot L_2(X) = 0,$$

што е бараната равенка на правата PQ. Таа, навистина, има облик (21), а задоволена е со координатите на Q.

На тој начин покажавме дека, *при секоја вредност на односот* $\lambda_1 : \lambda_2$, *равенката* (21) *претставува една права која минува низ пресекот на непаралелните прави* (20); *а и обратно, секоја права во рамнината што минува низ овој пресек има равенка што може да се доведе во облик* (21).

Целокупноста од сите прави во рамнината што врват низ една иста точка P се вика *сноп прави*, а точката P — негов *центар*.

Ако λ_1 и λ_2 во (21) не се дадени нумерично, туку е оставено за нив да можеме да избираме произволни вредности, тогаш ќе кажеме дека равенката (21) е *равенка на снопот прави со центар P*. Расположивите константи λ_1, λ_2 ги викаме *параметри* на правите од снопот. Ако параметрите λ_1, λ_2 определуваат една права од тој сноп, тогаш и параметрите $\rho\lambda_1$, $\rho\lambda_2$, при произволен $\rho \neq 0$, ја определуваат истата права. Затоа параметрите λ_1, λ_2 ги викаме *хомогени*.

Ставувајќи $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$, равенката на снопот добива вид

$$L_1(X) + \lambda L_2(X) = 0. \tag{24}$$

На секоја вредност на *нехомогениот параметар* λ добиваме една права од снопот, и обратно. Само правата $L_2(X) = 0$ од снопот, која одговара на $\lambda_1 = 0$, не е опфатена со равенката (24).

2. Равенка на сноп паралелни прави. Сега ќе испитаме што претставува равенката (21) одн. (21′), ако правите (20) се паралелни. Значи, нека важи (16). Пропорционалниот множител λ во (16) ќе го бележиме сега со λ^*, па имаме $B_1 = \lambda^* A_1$, $B_2 = \lambda^* A_2$. Правата (21′) е паралелна со векторот

$$\begin{aligned}\{-(\lambda_1 A_2 + \lambda_2 B_2),\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1\} &= \{-(\lambda_1 A_2 + \lambda_2 \lambda^* A_2),\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 \lambda^* A_1\} \\ &= (\lambda_1 + \lambda^* \lambda_2) \cdot \{-A_2, A_1\},\end{aligned}$$

т. е. со векторот што е паралелен со првата права. Правата (21′) е, значи, паралелна со паралелните прави (20). На ист начин како во т. 1 се убедуваме дека секоја права, која е паралелна со правите (20), има равенка што може да се доведе на облик (21). Целокупноста на сите прави од рамнината што се паралелни со еден зададен правец ја викаме *сноп паралелни прави*. Спрема тоа:

Равенката (21), *во која* λ_1, λ_2 *се расположиви параметри, е равенка на еден сноп паралелни прави, ако правите* (20) *се паралелни, но не и совпаднати.*

Треба да забележиме да, додека помеѓу правите од еден сноп прави со центар и односите на нивните хомогени параметри постои една обратно-еднозначна кореспонденција, тоа при снопот паралелни прави постои еден исклучок. На параметрите λ_1 и λ_2 можеме имено да им дадеме и такви вредности, не двете еднакви на нула, да коефициентите пред x_1 и x_2 во (21) бидат нула, т. е. да важи (22). Навистина, при претпоставката да правите (20) се паралелни, системата (22) има нетривијално решение по λ_1, λ_2, имено $\lambda_1 : \lambda_2 = — B_1 : A_1$.

Равенката (21) при $\lambda_1 = — B_1, \lambda_2 = A_1$, значи, не претставува права, туку станува апсурдна еднаквост. А за сите други вредности на односот $\lambda_1 : \lambda_2$ таа претставува права.

ПРИМЕРИ

1. Да се напише равенката на правата што минува низ пресекот на правите $2x_1 + 3x_2 — 6 = 0$ и $x_1 — 4x_2 + 1 = 0$ и низ точката (8, 2).

Решение. Бараната равенка е од обликот

$$(25) \qquad 2x_1 + 3x_2 — 6 + \lambda \cdot (x_1 — 4x_2 + 1) = 0.$$

Параметарот λ ќе го определиме од условот да правата минува низ точката (8, 2). Заменувајќи во оваа равенка $x_1 = 8$, $x_2 = 2$, добиваме

$$2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 — 6 + \lambda \cdot (8 — 4 \cdot 2 + 1) = 0,$$

од каде $\lambda = — 16$. Сменувајќи ја оваа вредност за λ во (25), добиваме

$$2x_1 + 3x_2 — 6 — 16 \cdot (x_1 — 4x_2 + 1) = 0$$

или

$$14x_1 — 67x_2 + 22 = 0,$$

што е бараната равенка.

2. Во снопот (25) да се определи онаа права која е: *a*) паралална со x_1-оската; *b*) паралелна со x_2-оската; *c*) паралелна со правата $6x_1 — 2x_2 + 1 = 0$.

Решение. Равенката (25) ја уредуваме по x_1 и x_2:

$$(2 + \lambda)\, x_1 + (3 — 4\lambda)\, x_2 — 6 + \lambda = 0.$$

a) Во равенките на правите, паралелни со x_1-оската, коефициентот пред x_1 е нула. Во нашиот случај треба, значи, λ да се избере така да биде $3 — 4\lambda = 0$, значи $\lambda = 3/4$. Добиената вредност за λ ја заменуваме во (25), па добиваме $11x_2 — 8 = 0$. Тоа е равенка на правата од снопот (25) што е паралелна со x_1-оската.

b) Ако го избереме λ така да коефициентот пред x_2 во (25) е нула, т. е. да е $2 + \lambda = 0$, ја добиваме, заменувајќи го $\lambda = — 2$ во (25), за правата од снопот што е паралелна со x_2-оската равенката $11x_1 — 21 = 0$.

c) За да правата (25) биде паралелна со правата $6x_1 — 2x_2 + 1 = 0$, треба λ да има таква вредност, агловите коефициенти на обете прави да бидат еднакви, значи $(2+\lambda)/(-3+4\lambda)=3$, од каде добиваме $\lambda=1$. Ставувајќи $\lambda=1$ во (25), ја добиваме бараната равенка, имено $3x_1-x_2-5=0$.

3. Покажи дека правите $(2\lambda+1)\,x_1+(\lambda-3)\,x_2-5\lambda+1=0$, каде што λ е произволен, минуваат низ една точка и определи ја таа точка.

Решение. Дадената равенка ја уредуваме по λ:

$$(x_1-3x_2+1)+\lambda\,(2x_1+x_2-5)=0.$$

Обликот на оваа равенка покажува дека правите му припаѓаат на снопот прави што е определен со правите $x_1-3x_2+1=0$, $2x_1+x_2-5=0$. Низ нивниот пресек $P(2,\ 1)$ минуваат, спрема таа, сите прави.

4. Да се напишат равенките на дијагоналите и средните линии од паралелограмот чии што страни се дадени со равенките $a_1x_1+a_2x_2+a=0$, $b_1x_1+b_2x_2+b=0$, $a_1x_1+a_2x_2+a'=0$, $b_1x_1+b_2x_2+b'=0$.

Решение. Равенката на едната од дијагоналите може да се запише во вид

$$a_1x_1+a_2x_2+a+\lambda\,(b_1x_1+b_2x_2+b)=0,$$

а и во вид

$$a_1x_1+a_2x_2+a'+\lambda'\,(b_1x_1+b_2x_2+b')=0,$$

при подесни вредности на параметрите λ и λ', кои треба да ги определиме. Бидејќи овие равенки претставуваат иста права, тоа нивните соодветни коефициенти се пропорционални, значи

$$\frac{a_1+\lambda b_1}{a_1+\lambda' b_1}=\frac{a_2+\lambda b_2}{a_2+\lambda' b_2}=\frac{a+\lambda b}{a'+\lambda' b'},$$

од каде следува $\lambda=\lambda'=-(a-a')/(b-b')$. Заменувајќи ја оваа вредност за λ во равенката на снопот, ја добиваме за едната дијагонала равенката

$$(b-b')\,(a_1x_1+a_2x_2+a)-(a-a')\,(b_1x_1+b_2x_2+b)=0.$$

На аналоген начин ја добиваме за другата дијагонала равенката:

$$(b-b')\,(a_1x_1+a_2x_2+a')+(a-a')\,(b_1x_1+b_2x_2+b)=0.$$

Собирајќи ги овие две равенки, добиваме равенка на една права од снопот со центар во пресекот на дијагоналите. Зашто ако $L_1(X)=0$ и $L_2(X)=0$ се равенки на две прави од еден сноп, тогаш му припаѓа на снопот и правата $L_1(X)+L_2(X)=0$; нејзиниот нехомоген параметар е $\lambda=1$. По скратувањето со $2(b-b')\neq 0$ добиваме

$$a_1x_1+a_2x_2+\frac{a+a'}{2}=0.$$

Оваа равенка ја претставува правата што е паралелна со правата $a_1x_1+a_2x_2+a=0$, а врви низ пресекот на дијагоналите. Тоа е, значи, равенка на едната од средните линии на паралелограмот. За другата средна линија добиваме на аналоген начин

$$b_1x_1+b_2x_2+\frac{b+b'}{2}=0.$$

5. Теорема на Дезаргес. На овој пример ќе покажеме како симболиката, воведена во т. 1, може корисно да се употреби.

Во рамнината нека ни бидат зададени два триаголници $T_1T_2T_3$ и $T_1'T_2'T_3'$. Темињата T_1, T_2, T_3 ќе ги викаме *соодветни* на T_1', T_2' одн. на T_3'; а исто така страните T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1 од првиот триаголник ќе ги викаме *соодветни* на страните $T_1'T_2'$, $T_2'T_3'$ одн. на $T_3'T_1'$ од вториот триаголник. Равенките на страните нека бидат по ред:

$$L_3 = 0,\ L_1 = 0,\ L_2 = 0, \text{ и } L_3' = 0,\ L_1' = 0,\ L_2' = 0.$$

Левите страни на равенките на правите ги означивме тука место со $L\,(X)$, заради поголемо упростување, со L.

I. Ќе претпоставиме прво дека триаголниците имаат таква заемна положбата да правите T_1T_1', T_2T_2', T_3T_3' му припаѓаат на еден сноп, т. е. да минуваат низ една точка или да се паралелни.

Правата T_3T_3' му припаѓа како на снопот, определен со правите $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, така и на снопот на кој му припаѓаат правите $L_1' = 0$, $L_2' = 0$. Затоа равенката на оваа права може да се напише во овие два вида

$$L_1 + \lambda_2 L_2 = 0, \quad L_1' + \lambda_2' L_2' = 0. \tag{26}$$

Правата T_2T_2' му припаѓа на снопот, определен со правите $L_1 = 0$, $L_3 = 0$, а и на снопот, определен со правите $L_1' = 0$, $L_3' = 0$. Затоа равенката на правата T_2T_2' може да се напише во овие два облика

$$L_1 + \lambda_3 L_3 = 0, \quad L_1' + \lambda_3' L_3' = 0. \tag{27}$$

Бидејќи равенките (26) претставуваат една иста права, а исто така и равенките (27), тоа постојат такви константи μ_1 и μ_1' (§ 52, т. 2, зад. 1) да важи идентично

$$L_1 + \lambda_2 L_2 \equiv \mu_1 \cdot (L_1' + \lambda_2' L_2'); \quad L_1 + \lambda_3 L_3 \equiv \mu_1' \cdot (L_1' + \lambda_3' L_3').$$

Со вадењето на овие два идентитета добиваме

$$\lambda_2 L_2 - \lambda_3 L_3 \equiv \mu_1 \lambda_2' L_2' - \mu_1' \lambda_3' L_3' + (\mu_1 - \mu_1')\, L_1'.$$

Секој од овие два идентично еднакви изрази, изедначен со нула, дава равенка на една права од снопот, определен со правите (26) и (27). А изразот од левата страна покажува дека таа права му припаѓа и на снопот со центар во T_1. Но таа права, по претпоставка, минува и низ точката T_1'. Затоа, ако во кои да е од горните два изрази ги смениме координатите од T_1', ќе добиеме за нивните бројни вредности нула. Ако го сториме тоа со изразот од десната страна, добиваме, поради $L_2'(T_1') = 0$ и $L_3'(T_1') = 0$,

$$(\mu_1 - \mu_1') \,.\, L_1'\,(T_1') = 0.$$

Но бидејќи, по претпоставка, T_1' не лежи на правата $L_1' = 0$, е $L_1'(T_1') \neq 0$ и затоа $\mu_1 = \mu_1'$. Ставувајќи $\mu_1 \lambda_2' = \mu_2'$, $\mu_1 \lambda_3' = \mu_3'$, добиваат горните идентитети овој облик:

$$\begin{gathered} L_1 + \lambda_2 L_2 \equiv \mu_1' L_1' + \mu_2' L_2', \quad L_1 + \lambda_3 L_3 \equiv \mu_1' L_1' + \mu_3' L_3', \\ \lambda_2 L_2 - \lambda_3 L_3 \equiv \mu_2' L_2' - \mu_3' L_3'. \end{gathered} \tag{28}$$

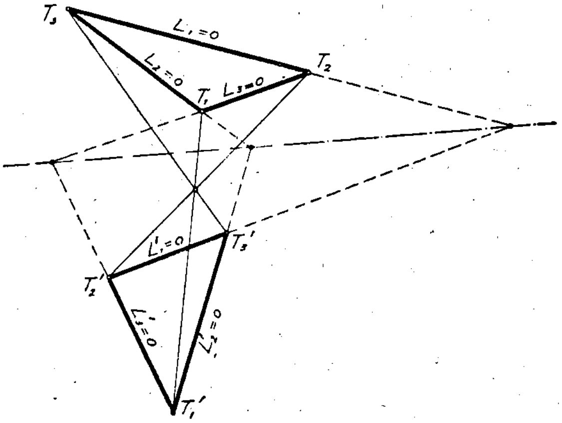
Оттука следуваат идентитетите

$$L_1 - \mu_1' L_1' \equiv \mu_2' L_2' - \lambda_2 L_2 \equiv \mu_3' L_3' - \lambda_3 L_3. \tag{29}$$

Да претпоставиме прво да овие три идентични изрази ги содржуваат променливите x_1, x_2. Тогаш секој од нив, изедначен со нула, дава равенка на една иста права. Облиците на овие равенки покажуваат дека таа му припаѓа како на снопот, определен со правите $L_1 = 0$, $L_1' = 0$, така и на снопот, определен со правите $L_2 = 0$, $L_2' = 0$, а и на снопот, определен со $L_3 = 0$, $L_3' = 0$. Соодветните страни на дадените два триаголници се пресекуваат, значи, на оваа права.

Ако пак идентично еднаквите изрази во (29) не содржат x_1, x_2, т. е. ако се константни, тогаш паровите прави $L_1 = 0$, $L_1' = 0$; $L_2 = 0$, $L_2' = 0$, $L_3 = 0$, $L_3' = 0$ се паралелни.

II. Обратно, ако соодветните страни на триаголниците $T_1T_2T_3$ и $T_1'T_2'T_3'$ се пресекуваат на една права или се паралелни, постојат такви константи μ_1' μ_2', μ_3', λ_2, λ_3 да важи (29). Оттука следуваат идентитетите (28), при кои разликата на првите два идентитети е еднаква на третиот. Тие изрази, изедначени со нула, претставуваат, значи, равенки на три прави што му припаѓаат на еден ист сноп. Првата од овие три прави пак му припаѓа како на снопот со центар во $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, така и на снопот со центар во $L_1' = 0$, $L_2' = 0$, т. е. таа е правата T_3T_3'. Втората права е T_2T_2', а третата T_1T_1'. Сврзниците на кореспондентните темиња му припаѓаат, значи, на еден ист сноп.



Сл. 77

Со тоа ја докажавме оваа теорема:

Ако правите што ги сврзуваат соодветните темиња на два триаголници во рамнината му припаѓаат на еден сноп, тогаш соодветните страни на триаголниците се сечат на една права или се паралелни.

И обратно, ако овие парови прави се сечат на една права или се паралелни, тогаш правите што ги сврзуваат соодветните темиња на триаголниците му припаѓаат на еден сноп.

Вториот дел од теоремата се вика *теорема на Дезаргес*.

ЗАДАЧИ

Во зад. 1—5 да се определи равенката на правата што минува низ пресекот на дадените прави и го задоволува зададениот услов.

1. $x_1+3x_2-4=0$, $5x_1-2x_2+1=0$; минува низ (1, 2).
2. $x_1/a_1+x_2/a_2=1$, $x_1/a_2+x_2/a_1=1$; минува низ (0, 0).
3. $5x_1-2x_2-3=0$, $2x_1+x_2=0$; паралелна со $x_1+x_2-1=0$.
4. $x_2=a_1x_1+a_2$, $x_2=b_1x_1+b_2$; паралелна со $A_1x_1+A_2x_2+A_3=0$.
5. $A_1x_1+A_2x_2+A_3=0$, $B_1x_1+B_2x_2+B_3=0$; паралелна со правата што ги сврзува точките (a_1, a_2) и (b_1, b_2).

6. Покажи дека правите $x_1 + tx_2 + 1 = 0$ минуваат низ една точка. Определи ги координатите на таа точка.

7. Покажи дека равенката $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$, во која A_1, A_2, A_3 се линеарни функции од еден параметар, претставува еден сноп прави.

8. Кога равенката $(a_1t + b_1)\,x_1 + (a_2t + b_2)\,x_2 + a_3t + b_3 = 0$, во која t е произолен параметар, претставува сноп паралелни прави?

Покажи дека равенките во зад. 9 и 10 претставуваат равенки од еден ист сноп и покажи каква релација постои меѓу параметрите λ и μ од една иста права од снопот.

9. $(1 + \lambda)x_1 + (1 - \lambda)x_2 + \lambda = 0$, $x_1 + (1 - 2\mu)x_2 + \mu = 0$.

10. $(2 - 2\mu)x_1 + (3 - 3\lambda)x_2 - 6\lambda = 0$, $4x_1 + 6x_2 + 3\mu = 0$.

11. За кои вредности на λ и μ претставуваат равенките

$$2\lambda x_1 + (1 + \lambda)x_2 + 3\lambda + 1 = 0,\ (2\mu - 1)x_1 + (\mu + 1)x_2 - 3\mu = 0$$

една иста иста права? Која е таа права?

12. Определи го геометриското место на оние прави, определени со равенките

$$21\lambda x_1 + 4x_2 + 42\lambda + 12 = 0,\ (1 - 2\lambda)\,x_1 + \lambda x_2 - 2 - 7\lambda = 0,$$

кои ги добиваме при еднакви вредности за λ во двете равенки.

3. Услов да три прави му припаѓаат на еден сноп. Зададени нека ни се равенки на три прави

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \\ L_2 &\equiv B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0 \\ L_3 &\equiv C_1x_1 + C_2x_2 + C_3 = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Левите страни ги означивме со L_1, L_2, L_3.

Ако правите (30) се различни и му припаѓаат на еден ист сноп, може, на пр., третата равенка да се доведе во облик

$$\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2 \equiv (\lambda_1A_1 + \lambda_2B_1)\,x_1 + (\lambda_1A_2 + \lambda_2B_2)\,x_2 + (\lambda_1A_3 + \lambda_2B_3) = 0.$$

Коефициентите на оваа равенка се пропорционални со коефициентите на $L_3 = 0$. Ако коефициентот на пропорционалноста го бележиме со $-\lambda_3$, имаме тогаш

$$-\lambda_3C_i = \lambda_1A_i + \lambda_2B_i,\ (i = 1, 2, 3), \tag{31}$$

или

$$\lambda_1A_i + \lambda_2B_i + \lambda_3C_i = 0\ (i = 1, 2, 3). \tag{32}$$

Бидејќи сите коефициенти λ_1, λ_2, λ_3 не се нула, тоа системата (32) има нетривијални решенија по λ_1, λ_2, λ_3. А затоа е потребно, детерминантата на системата да биде нула, значи — заменувајќи ги редовите со колоните:

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

И во случај кога сите прави (30) не се различни, важи (33). Навистина, тогаш елементите барем од два реда во детерминантата од левата страна на (33) се соодветно пропорционални, што значи дека детерминантата е нула.

Значи, ако правите (30) му припаѓаат на еден сноп, важи (33).

Нека сега важи обратно: нека биде задоволена релацијата (33). Тогаш системата (32) има нетривијални решенија по λ_1, λ_2, λ_3. Ако е на пр. $\lambda_3 \neq 0$, следува од системата (31), ако првата нејзина равенка ја помножиме со x_1, втората со x_2, а третата со 1, и потоа ги соберене, идентитетот

$$(34)\qquad -\lambda_3 L_3 \equiv \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2.$$

Обата коефициенти λ_1, λ_2 не се нула, оти во спротивен случај би биле нула сите коефициенти од L_3. Затоа идентитетот (34) покажува дека правата $L_3 = 0$ му припаѓа на снопот што е определен со $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$.

Спрема тоа:

[1] *За да правите* (30) *му припаѓаат на еден ист сноп е потребно и доволно да важи* (33).

Ќе изведеме уште еден критериј за тоа, правите (30) да му припаѓаат на еден сноп.

Ако правите (30) му припаѓаат на еден сноп, важи (33), а затоа и (34) односно

$$(35)\qquad \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 \equiv 0.$$

Нека сега важи (35), каде што сите константи λ_1, λ_2, λ_3 не се нула. Нека е, на пр., $\lambda_3 \neq 0$. Тогаш имаме, ставувајќи $\lambda = -\lambda_1/\lambda_3$ и $\mu = -\lambda_2/\lambda_3$,

$$L_3 \equiv \lambda L_1 + \mu L_2.$$

Обата коефициенти λ, μ не се нула, оти инаку би било $L_3 \equiv 0$. Правата $L_3 = 0$ му припаѓа, значи, на снопот што е определен со $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$.

Спрема тоа:

[2] *За да правите* (30) *му припаѓаат на еден ист сноп потребно е и доволно да постојат такви константи* λ_1, λ_2, λ_3, *не сите еднакви на нула, да важи идентитетот* (35).

Пример. Покажи дека тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Избираме кој да е триаголник ABC, а потоа координатната система $(O; e_1, e_2)$ со $O \equiv A$, $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$. Во таа система е $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 0)$, $C\,(0, 1)$. Равенките на тежишните линии се тогаш

$$L_1 \equiv x_1 - x_2 = 0, \; L_2 \equiv x_1 + 2x_2 - 1 = 0, \; L_3 \equiv 2x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Бидејќи е

$$L_1 + L_2 - L_3 \equiv 0,$$

тоа правите $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, на основа [2], му припаѓаат на еден сноп. Бидејќи тие не се паралелни, се сечат во една точка.

Тоа се гледа и оттаму што е

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

со оглед на [1].

ЗАДАЧИ

1. Определи го λ така да зададените прави му припаѓаат на еден сноп:

$$(a_1 + \lambda)\, x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0, \; a_1x_1 + (a_2 + \lambda)\, x_2 + a_3 = 0, \; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 + \lambda = 0.$$

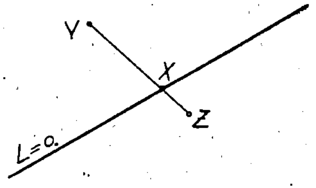
2. Како гласи потребниот и доволниит услов да произволниот број прави му припаѓаат на еден ист сноп?

§ 54. Геометриско толкување на линеарниот трином

1. Геометриското значење на односот на два тринома со исти коефициенти. Нека ни е зададен линеарниот трином

$$L \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 \tag{36}$$

и точките $Y(y_1, y_2)$ и $Z(z_1, z_2)$ во однос на една избрана афина координатна система. Ќе испитаме какво геометриско значење има односот



Сл. 78

$$k = \frac{L\,(Y)}{L\,(Z)} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3}{A_1z_1 + A_2z_2 + A_3}. \tag{37}$$

Од (37) следува

$$A_1\,(y_1 - kz_1) + A_2\,(y_2 - kz_2) + A_3\,(1 - k) = 0. \tag{38}$$

Точката X со координатите

$$x_1 = \frac{y_1 - kz_1}{1 - k}, \quad x_2 = \frac{y_2 - kz_2}{1 - k} \quad (k \neq 1) \tag{39}$$

лежи на правата $L = 0$. А равенките (39) покажуваат (§ 14, т. 2) дека X е точката која отсечката YZ ја дели во однос $-k$, т. е. $\overrightarrow{YX} : \overrightarrow{XZ} = -k$. Одавде и од (37) следува

$$\frac{\overrightarrow{YX}}{\overrightarrow{XZ}} = -\frac{L(Y)}{L(Z)}. \tag{40}$$

Односот $L(Y) : L(Z)$, ако е $\neq 1$, е еднаков, значи, на негативниот однос во кој правата $L = 0$ ја сече отсечката YZ.

А ако е $k = 1$, равенката (38) гласи

$$A_1 (y_1 - z_1) + A_2 (y_2 - z_2) = 0.$$

Таа покажува дека векторот $\overrightarrow{YZ}$ е паралелен со правата $L = 0$.

[3] *Ако е $L(Y) : L(Z) = 1$, тогаш правата YZ е паралелна со правата $L = 0$.*

ПРИМЕРИ

1. Теоремата на Менелаос. Страните на еден триаголник ABC ги пресечуваме со една права чија што равенка нека е $L(X) = 0$. Оваа права нека ги сече страните BC, CA и AB по ред во точките A_1, B_1, C_1. Од (40) следува

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = (-1)^3 \cdot \frac{L(A)}{L(B)} \cdot \frac{L(B)}{L(C)} \cdot \frac{L(C)}{L(A)} = -1,$$

со што е докажана *теоремата на Менелаос*, формулирана во § 8, т. 9.

2. Да се докаже теоремата на Чева.

Решение. Страните BC, CA, AB на еден триаголник ABC нека се $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$. Која да е права што минува низ C има равенка од облик

$$L_1 + \lambda L_2 = 0.$$

За онаа од овие прави што минува низ една зададена точка T го определуваме λ од

$$L_1(T) + \lambda L_2(T) = 0.$$

Правата CT има, значи, равенка

$$L_2(T) \cdot L_1 - L_1(T) \cdot L_2 = 0.$$

Ако правата CT ја сече страната AB во C_1, имаме

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -\frac{L_1(A) \cdot L_2(T) - L_2(A) \cdot L_1(T)}{L_1(B) \cdot L_2(T) - L_2(B) \cdot L_1(T)}.$$

Поради $L_2(A) = 0$ и $L_1(B) = 0$ добиваме тогаш

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{L_1(A) \cdot L_2(T)}{L_2(B) \cdot L_1(T)} \cdot \tag{41}$$

Обележувајќи ги пресеците на BT и AC со B_1, на AT и BC со A_1, добиваме, по аналогија,

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{L_2(B) \cdot L_3(T)}{L_3(C) \cdot L_2(T)}, \quad \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{L_3(C) \cdot L_1(T)}{L_1(A) \cdot L_3(T)} \cdot \tag{42}$$

Помножувајќи ги еднаквостите (41) и (42), добиваме на крај

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1,$$

која релација ја изразува *теоремата на Чева.*

ЗАДАЧИ

1. Дадена е една права $L \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$ и една точка $A\ (a_1, a_2)$. Да се определи геометриското место на точките X, такви да правата $L = 0$ ја располовува отсечката AX.

2. Користејќи ја теоремата [3], да се напише равенката на правата што минува низ точката $A(a_1, a_2)$, а е паралелна со правата $L = 0$.

3. Во рамнината е зададен еден многуаголник $T_1T_2 \ldots T_n$. Една произволна права ги сече неговите страни T_1T_2, $T_2T_3, \ldots, T_{n-1}T_n$, T_nT_1 по ред во точките M_1, $M_2, \ldots$, M_{n-1}, M_n. Докажи дека важи

$$\frac{\overrightarrow{T_1M_1}}{\overrightarrow{M_1T_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{T_2M_2}}{\overrightarrow{M_2T_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\overrightarrow{T_{n-1}M_{n-1}}}{\overrightarrow{M_{n-1}T_n}} \cdot \frac{\overrightarrow{T_nM_n}}{\overrightarrow{M_nT_1}} = (-1)^n$$

(Обопштена теорема на Менелаос).

2. Геометриско значење на знакот на линеарниот трином. Нека бидат Y и Z кои да е две точки, а $L = 0$ која да е права во рамнината.

Да претпоставиме прво да правата YZ не е паралелна со правата $L = 0$. Тогаш тие имаат една заедничка точка X. Ако Y и Z се на иста страна од правата $L = 0$, е $\overrightarrow{YX} : \overrightarrow{XZ} < 0$, и затоа, спрема (40), $L(Y) : L(Z) > 0$; $L(Y)$ и $L(Z)$ имаат еднакви знаци. А ако Y и Z се на различни страни на правата $L = 0$, е $\overrightarrow{YX} : \overrightarrow{XZ} > 0$, и затоа $L(Y) : L(Z) < 0$; $L(Y)$ и $L(Z)$ имаат различни знаци.

А ако YZ е паралелна со правата $L = 0$, е, спрема [3], $L(Y) = L(Z)$. И тука $L(Y)$ и $L(Z)$ имаат еднакви знаци.

Од горното следува дека $L(Y)$ и $L(Z)$ имаат еднакви или спротивни знаци според тоа дали Y и Z се на иста или спротивна страна од правата $L = 0$. Значи:

Линеарниот трином $L \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3$ *има ист знак за сите точки* (x_1, x_2) *кои лежат на една иста страна на правата* $L = 0$. *За точките на различни страни на таа права триномот има различни знаци.*

ЗАДАЧИ

1. Да се реши графички системата неравенки

$$2x_1 + 3x_2 - 6 > 0,\ 3x_1 - x_2 + 3 < 0,\ 2x_1 - 5x_2 - 10 < 0,\ x_2 + 1 > 0.$$

2. Да се реши графички неравенката

$$(x_2 + 1)(2x_1 + 3x_2 - 6)(3x_1 - x_2 + 3)(2x_1 - 5x_2 - 10) < 0.$$

§ 55. Пар прави

1. Равенка на еден пар прави што минуваат низ координатниот почеток. Ќе ја изведеме и продискутираме сега равенката што претставува две прави што минуваат низ координатниот почеток. Равенки на такви две прави имаат облик

$$(43) \qquad A_1x_1 + A_2x_2 = 0, \quad B_1x_1 + B_2x_2 = 0.$$

На овие две равенки е еквивалентна равенката

$$(44) \qquad (A_1x_1 + A_2x_2)(B_1x_1 + B_2x_2) = 0,$$

т. е. секое решение на која да е од равенките (43) е и решение на (44), а и обратно, секое решение од (44) е и решение на барем едната од равенките (43). Помножувајќи ги биномите од левата страна на (44), добиваме

$$(45) \qquad a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

каде што е ставено

$$a_{11} = A_1B_1, \quad 2a_{12} = A_1B_2 + A_2B_1, \quad a_{22} = A_2B_2.$$

Поради поголема симетричност на формулите ќе ставиме $a_{12} = a_{21}$.

Равенката (45), која во однос на некоја избрана координатна система ни ги претставува правите (43) што минуваат низ координатниот почеток, е *хомогена равенка од втора степен* во однос на x_1, x_2.

Да испитаме сега, обратно, што претставува една произволно зададена равенка од видот (45). Претпоставуваме да барем еден од коефициентите a_{ik} во (45) не е нула. Ако е $a_{11} = a_{22} = 0$, е $a_{12} \neq 0$; равенката добива вид $a_{12}x_1x_2 = 0$, која е еквивалентна на равенките $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Во овој случај равенката (45) ги претставува координатните оски. — Да ја разгледаме сега можноста, еден од коефициентите a_{11} и a_{22} да е различен од нула. Нека е, на пр., $a_{11} \neq 0$. Ја помножуваме равенката (45) со a_{11}, ги дополнуваме првите два члена до полен квадрат, со што добиваме

$$(46) \qquad (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\, x_2^2 = 0.$$

Ако е

$$(47) \qquad \Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

еднакво на нула, тогаш равенката (45) е еквивалентна на $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 = 0$, а оваа на

$$(48) \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0.$$

Значи, *ако е* $a_{11} \neq 0$ *и* $\Delta_2 = 0$, *равенката* (45) *ја претставува правата чија равенка е* (48).

Ако е $\Delta_2 < 0$, ќе ставиме $\Delta_2 = -b_{12}^2$. Во овој случај левата страна од (46) е разлика на два квадрати. Затоа (46) може да се пише во обликот

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{12}x_2)\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_{12}x_2) = 0.$$

Оваа равенка е еквивалелнтна на две равенки: $a_{11}x_1 + (a_{12} \pm b_{12})\, x_2 = 0$.

Кога е $a_{11} \neq 0$ *и* $\Delta_2 < 0$, *претставува равенката* (45) *две прави чии што равенки се* $a_{11}x_1 + (a_{12} + b_{12})\, x_2 = 0$ *и* $a_{11}x_1 + (a_{12} - b_{12})\, x_2 = 0$.

А ако е $\Delta_2 > 0$, тогаш левата страна од (46) е збир од два изрази што не се негативни. Равенката има едно единствено решение, имено $x_1 = x_2 = 0$. Следствено:

Ако е $a_{11} \neq 0$ *и* $\Delta_2 > 0$, *равенката* (45) *ја претставува точката* (0, 0).

Аналогно важи ако е $a_{22} \neq 0$. А бидејќи при разгледаниот веќе случај $a_{11} = a_{22} = 0$ имаме $\Delta_2 = -a_{12}^2 < 0$, тоа важи оваа општа теорема:

Равенката (45) *претставува еден пар прави низ координатниот почеток, една права низ координатниот почеток или самиот координатен почеток — според тоа дали детерминантата* Δ_2 *од* (47) *е негативна, нула или позитивна.*

ПРИМЕРИ

1. Што претставува геометриски равенката $12x_1^2 - 5x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$?

Решение. *I. метода.* Имаме

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -5/2 \\ -5/2 & -2 \end{vmatrix} = -121/4; \quad b_{12} = 11/2.$$

Равенките на правите се

$$12\,x_1 + (-5/2 + 11/2)\,x_2 = 0, \quad 12\,x_1 + (-5/2 - 11/2)\,x_2 = 0,$$

или

$$4x_1 + x_2 = 0, \quad 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

II. метода. Дадената равенка ја решаваме по x_1 како квадратна равенка, па добиваме

$$x_1 = \frac{5\,x_2 \pm \sqrt{(5\,x_2)^2 + 4 \cdot 12 \cdot 2\,x_2^2}}{2 \cdot 12} = \frac{5\,x_2 \pm 11\,x_2}{24},$$

од каде

$$24x_1 = 16x_2, \qquad 24x_1 = -6x_2,$$

или

$$3x_1 - 2x_2 = 0, \quad 4x_1 + x_2 = 0.$$

2. Равенка на еден пар произволни прави. Равенките на две прави.

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0, \quad B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0$$

се еквивалентни на равенката

$$(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3)(B_1x_1 + B_2x_2 + B_3) = 0, \tag{40}$$

која поради тоа ја викаме *равенка на тие две прави*. Ако го извршиме назначеното множење од левата страна, равенката (49) добива вид

$$a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0, \tag{50}$$

каде што е

$$\begin{aligned} &a_{11} = A_1B_1, \quad a_{22} = A_2B_2, \quad a_{33} = A_3B_3 \\ &2a_{12} = 2a_{21} = A_1B_2 + A_2B_1, \quad 2a_{13} = 2a_{31} = A_1B_3 + A_3B_1, \\ &2a_{23} = 2a_{32} = A_2B_3 + A_3B_2. \end{aligned} \tag{51}$$

Равенката на еден пар прави е, значи, од втора степен во однос на x_1, x_2. Но, секоја таква равенка не претставува две прави. Равенката $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$, на пр., не претставува ништо. Затоа коефициентите a_{ik} во (50), ако таа претставува две прави, задоволуваат некој услов, кој сега ќе го изведеме. При произволни вредности за A_i и B_i важи

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & 0 \\ A_3 & B_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Извршувајќи го множењето од левата страна на овој идентитет по правилото за множење на детерминантите, комбинирајќи ги редовите од првата со колоните од втората, добиваме, користејќи ги ознаките (51),

$$(52) \qquad \Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Тоа е условот што го задоволуваат a_{ik}, ако (50) претставува еден пар прави. Обратно не важи. При равенката $x_1^2 + 1 = 0$, на пр., е $\Delta_3 = 0$, но равенката не претставува ништо.

Детерминантата Δ_3 ја викаме *дискриминанта* на равенката (50).

Покажавме:

Потребен, но не и доволен, услов за тоа, една равенка од втора степен (50) *да претставува еден пар прави, е нејзината дискриминанта да биде нула.*

ПРИМЕР. Дали постои таков λ да равенката

$$(53) \qquad 4x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_2^2 - 8x_1 - 18x_2 - \lambda = 0$$

претставува еден пар прави?

Решение. Ако таква вредност за λ постои, тогаш таа е решение на равенката

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & -6 & -9 \\ -4 & -9 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

по λ. Тоа е $\lambda = 12$. Оваа вредност ја заменуваме во (53), па добиваме, по скратувањето со 2, $2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 - 4x_1 - 9x_2 - 6 = 0$. За да испитаме дали оваа равенка навистина претставува еден пар прави, ќе ја решиме по x_1, спрема правилото за решавање на квадратни равенки, сметајќи го x_2 како познато. Уредувајќи ја равенката по степените од x_1, добиваме

$$2x_1^2 - (x_2 + 4)\, x_1 - (3x_2^2 + 9x_2 + 6) = 0.$$

Нејзините решенија по x_1 се

$$x_1 = 1/4 \left[x_2 + 4 \pm \sqrt{25\, x_2^2 + 80\, x_2 + 64}\right] = 1/4 \left[x_2 + 4 \pm (5\, x_2 + 8)\right].$$

Оттука ги добиваме за x_1, x_2 релациите

$$-4x_1 + x_2 \pm 5x_2 + 4 \pm 8 = 0,$$

т. е.

$$(54) \qquad 2x_1 - 3x_2 - 6 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 + 1 = 0.$$

Релациите меѓу x_1, x_2, дадени со овие две равенки, се изразуваат и со равенката (53) за $\lambda = 12$. Равенката (53), при $\lambda = 12$, ги претставува, значи, правите (54).

ЗАДАЧИ

Што претставуваат зададените равенки.

1. $7x_1^2 + 6x_1x_2 = 0$ 2. $2x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$ 3. $20x_1^2 - 11x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$.
4. $\lambda x_1^2 + (1 + \lambda^2)\, x_1x_2 + \lambda x_2^2 = 0$. 5. $\lambda_1\lambda_2x_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\, x_1x_2 + x_2^2 = 0$.
6. $a_1^2x_1^2 + 2a_1a_2x_1x_2 + a_2^2x_2^2 = 0$. 7. $x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 1 = 0$.
8. $6x_1^2 - 8x_1x_2 - 8x_2^2 + 13x_1 - 18x_2 + 5 = 0$.

Определи го λ така да зададените равенки претставуваат еден пар прави, ако тоа е можно. Напиши ги равенките на правите.

9. $x_1^2 + 2(1 + \lambda)\, x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 0.$

10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 + \lambda = 0.$

11. $2\,(1+2\lambda)\, x_1^2 + (-1+3\lambda)\, x_1x_2 - (1+\lambda)\, x_2^2 - (1-5\lambda)\, x_1 - (1-5\lambda)\, x_2 = 0.$

II Афини проблеми за рамнини во просторот

§ 56. Разни видови равенки на рамнини

1. Општа равенка на рамнината. Во § 23, т. 8 покажавме дека равенката на секоја рамнина, во однос на каква да е афина координатна система во просторот, е од обликот

$$(1)\qquad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0,$$

каде што барем еден од коефициентите A_1, A_2, A_3 не е нула. А и секоја равенка од обликот (1), во која барем еден од спомнатите коефициенти не е нула, определува една рамнина; таа е паралелна со векторите

$$(2)\qquad \{-A_2, A_1, 0\},\quad \{-A_3, 0, A_1\},\quad \{0, -A_3, A_2\},$$

од кои барем два не се колинеарни. Равенката (1) ја викаме *општа равенка* на рамнината.

Ако е $A_1 = 0$, тогаш барем еден од првите два вектори (2) не е $\boldsymbol{0}$ и е колинеарен со векторот $\{1, 0, 0\}$, т. е. со првиот координатен вектор e_1. Аналогно важи ако е $A_2 = 0$, или $A_3 = 0$. Затоа:

Ако во општата равенка (1) *на рамнината коефициентот* A_i ($i = 1, 2, 3$) *е нула, тогаш рамнината е паралелна со* i*-тиот координатен вектор* e_i.

Кога е $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$, рамнината (1) е паралелна со e_1 и e_2, т. е. со x_1x_2-координатната рамнина; кога е $A_1 = A_3 = 0$, рамнината е паралелна со x_1x_3-рамнината, а кога е $A_2 = A_3 = 0$, таа е паралелна со x_2x_3-рамнината.

Ако е $A_4 = 0$, равенката (1) е задоволена за $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Значи:

Равенката (1), *во која е* $A_4 = 0$, *претставува една рамнина што минува низ координатниот почеток.*

Од горното следува дека $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ се равенки на x_2x_3-, x_3x_1- одн. на x_1x_2-координатната рамнина.

2. Параметри на една рамнина. Равенката (1) е, очигледно, еквивалентна на равенката

$$\lambda \cdot (A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4) = 0,$$

при произволен број $\lambda \neq 0$.

Барем еден од коефициентите A_1, A_2, A_3 не е нула. Ако е, на пр., $A_1 \neq 0$, ја помножуваме равенката со $1/A_1$, па ја добиваме равенката на рамнината во обликот

$$x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0, \tag{3}$$

и аналогно, ако е $A_2 \neq 0$ или $A_3 \neq 0$. Равенката (3) е определена, а спрема тоа и рамнината, ако ни се зададени трите константи a_2, a_3, a_4 — *параметрите* на рамнината. Значи:

Една рамнина е определена со три параметри — со односите на три коефициенти во нејзината равенка кон четвртиот.

3. Сегментен облик на равенката на рамнината. Ќе претпоставиме да ниту еден од коефициентите во равенката (1) не е нула. Рамнината што ја претставува таа не минува, значи, низ координатниот почеток O и не е паралелна ниту со една координатна оска. Множејќи ја равенката со $\lambda = 1/A_4$, добиваме

$$(A_1/A_4)\,x_1 + (A_2/A_4)\,x_2 + (A_3/A_4)\,x_3 + 1 = 0,$$

или, ставувајќи

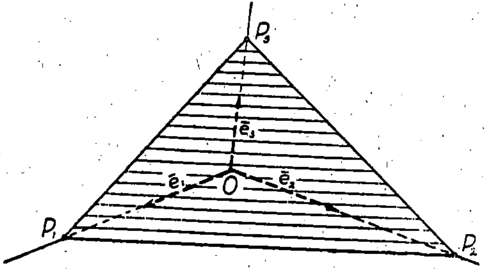
$$a_i = -A_4/A_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

равенката

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1. \tag{4}$$

Ако во (4) ставиме $x_2 = x_3 = 0$, добиваме $x_1 = a_1$. На рамнината (4) лежи, значи, точката P_1 $(a_1, 0, 0)$. Со заменување проверуваме дека на неа лежат и точките $P_2\,(0, a_2, 0)$ и $P_3\,(0, 0, a_3)$. Овие точки лежат на првата, втората одн. на третата координатна оска; тоа се, значи, точките во кои рамнината ги сече координатните оски. За параметрите a_i важи (§ 13)

$$a_i = \overrightarrow{OP_i}/e_i \quad (i = 1, 2, 3).$$



Сл. 79

Бројот a_i е, значи, мерен број, со соодветен знак, на должината на отсечката („отсечок", „сегмент") OP_i што рамнината ја отсечува на i-тата координатна оска, мерена со должината на e_i како единица. Затоа параметрите a_i ги викаме *отсечоци* или *сегменти* од рамнината на координатните оски, а обликот (4) на равенката — *сегментен облик*.

4. Равенка на рамнината, определена со една точка и правците на два вектора. На една рамнина нека лежи точката $P_0\,(\mathfrak{r}_0)$ и неколинеарните вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Ако $X\,(\mathfrak{r})$ е која да е точка на рамнината, тогаш векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0$ се компланарни; затоа е

$$(5)\qquad (\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=0.$$

Обратно, секој радиус-вектор $\mathfrak{r}$, кој ја задоволува равенката (5), определува една точка од таа рамнина. Равенката (5) ќе ја викаме *векторска равенка на рамнината.*

Бидејќи $\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ се компланарни, а $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколинеарни, постојат такви скалари λ и μ да е $\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, или

$$(6)\qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

Равенката (6) ја викаме *параметарска равенка* на рамнината, запишана во *векторски облик*. (Види §12, т. 3).

На равенките (5) и (6) можеме да им дадеме и скаларни облици. Ако ставиме имено $P_0\,(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$, $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ и $X\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$, ја добиваме од (5) равенката на рамнината во обликот

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} x_1-x_1^0 & x_2-x_2^0 & x_3-x_3^0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,$$

а од (6):

$$(8)\quad x_1=x_1^0+\lambda a_1+\mu b_1,\ x_2=x_2^0+\lambda a_2+\mu b_2,\ x_3=x_3^0+\lambda a_3+\mu b_3.$$

Равенките (8) ги викаме *параметарски равенки* на рамнината, запишани во *скаларен облик.*

ЗАДАЧИ

Во зад. 1—9 да се определат равенките на рамнините што ги задоволуваат зададените услови.

1. Минува низ (5, 7, —1) и низ x_1-оската.
2. Минува низ (a_1, a_2, a_3) и низ x_3-оската.
3. Минува низ (a_1, a_2, a_3) и паралелна е со x_1x_3-рамнината.
4. Минува низ (3, 8, —2), а на оските отсечува еднакви отсечоци.
5. Минува низ (—1, 1, 2), а паралелна е со $\{1,\ 1,\ 1\}$ и со x_1-оската.
6. Минува низ (0, 0, 0), а паралелна е со $\{0,\ 1,\ 1\}$ и $\{1,\ 0,\ 1\}$. Скица!
7. Минува низ (0, 0, 0) и (1, 1, 1), а паралелна е со отсечката што ги сврзува точките (2, 3, 5) и (—1, —2, 0).

8. Минува низ (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3), а паралелна е со x_2-оската.

9. Минува низ точките (1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, — 1, 1) и (3, — 3, 3).

10. Во една косоагла картезична система е $<e_1, e_2> = <e_2, e_3> = <e_3, e_1> = 60^0$. Колкава е просторнината на тетраедарот што го заградуваат координатните рамнини и рамнината $5x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 10 = 0$?

11. Три фиксни прави кои минуваат низ една фиксна точка O ги сече една подвижна рамнина во точките A_1, A_2, A_3 така да $1/\overline{OA}_1 + 1/\overline{OA}_2 + 1/\overline{OA}_3$ е константно. Покажи дека рамнините минуваат низ една точка. *Упат.*: Избери ги дадените прави како координатни оски на една система!

12. При еден паралелограм $OABC$ точката O е фиксна, а точките A и B се движат по две прави во просторот. Како се движи при тоа темето C?

§ 57. Заемна положба на две рамнини

1. Услов за паралелност на две рамнини. Нека ни се зададени две рамнини со своите равенки

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \tag{9}$$
$$B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0.$$

Координатите z_1, z_2, z_3 на векторите што се паралелни со првата одн. втората рамнина ја задоволуваат равенката (§ 23, т. 7, 8)

(10) $A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3 = 0$, одн. $B_1z_1 + B_2z_2 + B_3z_3 = 0$.

Ако рамнините (9) се паралелни, тогаш равенките (10) претставуваат иста система компланарни вектори, тие се, значи, еквивалентни. И обратно, ако равенките (10) се еквивалентни, рамнините (9) се паралелни, или дури совпаднати. А равенките (10) се еквивалентни, ако е (§ 52, т. 2, зад. 5)

(11) $B_1 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda A_2,\ B_3 = \lambda A_3.$

Спрема тоа:

Потребен и доволен услов за тоа, рамнините (9) да бидат паралелни, или дури совпаднати, е коефициентите A_1, A_2, A_3 да бидат пропорционални со коефициентите B_1, B_2, B_3.

2. Услов за совпаднување на две рамнини. Ако рамнините (9) се совпаднати, е задоволен условот (11). Равенките (9) добиваат тогаш вид

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$$
$$\lambda A_1x_1 + \lambda A_2x_2 + \lambda A_3x_3 + B_4 = 0.$$

По претпоставка овие равенки претставуваат иста рамнина. Затоа секое решение на едната е и решение на втората, и обратно. Помножувајќи ја првата со λ и вадејќи ја од втората, добиваме

(12) $B_4 - \lambda A_4 = 0,$

ако во двете равенки x_1, x_2, x_3 ги сметаме како координати на која да е точка од рамнината. Значи за совпаднатите рамнини (9) важи освен (11) и (12), т. е.

$$B_1 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda A_2, \quad B_3 = \lambda A_3, \quad B_4 = \lambda A_4. \tag{13}$$

Обратно, ако важи (13), може втората равенка да се пише во облик $\lambda(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4) = 0$, која, спрема тоа, ја претставува истата рамнина како и првата равенка. Затоа:

Потребен и доволен услов за тоа, рамнините (9) да бидат совпаднати, е коефициентите A_1, A_2, A_3, A_4 да бидат пропорционални со коефициентите B_1, B_2, B_3, B_4.

Забелешка. Критериумот за паралелност и за совпаднување на две рамнини може да се добие непосредно од *правилото на Кронекер—Капели*, користејќи ги матриците на коефициентите од равенките на рамнините. Ако се зададени рамнините (9), ги формираме матриците

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \right\|, \tag{14}$$

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \right\|. \tag{15}$$

Критериите гласат:

Потребно и доволно за тоа, рамнините (9) *да бидат паралелни, но не и совпаднати, е матрицата* (14) *да има ранг* 1, *а проширената матрица* (15) *ранг* 2.

Потребно и доволно за тоа, рамнините (9) *да бидат совпаднати, е матриците* (14) *и* (15) *да имаат ранг* 1.

3. Пресек на две рамнини. Ќе покажеме сега аналитички дека заедничките точки на две непаралелни рамнини лежат на една права. Рамнините нека се зададени пак со (9). Бидејќи тие, по претпоставка, не се паралелни, тоа A_1, A_2, A_3 не се пропорционални со B_1, B_2, B_3, т. е. векторите $\{A_1, A_2, A_3\}$ и $\{B_1, B_2, B_3\}$ не се колинеарни; затоа (§ 19, т. 3) барем една од детерминантите, образувани од нивните координати, не е нула. Нека е на пр.

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогаш можеме во (9) за x_3 да избереме една произволна вредност p_3, а потоа добиената система да ја решиме по x_1 и x_2, спрема правилото на Крамер. Добиваме едно решение $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$. Спрема тоа, точката $P(p_1, p_2, p_3)$ лежи на обете рамнини (9). По тој начин добиваме, при секој избор на вредноста за x_3, по една заедничка точка од дадените рамнини. Нека биде $X(x_1, x_2, x_3)$ која да е од нив, но различна од P. Векторот $\overrightarrow{PX}$ е паралелен со обете рамнини. Затоа неговите координати $x_1 - p_1$, $x_2 - p_2$, $x_3 - p_3$ ги задоволуваат равенките (10), значи

$$(16)\quad \begin{aligned} A_1(x_1-p_1)+A_2(x_2-p_2)+A_3(x_3-p_3)&=0\\ B_1(x_1-p_1)+B_2(x_2-p_2)+B_3(x_3-p_3)&=0. \end{aligned}$$

Оттука следува

$$(17)\quad (x_1-p_1):(x_2-p_2):(x_3-p_3)=\begin{vmatrix} A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A_3 & A_1\\ B_3 & B_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}.$$

При каква да е точка X, заедничка на обете рамнини, постои, значи, таков λ да е

$$x_1-p_1=\lambda\cdot\begin{vmatrix} A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix},\ x_2-p_2=\lambda\cdot\begin{vmatrix} A_3 & A_1\\ B_3 & B_1\end{vmatrix},\ x_3-p_3=\lambda\cdot\begin{vmatrix} A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}.$$

Ако ставиме $\mathfrak{r}=\{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathfrak{r}=\{p_1, p_2, p_3\}$ и

$$(18)\qquad l=\left\{\begin{vmatrix} A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_3 & A_1\\ B_3 & B_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}\right\},$$

ја добиваме за пресечните точки равенката

$$(19)\qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\lambda l.$$

Сите точки X, заеднички на рамнините, лежат, значи, на правата (19), која минува низ P, а е паралелна со l. Верно е и обратно, зашто за секоја точка X од правата (19) важи (17) и затоа и (16). $\overrightarrow{PX}$ е паралелен, спрема тоа, со обете рамнини; а P лежи во обете рамнини, затоа во нив лежи и произволната точка X од правата (19).

Заедничките точки на две непаралелни рамнини (9) *лежат на една права, паралелна со векторот* (18).

ЗАДАЧИ

1. Определи ги λ и μ така да рамнините

$$2x_1+\lambda x_2+3x_3-1=0 \quad\text{и}\quad 4x_1+x_2+\mu x_3+1=0$$

a) бидат паралелни; *b*) ја имаат како пресек една права паралелна со x_1-оската.

2. Каков услов постои меѓу коефициентите на равенките $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0$ и $B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4=0$, ако тие претставуваат рамнини што се сечат на x_1-оската?

3. Покажи дека, при секоја вредност за λ, рамнините $x_1+2\lambda x_2-(\lambda-1)x_3-3\lambda=0$ и $\lambda x_1+2x_2-(1-\lambda)x_3-3=0$ се сечат во една и иста права.

4. Определи ја онаа вредност за λ при која рамнините од зад. 3 совпаднуваат.

§ 52. Сноп рамнини

1. Равенка на еден сноп рамнини со оска. Нека бидат

$$L_1(X) \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0, \quad L_2(X) \equiv B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0 \tag{20}$$

равенки на две непаралелни рамнини. За обележување на левите страни на равенките ќе се служиме со ознаките $L_i(X)$, или пократко со L_i.

Равенката

$$\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2 = 0, \tag{21}$$

при произволно избрани константи λ_1, λ_2, е линеарна во однос на x_1, x_2, x_3. Лесно се проверува дека, ако не е $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, сите коефициенти пред x_1, x_2, x_3 во (21) не се нула. Равенката претставува, значи, една рамнина. Таа минува низ пресечната права p на рамнините (20). Навистина, ако P е која да е заедничка точка на тие рамнини, е $L_1(P) = 0$ и $L_2(P) = 0$, а затоа и $\lambda_1L_1(P) + \lambda_2L_2(P) = 0$, при секој λ_1 и λ_2. Лесно се покажува дека и равенката на секоја рамнина што минува низ p може да се доведе во облик (21). Ако имено на неа избереме која да е точка Q што не лежи на p и нејзините координати ги внесеме место x_i во (21), добиваме

$$\lambda_1 \cdot L_1(Q) + \lambda_2 \cdot L_2(Q) = 0. \tag{22}$$

Бидејќи Q не лежи на p, не може да лежи на обете рамнини (20). Затоа барем еден од коефициентите пред λ_1, λ_2 во (22) е различен од нула. Елиминирајќи ги λ_1, λ_2 од (21) и (22), ја добиваме равенката

$$L_2(Q) \cdot L_1(X) - L_1(Q) \cdot L_2(X) = 0,$$

која е од видот (21), а е задоволена со $X \equiv Q$. Со тоа тврдењето е докажано.

Целокупноста од сите рамнини што минуваат низ една права p се вика *сноп рамнини*, а правата p — негова *оска*.

Ако во (21) λ_1 и λ_2 не се дадени нумерично, туку за нив можеме да избираме произволни броеви, тогаш равенката (21) ја викаме *равенка на снопот рамнини*, чијашто оска е пресекот на рамнините $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$. λ_1 и λ_2 ги викаме *хомогени параметри* на рамнините од снопот. За секоја вредност на односот $\lambda_1 : \lambda_2$ равенката (21) претставува равенка на една рамнина од снопот.

Ставувајќи $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$, равенката (21), на снопот добива облик

$$L_1 + \lambda L_2 = 0.$$

Во оваа равенка не е опфатена рамнината $L_2 = 0$ од снопот. Бројот λ го викаме *нехомоген параметар* на рамнините од снопот.

2. Сноп паралелни рамнини. Да претпоставиме сега дека рамнините (21) се паралелни, но не совпаднати. Тогаш е $B_i = \lambda A_i$, $(i = 1, 2, 3)$, и затоа

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \equiv (\lambda_1 + \lambda\lambda_2) A_1 x_1 + (\lambda_1 + \lambda\lambda_2) A_2 x_2 + (\lambda_1 + \lambda\lambda_2) A_3 x_3 + \\ + \lambda_1 A_4 + \lambda_2 B_4,$$

што покажува дека коефициентите пред x_i во равенката (21) се пропорционални со соодветните коефициенти од равенката $L_1 = 0$. Тоа покажува дека рамнините (21)*) се паралелни со рамнината $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$.

Како што покажавме при снопот со оска, дека равенката на секоја рамнина од снопот може да се доведе во облик (21), така се покажува и тука, по ист начин, дека равенката на секоја рамнина, паралелна со паралелните рамнини (20), може да се доведе во вид (21).

Целокупноста од сите рамнини што се паралелни со една зададена рамнина ја викаме *сноп паралелни рамнини*. Равенката (21), во која λ , λ_2 се расположиви параметри, го претставува, значи, снопот паралелни рамнини, определен со паралелните рамнини (20).

ЗАДАЧИ

Во зад. 1—4 да се определи равенката на рамнината што минува низ пресекот на дадените рамнини и го задоволува дадениот услов.

1. $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 10 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_3 - 2 = 0$; минува низ (5, 8,—4).

2. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, $B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0$; минува низ (0, 0, 0).

3. $-5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, $x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 4 = 0$; паралелна е со {—3,—1,2}.

4. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, $B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0$; паралелна е со x_1-оската.

5. Ако $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ се две паралелни рамнини, покажи дека за една вредност на λ равенката $L_1 + \lambda L_2 = 0$ не претставува ништо.

6. Покажи дека рамнините $(1 + 2\lambda)x_1 - \lambda x_2 + (2 - \lambda)x_3 + 1 = 0$, при секоја вредност за λ, минуваат низ една иста права.

Во зад. 7 и 8 да се определи равенката на рамнината, паралелна со дадената рамнина, а го задоволува зададениот услов.

7. $3x_1 + 4x_2 - x_3 - 6 = 0$; минува низ (—3, 1, 2).

8. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$; минува низ (a_1, a_2, a_3).

9. Покажи дека равенката $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \lambda = 0$, во која A_1, A_2, A_3 се зададени константи, а λ произволен параметар, претставува еден сноп паралелни рамнини.

---

*) Само за $\lambda_1 : \lambda_2 = -B_1 : A_1$ се сите коефициенти пред x_i во равенката (21) нула; во тој случај оваа равенка геометриски не претставува ништо.

10. Покажи дека равенката $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, во која A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ се линеарни функции од еден расположив параметар, претставува еден сноп рамнини.

11. Покажи дека постои рамнина која им припаѓа на двата снопа

$$3x_1 + \lambda x_2 - 2\lambda x_3 = 0 \quad \text{и} \quad (3 + \mu)x_1 + (1 + \mu)x_2 - 2x_3 + \mu = 0.$$

Да се определи нејзината равенка. Определи ги равенките на оските на двата снопа и нивниот пресек.

12. Определи ја рамнината што минува низ правата $x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$, $x_1 + 2x_3 - 3 = 0$, а паралелна е со правата $x_1 = 2x_2$, $x_1 = 3x_3$.

3. Услов да три рамнини му припаѓаат на еден сноп. Зададени нека се три различни рамнини со равенките

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0. \tag{23}$$

Ако рамнините (23) му припаѓаат на еден сноп, тогаш равенката $L_3 = 0$ може да се доведе во облик $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$. Затоа постои таков број λ_3 да важи идентично $-\lambda_3 L_3 \equiv \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$, или

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 \equiv 0. \tag{24}$$

Обратно, ако постојат три такви броја $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не сите еднакви на нула, да важи идентитетот (24), тогаш рамнините (23) му припаѓаат на еден сноп. Навистина, ако е на пр. $\lambda_3 \neq 0$, имаме $L_3 \equiv \equiv \lambda_1' L_1 + \lambda_2' L_2$, каде што е ставено $\lambda_1' = -\lambda_1/\lambda_3$, $\lambda_2' = -\lambda_2/\lambda_3$. При тоа не е $\lambda_1' = \lambda_2' = 0$, зашто тогаш би било $L_3 \equiv 0$. Со тоа тврдењето е докажано.

Потребен и доволен услов за тоа, рамнините (23) *да му припаѓаат на еден сноп, е постоењето на такви броеви* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, *не сите еднакви на нула, да важи идентично* (24).

Теоремата е докажана за случај рамнините (23) да се различни. Провери дека тоа важи и тогаш кога меѓу тие рамнини има и совпаднати!

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека рамнините

$$\lambda x + \mu y + 2\nu z - 2 = 0, \; 2\lambda x + \mu y - 5\nu z + 6 = 0, \; 3\lambda x + 2\mu y - 3\nu z + 4 = 0,$$

при секаква вредност на λ, μ и ν, му припаѓаат на еден ист сноп.

2. Во просторот е зададен еден триаголник ABC. Средините на неговите страни AB, BC, CA нека се C_1, A_1 B_1. Ако е O која да е точка во просторот, покажи дека рамнините OAA_1, OBB_1 и OCC_1 минуваат низ една права!

§ 59. Заемна положба на три рамнини. Ѕвезда рамнини.

1. Заемна положба на три рамнини. Нека бидат

$$(25)\qquad \begin{aligned} L_1 &\equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \\ L_2 &\equiv B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0 \\ L_3 &\equiv C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4 = 0 \end{aligned}$$

равенки на три рамнини. Координатите на заедничките точки на овие рамнини, ако постојат такви, се заедничките решенија на равенките (25) по x_1, x_2, x_3. Дали системата (25) има решенија и колку решенија има, зависи од ранговите на матриците (§ 23, т. 6)

$$(26)\quad \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \right\| ; \qquad (27)\quad \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_6 & C_4 \end{matrix} \right\|$$

Рангот на матрицата (26) ќе го означиме со r, а рангот на матрицата (27) со r'.

I. Нека е $r = 3$. Системата (25) има едно и само само решение, што го определуваме по *правилото на Крамер*. Рамнините (25) имаат, значи, една заедничка точка.

II. Нека е $r = 2$, $r' = 3$. Системата (25) е противречна. Рамнините (25) немаат заеднички точки. Овие рамнини не се меѓу себе паралелни, зашто ако беа, би биле коефициентите пред непознатите во секоја равенка пропорционални со соодветните коефициенти на другите две равенки, а следствено рангот на (26) би бил 1, спротивно на претпоставката дека тој е 2. Трите рамнини се паралелни, според тоа, само на еден правец. Провери го тоа и на друг начин, барајќи ги векторите што се компланарни на сите три рамнини (25)!

III. Натамошна можност е $r = r' = 2$. Системата (2) е еквивалентна во овој случај, според *теоремата на Кронекер—Капели*, на две подесно избрани нејзини равенки. Тоа геометриски значи дека пресечните точки на две од трите рамнини лежат и на третата, а да други заеднички точки тие рамнини немаат. Според тоа, рамнините (25) имаат една заедничка права.

IV. Потоа, ако е $r = 1$, $r' = 2$, системата (25) нема решенија. Бидејќи е $r = 1$, равенките на системите вектори, компланарни на $L_1 = 0$, одн. $L_2 = 0$, одн. на $L_3 = 0$, се еквивалентни. Тие претставуваат, значи, една иста система компланарни вектори. Затоа, дадените рамнини (25) се паралелни меѓу себе.

V. Последна можност е $r = r' = 1$. Системата (25) е сега еквивалентна на само една од нејзините равенки. Или геометриски: Сите точки од едната од трите дадени рамнини се и точки од другите две рамнини. Дадените рамнини, значи, совпаднуваат.

Со тоа покажавме:

Рамнините (25) имаат барем една заедничка точка, ако рангот r на матрицата (26) е еднаков на рангот r' на матрицата (27); тие имаат заедничка една сама точка, една права, или се совпаднати — според тоа дали тие рангови се еднакви на 3, 2 или 1. А тие рамнини немаат зеаднички точки, ако овие рангови се различни; тие рамнини се паралелни со еден правец, ако е $r = 2$, $r' = 3$, а тие се меѓу себе паралелни ако е $r = 1$, $r' = 2$.

2. Равенка на една ѕвезда рамнини. Целокупноста од сите рамнини што минуваат низ една точка или кои се паралелни со еден правец ја викаме *ѕвезда рамнини.* Една ѕвезда рамнини е определена со кои да е три нејзини рамнини што не му припаѓаат на еден сноп, бидејќи тие ја определуваат заедничката точка на ѕвездата или заедничкиот правец.

Нека бидат (25) равенки на три рамнини кои имаат една заедничка точка P, а не му припаѓаат на еден ист сноп. Равенката

$$(28)\qquad \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

е линеарна по x_1, x_2, x_3, па затоа претставува, при секакви значења на константите λ_1, λ_2, λ_3, една рамнина. Се проверува, имено, лесно дека сите коефициенти пред x_1, x_2, x_3 во (28) не се нула, освен во тривијалниот случај $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Бидејќи е, по претпоставка, $L_1(P) = L_2(P) = L_3(P) = 0$, тоа, при произволни вредности за λ_1, λ_2, λ_3, важи $\lambda_1 L_1(P) + \lambda_2 L_2(P) + \lambda_3 L_3(P) = 0$. Рамнината (28), минува, значи, при секакви значења за λ_2, λ_2, λ_3, низ P.

Да претпоставиме сега дека рамнините (25) се паралелни со еден правец, но да не му припаѓаат на еден сноп. Ако тој правец е даден со векторот $\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$, тогаш од првата претпоставка следува дека

$$A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3 = 0, \quad B_1 l_1 + B_2 l_2 + B_3 l_3 = 0, \quad C_1 l_1 + C_2 l_2 + C_3 l_3 = 0.$$

Затоа важи, при произволни вредности за λ_1, λ_2, λ_3,

$$\lambda_1 (A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3) + \lambda_2 (B_1 l_1 + B_2 l_2 + B_3 l_3) +$$
$$+ \lambda_3 (C_1 l_1 + C_2 l_2 + C_3 l_3) = 0.$$

А тоа е услов затоа, рамнината (28) да биде паралелна со $\boldsymbol{l}$.

При произволни вредности за λ_i равенката (28) претдтавува, значи, една рамнина, паралелна со правецот со кој се паралелни рамнините (25)[1]).

Со тоа покажавме:

Ако рамнините (25) определуваат една ѕвезда, тогаш ѝ припаѓа на таа ѕвезда и рамнината (28), при произволни вредности за $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ќе покажеме сега и, обратно, дека равенката на која да е рамнина

$$(29)\qquad L_4 \equiv D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 = 0$$

што ѝ припаѓа на ѕвездата, определена со рамнините (25), може да се доведе во вид (28). Секоја рамнина од ѕвездата е определена

---

*) Исклучок прави само еден однос $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, за кој равенката (28) геометриски изопшто не претставува ништо — имено решенијата на системата равенки $\lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i + \lambda_3 C_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ по λ_1, λ_2, λ_3, за кои сите коефициенти пред x_1, x_2, x_3 во (28) се нула.

со две подесно избрани точки. Нека рамнината (29) е определена со точките M и N. Координатите од M и N ги заменуваме во (28), со што добиваме

$$\lambda_1 L_1(M) + \lambda_2 L_2(M) + \lambda_3 L_3(M) = 0,$$
$$\lambda_1 L_1(N) + \lambda_2 L_2(N) + \lambda_3 L_3(N) = 0.$$

Одавде и од (28) ги елиминираме λ_1 и λ_2, па добиваме

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_1(M) & L_2(M) & L_3(M) \\ L_1(N) & L_2(N) & L_3(N) \end{vmatrix} = 0.$$

Тоа е равенката на рамнината (29). Ако детерминантата ја развиеме по првиот ред, равенката добива, навистина, вид (28)[1]).

Поради докажаните особини на равенката (28) таа се вика *равенка на ѕвездата.*

Од т. 1 следува дека равенките (25) определуваат една ѕвезда, ако е $r' = 3$.

3. Услов да четири рамнини ѝ припаѓаат на една ѕвезда. Нека бидат (25) и (29) равенки на четири рамнини.

Да претпоставиме прво дека дадените рамнини ѝ припаѓаат на една ѕвезда, но не и на еден сноп рамнини. Можеме да избереме од дадените рамнини три такви кои ја определуваат ѕвездата. Нека се тоа рамнините (25). Бидејќи рамнината (29) ѝ припаѓа на таа ѕвезда, тоа нејзината равенка може да се пише во вид (38). Спрема тоа, постои таков $\lambda_4 \neq 0$ да е $-\lambda_4 L_4 \equiv \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$, или

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 L_4 \equiv 0. \tag{30}$$

Идентитет од овој вид постои, јасно, и тогаш кога рамнините (25) и (29) му припаѓаат на еден сноп или ако се совпаднати.

Обратно, ако важи идентитетот (20), во кој λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 не сите се нула, рамнините (25) и (29) ѝ припаѓаат на една ѕвезда или дури на еден сноп, или се совпаднати. Навистина, ако е на пр. $\lambda_4 \neq 0$, добиваме, ставувајќи $\lambda_1' = -\lambda_1/\lambda_4$, $\lambda_2' = -\lambda_2/\lambda_4$, $\lambda_3' = -\lambda_3/\lambda_4$,

$$L_4 \equiv \lambda_1' L_1 + \lambda_2' L_2 + \lambda_3' L_3.$$

Тоа ја докажува, на основа т. 2, исправноста на тврдењето.

Ја докажавме теоремата:

Потребен и доволен услов за тоа, рамнините (25) *и* (29) *да ѝ припаѓаат на една ѕвезда, е постоењето на такви броеви* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, *не сите еднакви на нула, да важи идентитетот* (30).

---

[1]) Се убедуваме лесно дека, при земените претпоставки, сите коефициенти пред L_1, L_2, L_3 во (28) не се нула.

Ќе изведеме сега уште еден критериј.

Од идентитетот (30) следуваат, заменувајќи во него по ред $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$; $x_2 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$ и $x_3 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$, равенките

$$\lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i + \lambda_3 C_i + \lambda_4 D_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{31}$$

Ова е една система хомогени линеарни равенки по $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ која, по претпоставка, има нетривијални решенија. Затоа е потребно да е

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

Обратно, ако важи (32), системата (31) има нетривијални решенија по $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Добиените решенија ги заменуваме во (30). Множејќи ја првата од равенките (31) со x_1, втората со x_2, третата со x_3, а четвртата со 1, го добиваме со собирање на така добиените равенки идентитетот (30), во кој сите константи $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ не се нула.

Со тоа покажавме:

Потребно и доволно за тоа, рамнините (25) *и* (29) *да ѝ припаѓаат на една ѕвезда рамнини, е да важи релацијата* (32).

ЗАДАЧИ

Да се испита каква заемна положба имаат рамнините, дадени во зад. 1—3.

1. $2x_1 + 2x_2 + 3 = 0,\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6 = 0,\ 2x_2 + 2x_3 + 3 = 0.$
2. $4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 9 = 0,\ x_1 - x_3 = 0,\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 6 = 0.$
3. $-x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0.$

4. Покажи дека рамнините кои минуваат низ рабовите на еден тетраедар и низ средините на спротивните рабови, се сечат во една точка. *Напат.*: На три соседни раба положи три вектори и избери ги за координатни вектори!

5. Да се покаже: Ако рамнините (25) и (29) му припаѓаат на еден сноп (се совпаднати), тогаш на тој сноп му припаѓа (совпаднува со нив) и рамнината $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 L_4 = 0$, при секој $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Во зад. 6—8 да се определи рамнината, која минува низ пресекот на дадените три рамнини, а го задоволува поставениот услов.

6. $3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0,\ -x_1 + 6x_2 + x_3 - 1 = 0,\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 6=0$; минува низ точките (1, 2, — 1) и (5, — 3, 2).

7. Истите рамнини како во зад. 6; бараната рамнина минува низ (3, — 2, 4), а е паралелна со $\{1, 1, 1\}$.

8. $x_1 - x_2 + 3 = 0,\ 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0,\ 4x_1 - x_3 - 4 = 0$; паралелна е со рамнината $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

9. Напиши ја равенката на ѕвездата рамнини, паралелни со правецот на векторот $\{2, 3, — 1\}$.

10. За која вредност од λ, различна од 1, рамнините $\lambda x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$, $x_1 + \lambda x_2 + x_3 + 1 = 0$, $x_1 + x_2 + \lambda x_3 + 1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + \lambda = 0$ й припаѓаат на една ѕвезда?

11. Каков услов задоволуваат коефициентите на равенките на рамнините $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $a_2x_1 + a_3x_2 + a_1x_3 = 0$, $a_3x_1 + a_1x_2 + a_2x_3 = 0$, ако тие му припаѓаат на еден сноп?

12. Равенките (25) и (29) нека претставуваат равенки на страните од еден тетраедар. Да се определи равенката на рамнината што минува низ едно од темињата, а паралелна е со нему спротивната страна.

§ 60. Геометриско толкување на линеарниот четиричлен

1. Геометриско толкување на односот на два линеарна четиричлена со исти коефициенти. Една рамнина, зададена со равенката

$$L \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0, \tag{33}$$

нека ја сече отсечката, чии крајни точки се $Y(y_1, y_2, y_3)$ и $Z(z_1, z_2, z_3)$, во точката $X(x_1, x_2, x_3)$. На наполно аналоген начин како што постапивме во § 54, т. 1 добиваме

$$\frac{\overrightarrow{YX}}{\overrightarrow{XZ}} = -\frac{L(Y)}{L(Y)}. \tag{34}$$

Ако, имено, левата страна од (34) ја означиме со λ, имаме (§ 14, т. 2)

$$x_i = \frac{y_i + \lambda z_i}{1 + \lambda} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ставувајќи ги добиените изрази за x_i во равенката (33), го добиваме оттука за λ, навистина, изразот од десната страна на (34).

2. Геометриско значење на знакот на линеарниот четиричлен. Од (34) следува, на ист начин како во § 54, т. 2, дека точките X за кои е $L(X) > 0$ се наоѓаат во едниот од полупросторите во кои рамнината $L = 0$ го разделува просторот, а да точките X за кои важи $L(X) < 0$ лежат во другиот полупростор.

ПРИМЕНА. Двоен однос на четири рамнини од еден сноп. Равенките на четири рамнини што му припаѓаат на еден сноп можат да се запишат во облик

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_1 + \lambda L_2 = 0,\ L_1 + \mu L_2 = 0.$$

Една произволна права p нека ги сече овие рамнини, по ред, во точките M_1, M_2, M_3, M_4. Од (34) добиваме, поради $L_1(M_1) = 0$, $L_2(M_2) = 0$, дека

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{\overrightarrow{M_3M_2}} = -\frac{L_1(M_1) + \lambda L_2(M_1)}{L_1(M_2) + \lambda L_2(M_2)} = -\lambda \cdot \frac{L_2(M_1)}{L_1(M_2)},$$

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_4}}{\overrightarrow{M_4M_2}} = -\frac{L_1(M_1) + \mu L_2(M_1)}{L_1(M_2) + \mu L_2(M_2)} = -\mu \cdot \frac{L_2(M_1)}{L_1(M_2)}.$$

Оттука е

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{\overrightarrow{M_3M_2}} : \frac{\overrightarrow{M_1M_4}}{\overrightarrow{M_4M_2}} = \lambda : \mu. \tag{35}$$

Изразот од левата страна на (35) се вика *двоен однос на точките* M_1, M_2, M_3, M_4 од правата p. (35) покажува дека тој однос зависи само од λ и μ, а не зависи од тоа со која права ги пресековме зададените рамнини. Затоа:

Секоја права сече четири зададени рамнини што му припаѓаат на еден сноп во точките чии двоен однос не зависи од изборот на правата.

Теоремата е докажана за правите што дадените рамнини навистина ги сечат, и тоа не на оската на снопот на кој рамнините му припаѓаат.

Поради докажаната теорема горниот константен двоен однос го викаме и *двоен однос на четирите рамнини.*

Аналогна теорема важи и за четири прави што му припаѓаат на еден сноп, зашто можат да се изберат — дури на безброј многу начини — четири такви рамнини од еден сноп, во секоја од кои би лежела една од тие прави. Аналитичкиот доказ за овој случај е наполно аналоген на горниот.

ЗАДАЧИ

1. Да се покаже: Ако е $L(Y) = L(Z)$, отсечката YZ е паралелна со рамнината $L = 0$.

2. Покажи дека равенката на рамнината што минува низ точката P, а паралелна е со рамнината $L(X) = 0$, гласи $L(X) - L(P) = 0$.

3. Покажи: Правата која минува низ точката P, а паралелна е со рамнините $L_1(X) = 0$ и $L_2(X) = 0$, има равенки $L_1(X) - L_1(P) = 0$, $L_2(X) - L_2(P) = 0$.

4. Да се најде геометриското место на онаа точка X да рамнината $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 6 = 0$ ја разделува отсечката, којашто точката X ја сврзува со точката $(8, -2, 1)$, во однос $m : n$.

5. Обопшти ја *теоремата на Менелаос* (§ 54, 5т. 1) за просторен многуаголник, пресечувајќи ги неговите страни со една рамнина.

III Афини проблеми за правите во просторот

§ 61. Разни видови равенки на правата во просторот

1. Параметарски равенки. Нека е зададена една права p во просторот со една нејзина точка $P(p_1, p_2, p_3)$ и со еден вектор $\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$, различен од $\boldsymbol{0}$, што е паралелен со неа. Тогаш за координатите x_1, x_2, x_3 на која да е нејзина точка важи (§ 14, т. 4)

$$x_1 = p_1 + \lambda l_1, \quad x_2 = p_2 + \lambda l_2, \quad x_3 = p_3 + \lambda l_3, \tag{1}$$

или, означувајќи го радиус-векторот од P со $\mathfrak{r}_0$, а радиус-векторот до една нејзина произволна точка со $\mathfrak{r}$,

(2)
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda \mathfrak{l}.$$

Равенките (1) и (2) се *параметарски равенки* на правата во *координатен*, односно во *векторски облик*.

2. Симетрични равенки. Ако е $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$, ги добиваме од (1), со елиминација на λ, равенките

(3)
$$\frac{x_1 - p_1}{l_1} = \frac{x_2 - p_2}{l_2} = \frac{x_3 - p_3}{l_3}.$$

Ако сите l_i не се различни од нула, равенките (3) добиваат нешто друг вид. На пр. ако е $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, $l_3 = 0$, добиваме

(3′)
$$\frac{x_1 - p_1}{l_1} = \frac{x_2 - p_2}{l_2}, \qquad x_3 - p_3 = 0,$$

а ако е $l_1 \neq 0$, $l_2 = l_3 = 0$,

(3″)
$$x_2 - p_2 = 0, \; x_3 - p_3 = 0.$$

Равенките (3), одн. (3′), или (3″), ги задоволуваат координатите на секоја точка од p, а и секое нивно решение претставува координати на некоја точка од p. Затоа овие равенки ги викаме равенки на правата p. Ги наречуваме *симетрични* или *канонични равенки на правата*.

За да можеме и равенките од видот (3′) и (3″) да ги пишеме во обликот (3), се договоруваме да изедначувањето со нула на некој од броителите во (3) ќе го означиме со тоа што во соодветниот именител ќе пишуваме нула. Така, на пр., равенките (3′) ќе ги пишеме, спрема овој договор, во обликот

$$\frac{x_1 - p_1}{l_1} = \frac{x_2 - p_2}{l_2} = \frac{x_3 - p_3}{0}.$$

Важи спрема тоа:

Равенкиште од видош (3) *се равенки на праваша шшо минува низ шочкаша* (p_1, p_2, p_3), *а паралелна е со векшорош* $\{l_1, l_2, l_3\}$.

Од равенките (3) следува

(4)
$$\frac{x_1 - p_1}{l_1} - \frac{x_2 - p_2}{l_2} = 0, \quad \frac{x_1 - p_1}{l_1} - \frac{x_3 - p_3}{l_3} = 0,$$
$$\frac{x_2 - p_2}{l_2} - \frac{x_3 - p_3}{l_3} = 0.$$

Во првата од овие равенки го нема членот со x_3, затоа таа е равенка на рамнината во која лежи p; а паралелна е со x_3-оската. Аналогно важи за втората и третата равенка: тие претставуваат рамнини положени низ p, а паралелни со x_2- одн. со x_1-оската. Кои да е две од овие равенки наполно ја определуваат правата p.

3. Пресек на две рамнини. Рамнините (4), определени со каноничните равенки (3) на правата, се само три специјални рамнини од кои две, било кои, ја определуваат правата. Покажавме веќе (§ 57, т. 3) дека две непаралелни рамнини определуваат една права во просторот. Спрема тоа, две равенки

$$(5) \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0, \qquad B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0,$$

во кои коефициентите пред x_1, x_2, x_3 не им се сите еднакви на нула и не се пропорционални, определуваат една права p. Оваа права е паралелна со векторот $\mathbf{l}$, даден со (18), § 57. Ако е x_1^0, x_2^0, x_3^0 кое да е решение на системата равенки (5), тогаш равенките на правата, запишани во каноничен облик, гласат

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_3 & B_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2 - x_2^0}{\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix}} = \frac{x_3 - x_3^0}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

4. Равенки на правата што минува низ две зададени точки. Една права во просторот нека е зададена со две свои точки $P(p_1, p_2, p_3)$ и $Q(q_1, q_2, q_3)$. Каноничните равенки на правата ќе ги добиеме ако во (3) место l_1, l_2, l_3 ги ставиме координатите на векторот $\overrightarrow{PQ}$, т. е. $q_1 - p_1$, $q_2 - p_2$, $q_3 - p_3$. По тој начин добиваме

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3}.$$

Тоа се равенките на правата што минува низ точките P и Q.

5. Параметри на една права во просторот. Нека е зададена една права со равенките (5). Простата матрица на овие две равенки треба да има ранг 2, значи барем една нејзина двоередна детерминанта да е различна од нула. Нека е, на пр., $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Во тој случај системата (5) можеме да ја решиме по x_1 и x_2, па ги добиваме равенките на правата во облик

$$x_1 = a_3x_3 + a_4, \quad x_2 = b_3x_3 + b_4.$$

Во овие равенки фигурираат четири константи кои, спрема тоа, го определуваат положајот на правата во просторот. Затоа:

Една права во просторот е определена со четири параметри.

ЗАДАЧИ

1. Низ правата $2x_1 + 3x_2 — x_3 — 1 = 0,\ x_1 — 2x_2 + 4x_3 + 5 = 0$ положи ја рамнината што е паралелна со x_2-оската.

2. Напиши ги за правата од зад. 1 каноничните равенки.

3. Положи ја низ правата $(x_1 — 3)/2 = (x_2 + 1)/4 = x_3 — 5$ рамнината што минува низ координатниот почеток.

4. Низ правата $x_1 = 5 — 2t,\ x_2 = 2 + t,\ x_3 = 3t$ да се положат рамнините што се паралелни со координатните оски.

§ 62. Заемна положба на две прави

1. Услов за паралелност. Зададени нека бидат две прави:

$$(6)\qquad \frac{x_1-p_1}{l_1}=\frac{x_2-p_2}{l_2}=\frac{x_3-p_3}{l_3},\qquad \frac{x_1-q_1}{m_1}=\frac{x_2-q_2}{m_2}=\frac{x_3-q_3}{m_3}.$$

Овие две прави се паралелни тогаш и само тогаш кога се паралелни векторите $\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$ и $\boldsymbol{m} = \{m_1, m_2, m_3\}$. Од условот за колинеарност на два вектора добиваме:

Потребен и доволен услов за паралелност на правите (6) *е важењето на релацијата:*

$$(7)\qquad l_1 : l_2 : l_3 = m_1 : m_2 : m_3.$$

2. Услов за сечење на две прави. Две прави имаат една заедничка точка, или — како што се изразуваме — *се сечат*, ако лежат во една рамнина и ако не се паралелни. Ако правите (6) лежат во една рамнина, тогаш векторот со почетна точка во $P(p_1, p_2, p_3)$, а крајна во $Q(q_1, q_2, q_3)$, е компланарен со векторите $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{m}$, и обратно. Од условот за компланарност на векторите следува затоа:

Потребен и доволен услов за тоа, непаралелните прави (6) *да се сечат, е да важи*

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Разминувачни прави. Две непаралелни прави што не се сечат ги викаме *разминувачни. Две прави* (6) *се*, спрема тоа, *разминувачни, ако за нив не важи ниедна од релациите* (7) *и* (8).

ЗАДАЧИ

Испитај каква заемна положба имаат правите во зад. 1—3.

1. $(x_1 — 1)/2 = x_2 — 2 = (x_3 + 3)/4$ и $(x_1 — 6)/5 = (x_2 — 5)/3 = (x_3 + 5)/(— 2)$.
2. $x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 — x_2 + 3x_3 + 1 = 0$ и $(x_1 + 3)/— 4 = x_2 — 4 = x_3/3$.
3. $x_1 = x_2 — 1 = x_3$ и $— x_1 = x_2 + 1 = x_3$.

4. Каков услов постои меѓу коефициентите на равенките на четири рамнини $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, $L_4 = 0$, ако правата $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ и правата $L_3 = 0$, $L_4 = 0$ се сечат или се паралелни? Какви идентитети постојат помеѓу три, кои да е, од линеарните изрази L_1, L_2, L_3, L_4, ако тие две прави совпаднуваат?

§ 63. Заемна положба на права и рамнина

1. Услов за паралелност. Зададена нека е една рамнина

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \tag{9}$$

и една права

$$\frac{x_1 - p_1}{l_1} = \frac{x_2 - p_2}{l_2} = \frac{x_3 - p_3}{l_3}. \tag{10}$$

Оваа права е паралелна со рамнината (9), ако векторот $l = \{l_1, l_2, l_3\}$ е паралелен со неа, т. е. ако е (§ 23, т. 7, 8)

$$A_1l_1 + A_2l_2 + A_3l_3 = 0, \tag{11}$$

и обратно. Спрема тоа:

Потребно и доволно за тоа, правата (10) *да биде паралелна со рамнината* (9), *е да важи релацијата* (11).

2. Услов да правата лежи во една рамнина. Нека точката $P(p_1, p_2, p_3)$ од правата (10) лежи во рамнината (9) којашто, по претпоставка, нека биде паралелна со неа. Освен (11) нека важи, значи, и

$$A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 + A_4 = 0. \tag{12}$$

Во тој случај кажуваме дека правата (10) *лежи* во рамнината (9).

Потребно и доволно за тоа, правата (10) *да лежи во рамнината* (9), *е да важат релациите* (11) *и* (12).

3. Пресек на права и рамнина. Ако некоја точка $M(x_1, x_2, x_3)$ од правата (10) лежи во рамнината (9), тогаш координатите од M ја задоволуваат (9). Спрема тоа, бидејќи равенките (10) и параметарските равенки (1) определуваат иста права, важи

$$A_1(p_1 + \lambda l_1) + A_2(p_2 + \lambda l_2) + A_3(p_3 + \lambda l_3) + A_4 = 0,$$

или

$$a\lambda + b = 0, \tag{13}$$

каде што

$$a \equiv A_1l_1 + A_2l_2 + A_3l_3, \quad b \equiv A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 + A_4.$$

I. Ако е $a=0$, $b \neq 0$, равенката (13) нема решенија по λ; правата и рамнината немаат заеднички точки. Со оглед на т. 1 покажавме аналитички дека правата што е паралелна со една рамнина, но не лежи во неа, со неа нема заеднички точки.

II. Ако е $a = 0$, $b = 0$, тогаш секој број λ ја задоволува равенката (13). Сите точки од правата лежат во рамнината; правата лежи во рамнината (види т. 2).

III. Ако е $a \neq 0$, тогаш (13) има едно решение, имено $\lambda_0 = -b : a$. Правата и рамнината имаат една заедничка точка, имено точката $(p_1 + \lambda_0 l_1, p_2 + \lambda_0 l_2, p_3 + \lambda_0 l_3)$. Значи:

Ако за правата (10) не важи условот (11), таа има една заедничка точка со рамнината (9).

ПРИМЕРИ

1. Да се напише равенката на рамнината што минува низ правите

$$\frac{x_1-p_1}{l_1} = \frac{x_2-p_2}{l_2} = \frac{x_3-p_3}{l_3}, \quad \frac{x_1-p_1}{m_1} = \frac{x_2-p_2}{m_2} = \frac{x_3-p_3}{m_3}$$

кои се сечат.

Решение. Точката $P(p_1, p_2, p_3)$ им е заедничка на двете прави. Ако $X(x_1, x_2, x_3)$ е која да е точка од рамнината во која лежат дадените прави, тогаш векторите $\overrightarrow{PX}$, $l = \{l_1, l_2, l_3\}$ и $m = \{m_1, m_2, m_3\}$ се компланарни. Обратно, ако овие вектори се компланарни, точката X ѝ припаѓа на таа рамнина. Затоа, спрема условот за компланарност на три вектори, равенката на бараната рамнина гласи

$$\begin{vmatrix} x_1-p_1 & x_2-p_2 & x_3-p_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Да се определи равенката на рамнината што минува низ две паралелни прави.

Решение. Паралелните прави нека бидат зададени со равенките (6). На првата права лежи точката $P(p_1, p_2, p_3)$, а на втората точката $Q(q_1, q_2, q_3)$. Рамнината што е положена низ дадените прави е определена со која да е точка на едната од правите, на пр. P, со векторот $\overrightarrow{PQ}$ и со векторот $\{l_1, l_2, l_3\}$. Затоа равенката на рамнината, спрема § 56, т. 4, гласи

$$\begin{vmatrix} x_1-p_1 & x_2-p_2 & x_3-p_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Определи ја равенката на рамнината што минува низ една зададена права, а е паралелна со една друга права.

Решение. Правата низ која е положена рамнината нека е (5), а правецот на другата права нека е правецот на векторот $l = \{l_1, l_2, l_3\}$. Равенката на која да е рамнина низ правата (5) е од обликот:

$$(14) \qquad \lambda_1 (A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4) + \lambda_2 (B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4) = 0.$$

Треба да избереме такви λ_1 и λ_2 за да биде рамнината (14) паралелна со *l*, значи такви кои ја задоволуваат равснката (§ 23, т. 7, 8)

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1)\, l_1 + (\lambda_1 A_2 + \lambda_2 B_2)\, l_2 + (\lambda_1 A_3 + \lambda_2 B_3)\, l_3 = 0,$$

или

$$\lambda_1 (A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3) + \lambda_2 (B_1 l_1 + B_2 l_2 + B_3 l_3) = 0. \tag{15}$$

Со елиминацијата на λ_1 и λ_2 од (14) и (15) добиваме

$$\begin{aligned}(B_1 l_1 + B_2 l_2 + B_3 l_3)\,(A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4) &= \\ = (A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3)\,(B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4).\end{aligned}$$

Тоа е бараната равенка.

ЗАДАЧИ

Каква заемна положба имаат рамнината и правата зададени во зад. 1—3.

1. $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0;\ x_1 - 2 = x_2 - 1 = x_3 - 3.$
2. $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 1 = 0;\ x_1 = x_2 = x_3.$
3. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0;\ (x_1 + 3)/4 = x_2 - 3 = (x_3 - 1)/2.$

4. Каков услов задоволуваат коефициентите на равенката на рамнината $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4 = 0$, ако таа врви низ правата $(x_1 - x_1^0)/l_1 = (x_2 - x_2^0)/l_2 = (x_3 - x_3^0)/l_3$.

5. Најди го пресекот на рамнината $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5 = 0$ и правата $(x_1 - 7)/5 = x_2 - 4 = (x_3 - 5)/4$.

6. Состави ги равенките на правата што минува низ пресеците на рамнината $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 1 = 0$ со правите $(x_1 - 2)/3 = (x_2)/-2 = (x_3 + 1)/4$ и $x_1 = 2x_2 = 3x_3$.

7. Да се определи проекцијата од $P(3, 2, -1)$ на раамнината $5x_1 - x_2 + 4x_3 - 3 = 0$, ако проицираме паралелно со x_2-оската.

9. Да се најде проекцијата, замена паралелно со x_3-оската, од правата $x_1/3 = (x_2 - 2)/4 = x_3 + 1$ на рамнината $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$.

9. Да се напише равенката на рамнината што врви низ правата $(x_1 - 2)/3 = (x_2 - 3)/4 = x_3 + 1$, а е паралелна со правата $x_1/2 = (x_2 - 6)/3 = (x_3 - 1)/5$.

10. Низ правата $(x_1 + 1)/3 = (x_2 - 2)/4 = x_3/2$ да се положи рамнината што е паралелна со рамнината $2x_1 - x_2 - x_3 + 3 = 0$.

11. Низ точката $(3, 2, -1)$ да се повлече права, паралелна со рамнината $x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2 = 0$, така што ќе ја сече правата $(x_1 + 2)/4 = x_2 = (x_3 - 3)/2$.

12. Низ точката $(-1, 2, 4)$ да се потегли права која ги сече правите $x_1 = 4x_2 + 1 - x_3$ и $(x_1 - 1)\, 2 = (x_2 + 2)/3 = x_3 + 4$.

Задачи за геометриски места

1. Една подвижна права, паралелна со векторот $\{-3, 2, 4\}$, ги сече рамнините $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ и $x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 5 = 0$ во точките *A* и *B*. Да се определи геометриското место на точките кои отсечката *AB* ја делат во однос 4 : 5.

2. Една подвижна рамнина ги сече три прави, кои минуваат низ една иста точка *O*, во точките A_1, A_2, A_3 така да збирит $\overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 + \overline{OA}_3$ е константен.

Определи го геометриското место на тежиштето на триаголникот $A_1A_2A_3$. *Упат.:* Избери ги дадените прави како оски на една косоагла система!

3. Определи го геометриското место на средината на отсечката која правите $(x_1 - 2)/3 = (x_2 - 3)/5 = (x_3 + 1)/2$ и $(x_1 - 4)/2 = (x_2 + 3)/3 = x_3 + 2$ ја исечуваат на која да е права што ги сече дадените прави.

Б. МЕТРИЧНИ ОДНОСИ

§ 64. Равенка на права во рамнината и равенка на рамнина во просторот во однос на една правоагла система

1. Метрична равенка на правата во рамнина. Во однос на една *правоагла картезична* система нека ни е зададена една права со равенката

$$(1) \qquad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0.$$

За секој вектор $\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2\}$ што е паралелнен со неа важи (§ 19, т. 10, 11)

$$(2) \qquad A_1l_1 + A_2l_2 = 0,$$

што покажува (§ 28, (22)) дека векторот $\boldsymbol{a} = \{A_1, A_2\}$ е нормален на правата (1).

Нека биде X ($\mathfrak{r}$) која да е точка на правата (1), а M_0 ($\mathfrak{r}_0$) една фиксна точка на неа. Ако за $\boldsymbol{l}$ го избереме векторот $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$, можеме равенката (2) да ја пишеме во вид

$$(3) \qquad (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)\boldsymbol{a} = 0.$$

И обратно, ако во рамнината е зададен еден вектор $\boldsymbol{a}$ и една точка M_0 ($\mathfrak{r}_0$), равенката (3) ги определува радиус-векторите $\mathfrak{r}$ до точките на правата што минува низ M_0, а е нормална на $\boldsymbol{a}$. Равенката (3) ја викаме затоа равенка на таа права — *метрична равенка на правата.*

2. Метрична равенка на рамнината во просторот. Наполно на ист начин следува дека равенката на една рамнина

$$(4) \qquad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$$

во однос на една *правоагла* система можеме да ја запишеме и во векторскиот облик (3), каде што е $\boldsymbol{a} = \{A_1, A_2, A_3\}$, а $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{r}$ се радиус-векторите до една фиксна и до една произволна точка на рамнината. Равенката (3) е нејзина *метрична равенка.* Векторот $\boldsymbol{a}$ е нормален на рамнината.

Пример. Да се покаже дека висините во триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека бидат $T_1(\mathfrak{r}_1)$, $T_2(\mathfrak{r}_2)$, $T_3(\mathfrak{r}_3)$ темињата на триаголникот. Метричните равенки на висините се тогаш

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_3)(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) = 0, \quad (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3) = 0, \quad (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) = 0.$$

Збирот од левите страни на овие равенки е идентично еднаков на нула (при секој $\mathfrak{r}$, одн. при секакви x_1, x_2). Затоа правите, спрема § 53, т. 3, му припаѓаат на еден сноп; бидејќи тие не се паралелни, тоа тие врват низ една точка, што и требаше да се докаже.

3. Нормален облик на равенката на правата во рамнина. Равенката (1) одн. (3) ќе ја поделиме со бројот $\lambda = \pm a = \pm \sqrt{A_1^2+A_2^2}$, каде што избираме или знак + или знак —. Векторот $\mathbf{a} : \pm a = \mathbf{n}$ има тогаш должина 1. Равенката (1) добива сега вид

$$\frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = 0. \tag{5}$$

или

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0, \tag{6}$$

каде што е

$$a_i = \frac{A_i}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

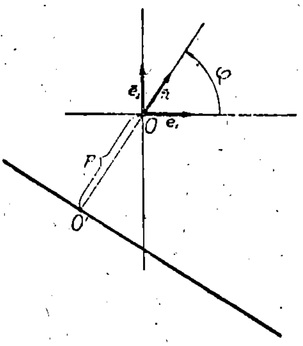
За координатите a_1, a_2 на векторот $\mathbf{n}$ важи $a_1 = \cos\varphi$, $a_2 = \sin\varphi$, каде што со φ е обележен ориентираниот агол $\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle$. Равенката (6) може сега да се напише во обликот

$$x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi + a_3 = 0,$$

или, ставувајќи $\mathfrak{r} = \{x_1,\ x_2\}$, во векторскиот облик

$$\mathfrak{r}\cdot\mathbf{n} + a_3 = 0. \tag{7}$$

Нека е $O'(\mathfrak{r}')$ подножје на нормалата, спуштена од O на правата. За растојанието $\overline{OO'} = p$ важи тогаш $\mathfrak{r}'\mathbf{n} = \pm p$, со горниот или со долниот знак — според тоа дали векторот $\mathbf{n}$, нанесен од O, е насочен кон правата или од неа. Со тоа од (7) го добиваме геометриското значење на коефициентот a_3; имено $a_3 = -p$, ако $\mathbf{n}$ е насочен кон правата, а $a_3 = +p$, ако $\mathbf{n}$ е насочен во спротивен смер. Значи, имаме



Сл. 80

$$x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \mp p = 0. \tag{8}$$

Ако, специјално, при $\lambda = \pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ го избереме знакот кој е спротивен на знакот при A_3, е $a_3 < 0$, т. е. $a_3 = -p$; тогаш $\mathbf{n}$ е насочен кон правата.

Добиената равенка (8), која е еквивалентна со равенката (5), ја викаме *равенка на правата во нормален облик.*

4. Нормален облик на равенката на рамнината. На аналоген начин ја нормираме и равенката (4) на една рамнина, поделувајќи ја со $\lambda = \pm a = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$. Со тоа го добиваме *нормалниот облик на равенката:*

$$(9) \qquad \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} = 0.$$

Ако единичниот нормален вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a} : (\pm a)$ со координатните оски на правоаглата система ги затвора аглите α_1, α_2, α_3, имаме $\mathbf{n} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3\}$. Бидејќи нормалната равенка можеме да ја запишеме и во векторскиот облик $\mathfrak{r}\mathbf{n} + a_4 = 0$, тоа таа во координатен облик гласи и

$$x_1\cos\alpha_1 + x_2\cos\alpha_2 + x_3\cos\alpha_3 \mp p = 0,$$

каде што $p = \mp a_4$ е растојание од координатниот почеток до рамнината. За знакот важи аналогно правило како при правата.

5. Растојание на точката до правата во рамнината. Со изборот на еден определен знак при *нормирувачкиот множител* $1/\lambda$ се одлучуваме за едниот од двата можни смерови на нормалниот вектор $\mathbf{n}$. Ако него си го мислиме нанесен од една точка на таа права, тогаш онаа од двете полурамнини, определени со правата, во која е насочен $\mathbf{n}$ ќе ја викаме *позитивна страна* на правата, а спротивната — *негативна*. Ќе кажеме дека со тоа што ја избравме позитивната страна на правата — правата ја ориентиравме.

Нека ни е дадена равенката (7) на една на тој начин ориентирана права. Во рамнината избираме една точка $P(\mathfrak{r})$ и нејзината ортогонална проекција $P_0(\mathfrak{r}_0)$ на правата. Растојанието $\overline{P_0P}$ го нарекуваме *растојание на точката P до правата* (сл. 80). Ќе го означиме со d. Овој поим за растојание ќе го обопштиме на извесен начин. Ако P е на позитивната страна на правата, ќе кажеме дека растојанието е позитивно: $d = \overline{P_0P}$; а ако P е на негативната страна, ќе му дадеме на растојанието негативен знак: $d = -\overline{P_0P}$. Знакот на растојанието определува, спрема тоа, на која страна од правата лежи точката. По овој договор важи, очигледно, $\overrightarrow{P_0P} = d\mathbf{n}$, или $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0 = \mathbf{n}d$. Ја пресметуваме сега вредноста на десната страна од (7), ставувајќи во неа $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathbf{n}d$. Добиваме

$$\mathfrak{r}\mathbf{n} + a_3 = (\mathfrak{r}_0 + \mathbf{n}d)\,\mathbf{n} + a_3 = \mathfrak{r}_0\mathbf{n} + a_3 + d.$$

Но бидејќи $P_0(\mathfrak{r}_0)$ лежи на правата, е $\mathfrak{r}_0\mathbf{n} + a_3 = 0$, и затоа

$$d = \mathfrak{r}\mathbf{n} + a_3,$$

или, ако координатите на P се x_1', x_2',

$$d = a_1x_1' + a_2x_2' + a_3,$$

или

(10)
$$d = \frac{A_1x_1' + A_2x_2' + A_3}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}.$$

Растојанието на една точка до една ориентирана права во рамнината е еднакво на бројната вредност на изразот од левата страна на нормалниот облик на нејзината равенка (5), *ако во неа променливите ги замениме со координатите на точката.*

6. Растојание на точката до рамнината. За пресметувањето на растојанието на една точка до една зададена рамнина важи сè аналогно како во т. 5. И за знакот на тоа растојание како и за ориентацијата на рамнината важат аналогни конвенции како при правата во рамнината. За растојанието d од точката $P(x_1', x_2', x_3')$ до ориентираната рамнина (9) добиваме

(11)
$$d = \frac{A_1x_1' + A_2x_2' + A_3x_3' + A_4}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}.$$

ПРИМЕРИ

1. Симетрала на агол. Симетралата на аголот е геометриско место на оние точки од рамнината што се еднакво оддалечени од неговите краци. Нека бидат $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ нормални равенки на краците. Тогаш за произволната точка X на една од симетралите на аглите, образувани со дадените прави, важи

$$N_1(X) = \pm N_2(X).$$

Спрема тоа, равенките на симетралите на аглите се

$$N_1 + N_2 = 0 \quad \text{и} \quad N_1 - N_2 = 0.$$

Аналогно важи за симетралните рамнини на еден диедар.

2. Да се покаже дека симетралите на внатрешните агли во триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нормални равенки на страните на триаголникот нека се $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$. Нормирани нека се така да внатрешните точки на триаголникот се на позитивната страна во однос на секоја од трите прави $N_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Равенките на симетралите се тогаш

$$N_1 - N_2 = 0, \; N_2 - N_3 = 0, \; N_3 - N_1 = 0.$$

Збирот од нивните леви страни е идентично еднаков на нула. Поради тоа (§ 53, т. 3) тврдењето е докажано.

3. Да се покаже дека симетралите на надворешните агли во триаголникот ги сечат спротивните страни во три колинеарни точки.

Решение. При ознаките од прим. 2 равенките на вопросните симетрали гласат

(12)
$$N_1 + N_2 = 0, \quad N_2 + N_3 = 0, \quad N_3 + N_1 = 0.$$

Ја посматраме правата

(13) $$N_1 + N_2 + N_3 = 0.$$

Таа ги сече правите $N_3 = 0$, $N_1 = 0$ и $N_2 = 0$ во исти точки во кои нив ги сечат симетралите (12). На пр., за пресекот на (13) и $N_3 = 0$ важи $N_1 + N_2 = 0$, $N_3 = 0$, што значи дека правата (13) и симетралата $N_1 + N_2 = 0$ ја сечат правата $L_3 = 0$ во иста точка. Аналогно важи за другите страни на триаголникот. Теоремата со тоа е докажана.

ЗАДАЧИ

Во зад. 1—3 да се ориентира правата така да биде исполнет дадениот услов.

1. $4x_1 + 3x_2 - 5 = 0$; координатниот почеток да биде на позитивната страна.
2. $7x_1 - 24x_2 + 25 = 0$; координатниот почеток да биде на негативната страна.
3. $5x_1 + 12x_2 = 0$; точката (1, 1) да биде на позитивната страна.

Истото прашање за рамнините во зад. 4—6.

4. $2x_1 - x_2 - 2x_3 + 18 = 0$; точката (0, 0, 0) да биде на негативната страна.
5. $4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9 = 0$; $O(0, 0, 0)$ да биде на позитивната страна.
6. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; (1, 0, 0) да биде на негативната страна.

7. Пресметај ги аглите што нормирачкиот нормален вектор на правите во зад. 1—3 и на рамнините во зад. 4—6 ги зафаќа со координатните оски.

8. Пресметај го растојанието на точката (8, — 3) до ориентираните прави, дадени во зад. 1—3.

9. Пресметај го растојанието на точката (— 1, 3, 7) до ориентираните рамнини, зададени во зад. 4—6.

10. Напиши ја равенката на парот симетрали на аглите што се образувани со правите $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, $b_1x_1 + b_2x_2 = 0$.

Најди ги равенките на симетралите на аглите, образувани со двете прави во зад. 11—13.

11. $3x_1 - x_2 + 4 = 0$, $x_1 + 3x_2 - 5 = 0$.
12. $a_1x_1 - a_2x_2 + a_3 = 0$, $a_2x_1 - a_1x_2 + a_3 = 0$.
13. $2k(x_1 - a_1) + (k^2 - 1)(x_2 - a_2) = 0$, $2k'(x_1 - a_1) + (k'^2 - 1)(x_2 - a_2) = 0$.

14. Покажи дека симетралните рамнини на аглите меѓу страните на тетраедарот се сечат во една точка.

15. Покажи дека симетралите на два внатрешни агли и симетралата на третиот надворешен агол во триаголникот ги пресечуваат спротивните страни во три колинеарни точки.

16. Покажи дека симетралите на два надворешни агли и симетралата на третиот внатрешен агол при триаголникот се сечат во една точка.

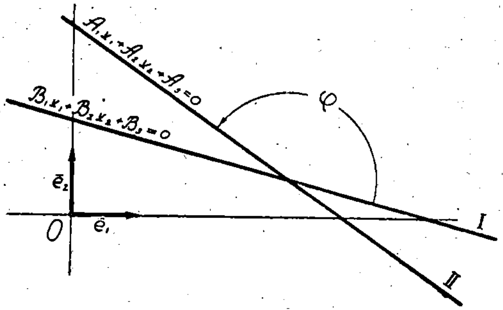
17. Покажи дека симетралните рамнини на аглите при триработ се сечат во една права.

18. Покажи дека рамнините што минуваат низ средините на рабовите на еден тетраедар и стојат нормално на нив се сечат во една точка.

§ 65. Агол меѓу две прави во рамнината, меѓу две рамнини, меѓу две прави во просторот, и меѓу права и рамнина.

1. Агол меѓу две неориентирани прави во една ориентирана рамнина. Во рамнината е избрана една правоагла координатна система (O; e_1, e_2). Со тоа рамнината е ориентирана, и тоа така да е $\langle e_1, e_2 \rangle = + \pi/2$. Нека ни се зададени правите

(14) $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0,$ (15) $B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0.$



Сл. 81

Едната од нив ќе ја сметаме како прва, а другата како втора. Во тој случај кажуваме дека тие образуваат една *подредена двојка прави*. Под *агол* што го зафаќаат правите на една ваква подредена двојка прави го подразбираме оној ориентиран агол за кој треба првата права да се заврти околу пресечната точка на двете прави, за да совпадне со втората права. Аголот помеѓу една подредена двојка прави е дефиниран, спрема тоа, само модуло π. Тоа значи, ако еден агол помеѓу тие прави мери φ радијани, тогаш аголот што мери $\varphi + k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) радијани е истотака агол меѓу тие две прави. Затоа ќе се служиме при пресметувањето на овој агол со една таква агловна функција чија што периода е π, значи со тангенс или котангенс.

Да ја сметаме правата (14) како прва, а правата (15) како втора! Првата е паралелна со векторот $l_1 = \{-A_2, A_1\}$, а втората со векторот $l_2 = \{-B_2, B_1\}$. Ако φ е агол меѓу правите од дадената подредена двојка, имаме $\operatorname{tg} \langle l_1, l_2 \rangle = \operatorname{tg} \varphi$, бидејќи $\langle l_1, l_2 \rangle$ може да се разликува од φ само за некој мултиплум од π. Од § 37, (5) добиваме тогаш

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1B_1 + A_2B_2}. \tag{16}$$

Формулата (16) *ни го определува аголот* φ *помеѓу правата* (14), *сметана како прва, и правата* (15), *сметана како втора.*

Ако е $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, можеме броителот и именителот од дропката на десната страна од (16) да ги поделиме со $A_2 \cdot B_2$, па добиваме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1/A_2 - B_1/B_2}{1 + (A_1/A_2)(B_1/B_2)}. \tag{17}$$

За агловите коефициенти k_1 и k_2 на правата (14) одн. (15) важи $k_1 = -A_1/A_2$, $k_2 = -B_1/B_2$. Затоа следува од (17)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{18}$$

Аголот φ *меѓу една права — земена како прва — со агол коефициент* k_1 *и една права со агол коефициент* k_2 *се пресметува по формулата* (18).

За аголот φ меѓу апсцисната оска и една права со аглов коефициент k ја добиваме, на пр., ставувајќи во (18) $k_1 = 0$, $k_2 = k$, формулата

$$\operatorname{tg}\varphi = k.$$

Со тоа добиваме едно геометриско значење на агловиот коефициент на правата во правоаглите координати.

2. Услов за нормалност на две прави. Од (16) следува дека правите (14) и (15) се нормални, т. е. дека е $\varphi = \pi/2$, тогаш и само тогаш кога именителот на изразот од десната страна е нула, значи

$$A_1B_1 + A_2B_2 = 0. \tag{19}$$

До овој резултат доаѓаме и без примената на формулата (16). Правите (14) и (15) се, имено, нормални тогаш кога се нормални и векторите $\{-A_2, A_1\}$ и $\{-B_2, B_1\}$, одн. кога нивниот скаларен производ е нула. А нивниот скаларен производ е токму $A_1B_1 + A_2B_2$. Значи:

Потребен и доволен услов за тоа, правите (14) *и* (15) *да бидат нормални, е да важи* (19).

ЗАДАЧИ

Да се пресмета аголот помеѓу правата (I) и правата (II) во зад. 1—3.

1. (I) $6x_1 - 3x_2 + 4 = 0$, (II) $3x_1 + 2x_2 + 1 = 0$.
2. (I) $x_1 + x_2 + 1 = 0$, (II) $2x_1 - 3x_2 = 0$.
3. (I) $x_1 \cos\alpha + x_1 \sin\alpha - p = 0$, (II) $x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta - p' = 0$.

4. Напиши ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и е нормална на правата $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$.

5. Изведи ја формулата за аголот помеѓу две прави чии што равенки се зададени во однос на една косоагла картезична система со координатен агол $<e_1, e_2> = \omega$.

6. При условите од зад. 5 да се изведе условот за нормалност на две прави.

7. Да се изведе формулата за агол помеѓу две прави и условот за нормалност, ако правите се зададени со равенките во однос на една афина система, за која се зададени коефициентите g_{11}, g_{12}, g_{22}.

3. Агол помеѓу две ориентирани прави во една ориентирана рамнина. Во една ориентирана рамнина нека ни бидат зададени правите (14) и (15). Делејќи ги овие равенки со $A_0 = \pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, одн. со $B_0 = \pm\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, одлучувајќи се при тоа за еден определен знак на A_0 и за еден знак на B_0, правите ги ориентираме. Со тоа ги избираме единичните нормални вектори $\boldsymbol{n}_a = \{A_1/A_0, A_2/A_0\}$, $\boldsymbol{n}_b = \{B_1/B_0, B_2/B_0\}$. Под агол φ меѓу овие две ориентирани прави, земајќи ја правата (14) како прва, ќе го подразбираме аголот $\langle \boldsymbol{n}_a, \boldsymbol{n}_b \rangle$. Аголот е дефиниран, спрема тоа, модуло 2π. За аголот φ ги добиваме, значи, од § 37 формулите

$$\cos\varphi = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{A_0B_0}, \quad \sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_0B_0}. \tag{20}$$

Забелешка. Ориентацијата на една права, определена со изборот на еден или друг знак на нормирачкиот множител, одн. со изборот на смерот на нормалата, одн. со изборот на еден вектор $\boldsymbol{n}$, може да добие и друго геометриско толкување. На секоја на спомнатиот начин ориентирана права е определен, имено, еден смер — смерот на оној единичен вектор $\boldsymbol{t}$ на правата, којшто е определен така да подредената двојка вектори $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ има иста ориентација како двојката координатни вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. И обратно, секој смер на правата определува на овој начин еден смер на нормалата. Наместо со изборот на нормалните вектори $\boldsymbol{n}_a$ и $\boldsymbol{n}_b$ можеме правите (14) и (15) да ги ориентираме, значи, и со тоа што избираме на нив по еден вектор $\boldsymbol{t}_a$ и $\boldsymbol{t}_b$.

ЗАДАЧИ

Ориентирај ги зададените прави така да (0, 0) биде на негативната страна и пресметај го аголот помеѓу правата (I) и (II).

1. (I) $4x_1 + 5x_2 + 3 = 0$, (II) $3x_1 - 4x_2 + 2 = 0$.
2. (I) $x_1 - x_2 - 1 = 0$, (II) $2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$.

4. Агол меѓу две рамнини. Две рамнини во просторот нека ни бидат зададени со равенките

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0, \; B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0 \tag{21}$$

во однос на една правоагла картезична система. Рамнините ќе ги ориентираме, делејќи ги нивните равенки со $A_0 = \pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ одн. со $B_0 = \pm\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}$, одлучувајќи се при тоа за еден знак при A_0 и за еден знак при B_0. Добиваме

$$\frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4}{A_0} = 0, \quad \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4}{B_0} = 0. \tag{22}$$

Со тоа на рамнините (21) ги избравме единичните нормални вектори

$$\boldsymbol{n}_a = \{A_1/A_0,\ A_2/A_0,\ A_3/A_0\},\quad \boldsymbol{n}_b = \{B_1/B_0,\ B_2/B_0,\ B_3/B_0\}.$$

Под агол помеѓу ориентираните рамнини (22) го подразбираме аголот φ меѓу векторите $\boldsymbol{n}_a$ и $\boldsymbol{n}_b$. За овој агол φ важи — како за секој агол помеѓу два вектори во просторот — дека е $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Од $\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{n}_b = \cos\varphi$ добиваме

$$(23)\qquad \cos\varphi = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{A_0B_0},\qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Аголот φ помеѓу ориентираните рамнини (22) се пресметува по формулата (23).

5. Услов за нормалност на две рамнини. Од (23) следува дека рамнините (21) зафаќаат прав агол ако е

$$(24)\qquad A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0.$$

Потребен и доволен услов за нормалност на рамнините (21) е да важи (24).

Ако рамнините (21) не се ориентирани, тогаш под агол помеѓу нив го подразбираме оној од аглите φ и $\pi - \varphi$, каде што φ е определен со (23), кој не е тап.

ЗАДАЧИ

Да се ориентираат рамнините во зад. 1—2 така да (0, 0, 0) биде на позитивната страна и определи го аголот помеѓу нив.

1. $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0,\quad 5x_1 - 10x_2 + 14x_3 - 7 = 0.$
2. $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 10 = 0,\ 15x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 8 = 0.$

3. Пресметај го аголот помеѓу неориентираните рамнини

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\quad x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

4. Определи ја ортогоналната проекција од правата $x_1 + 3x_2 - x_3 + 1 = 0$, $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3 = 0$ на рамнината $x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$.

5. Изведи го условот за нормалност на две рамнини во косоаглата координатна система, при која се зададени аглите $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = \omega_3$, $\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle = \omega_1$, $\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 \rangle = \omega_2$.

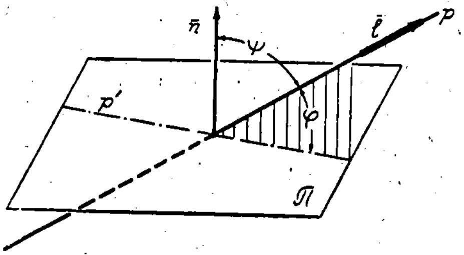
6. Агол помеѓу права и рамнина. Една рамнина π нека ни е зададена со равенката

$$(25)\qquad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$$

во однос на една правоагла система, а една права p — со равенките

$$(26)\qquad \frac{x_1-p_1}{l_1}=\frac{x_2-p_2}{l_2}=\frac{x_3-p_3}{l_3}.$$

Аголот меѓу една права и рамнина е, по дефиниција, остриот агол што го зафаќа правата со својата ортогонална проекција на рамнината. Ортогоналната проекција од p на π е пресекот p' на π со рамнината која минува низ p, а е нормална на π. Остриот агол φ што го зафаќаат p и p' е комплементен на остриот агол ψ што p го зафаќа со нормалата на рамнината, значи $\varphi=\pi/2-\psi$.



Сл. 82

Бидејќи векторот $\boldsymbol{n}=\{A_1, A_2, A_3\}$ е нормален на π, а векторот $\boldsymbol{l}=\{l_1, l_2, l_3\}$ е паралелен со p, тоа аголот меѓу $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{l}$ е еднаков на ψ или на $\pi-\psi$. Затоа е $|\cos\sphericalangle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}|=|\cos\psi|$. Поради $\cos\psi=\sin\varphi$ ја добиваме од $|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{l}|\cdot|\cos\psi|=|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}|$ формулатата

$$(27)\qquad \sin\varphi=\frac{|A_1l_1+A_2l_2+A_3l_3|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}\,\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}},\qquad \varphi\leq\frac{\pi}{2}.$$

Аголот φ што го зафаќа правата (26) со рамнината (25) го пресметуваме по формулата (27).

Одавде следува, при $\varphi=0$, веќе во § 63, т. 1 изведениот *услов за паралелност* на правата и рамнина, кој *важи и во општи афини координати*.

7. Услов на нормалност на права и рамнина. Рамнината (25) и правата (26) се нормални, ако векторите $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{l}$ се колинеарни. Затоа:

Рамнината (15) е нормална на правата (26) тогаш и само тогаш кога важи

$$A_1:A_2:A_3=l_1:l_2:l_3.$$

ЗАДАЧИ

Пресметај го аголот помеѓу дадената рамнина и права во зад. 1—2.

1. $2x_1+3x_2-x_3+1=0;\ x_1-1=2x_2=(4-x_3)/2.$
2. $x_1+2x_2+3x_3+4=0;\ x_1+x_2+x_3=0,\ 2x_1-3x_2+x_3=0.$

Определи ја ортогоналната проекција на дадената точка на зададената рамнина.

3. $(3,4,-2);\quad 5x_1-4x_2-2x_3+7=0.$
4. $(0,0,0);\quad A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0.$

8. Агол меѓу две прави во просторот. Под агол меѓу две прави во просторот, било да имаат една заедничка точка било да се разминувачни, го подразбираме остриот агол што го зафаќаат кои да е две прави што се сечат и се паралелни на дадените прави.

Ќе го пресметаме аголот φ што го зафаќаат правите

$$(28)\qquad \frac{x_1-p_1}{l_1}=\frac{x_2-p_2}{l_2}=\frac{x_3-p_3}{l_3},\qquad \frac{x_1-q_1}{m_1}=\frac{x_2-q_2}{m_2}=\frac{x_3-q_3}{m_3}.$$

Векторот $\boldsymbol{l}=\{l_1, l_2, l_3\}$ е паралелен со првата, а векторот $\boldsymbol{m}=\{m_1, m_2, m_3\}$ со втората од овие прави. Затоа аголот помеѓу овие два вектори е еднаков на φ или на $\pi-\varphi$. Бидејќи е $|\cos\varphi|=|\cos(\pi-\varphi)|$, добиваме

$$(29)\qquad \cos\varphi=\frac{|l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3|}{\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}\,\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}},\qquad \varphi\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Аголот φ меѓу правите (28) се пресметува по формулата (29).

9. Услов за нормалност на две прави. Од (29) следува, при $\varphi=\pi/2$, теоремата:

Правите (28) се нормални тогаш и само тогаш, ако важи

$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0.$$

ЗАДАЧИ

Определи го аголот помеѓу дадените прави

1. $2x_1-3=3x_2+1=x_3-4,\quad 4x_1=5x_2=3=2x_3+6.$
2. $x_1+3x_2-2x_3=0,\ x_1+x_2-x_3+3=0;\quad x_1=3x_2=2x_3.$

§ 66. Разни задачи за прави и рамнини

1. Проекција од точка на рамнина. Една рамнина нека ни биде зададена со равенката

$$(30)\qquad (\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1)\,\boldsymbol{a}=0.$$

Ќе ја определиме ортогоналната проекција P_0' од една зададена точка $P_0(\mathfrak{r}_0)$ на таа рамнина. Вектрот $\boldsymbol{a}$ е нормален на рамнината (30). Затоа равенката на правата што минува низ P_0, а е нормална на рамнината, гласи

$$(31)\qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\lambda\boldsymbol{a}.$$

Го бараме пресекот на правата (31) со рамнината (30). Заменувајќи го изразот за $\mathfrak{r}$ од (31) во (30), добиваме $(\mathfrak{r}_0-\mathfrak{r}_1+\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}=0$, од каде

$$\lambda=-\frac{(\mathfrak{r}_0-\mathfrak{r}_1)\,\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}.$$

Бараната проекција е, спрема тоа, определена со радиус-векторот:

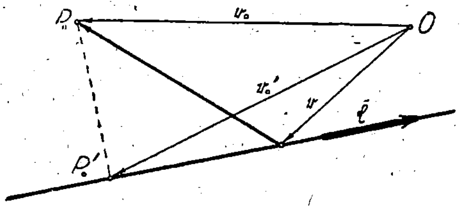
$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0 - \frac{(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \cdot \mathbf{a}. \tag{32}$$

Ако равенката (30) е дадена во координатен облик (во правоагли картезични координати):

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0,$$

тогаш координатите x_1', x_2', x_3' на проекцијата од точката P_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) на оваа рамнина се, спрема (32),

$$x_i' = x_i^0 - \frac{A_i}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \cdot (A_1 x_1^0 + A_2 x_2^0 + A_3 x_3^0 + A_4), \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$



Сл. 83

2. Проекција од точка на права. Ќе ја определиме проекцијата P_0' од точката $P_0(\mathfrak{r}_0)$ на правата

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda \mathbf{l}. \tag{33}$$

Векторот $\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1 - \lambda \mathbf{l}$ има за почетна точка некоја точка на зададената права, а крајот му е во P_0. Избираме таков λ да тој вектор биде нормален на правата одн. на $\mathbf{l}$. Тогаш е $(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r})\,\mathbf{l} = 0$, или $(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1 - \lambda \mathbf{l})\,\mathbf{l} = 0$, од каде

$$\lambda = \frac{(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\,\mathbf{l}}{\mathbf{l}^2}.$$

Точката P_0' е определена, спрема тоа, со радиус-векторот

$$\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_1 + \frac{(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\,\mathbf{l}}{\mathbf{l}^2} \cdot \mathbf{l}. \tag{34}$$

Да ја запишеме добиената формула и во координатен облик! Ако правата минува низ точката (x_1^0, x_2^0, x_3^0), а е паралелна со векторот $\{l_1, l_2, l_3\}$, тогаш правоаглите координати x_1', x_2', x_3' на проекцијата P_0' од точката $P_0(p_1, p_2, p_3)$ на правата се дадени, спрема (34), со

$$x_i' = x_i^0 + \frac{(p_1 - x_1^0)\,l_1 + (p_2 - x_2^0)\,l_2 + (p_3 - x_3^0)\,l_3}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \cdot l_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

3. Растојание од точка до права во просторот. Ќе го пресметаме растојанието d од точката P до правата (33), зададени во зад. 2.

I. **метода.** Задржувајќи ги ознаките од претходната задача, имаме $d = |\overrightarrow{P_0'P_0}| = |\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0'|$. Од (34) следува

$$\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1 - \frac{(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\, l}{l^2} \cdot l,$$

а оттука

$$(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0')^2 = (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)^2 + \frac{\{(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\, l\}^2}{l^2} - 2\,\frac{\{(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\, l\}^2}{l^2}.$$

Затоа имаме

$$d^2 = (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)^2 - \frac{\{(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\, l\}^2}{l^2} \quad \text{или} \quad d^2 = \frac{1}{l^2} \cdot \left\{ (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)^2 \cdot l^2 - \left((\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)\, l\right)^2 \right\},$$

односно, спрема § 36, (34),

$$d^2 = \frac{[\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1, l]^2}{l^2}. \tag{35}$$

Тоа е бараната формула.

II. **метода.** На правата избираме која да е точка, на пр. онаа што е определена со радиус-векторот $\mathfrak{r}_1$. Потоа го образуваме паралелограмот на чии што страни се положени векторите $l/|l|$ и $\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1$. Страната на која лежи првиот вектор има должина 1, а висината во однос на неа како основа е еднаква на бараното растојание d. Затоа е и неговата површина еднаква на d. Имаме, значи,

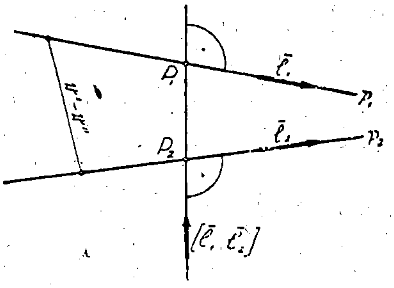
$$d = |[\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1, l/|e|]|,$$

од каде следува пак (35).

4. Права што нормално ги сече две разминувачни прави. Две разминувачни прави p_1 и p_2 нека бидат зададени со параметарските равенки

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1 + \lambda_1 l_1, \quad \mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}_2 + \lambda_2 l_2. \tag{36}$$

Променливиот радиус-вектор на правата го означивме со $\mathfrak{r}'$, а на втората со $\mathfrak{r}''$. Ќе покажеме дека постои една заедничка нормала на правите, т. е. една таква права која обете прави ги сече под прав агол.



Сл. 84

I. метода. Избираме кој да е вектор, чијашто почетна точка лежи на првата права, а крајната на втората права. Тој вектор е

$$\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''=\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2+\lambda_1\boldsymbol{l}_1-\lambda_2\boldsymbol{l}_2.$$

Ќе испитаме дали постојат такви вредности за λ_1 и λ_2, за кои овој вектор ќе биде нормален на двете прави (36), одн. на векторите $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$. За тоа е потребно и доволно да е $(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'')\boldsymbol{l}_1=0$ и $(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'')\boldsymbol{l}_2=0$, или

$$(37)\quad \lambda_1\cdot\boldsymbol{l}_1^2-\lambda_2\cdot\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2+(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)\boldsymbol{l}_1=0,\quad \lambda_1\cdot\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2-\lambda_2\cdot\boldsymbol{l}_2^2+(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)\boldsymbol{l}_2=0.$$

Добивме една система линеарни равенки по λ_1, λ_2. Детерминантата на системата е

$$-\boldsymbol{l}_1^2\cdot\boldsymbol{l}_2^2+(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)^2=-[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2]^2,$$

којашто, поради претпоставената неколинеарност на $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ (правите се разминувачни!), е различна од нула. Системата (37) има, спрема тоа, едно и едно само решение по λ_1, λ_2. Со тоа докажавме дека, навистина, *постои една и само една права која две разминувачни прави ги сече нормално.*

Да ја определиме сега таа заедничка нормала! Нејзините пресечни точки со зададените прави се дадени со радиус-векторите $\mathfrak{r}_0'=\mathfrak{r}_1+\lambda_1{}^0\boldsymbol{l}_1$ и $\mathfrak{r}_0''=\mathfrak{r}_2+\lambda_2{}^0\boldsymbol{l}_2$, каде што $\lambda_1{}^0$, $\lambda_2{}^0$ се решенијата на системата (37). Овие решенија ги добиваме, ако системата (37) ја решиме по правилото на Крамер. Добиваме

$$\begin{aligned}-[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2]^2\cdot\lambda_1{}^0&=(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2^2-(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)\boldsymbol{l}_2\cdot(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)=\\&=(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)\{\boldsymbol{l}_2^2\cdot\boldsymbol{l}_1-(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)\cdot\boldsymbol{l}_2\}=(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)\big[\boldsymbol{l}_2,[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2]\big]=\\&=(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2,\boldsymbol{l}_2,[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2]),\end{aligned}$$

и

$$(38)\qquad \lambda_1{}^0=\frac{(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1,\boldsymbol{l}_2,[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2])}{[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2]^2};$$

аналогно

$$\lambda_2{}^0=\frac{(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2,\boldsymbol{l}_1,[\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_1])}{[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2]^2}.$$

Равенката на заедничката нормала гласи, бидејќи е паралелна со векторот $[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2]$, спрема тоа,

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\lambda_1{}^0\boldsymbol{l}_1+\mu_1[\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2],\quad\text{или}\quad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_2+\lambda_2{}^0\boldsymbol{l}_2+\mu_2[\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_1].$$

Променливите параметри се означени со μ_1' одн. со μ_2.

II. метода. Заедничката нормала на правите (36) можеме да ја претставиме и како пресек на две рамнини. Такви рамнини се, на пр., рамнината што минува низ p_1 и е паралелна со векторот $[\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]$, и рамнината што минува низ p_2 и е паралелна со истиот вектор $[\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]$. Нивните равенки се

$$(39) \qquad (\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1, \boldsymbol{l}_1, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])=0, \quad (\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_2, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])=0.$$

Тоа се и бараните равенки на заедничката нормала, бидејќи двете се паралелни со $[\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]$, а самите рамнини (39) не се меѓу себе паралелни (поради неколинеарноста на $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ векторите $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]$ не се компланарни).

И одавде можат едноставно да се добијат пресеците на заедничката нормала со зададените прави. Ако, на пр., во втората од равенките (39) наместо $\mathfrak{r}$ го ставиме радиус-векторот $\mathfrak{r}_0'=\mathfrak{r}_1+\lambda_1{}^0\boldsymbol{l}_1$ од бараната пресечна точка на p_1 со нормалата, ја добиваме за $\lambda_1{}^0$ линеарната равенка

$$(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2+\lambda_1{}^0\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])=0,$$

од каде следува

$$\lambda_1{}^0(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])+(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])=0,$$

или

$$\lambda_1{}^0=-\frac{(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])}{(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])}=\frac{(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1, \boldsymbol{l}_2, [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2])}{[\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]^2},$$

што е во согласност со (38), итн.

5. Растојание на две разминувачни прави. Растојанието на две разминувачни прави е, по дефиниција, растојание на точките во кои правите ги сече нивната заедничка нормала. Да го определиме тоа растојание!

I. метода. Две разминувачни прави p_1 и p_2 нека бидат зададени пак со (36). Нивните пресеци со заедничката нормала нека се P_1 и P_2 (сл. 84). Точката P_1 нека е зададена со својот радиус-вектор $\mathfrak{r}_0'=\mathfrak{r}_1+\lambda_1{}^0\boldsymbol{l}_1$. Ставувајќи $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]/|[\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]|$, можеме равенката на заедничката нормала да ја запишеме во вид

$$(40) \qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0'+\nu\boldsymbol{n}.$$

Бидејќи правата (40) ја сече правата p_2, тоа постојат такви ν и λ_2 да е

$$\mathfrak{r}_0'+\nu\boldsymbol{n}=\mathfrak{r}_2+\lambda_2\boldsymbol{l}_2.$$

Множејќи ја скаларно оваа равенка со $\boldsymbol{n}$, добиваме, поради $\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{n}=0$,

$$\nu=(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_0')\boldsymbol{n}.$$

Ставувајќи го во овој израз за ν наместо $\mathfrak{r}_0'$ изразот $\mathfrak{r}_1 + \lambda_1^0 l_1$, добиваме, бидејќи е $l_1 n = 0$,

$$\nu = (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)\, n,$$

или, заменувајќи го изразот за n,

$$\nu = \frac{(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1, l_1, l_2)}{|[l_1, l_2]|}.$$

Од (40) следува, ако за $\mathfrak{r}$ го ставиме радиус-векторот $\mathfrak{r}''$ на точката P_2,

$$|\mathfrak{r}_0'' - \mathfrak{r}_0'| = |\nu|,$$

што значи, дека растојанието d на точките P_1, P_2 е еднакво на апсолутната вредност од ν. Затоа имаме

$$(41) \qquad d = \frac{|(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2, l_1, l_2)|}{\sqrt{[l_1, l_2]^2}}.$$

Растојанието d на правите (36) *се пресметува по формулата* (41).

II. метода. До формулата (41) дојдуваме едноставно и на друг начин. Низ правите (36) положуваме две паралелни рамнини, нормални на векторот $[l_1, l_2]$. Растојанието d на правите е еднакво на растојанието меѓу овие две рамнини. Ортогоналната проекција на каков да е вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ со почетна точка M_1 на едната, а со крајна точка M_2 на втората рамнина, на една нормала на рамнината е еднаква на тоа растојание d. Задржувајќи ги горните ознаки, имаме, значи,

$$\pm d = (\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')\, n.$$

Бидејќи е $(\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')\, n = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 + \lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2)\, n = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\, n$, следува одавде (41).

6. Растојанието на две разминувачни прави е најкусото растојание меѓу нивните точки. Ќе ги задржиме ознаките од претходната задача. Ќе докажеме дека отсечката P_1P_2 е најкусата отсечка од сите можни отсечки M_1M_2, при кои крајните точки M_1 и M_2 се движат по првата одн. по втората права.

Нека е $P_1(\mathfrak{r}_0')$, $P_2(\mathfrak{r}_0'')$, $M_1(\mathfrak{r}')$, $M_2(\mathfrak{r}'')$. Тогаш постојат такви λ' и λ'' да е $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0' + \lambda' l_1$ и $\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}_0'' + \lambda'' l_2$. Оттука имаме

$$(42) \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2}^2 &= (\mathfrak{r}_0'' - \mathfrak{r}_0' + \lambda'' l_2 - \lambda' l_1)^2 = \\ &= (\mathfrak{r}_0'' - \mathfrak{r}_0')^2 + (\lambda'' l_2 - \lambda' l_1)^2 + 2\,(\mathfrak{r}_0'' - \mathfrak{r}_0')\,(\lambda'' l_2 - \lambda' l_1). \end{aligned}$$

Бидејќи векторот $r_0'' - r_0' = \overrightarrow{P_1P_2}$ е нормален на l_1 и на l_2, е $(r_0'' - r_0')(\lambda'' l_2 - \lambda' l_1) = 0$. Од (42) добиваме затоа

$$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = \overrightarrow{P_1P_2}^2 + (\lambda'' l_2 - \lambda_1 l_1)^2. \tag{43}$$

Векторите l_1 и l_2 не се колинеарни; затоа, кога не е $\lambda' = \lambda'' = 0$, важи $\lambda'' l_2 - \lambda' l_1 \neq 0$. Од (43) следува, спрема тоа, навистина

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| \geq |\overrightarrow{P_1P_2}|,$$

каде што знакот за еднаквост важи само во случајот $M_1 \equiv P_1$, $M_2 \equiv P_2$. Со тоа тврдењето е докажано.

ЗАДАЧИ

1. Определи ја ортогоналната проекција од точката (—8, 4, 5): *a*) на рамнината $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2 = 0$; *b*) на правата $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$, $4x_1 - x_2 + 5x_3 + 1 = 0$.

2. Пресметај го растојанието на координатниот почеток до правата $(x_1 - 3)/4 = (x_2 + 2)/3 = x_3/5$.

3. На x_1-оската определи ја точката, најблиска до правата $(x_1 + 1)/2 = (x_2 - 3)/5 = x_3 - 2$.

4. Пресметај го растојанието меѓу правите зададени во зад. 2 и 3.

5. Определи ги равенките на заедничката нормала на правите $2x_1 + 3x_2 - x_3 - 1 = 0$, $x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3 = 0$ и $x_1 = x_2 = x_3$.

6. Да се определат координатите на точката што е симетрична со точката (a_1, a_2, a_3) во однос на рамнината $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$.

7. Пресметај го растојанието меѓу два спротивни раба во правилниот тетраедар со раб *a*.

Задачи за геометриски места

1. Во една рамнина во која се зададени точките *A* (— 3, 2) и *B* (4, 3) се движи една точка *M* така да е $\overline{AM}^2 = \overline{BM}^2 + 1$. Најди го геометриското место на *M*.

2. Да се најде геометриското место на точката *M* чии што растојанија до рамнините $8x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 1 = 0$ и $x_1 - x_2 + 4x_3 + 2 = 0$ се однесуваат како 2 : 3.

3. Какво е геометриското место на онаа точка од една рамнина, при која збирот на растојанијата до две (три, или повеќе) ориентирани прави во таа рамнина е константен?

4. Темињата на острите агли на еден правоаголен триаголник, чиј еден остер агол е α, се движат по краците на еден прав агол. Најди го геометриското место на темето на правиот агол.

ГЛАВА II

КРУГ И ТОПКА

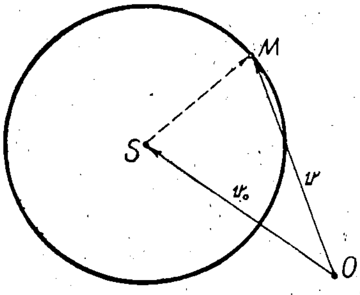
§ 67. Равенка на круг и топка

1. Равенка на кругот во рамнината. *Круг е геометриско место на точките M во рамнината, еднакво оддалечени од една зададена точка S во рамнината.* Растојанието $\overline{SM} = R$ го викаме *радиус* на кругот, а точката S — негов *центар*.

Во дефиницијата на кругот е употребен поимот за растојание на две точки, што е еден *метричен* поим. Затоа и кругот е метричен поим. За аналитичко иследување, поради тоа, се најподесни правоаглите картезични (метрични) координати. Затоа, во оваа глава, ќе употребуваме исклучиво само вакви координати.

Избираме една правоагла координатна система со координатен почеток O. Во однос на неа нека се зададени точките $S(\mathfrak{r}_0)$ и $M(\mathfrak{r})$. При тоа со M ја означивме која да е точка од иследуваното геометриско место — кругот. Спрема дефиницијата на кругот е $|\overrightarrow{SM}| = R$, или $\overrightarrow{SM}^2 = R^2$. Но $\overrightarrow{SM} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$, затоа

$$(1) \qquad (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)^2 = R^2.$$



Сл. 85

Секоја точка M, чиј што радиус-вектор $\mathfrak{r}$ ја задоволува равенката (1), лежи на кругот; и обратно, радиус-векторот $\mathfrak{r}$ на секоја точка од кругот ја задоволува равенката (1). Затоа (1) ја викаме *равенка на кругот*, чиј центар е во $S(\mathfrak{r}_0)$, а радиусот му е R. Оваа равенка е во *векторски* облик. Ако е зададен $S(x_1^0, x_2^0)$ одн. $\mathfrak{r}_0 = \{x_1^0, x_2^0\}$, и $M(x_1, x_2)$ одн. $\mathfrak{r} = \{x_1, x_2\}$, ја добиваме од (1) равенката

$$(2) \qquad (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 = R^2.$$

Тоа е *координатен облик* на равенката на кругот.

Специјално, равенката на кругот со центар во координатниот почеток е, поради $x_1^0 = x_2^0 = 0$,

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2.$$

2. Равенка од втора степен која претставува круг. Равенката (2) ја запишуваме во облик

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^0 x_1 - 2x_2^0 x_2 + a = 0,$$

каде што е

$$a = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - R^2$$

Оваа равенка е од втора степен. Во неа коефициентите пред x_1^2 и x_2^2 се еднакви на 1, а го нема членот со x_1x_2. Да видиме сега дали и, обратно, секоја равенка од ваков вид претставува равенка на еден круг. Избираме, значи, една равенка

$$(3) \qquad x_1^2 + x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_3 = 0,$$

во која a_1, a_2, a_3 се произволни константи. Ако оваа равенка претставува еден круг, треба да биде можно таа да се доведе во облик (2). Дополнувајќи ги членовите со x_1, како и членовите со x_2, до полни квадрати, добиваме

$$(4) \qquad (x_1 + a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_3.$$

А тоа е равенка на еден круг, ако изразот $a_1^2 + a_2^2 - a_3$ е еднаков на квадратот од некој број R, т. е. ако е позитивен. Ако тој израз е нула, равенката (4), а следствено и равенката (3), ја претставтва само точката со координатите $x_1 = -a_1$, $x_2 = -a_2$. А ако тој израз е негативен, тие равенки геометриски не претставуваат ништо. Спрема тоа:

Равенката (3) *претставува геометриски круг, една точка или ништо според тоа дали изразот* $a_1^2 + a_2^2 - a_3$ *е позитивен, еднаков на нула или негативен.*

Кога равенката (3) претставува еден круг, тогаш тој има центар во точката $S(-a_1, -a_2)$, а радиусот му е еднаков на $R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3}$.

Равенката на кругот од видот (3), во која коефициентите пред x_1^2 и x_2^2 се 1, ја викаме *нормална равенка* на кругот.

3. Равенка на топка. *Топка е геометриско место на оние точки M во просторот кои се еднакво оддалечени од една стална точка S.* Точката S ја викаме *центар*, а растојанието $\overline{SM} = R$ — *радиус* на топката.

Избираме една правоагла картезична система. Во неа нека е $S(\mathfrak{r}_0)$, $M(\mathfrak{r})$. На ист начин како во т. 1 следува дека (1) е равенка на топката во векторски облик. За да ја добиеме во координатен облик, ставуваме $S(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и $M(x_1, x_2, x_3)$, каде што M е една произволна точка на топката. Бидејќи е и $\mathfrak{r}_0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$, $\mathfrak{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, добиваме од (1):

$$(5) \qquad (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = R^2.$$

Тоа е координатен облик на равенката на топката.

Равенката (5) можеме да ја запишеме во облик

$$(6) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1^0x_1 - 2x_2^0x_2 - 2x_3^0x_3 + a = 0,$$

каде што е $a=(x_1^0)^2+(x_2^0)^2+(x_3^0)^2-R^2$. Равенката (6) е од втора степен по однос на x_1, x_2, x_3. Во неа ги нема членовите со x_1x_2, x_2x_3 и со x_3x_1, а коефициентите пред x_1^2, x_2^2, x_3^2 се еднакви на 1. Но, секоја равенка од ваков вид не претставува некоја топка. Навистина, равенката

$$(7)\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a_1x_1+2a_2x_2+2a_3x_3+a_4=0,$$

во која a_1, a_2, a_3, a_4 се произволно зададени константи, можеме да ја пишеме во вид

$$(8)\qquad (x_1+a_1)^2+(x_2+a_2)^2+(x_3+a_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4;$$

а оваа равенка, а следствено и равенката (7), претставува, очигледно, една топка само тогаш, ако изразот од десната страна е позитивен, оти само тогаш тој може да биде еднаков на квадратот од некој број R. Ако тој израз е нула, равенката ја претставува само точката со координатите $x_1=-a_1$, $x_2=-a_2$, $x_3=-a_3$; а ако тој израз е негативен, равенката нема решенија, и, спрема тоа, геометриски не претставува ништо.

Равенката (7) претставува една топка, една точка или ништо според тоа дали изразот $a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4$ *е позитивен, еднаков на нула или негативен.*

Ако равенката (7) претставува топка, тогаш од нејзе еквивалентната равенка (8) следува дека нејзиниот центар е точката $S\,(-a_1,\,-a_2,\,-a_3)$ и дека има радиус $R=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4}$.

Равенката на топката во вид (7), каде што коефициентите пред x_1^2, x_2^2, x_3^2 се 1, се вика нејзина *нормална равенка.*

4. Параметарски равенки на кругот. Зададен нека ни е пак еден круг со равенката (1). Аголот меѓу првиот координатен вектор и променливиот вектор $\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0$ ќе го означиме со φ. Бидејќи должината на овој променлив вектор е R, важи (§ 37, т. 2, прим. 1)

$$\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0=\{R\cos\varphi,\ R\sin\varphi\},$$

или во координатен облик

$$(9)\qquad x_1=x_1^0+R\cos\varphi,\qquad x_2=x_2^0+R\sin\varphi.$$

Ако од овие равенки го елиминираме φ, ја добиваме равенката (2). Тоа значи дека за секоја вредност од φ равенките (9) ни ги определуваат координатите x_1, x_2 на по една точка од кругот; а и за секоја точка од кругот одговара еден φ. Се разбира дека можеме да се ограничиме на оние вредност за φ за кои важи $0\leq\varphi<2\pi$.

Равенките (9), во кои φ е произволен параметар, се еден вид *параметарски равенки* на кругот.

5. Параметарски равенки на топката. Ќе ги изведеме параметарските равенки на една топка со радиус R, а со центар во координатниот почеток. Нејзината равенка, поради $\mathfrak{r}_0 = \boldsymbol{0}$, гласи $\mathfrak{r}^2 = R^2$. Воведуваме една — помошна — обикновена поларна система, која со картезичната система има таква заемна положба како во § 39. Употребувајќи ги ознаките од тој §, ги добиваме, поради $\rho = R$, за координатните x_1, x_2, x_3 на векторот $\mathfrak{r}$, односно на една произволна точка на топката, изразите

$$(10)\quad x_1 = R\cos\varphi\sin\theta,\ \ x_2 = R\sin\varphi\sin\theta,\ \ x_3 = R\cos\theta;\ \ 0 \leqq \varphi < 2\pi,\ \ 0 \leqq \theta < \pi.$$

Равенките (10), *во кои* φ и θ *се независни параметри, се еден вид параметарски равенки на топката со центар во координатниот почеток и со радиус R.*

6. Равенка на кругот низ три точки. Во равенката (3) на кругот фигурираат три параметри: a_1, a_2, a_3. Ако вредностите на овие параметри ги избереме произволно, но така да биде $a_1^2 + a_2^2 - a_3 > 0$, равенката (3) ќе претставува еден круг. Затоа кажуваме дека еден круг во рамнината е определен општо со три податоци. Ќе го покажеме аналитички познатиот факт од планиметријата дека низ три неколинеарни точки минува еден и еден сам круг, и ќе ја најдеме неговата равенка.

Нека бидат зададени три неколинеарни точки $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$. Ако низ нив минува барем еден круг, тој ќе има равенка од обликот (3), а координатите од P, Q, R ќе ја задоволуваат таа равенка. Заменувајќи ги во (3), по ред, наместо x_1, x_2 координатите на P, потоа на Q и најпосле на R, добиваме со тоа, заедно со (3), четири равенки. Нив можеме да ги сметаме како една система линеарни хомогени равенки со непознатите $2a_1$, $2a_2$ и „непознатата" 1. Последната „непозната" е различна од нула; затоа систената има нетривијални решенија. А за тоа е потребно, детерминантата на системата да е нула, значи

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 \\ p_1^2+p_2^2 & p_1 & p_2 & 1 \\ q_1^2+q_2^2 & q_1 & q_2 & 1 \\ r_1^2+r_2^2 & r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

На тој начин ги елиминиравме од спомнатите равенки параметрите a_1, a_2, a_3. Ако детерминантата од левата страна на (11) ја развиеме по првиот ред, добиваме една равенка од видот (3). Таа е, навистина, квадратна по однос на x_1, x_2, без членот со x_1x_2, а коефициентот пред $x_1^2 + x_2^2$ е

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix},$$

кој, поради претпоставената неколинеарност на P, Q, R, е различен од нула. Делејќи ја равенката со овој коефициент, добиваме равенка од видот (3). Обликот на (11) покажува дека таа равенка е задоволена за $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$, за $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$ и за $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$. Затоа таа равенка, навистина, претставува еден круг; зашто исклучени се останатите можности, т. е. таа да претставува само една точка или ништо.

Равенката (11) е равенка на кругот што минува низ три зададени неколинеарни точки (p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2).

7. Равенка на топката низ четири некомпланарни точки. По сосем аналоген начин како равенката (11) на кругот може да се изведе равенката на топката што минува низ четири произволно зададени некомпланарни точки, користејќи ја теоријата на системата хомогени линеарни равенки со пет непознати.

Ако се зададени четири некомпланарни точки $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$, $R(r_1, r_2, r_3)$, $T(t_1, t_2, t_3)$, ја добиваме за единствената топка што минува низ нив равенката

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 & p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 & r_1 & r_2 & r_3 & 1 \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 & t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенката (12) е равенка на топката што минува низ четирите некомпланарни точки (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3), (r_1, r_2, r_3), (t_1, t_2, t_3).

ЗАДАЧИ

Провери дали зададените равенки во зад. 1—4 претставуваат некоја крива. Во случај на позитивен одговор тие да се нацртаат.

1. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - 6x_2 = 0$. 2. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 - 4 = 0$.
3. $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 + 13 = 0$. 4. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$.

5. Провери дека равенката на кругот чиј дијаметар е отсечката што ги сврзува точките $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ гласи $(x_1 - a_1)(x_1 - b_1) + (x_2 - a_2)(x_2 - b_2) = 0$.

Покажи што претставуваат геометриски равенките во зад. 6—8.

6. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1+6x_3+6=0$. 7. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1+4x_2-2x_2+14=0$.
8. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-10x_2+6x_3+36=0$.

9. Напиши ја равенката на кругот што минува низ точките (0, 0), (2, 1) и (—1, 2).

10 Напиши ја равенката на кругот, опишан околу еден рамностран триаголник со страна a, заменувајќи ги за координатни оски една та страна на триаголникот и висината спуштена на неа. Пресметај го радиусот на тој круг.

11. Покажи дека при кој да е триаголник средините на страните, подножјата на висините, како и средините на отсечките што ортоцентарот го соединуваат со темињата, лежат на еден ист круг (*Фојербах*-ов круг).

12. Определи ја равенката на топката, ако крајните точки на еден нејзин дијаметар се (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3).

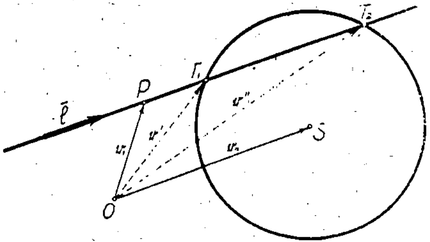
§ 68. Заемна положба на права и круг и на права и топка.

1. Круг и права. Во рамнината нека ни е зададен кругот K со равенката

(13) $(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0)^2-R^2=0$

и една права p со равенката

(14) $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\lambda\boldsymbol{l}$.



Сл. 86

Ќе испитаме дали p и K имаат заеднички точки. Ако некоја таква точка постои, постои и таква вредност за λ да изразот за $\mathfrak{r}$, даден со (14), ја задоволува (13). Заменувајќи го изразот $\mathfrak{r}_1+\lambda\boldsymbol{l}$ во (13), добиваме $(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_0+\lambda\boldsymbol{l})^2-R^2=0$, или

(15) $\lambda^2\cdot\boldsymbol{l}^2+2\lambda\cdot(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_0)\,\boldsymbol{l}+(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_0)^2-R^2=0.$

Тоа е квадратна равенка за λ. Таа има, спрема тоа, два, еден или ниеден (реален) корен. За секој корен од оваа равенка определува равенката (14) по една заедничка точка на p и K. Ако корените се еднакви, имено, на λ', λ'', радиус-векторите $\mathfrak{r}'=\mathfrak{r}_1+\lambda'\boldsymbol{l}$ и $\mathfrak{r}''=\mathfrak{r}_2+\lambda''\boldsymbol{l}$ ги определуваат пресечните точки на p и K. Со тоа покажавме аналитички дека *еден круг и права можат да имаат две, една или ниедна заедничка точка.* За правата што со еден круг има две заеднички точки ќе кажеме да го *сече*, за правата што со него има една заедничка точка — дека го *допира*, а за правата што со него нема заеднички точки — дека *не го сече.*

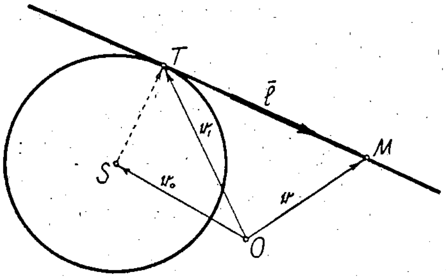
Нека биде $P(\mathfrak{r}_1)$ ортогоналната проекција од центарот S на правата (14). Тогаш е $\overrightarrow{SP}\cdot\boldsymbol{l}=(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_0)\,\boldsymbol{l}=0$; затоа дискриминантата на равенката (15) е $-4\boldsymbol{l}^2\,[(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_0)^2-R^2]$. Равенката (15) има, спрема тоа, две, едно или ниедно решение — според тоа дали изразот $(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_0)^2-R^2=\overrightarrow{SP}^2-R^2$ е негативен, нула или позитивен, т. е. дали е $\overline{SP}<R$, $\overline{SP}=R$ или $\overline{SP}>R$. Значи:

Една права го сече кругот во две точки, го допира или не го сече — според тоа дали нејзиното растојание до центарот на кругот е помало, еднакво или поголемо од радиусот.

2. Права и топка. Сè потполно аналогно важи, ако равенката (13) ја сметаме како равенка на една топка, а равенката (14) за равенка на една права во просторот. Со тоа е покажано дека:

Една права и топка можат да имаат две, една или ниедна заедничка точка. Правата ја сече топката во две точки, ја допира *или не ја сече — според тоа дали нејзиното растојание до центарот на топката е помало, еднакво или поголемо од радиусот.*

3. Тангента на кругот. Правата што го допира кругот се вика негова *допирка* или *тангента*, а единствената нивна заедничка точка — *допирна точка* на тангентата.



Сл. 87

Нека, сега, правата (14) биде една тангента на кругот (13), а нејзината допирна точка нека биде $T(\mathfrak{r}_1)$. Бидејќи T лежи на кругот, е $(\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0)^2 — R^2 = 0$. Затоа равенката (15) добива сега овој специјален вид

$$\lambda^2 \mathbf{l}^2 + 2\lambda \cdot (\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0)\, \mathbf{l} = 0.$$

Оваа равенка треба да има — бидејќи правата (14), по претпоставка, е тангента — само еден корен; нејзината дискриминанта е затоа нула, значи

$$(\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0)\, \mathbf{l} = 0. \tag{16}$$

Оваа равенка покажува дека векторот $\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0 = \overrightarrow{ST}$ е нормален на $\mathbf{l}$, односно на тангентата. *Тангентата на кругот во една негова точка е,* значи, *нормална на радиусот во таа точка* — како што се изразуваме кратко.

Бидејќи $\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0$ е еден нормален вектор на тангентата, а $\mathfrak{r}_1$ радиус-вектор до една нејзина стална точка, тоа метричната равенка на тангентата гласи

$$(\mathfrak{r} — \mathfrak{r}_1)(\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0) = 0. \tag{17}$$

Додавајќи ѝ на оваа равенка $(\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0)^2 — R^2 = 0$, добиваме

$$(\mathfrak{r} — \mathfrak{r}_0)(\mathfrak{r}_1 — \mathfrak{r}_0) = R^2, \tag{18}$$

што е еден друг вид на *равенката на тангентата* во векторски облик.

Ако x_1^0, x_2^0 се координати на центарот, x_1', x_2' координати на допирот, а x_1, x_2 координати на која да е точка на кругот — *течечките координати* — тогаш следува од (18)

$$(x_1 — x_1^0)(x_1' — x_1^0) + (x_2 — x_2^0)(x_2' — x_1^0) = R^2,$$

што е *равенка на тангентата во координатен облик.*

4. Тангентна рамнина на топката. Сметајќи ја равенката (13) за равенка на една топка, а равенката (14) за равенка на една права во просторот, ја добиваме пак релацијата (16) како услов за тоа, правата (14) да биде тангента на топката со допир во T $(\mathbf{r}_1)$. Ако го означиме со $\mathbf{r}$ радиус-векторот до која да е точка на таа тангента, тогаш векторот $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ е колинеарен со $\boldsymbol{l}$. Затоа ја добиваме од (16) релацијата (17), од каде следува (18). Релацијата (18) ја задоволуваат радиус-векторите $\mathbf{r}$ на таквите точки M, за кои правата MT е тангента на топката со допир во T. Таа равенка претставува, ако $\mathbf{r}$ е променлив радиус-вектор, една рамнина. Оттука следува дека геометриското место на тангентите на една топка во една нејзина точка T е една рамнина. Ја наречуваме *тангентна* или *тангенцијална рамнина* на топката со допир во T.

Ако центарот на топката е (x_1^0, x_2^0, x_3^0), а допирот на тангентната рамнина во точката (x_1', x_2', x_3'), тогаш следува од векторската равенка на тангентната рамнина (18):

$$(x_1-x_1^0)\,(x_1'-x_1^0)+(x_2-x_2^0)\,(x_2'-x_2^0)+(x_3-x_3^0)\,(x_3'-x_3^0)=R^2,$$

што е *равенка на тангентната рамнина во координатен облик.*

5. Полара на точка во однос на круг. Равенката (18) претставува равенка на една права во рамнината и тогаш кога точката, определена со $\mathbf{r}_1$ не лежи на кругот (13). Ќе испитаме која права е тоа. Ставаме $P(\mathbf{r}_1)$.

Равенката (18) ја нормираме, делејќи ја со $\delta=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0|=\overline{SP}$. Добиваме

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\boldsymbol{n}-R^2/\delta=0, \qquad \boldsymbol{n}=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)/\delta.$$

Оваа права го сече кругот во две точки ако е $R^2/\delta<R$ одн. $R<\delta$.

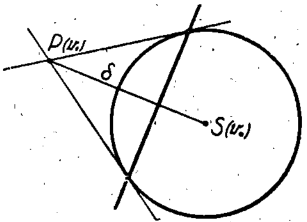
Нека за растојанието $\delta=\overline{PS}$ од точката $P(\mathbf{r}_1)$ до центарот S важи: $\delta>R$. Правата (18) го сече тогаш кругот во две точки. Една од нив нека е T $(\mathbf{r}')$. Значи е

(19) $\quad(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\,(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)-R^2=0.$

Одавде следува дека равенката

(20) $\quad(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)-R^2=0$

е задоволена за $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$. А (20) е равенка на тангентата на кругот (13) во точката T. Правата PT е, значи, тангента.



Сл. 88

Да претпоставиме сега обратно: дека (20) претставува равенка на која да е тангента, спуштена од P на кругот. Тогаш важи (19); а тоа значи да точката $T(\mathbf{r}')$ лежи на правата (18). Спрема тоа, допирните точки на сите тангенти, спуштени од P на кругот, лежат на правата (18). Бидејќи таа има два пресеци со кругот, тоа од P можат да се повлечат две тангенти.

Ако $\delta = R$, P лежи на кругот; низ P врви една тангента.

Ако е $\delta < R$, правата (18) не го сече кругот; низ P не можат да се повлечат тангенти на кругот.

Правата (18) *ја викаме полара на точката P ($\mathfrak{r}_1$) во однос на кругот* (13). *Ако таа го сече кругот, тогаш тангентите, спуштени од P на кругот, минуваат низ пресечните точки.*

Од горното изведување следува: Од една точка P можат да се повлечат две, една или ниедна тангента на кругот според тоа дали за растојанието $\delta = \overline{SP}$ важи $\delta > R$, $\delta = R$ или $\delta < R$. За точките P за кои важи $\delta > R$ ќе кажеме дека ја образуваат *надворешноста* на кругот, а за точките P за кои важи $\delta < R$ — дека ја образуваат *внатрешноста* на кругот. Самите точки ќе ги викаме *надворешни*, одн. *внатрешни*.

Од секоја надворешна точка можат да се повлечат две, а од внатрешните точки не може да се повлече ниедна тангента на кругот.

6. Поларната рамнина на точката во однос на топка. Аналогни изведувања важат и за топката чија равенка е (13). Ако една точка $P(\mathfrak{r}_1)$ има од центарот на таа топка растојание δ што е поголемо од R, тогаш равенката (18) претставува равенка на една рамнина во која лежат допирните точки на сите тангенти спуштени од P на топката.

Ако е $\delta = R$, равенката (18) ја претставува тангенцијалната рамнина на топката со допир во P.

А ако е $\delta < R$, рамнината (18) не ја сече топката.

Рамнината (18) ја викаме *поларна рамнина* од точката $P(\mathfrak{r}_1)$ во однос на топката (13). Ако таа ја сече топката, тогаш тангентите спуштени од P на топката ги имаат допирните точки во таа рамнина.

7. Степен на точка во однос на круг. Векторот l на правата (14) нека е единичен. Равенката (15) гласи тогаш

$$\lambda^2 + 2\lambda \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)\, l + (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)^2 - R^2 = 0. \tag{21}$$

Од правилото на *Виет* за корените на квадратната равенка следува

$$\lambda' \cdot \lambda'' = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)^2 - R^2,$$

или, обележувајќи ја левата страна на равенката на кругот (13) со $K(\mathfrak{r})$, а точката што ја определува $\mathfrak{r}_1$ со P,

$$\lambda' \cdot \lambda'' = K(\mathfrak{r}_1) = K(P). \tag{22}$$

Пресеците T_1 и T_2 на правата (14) и кругот (13) се дадени со радиус-векторите $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1 + \lambda' \mathfrak{l}$ и $\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}_1 + \lambda'' \mathfrak{l}$. Оттука следува

$$\lambda' = \frac{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_1}{\mathfrak{l}} = \frac{\overrightarrow{PT_1}}{\mathfrak{l}}, \quad \lambda'' = \frac{\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}_1}{\mathfrak{l}} = \frac{\overrightarrow{PT_2}}{\mathfrak{l}}.$$

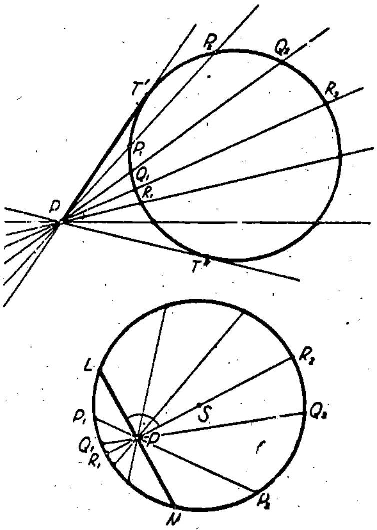
Одавде се добива $\mathfrak{l}^2 \cdot \lambda' \lambda'' = \overrightarrow{PT_1} \cdot \overrightarrow{PT_2}$ или $\lambda' \lambda'' = \overrightarrow{PT_1} \cdot \overrightarrow{PT_2}$. Со оглед на (22) имаме, значи,

$$\overrightarrow{PT_1} \cdot \overrightarrow{PT_2} = K(P). \tag{23}$$

Десната страна на оваа равенство, а следствено и левата страна, т. е. производот $\overrightarrow{PT_1} \cdot \overrightarrow{PT_2}$, не зависи од правецот на $\mathfrak{l}$. Овој производ е определен со точката P. Ако, спрема тоа, кои да е прави што минуваат низ P го сечат кругот во точките P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2;..., тогаш важи

$$\overrightarrow{PT_1} \cdot \overrightarrow{PT_2} = \overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{PR_1} \cdot \overrightarrow{PR_2} = \cdots = K(P).$$

Бројот $K(P)$ го викаме *сӣеӣен* или *ӣоӣенција* на точката P во однос на кругот $K = 0$.



Сл. 89

Нека степента на точката P биде позитивна. Тогаш е $K(P) = K(\mathfrak{r}_1) = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)^2 - R^2 > 0$, или $|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0| > R$, или $\overline{SP} > R$. Точката P е, значи, надворешна. Ако P е внартешна точка, е $K(P) < 0$.

Ако P е *надворешна* точка, а T' допирната точка на една од тангентите, спуштени од P на кругот, следува од (23), бидејќи е $T_1 \equiv T_2 \equiv T'$, релацијата

$$\overline{PT'}^2 = K(P).$$

Степента на една *надворешна* точка P во однос на еден круг е, значи, еднаква на квадратот од растојанието од таа точка до допирната точка на која да е од тангентите спуштени од P на кругот.

Нека е сега P една *внаӣрешна* точка. За онаа права низ P која е нормална на пречникот PS важи $(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)\,\mathfrak{l} = 0$. Затоа, за овој случај, равенката (21) гласи

$$\lambda^2 + K(P) = 0.$$

Таа има, поради $K(P) < 0$, два корени, спротивни по знак, а еднакви по апсолутна вредност. Ако спомнатата права го сече кругот во точките L, M, следува одавде дека е $\overrightarrow{PL} = -\overrightarrow{PM}$, и затоа

$$K(P) = -\overrightarrow{PL}^2 = -\overrightarrow{PM}^2.$$

Степента на една *внатрешна* точка P во однос на еден круг е, спрема тоа, еднаква на негативниот квадрат од половината на должината на онаа тетива што минува низ P и е нормална на дијаметарот што врви низ таа точка.

8. Степен на точката во однос на топката. Аналогни дефиниции и резултати како за кругот во т. 7. важат и за топката. Дедукцијата е буквално иста и тогаш ако равенката (13) ја сметаме за равенка на една топка, а равенката (14) за равенка на една права во просторот. Ги добиваме овие резултати:

Степента на една точка $P(\mathfrak{r}_1)$ *во однос на топката* $K(\mathfrak{r}) = 0$ *е бројот* $K(\mathfrak{r}_1)$. *Тој е еднаков на производот* $\overrightarrow{PT}_1 \cdot \overrightarrow{PT}_2$, *ако* T_1, T_2 *се пресечните точки на топката со која да е права што минува низ* P. Должините на отсечките, што на секоја тангента, спуштена од една иста надворешна точка P на топката, ги отсечуваат точката P и допирот, се еднакви.

ЗАДАЧИ

Определи ги заедничките точки на зададената права и кругот одн. топката, ако ги има такви.

1. $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 + x_2 = 0;\ x_1 = 3 + t,\ x_2 = -1 - t.$

2. $2(x_1^2 + x_2^2) + 6x_1 - 7x_2 + 9 = 0;\ \{x_1, x_2\} = \{2, 3\} + t \cdot \{3, 2\}.$

3. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 4 = 0;\ x_1 + 2x_2 + 2 = 0.$

4. $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + 2a_1(x_1 - x_1^0) + 2a_2(x_2 - x_2^0) = 0;\ a_1(x_1 - x_2^0) + a_2(x_2 - x_2^0).$

5. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0;\ x_1 - 1 = x_2 - 1 = x_3 - 1.$

6. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0;\ x_1 = t,\ x_2 = -4t,\ x_3 = -2t.$

7. $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1 + 6x_2 + 3 = 0;\ (3 - x_1)/3 = x_2/4 = x_3/5.$

8. Напиши ја равенката на тангентата на кругот со допир во (0, 0), ако равенката на кругот гласи:

a) $3(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 + 5x_2 = 0.$

b) $A_0(x_1^2 + x_2^2) + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 = 0,\ A_0 \neq 0.$

9. Напиши ја равенката на тангентата на кругот $x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 8x_2 + 13 = 0$ во точката (2, 3).

10. Напиши ја равенката на тангентната рамнина на топката $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$ со допир во (0, 0, 0).

11. Покажи дека правата $x_2 = mx_1 \pm a\sqrt{1 + m^2}$ е тангента на кругот $x_1^2 + x_2^2 = a^2$, при секоја вредност од m.

12. Собирајќи ја равенката на кругот $x_1^2 + x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ и равенката на правата $a_1x_1 + a_2x_2 + a_1^2 + a_2^2 = 0$ се добива $(x_1 + a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2 = 0$. Геометриско толкување!

13. Каква е заемната положба на кругот $x_1^2 + x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$ и правата $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$, при $a_3 \neq 0$ и при $a_3 = 0$?

14. Каква заемна положба има топката $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a_4 = 0$ и рамнината $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$, при разни значења од a_4?

15. Покажи: Ако поларата од P минува низ Q, тогаш поларата од Q минува низ P.

16. Определи ја равенката на паротт тангенти, спуштени од (0, 0) на кругот $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 16 = 0$.

17. Покажи дека равенката на сечицата што ги сврзува точките (x_1', x_2') и (x_1'', x_2'') од кругот $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ може да се доведе во облик $(x_1 - x_1')(x_1'' + x_1') + (x_2 - x_2')(x_2'' + x_2') = 0$. Изведи ја оттука равенката на тангентата на кругот со допир во (x_1', x_2').

18. Покажи дека една топка и една рамнина или немаат заеднички точки, или имаат заедничка една точка или се пресекуваат во еден круг. *Найаш.*: Рамнината со која ја пресечуваме топката ја избери за една координатна рамнина!

§ 69. Системи на кругови и на топки

1. Радикална оска на два круга. Дадени нека ни се два круга

$$(24)\qquad \begin{aligned} K &\equiv x_1^2 + x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_3 = 0 \\ K' &\equiv x_1^2 + x_2^2 + 2a_1'x_1 + 2a_2'x_2 + a_3' = 0. \end{aligned}$$

Ќе испитаме кои точки од рамнината имаат еднакви степени во однос на нив. За секоја точка P за која тие степени се еднакви важи $K(P) = K'(P)$, или, ако координатите од P ги бележиме со x_1 и x_2,

$$(25)\qquad K - K' = 0$$

или

$$(26)\qquad 2(a_1 - a_1')x_1 + 2(a_2 - a_2')x_2 + a_3 - a_3' = 0.$$

Обратно, ако за една точка $P(x_1, x_2)$ важи (26), важи и (25), што значи дека P има еднакви степени во однос на двата круга (24).

Равенката (26) претставува — бидејќи е линеарна во однос на x_1 и x_2 — една права, ако барем еден од коефициентите $a_1 - a_1'$ и $a_2 - a_2'$ не е нула. А ако е $a_1 - a_1' = 0$, $a_2 - a_2' = 0$, а $a_3 - a_3' \neq 0$, равенката (26) претставува апсурдна еднаквост — не постојат, значи, во овој случај, точки со еднакви степени. Центрите на дадените кругови, во овој случај, совпаднуваат; такви кругови ѓи викаме *концентрични*. Случајот $a_1 - a_1' = a_2 - a_2' = a_3 - a_3' = 0$ не е можен, ако претпоставуваме дека круговите (24) не совпаднуваат.

Покажавме, значи:

Геометриското место на точките кои имаат еднакви степени во однос на два неконцентрични круга е една права. За два концентрични несовпаднати круга не постојат точки со еднакви степени во однос на нив.

Правата ја викаме *радикална оска* на неконцентричните кругови. Правата (26) е, значи, радикална оска на круговите (24).

Правата (26) е нормална на векторот $\{a_1 - a_1', a_2 - a_2'\}$, значи на векторот чија почетна и крајна точка се центрите на дадените кругови. *Радиалната оска* е, значи, *нормална на правата што ги сврзува центрите на дадената два круга.*

Системата равенки $K = 0$, $K' = 0$ е еквивалентна на системата $K - K' = 0$, $K = 0$. Тоа значи геометриски дека пресечните точки на круговите (24) се и пресечни точки на кој да е од тие кругови со нивната радикална оска. Оттука следува дека *два круга можат да имаат две, една или ниедна заедничка точка.* Освен тоа: *Радикалната оска на два круга што се сечат во две точки е правата што ги сврзува нивните пресечни точки.* А ако круговите имаат само една заедничка точка, тогаш таа е и единствената заедничка точка на радикалната оска и кој да е од круговите — *нивната радикална оска е*, значи, *и нивна заедничка тангента во заедничката точка.* За круговите кои во една нивна заедничка точка имаат иста тангента кажуваме дека *се допираат* во таа точка.

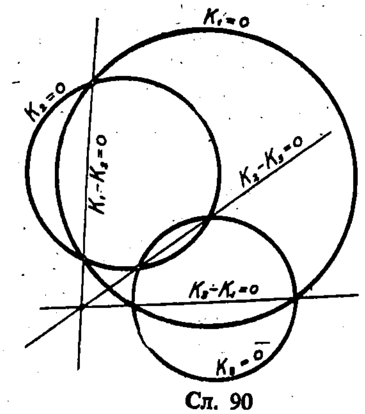
2. Радикални оски на три круга, земени по два и два. Да избереме сега три какви да е круга и да иследиме каква заемна положба имаат радикалните оски на по два и два од нив. Нормалните равенки на круговите нека бидат $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$. Равенките на радикалните оски се тогаш

$$L_{12} \equiv K_1 - K_2 = 0,$$
$$L_{23} \equiv K_2 - K_3 = 0,$$
$$L_{31} \equiv K_3 - K_1 = 0.$$

Бидејќи е

$$L_{12} + L_{23} + L_{31} \equiv 0,$$

е покажано со тоа дека радикалните оски на два и два од три произволни неконцентрични круга му припаѓаат на еден сноп, т. е. минуваат низ една точка или се



Сл. 90

паралелни. Ако минуваат низ една точка, тогаш таа точка ја викаме *радикален ценшар* на трите круга.

Горната теорема можеме да ја користиме за конструкција на радикалната оска на два круга што не се сечат, избирајќи еден произволен трет круг што ги пресечува дадените два.

3. Радикална рамнина на две топки. Аналогни изведувања важат за две зададени топки. Геометриско место на точките што имаат еднакви степени во однос на две неконцентрични топки, чии нормални равенки се $K = 0$, $K' = 0$, е рамнината $K - K' = 0$ — *радикалнаша рамнина* на топките. Таа е нормална на правата што ги сврзува центрите на топките. Сите заеднички точки на две топки лежат и на нивната радикална рамнина. Ако имаат две топки, спрема тоа, пресечни точки, тогаш тие сите лежат во една рамнина — во нивната радикална рамнина.

На ист начин како во т. 2 се покажува дека трите радикални рамнини на по две и две од кои да е три зададени топки му припаѓаат на еден сноп, т. е. минуваат низ една права или се паралелни. Ако минуваат низ една права, тогаш таа права ја викаме *радикална оска* од трите топки. Бидејќи таа е пресек на рамнините што се нормални на правите што ги сврзуваат по два и два центри на топките, тоа таа е нормална на рамнината во која лежат центрите на топките. Секоја точка на оваа оска има еднакви степени во однос на секоја од дадените топки.

Ако покрај трите топки избереме уште една топка чиј центар не лежи во рамнината на центрите на првите три топки, тогаш радикалната оска на првите три топки ја сече радикалната рамнина на четвртата топка и која да е од пврите три топки во една иста точка. Таа точка има еднакви степени во однос на четирите топки. Ја нарекуваме *радикален ценшар* на тие топки. *За чешири шойки,* значи, *чии ценшри не лежаш ѣо една рамнина, йосшои една шочка — ниѣниош радикален ценшар — која има исша сшеӣен ѣо однос на чешириѿе шойки, и низ која минуѣааш сиѿе радикални рамнини од ӣо дѣе и дѣе од ѿие шойки и сиѿе радикални оски од ӣо ѿри и ѿри од ѿие шойки.*

Забелешка. Сите горни изведувања важат и тогаш, кога една или обете од равенките $K = 0$, $K' = 0$ на круговите одн. топките претставуваат точки.

ЗАДАЧИ

1. Која теорема се добива од теоремата за радикалните оски на два и два од три зададени круга, ако круговите дегенерираат во точки?

2. Истото прашање за теоремата за радикалните рамнини, оски и центар за случај на четири топки!

4. Сноп кругови. Зададени нека се равенките (24). Секоја од нив претставува еден круг, точка или ништо. Потоа ја формираме равенката

$$(27)\quad K+\lambda K' \equiv (1+\lambda)(x_1^2+x_2^2)+2(a_1+\lambda a_1')x_1+2(a_2+\lambda a_2')x_2+$$
$$+(a_3+\lambda a_3')=0,$$

каде што λ е еден произволен параметар. Оваа равенка претставува, при различни вредности од λ, круг, точка или ништо, а при $\lambda=-1$ таа претставува една права. Целокупноста на круговите, определени со равенката (27) во која за λ избираме севозможни вредности, заедно со кругот $K'=0$, ја викаме *сноп кругови.*

Центарот на произолниот круг од снопот (27) ги има координатите

$$-\frac{a_1+\lambda a_1'}{1+\lambda},\quad -\frac{a_2+\lambda a_2'}{1+\lambda}.$$

Ако е $a_1=a_1'$, $a_2=a_2'$, круговите од снопот се концентрични. А ако не е $a_1-a_1'=a_1-a_2'=0$, цетрите на круговите од снопот лежат на правата што ги сврзува точките $(-a_1,-a_2)$ и $(-a_1',-a_2')$. Ако (24) претставуваат два круга, таа права е нивната *централна линија.* Спрема тоа, *геометриското место на центрите на круговите од снопот што е определен со два неконцентрични круга е нивната централна линија.*

Ќе покажеме сега дека низ секоја точка од рамнината минува еден и само еден круг од дадениот сноп; при тоа кругот може да дегенерира и во точка. Нека е зададена една точка P во рамнината. Нејзините координати ги заменуваме во (27) па добиваме $K(P)+$ $+\lambda K'(P)=0$. Претпоставувајќи дека не е $K'(P)=0$, добиваме со елиминацијата на λ одавде и од (27):

$$K(P)\cdot K'-K'(P)\cdot K=0,$$

што е равенка на оној круг од снопот што минува низ P. А ако е $K'(P)=0$, точката P лежи на кругот $K'=0$.

Кругот $K'=0$ со равенката (27) не е опфатен. За да го избегнеме тој недостаток, се служиме често и со *хомогени* параметри μ, μ', дефинирани со $\lambda=\mu'/\mu$. Равенката на снопот сега добива вид

$$\mu K+\mu' K'=0.$$

Кругот $K'=0$ од снопот го добиваме за $\mu=0$, $\mu'\neq 0$.

Раденката (27) претставува, при разни вредности за λ, кругови, точки или ништо и тогаш кога еден од изразите K и K' не е израз даден со (24), туку израз што е линеарен по x_1, x_2 или кој е дури независен од x_1 и x_2. И во тој случај целокупноста кругови, определени со (27), ќе ја викаме *сноп кругови.*

5. Коаксијална система кругови. Нека ни е даден еден сноп кругови со равенката (27), во која еден од изразите K и K' може и да не биде квадратен по x_1, x_2, но само линеарен, или дури еднаков на една константа. Избираме кои да е два круга од тој сноп, на пр.

$$K + \lambda_1 K' = 0, \quad K + \lambda_2 K' = 0.$$

Равенката на радикалната оска за овие два круга ја добиваме, ако ги извадиме нивните нормални равенки, значи,

$$\frac{K + \lambda_1 K'}{1 + \lambda_1} - \frac{K + \lambda_2 K'}{1 + \lambda_2} \equiv \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(1+\lambda_1)\ (1+\lambda_2)} \cdot (K - K') = 0.$$

Равенката на радикалната оска е, поради $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, дадена со $K - K' = 0$. Таа не зависи ов λ_1, λ_2. Кои да е два круга од снопот имаат, спрема тоа, една иста радикална оска. Кажуваме дека таа радикална оска е *заедничка радикална оска* на круговите од снопот, а за самите кругови велиме дека се *коаксијални*. Сите кругови од рамнината што имаат иста радикална оска образуваат една *система коаксијални кругови.*

Ќе покажеме сега, обратно, дека сите кругови од една коаксијална система му припаѓаат на еден сноп. Навистина, ако три круга $K = 0$, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ ја имаат за заедничка радикална оска правата $L = 0$, постојат такви константи λ_1 и λ_2 да важи идентично

$$K - K_1 \equiv \lambda_1 L \quad \text{и} \quad K - K_2 \equiv \lambda_2 L,$$

од каде $(\lambda_2 - \lambda_1)K \equiv \lambda_2 K_1 - \lambda_1 K_2$. Равенката на кругот $K = 0$ може, значи, да се доведе во облик $\lambda_2 K_1 - \lambda_1 K_2 = 0$; тој круг му припаѓа, спрема тоа, навистина, на снопот што е определен со круговите $K_1 = 0$ и $K_2 = 0$.

Специјално, за снопот кругови

$$K + \lambda L = 0,$$

во која K е даден со (24), а $L = 0$ е равенка на една права, се проверува дека заедничката радикална оска на снопот е правата $L = 0$. Навистина, за радикалната оска на два кои да е круга $K + \lambda_1 L = 0$ и $K + \lambda_2 L = 0$ од снопот ја добиваме равенката $K + \lambda_1 L - (K + \lambda_2 L) \equiv (\lambda_1 - \lambda_2) L = 0$ или $L = 0$.

6. Сноп топки. Аналогни резултати добиваме, ако $K = 0$ и $K' = 0$ се нормални равенки на две топки. Равенката $K + \lambda K' = 0$, во која λ е еден променлив параметар, определува една целокупност топки — *сноп топки.* Ако зададените топки се концентрични, се концентрични со нив и сите топки од снопот. А ако тие две топки не се концентрични, тогаш центрите на топките од снопот лежат на централната линија на топките.

Кој да е пар топки од снопот има иста радикална рамнина како зададените две топки. Тоа е *заедничкаша радикална рамнина* на снопот. Ако $K = 0$ е една топка од еден сноп, а $L = 0$ неговата заедничка радикалната рамнина, тогаш равенката на снопот гласи $K + \lambda L = 0$.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека во еден сноп кругови има или два, или еден. или ниеден круг што ја допира една зададена права од рамнината. Кога настапуваат одделните случаи?

2. Интерпретирај го геометриски аналитичкиот услов за тоа, во снопот кругови да постои само еден круг што ја допира една зададена права.

3. Покажи дека равенката $A_0 (x_1^2 + x_2^2) + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$, во која коефициентите A_i се линеарни функции од еден параметар, претставува равенка на еден сноп кругови.

4. Аналогно прашање, како во зад. 3, за равенката $A_0 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$.

5. Најди ја заедничката тетива на круговите $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + x_2 = 0$ и $3(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1 + 4x_2 = 0$.

6. Најди ја равенката на рамнината во која се пресечуваат топките $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 = 0$ и $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0$.

7. Најди го радикалниот цетар:

a) за круговите $x_1^2 + x_2^2 - 13x_1 + 2x_2 + 5 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 = 0$;

b) за топките $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1 - 1 = 0$, $5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 4x_2 - 3 = 0$.

8. Најди го радиусот на кругот што минува низ точката (1, 1), а коаксијален е со круговите $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_2 = 0$ и $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 0$.

7. Најпрост вид равенка на еден сноп кругови и на сноп топки. Секој сноп неконцентрични кругови е определен со еден, кој да е, круг од снопот и со заедничката радикална оска. Радикалната оска ќе ја избереме како x_2-оска, а x_1-оската ќе ја избереме така да минува низ центарот на дадениот круг. Равенките на кругот и на радикалната оска имаат тогаш облик

$$x_1^2 + x_2^2 + 2a_1x_1 + a_3 = 0, \quad \text{и} \quad x_1 = 0$$

Снопот има, значи, равенка

$$x_1^2 + x_2^2 + 2a_1x_1 + a_3 + \mu x_1 = 0,$$

во која μ е променливиот параметар. Ставувајќи $2a_1 + \mu = -2\lambda$ и $a_3 = a$, ја добиваме равенката на снопот во вид

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\lambda x_1 + a = 0. \tag{28}$$

Параметар на снопот е сега λ. Равенката (28) покажува дека центрите на сите кругови од снопот лежат на x_1-оската — што следува и инаку од т. 4.

На аналоген начин ја добиваме за снопот топки равенката

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1 + a = 0, \tag{29}$$

со λ како променлив параметар, ако заедничката радикална рамнина на снопот е избрана како x_2x_3-рамнина, и ако центрите на топките лежат на x_1-оската.

ЗАДАЧИ

Доведи ја равенката на снопот кругови во зад. 1—3 во облик (28).

1. $\lambda (x^2 + y^2) - 4x + 6y = 0.$
2. $(1 + \lambda)(x^2 + y^2) - 2(1 + 4\lambda)x - 4y + 5\lambda + 16 = 0.$
3. $x^2 + y^2 + (\lambda - 4)x + 2(\lambda - 1)y - 2\lambda = 0.$

Доведи ја равенката на снопот топки од зад. 4—6 во облик (29).

4. $x^2 + y^2 + z^2 + (\lambda - 2)x + 2(\lambda - 2)y - (\lambda + 6)z + 14 - 2\lambda = 0.$
5. $(1 + \lambda)(x^2 + y^2 + z^2) - 2\lambda x - 2z + 1 + \lambda = 0.$
6. $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda (x + y + z) - 1 = 0.$

7. Да се покаже дека равенката на секој сноп концентрични кругови, при подесен избор на координатната система, може да се доведе во облик

$$x^2 + y^2 + \lambda = 0,$$

а равенката на секој сноп концентрични топки во облик

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda = 0.$$

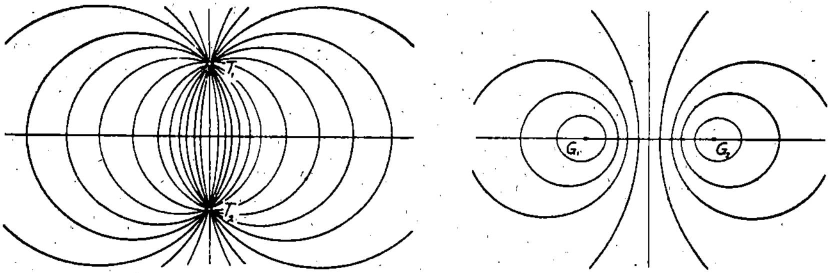
8. Три вида снопови на неконцентрични кругови и топки. Кој да е круг од снопот (28) ја сече радикалната оска $x_1 = 0$ во две точки, во една точка или не ја сече — според тоа дали равенката

$$x_2^2 + a = 0 \tag{30}$$

има два, еден или ниеден корен по x_2. Во оваа равенка, која ги определува ординатите на пресечните точки на кој да е круг од снопот и на радикалната оска, не фигурира λ. Затоа заедничките точки на кој да е круг од снопот и на радикалната оска се и заеднички точки на сите кругови од снопот. Овие точки, ако постојат, ги викаме *базни точки* од снопот.

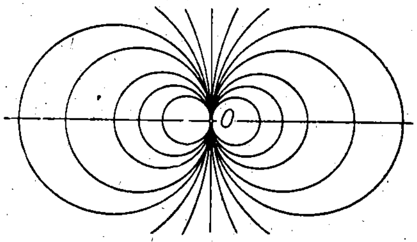
I. Ако е $a < 0$, ќе пишеме $a = -\nu^2$. Равенката (30) има два (реални) корена, а снопот *две базни точки* $T_1(0, \nu)$ и $T_2(0, -\nu)$. Равенката (28) во овој случај може да се претстави во вид

$$(x_1 - \lambda)^2 + x_2^2 = \lambda^2 + \nu^2.$$



Сноп со две базни точки

Сноп без базни точки



Сноп со една базна точка

Сл. 91

Оваа равенка претставува, при секој λ, еден круг. За радиусот R на произволниот круг од снопот важи $R^2 = \lambda^2 + \nu^2$. Оттука следува $R \geqq |\nu|$. Кругот со најмал радиус ($R = |\nu|$) од снопот е

$$x_1^2 + x_2^2 = \nu^2.$$

II. Ако е $a = 0$, снопот има само една *базна точка* — координатниот почеток. Тој е единствена заедничка точка на два произволни круга од снопот, како и на кој да е од тие кругови и правата $x_1 = 0$. Радикалната оска ги допира, значи, сите кругови од снопот во координатниот почеток O. Круговите се допираат во O.

III. Последната можност е $a > 0$. Равенката (30) нема решенија. Круговите од снопот немаат заеднички точки; снопот нема базни точки. Ставувајќи $a = \nu^2$, може равенката (28) да се доведе во облик

$$(x_1 - \lambda)^2 + x_2^2 = \lambda^2 - \nu^2.$$

Оваа равенка претставува круг за секој оној λ за кој важи $|\lambda| > |\nu|$. За $\lambda = \pm \nu$ таа ги претставува точките $G_1(\nu, 0)$, $G_2(-\nu, 0)$. Овие точки ги викаме *гранични точки* на снопот.

И сноповите на топките ги делиме на три врсти. На наполно сличен начин како при круговите се покажува, имено, следното.

Координатите на заедничките точки на која да е топка од снопот (29) и на радикалната рамнина $x_1 = 0$ ги задоволуваат равенките

$$x_2^2 + x_3^2 + a = 0, \quad x_1 = 0.$$

Затоа, ако во (29) е $a < 0$, сите топки од снопот врват низ кругот $x_2^2 + x_3^2 + a = 0$ од рамнината $x_1 = 0$; ако е $a = 0$, сите топки се допираат во координатниот почеток со x_2x_3-рамнината што им е заедничка тангенцијална рамнина; а ако е $a > 0$, топките немаат заеднички точки. Во овој последен случај равенката (29) определува, за $\lambda = \pm\sqrt{a}$, по една точка — *граничните точки* на снопот.

ЗАДАЧИ

1. Напиши ја равенката на кругот што минува низ координатниот почеток и низ пресеците на круговите $x_1^2 + x_2^2 + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + A_3 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + 2B_1x_1 + 2B_2x_2 + B_3 = 0$.

2. Напиши ја равенката на кругот што минува низ точката (— 4, 1) и низ пресеците на правата $2x_1 — 3x_2 + 5 = 0$ со кругот $x_1^2 + x_2^2 — 4x_1 — 2x_2 — 4 = 0$.

3. Напиши ја равенката на топката што минува низ точката (1, 2, 7) и пресекот на топките $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 — 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 — — 4x_1 — 5 = 0$.

4. Напиши ја равенката на топката што минува низ координатниот почеток и низ кругот, даден со $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$, $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + + A_4 = 0$.

5. Базните точки на еден круг се (— 3, 2) и (6, — 1). Напиши ја равенката на снопот.

6. Напиши ја равенката на снопот кругови чии гранични точки се (x_1^0, x_2^0), (x_1', x_2'). *Напат.*: Користи ги равенките на дадените точки како равенки на две специјални криви од снопот!

7. Напиши ја равенката на снопот кругови кои правата $5x_1 — 6x_2 = 0$ ја допираат во точката (6, 5).

8. Напиши ја равенката на снопот кругови чија заедничка радикална оска е $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$, а една гранична точка му е во (x^0_1, x_2^0).

9. Напиши ја равенката на кругот што минува низ точката (0, 0) и му припаѓа на снопот, чија заедничка радикална оска е $5x_1 — 6x_2 + 9 = 0$, а точката (— 3, 2) — една негова гранична точка.

10. Граничните точки на еден сноп кругови се (— 1, 3) и (2, 8). Определи го оној круг од снопот што има центар на x_1-оската.

11. Определи го оној сноп кругови кој кругот $x_1^2 + x_2^2 — 2x_1 + 3x_2 = 0$ го допираат во точката (0, 0).

12. Најди ја равенката на оној круг што кругот $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 — 6 = 0$ го допира во точката (2, 0), а центарот му лежи на x_2-оската.

Определи ги граничните точки на снопот кругови, одн. топки, во зад. 13—15.

13. $2(x_1^2 + x_2^2) + 4(1-\lambda)x_1 + 4(1-\lambda)x_2 + \lambda - 1 = 0.$

14. $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 + 9 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 + 9) = 0.$

15. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 2) = 0.$

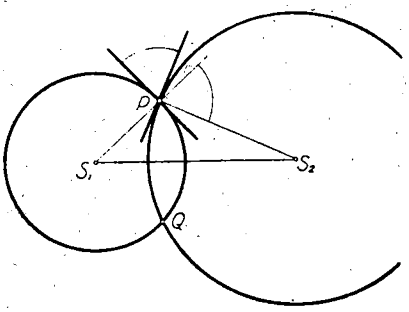
16. Напиши ја равенката на топката што топката $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0$ ја допира во (0, 0, 0) и минува низ (2, 1, — 3).

17. Покажи дека равенката на снопот топки чии гранични точки се (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3) гласи

$$(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2 + \lambda[(x_1 - q_1)^2 + (x_2 - q_2)^2 + (x_3 - q_3)^2] = 0.$$

18. Напиши ја равенката на топката за која кругот $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$, $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$ е еден главен топкин круг.

9. Кругови што се сечат ортогонално. Нека два круга, K_1 и K_2, се сечат во две точки P и Q. Тангентите, повлечени на двата круга со заедничка допирна точка P, зафаќаат два агли. За помалиот од нив ќе кажеме дека е агол под кој се пресечуваат круговите K_1 и K_2 во P. Овој агол е еднаков на остриот агол што го зафаќаат правите кои точката P ја сврзуваат со центрите S_1 и S_2 на круговите. Овие прави се, имено, нормални на тангентите во точката P на круговите. Аналитички лесно се проверува дека аголот под кои круговите K_1 и K_2 се пресечуваат во P е еднаков на аголот под кој тие се сечат во Q. Поради тоа зборуваме кратко за *агол под кој се сечат два круга.*



Сл. 92

Ако аголот под кој се сечат два круга е прав, кажуваме дека круговите се сечат *ортогонално*. Ќе испитаме сега кога два круга

$$(31)\qquad \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + b_3 = 0 \end{aligned}$$

се сечат ортогонално. Нека е P една нивна пресечна точка, а S_1 и S_2 центрите. Ако круговите се сечат ортогонално, правите S_1P и S_2P се нормални, а триаголникот S_1S_2P правоаголен. Затоа важи, спрема *Питагоровата теорема,*

$$(32)\qquad \overline{S_1P}^2 + \overline{S_2P}^2 = \overline{S_1S_2}^2.$$

Бидејќи $\overline{S_1P}$ и $\overline{S_2P}$ се радиуси на дадените кругови, имаме

$$(*)\qquad \overline{S_1P}^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_3, \quad \overline{S_2P}^2 = b_1^2 + b_2^2 - b_3.$$

$\overline{S_1S_2}$ е растојанието на точките $(-a_1, -a_2)$ и $(-b_1, -b_2)$. Затоа е

$$(**) \qquad \overline{S_1S_2}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2.$$

Заменувајќи ги добиените изрази за $\overline{S_1P}^2$, $\overline{S_2P}^2$ и $\overline{S_1S_2}^2$ во (32), добиваме, по упростувањето

$$(33) \qquad 2(a_1b_1 + a_2b_2) - (a_3 + b_3) = 0.$$

Ако круговите (31) се сечат ортогонално, коефициентите на нивните нормални равенки го задоволуваат, според тоа, условот (33). Обратно, ако за круговите (31) важи условот (33), важи — поради (*) и (**) — и релацијата (32), што значи дека круговите се сечат ортогонално.

Ако равенките не се дадени во нормален вид, туку во видот

$$(34) \qquad A_0(x_1^2 + x_2^2) + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + A_3 = 0,$$

$$(35) \qquad B_0(x_1^2 + x_2^2) + 2B_1x_1 + 2B_2x_2 + B_3 = 0,$$

тогаш, после заменувањето во (33) на a_i со A_i/A_0, и на b_i со B_i/B_0, ја добиваме како услов за ортогонално пресечување на круговите (34 и (35) релацијата

$$(36) \qquad 2(A_1B_1 + A_2B_2) - (A_3B_0 + A_0B_3) = 0.$$

Во равенките (34) и (35) е $A_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$.

Да испитаме сега кога една права сече еден зададен круг ортогонално, т. е. кога таа зафаќа прав агол со тангентата на кругот во едната од пресечните точки на правата и кругот. Тоа е, очигледно, тогаш кога правата минува низ центарот на кругот. Нека равенката на правата биде дадена со (35), во која нека е $B_0 = 0$, а равенката на кругот со (34). Центарот $(-A_1/A_0, -A_2/A_0)$ на овој круг лежи, значи, на правата (35). Заменувајќи ги координатите на центарот во (35), добиваме, поради $B_0 = 0$,

$$2(A_1B_1 + A_2B_2) - A_0B_3 = 0.$$

А оваа релација се добива токму од (36), ако ставиме во неа $B_0 = 0$.

Ако во (36) ставиме $A_0 = B_0 = 0$, добиваме

$$A_1B_1 + A_2B_2 = 0.$$

А тоа е условот за нормалност на правите, дадени со равенките (34) и (35) во кои е $A_0 = 0$, $B_0 = 0$.

Со тоа покажавме дека:

Кривите (34) и (35) се сечат ортогонално, ако важи условот (36), и обратно.

10. Ортогонално пресечување на две топки. Аналогни дефиниции и теореми важат и за две топки. За две топки што се сечат кажуваме дека *се сечат ортогонално*, ако тангенцијалните рамнини на топките со допирна точка во една пресечна точка P на топките се сечат под прав агол. Ако тоа важи за една точка P, важи и за секоја друга пресечна точка на топките. Во случај на ортогонално пресечување, триаголникот, чиј темиња се центрите на топките и една нивна пресечна точка P, е правоаголен. Одавде го добиваме, на ист. начин како при круговите во т. 9, условот за ортогонално пресечување, имено:

Ако топките се зададени со равенките

$$(37)\qquad \begin{aligned} &A_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + 2A_3x_3 + A_4 = 0, \\ &B_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2B_1x_1 + 2B_2x_2 + 2B_3x_3 + B_4 = 0, \end{aligned}$$

тие се сечат ортогонално тогаш и само тогаш, ако важи

$$(38)\qquad 2\,(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) — (A_4B_0 + A_0B_4) = 0.$$

Како при условот (36) се покажува и при овој услов дека тоа е услов за нормално пресечување на површините (37) и тогаш кога еден или обата од коефициентите A_0 и B_0 се еднакви на нула. При $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$ релацијата (38) ни го дава условот за нормално пресечување на една топка и рамнина, а при $A_0 = B_0 = 0$ условот за нормалност на две рамнини.

ПРИМЕРИ

1. Кој круг, кој во координатниот почеток ја допира ординатната оска, го сече ортогонално кругот чиј радиус е 1 а ќе допира до координатните оски?

Решение. Дадениот круг е $x_1^2 + x_2^2 — 2x_1 — 2x_2 + 1 = 0$, а бараниот е $x_1^2 + x_2^2 — 2\lambda x_1 = 0$, каде што λ треба да се определи. Од условот (36) следува $2\lambda — 1 = 0$. Значи $\lambda = 1/2$. Бараниот круг е, спрема тоа:

$$x_1^2 + x_2^2 — x_1 = 0.$$

2. Да се испита како може геометриски да се толкува условот (36) и (38), ако една од равенките (34), (35) одн. (37) геометриски не претставува ништо.

Решение. Ако, на пр., равенката (35) не претставува геометриски ништо, тогаш таа може да се доведе во облик

$$(39)\qquad (x_1 — a_1)^2 + (x_2 — a_2)^2 + R^2 = 0.$$

Условот (36) гласи тогаш

$$(40)\qquad 2a_1A_1 + 2a_2A_2 + A_3 + a_1^2 + a_2^2 + R^2 = 0.$$

Ќе го посматраме сега кругот, чија равенка се добива од (39), ако во неа R^2 го смениме со $— R^2$, т. е. кругот

$$(41)\qquad (x_1 — a_1)^2 + (x_2 — a_2)^2 — R^2 = 0.$$

Радикалната оска на овој круг и кругот (34) е

$$2(a_1 + A_1)x_1 + 2(a_2 + A_2)x_2 + A_3 + R^2 - a_1^2 - a_2^2 = 0.$$

Заменувајќи ги во оваа равенка наместо x_1 и x_2 координатите a_1, a_2 од центарот на кругот (41), го добиваме токму условот (40). Спрема тоа, *ако важи условот* (36) *за „ортогонално пресечување "на кругот* (34) *и за* (39), *тогаш кругот* (34) *го пресечува кругот* (41) *во крајните точки на еден негов дијаметар — кругот* (34) *го сече кругот* (41) *дијаметрално.*

Аналогно важи и кај топките.

3. Да се покаже дека *три круга, чии центри не се колинеарни, имаат или еден заеднички ортогонален круг, или еден заеднички дијаметрален круг, или минуваат сите низ една точка.*

Решение. Три круга нека се зададени со равенките

$$x_1^2 + x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_3 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + b_3 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + 2c_1x_1 + 2c_2x_2 + c_3 = 0.$$

Заедничкиот ортогонален круг, ако постои, има равенка од вид

$$A_0(x_1^2 + x_2^2) + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + A_3 = 0. \tag{42}$$

Од условот (36) за нормалност добиваме:

$$\begin{gathered} A_0a_3 - 2A_1a_1 - 2A_2a_2 + A_3 = 0, \quad A_0b_3 - 2A_1b_1 - 2A_2b_2 + A_3 = 0 \\ A_0c_3 - 2A_1c_1 - 2A_2c_2 + A_3 = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Од (42) и (43) ги елиминираме A_0, A_1, A_2, A_3, па добиваме

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 \\ a_3 & -a_1 & -a_2 & 1 \\ b_3 & -b_1 & -b_2 & 1 \\ c_3 & -c_1 & -c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{44}$$

Ако детерминантата од левата страна на (44) ја развиеме по првиот ред, равенката го добива видот на (42). Таа претставува, значи, еден круг, една точка или ништо. Во првиот случај (44) е заедничкиот ортогонален круг; во вториот случај (44) претставува една точка низ која минуваат дадените кругови; а во третиот случај — со оглед на прим. 2. — постои еден заеднички дијаметрален круг.

Со тоа теоремата е докажана.

ЗАДАЧИ

1. Најди ја равенката на круговите што минуваат низ точката (1, 1), а кругот $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 0$ го сечат ортогонално.

2. Најди ја равенката на кругот што врви низ (0, 0), а круговите $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 10 = 0$ ги сече ортогонално.

3. Најди ја равенката на кругот кој е заеднички дијаметрален круг на круговите $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

4. Дали постои круг што ги сече ортогонално правите $2x_1 - 3x_2 + 5 = 0$, $4x_1 + x_2 - 3 = 0$ и кругот $x_1^2 + x_2^2 = R^2$?

5. Покажи дека круговите, кои ортогонално го сечат еден круг и минуваат низ една стална точка, минуваат уште низ една стална точка.

6. Определи ги равенките на круговите со радиус 3 кои ортогонално ги пресечуваат круговите $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$.

7. Покажи дека геометриското место на точката чија равенка е $x_1^2 + x_2^2 - 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_2 + a^2 = 0$, ако за λ_1, λ_2 бираме се возможни такви вредности да равенката претставува една точка, е круг кој сите кругови, зададени со истата равенка, ги сече ортогонално.

8. Покажи дека круговите $x_1^2 + x_2^2 - 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_2 - a^2 = 0$ имаат еден заеднички дијаметрален круг. Во фамилијата нема кругови што се дегенерирани во точки.

9. Покажи геометриски дека три круга, чиј радикален центар е надвор од нив, имаат еден заеднички ортогонален круг; а ако тој радикален центар е во нивната внатрешност, тие имаат еден заеднички дијаметрален круг.

10. Определи ја заедничката дијаметрална топка за топките

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 1 = 0,\ x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 + 4x_2 - 1 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10x_3 - 1 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

11. Покажи дека топките $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 - a^2 = 0$ се сечат ортогонално, при произволни вредности на коефициентите.

12. Најди го условот при кој кругот $x_1^2 + x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_3 = 0$ го сече дијаметрално кругот $x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + b_3 = 0$.

13. Покажи: Ако круговите $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ ги сечат дијаметрално два зададени кругови, тогаш нив ги сече дијаметрално и секој круг од снопот $K_1 + \lambda K_2 = 0$.

14. Покажи дека помеѓу круговите од еден сноп постои, општо, еден сам круг што еден зададен круг го сече ортогонално.

15. Колку кругови од еден сноп постојат што еден зададен круг го сечат дијаметрално?

16. Колку топки од еден сноп ја допираат една зададена права во просторот?

11. Кругови кои два зададени круга ги сечат ортогонално. Ортогонални кружни снопови. Зададени нека ни бидат два круга. Ако нивната централна линија и радикалната оска ги избереме како x_1- одн. x_2-оска на координатната система, добиваат — на основа т. 7 — равенките на круговите вид

$$(45) \qquad x_1^2 + x_2^2 - 2\lambda' x_1 + a = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2\lambda'' x_1 + a = 0.$$

Ќе ги најдеме сега сите оние кругови кои овие два круга ги сечат ортогонално. Кој да е круг, ортогонален со овие кругови, нека има равенка

$$x_1^2 + x_2^2 + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + A_3 = 0.$$

Од условот (36) за нормалност следува

$$2A_1\lambda' + a + A_3 = 0, \qquad 2A_1\lambda'' + a + A_3 = 0,$$

а одавде $A_1 = 0$, $A_3 = -a$. A_2 е произволен. Ставувајќи $A_2 = -\mu$, добиваме

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\mu x_2 - a = 0. \tag{46}$$

Тоа е равенка на бараните кругови. Тие образуваат, значи, еден сноп. Центрите на овие кругови лежат на правата $x_2 = 0$, т. е. на радикалната оска од дадените два круга. Спрема тоа:

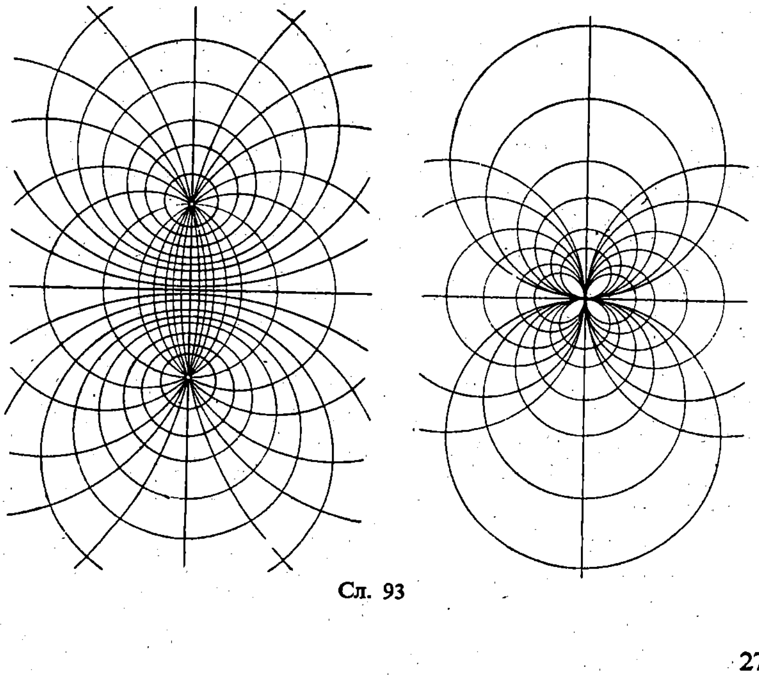
Круговите, кои два круга сечат ортогонално, образуваат еден сноп кругови чии центри лежат на радикалната оска на дадените два круга.

Кој да е круг од снопот што го определуваат дадените два круга (45) има равенка од облик

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\lambda x_1 + a = 0, \tag{47}$$

со подесна вредност на параметарот λ. А овој круг е ортогонален со секој круг (46), зашто условот (36) е за нив исполнет. Со тоа покажавме дека:

Круг кој е ортогонален на два круга е ортогонален и на секој круг од снопот што тие два круга го определуваат.



Сл. 93

Одавде следува дека кон секој сноп кругови постои еден таков друг сноп кругови да секој круг од првиот сноп го сече ортогонално секој круг од вториот сноп. Такви два *ортогонални кружни снопа* се сноповите (46) и (47), во кои λ и μ се променливи параметри. За вакви снопови, како сноповите (46) и (47), кажуваме дека се *конјугирани еден во однос на друг*.

Бидејќи слободните членови во равенките (46) и (47) се со спротивни знаци, тоа, ако е $a \neq 0$, едниот сноп има две базни точки, а другиот две гранични точки; двата пара точки совпаднуваат. Ако е $a = 0$, двата снопа имаат само една базна точка — точката (0, 0); оваа точка е и гранична точка за двата снопа.

12. Топки кои ортогонално сечат две топки. Равенките на две, кои да е, неконцентрични топки имаат, при подесен избор на координатната система (т. 12), облик

$$(48)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda' x_1 + a = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda'' x_1 + a = 0.$$

Топката

$$(49)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + 2A_3x_3 + A_4 = 0$$

ги сече нив ортогонално, ако, на основа (38), важи

$$2\lambda' A_1 + a + A_4 = 0, \quad 2\lambda'' A_1 + a + A_4 = 0.$$

Одавде добиваме $A_1 = 0$, $A_4 = -a$, а A_2 и A_3 се произволни. Ставуваме $A_2 = -\mu$, $A_3 = -\nu$, па добиваме

$$(50)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\mu x_2 - 2\nu x_3 - a = 0.$$

Тоа е равенка на сите топки кои дадените две ги сечат ортогонално. Во неа фигурираат два независни параметри μ и ν, и тоа линеарно. Вакво множество топки го викаме *мрежа топки*. Центрите на овие топки лежат на рамнината $x_1 = 0$, т. е. на радикалната рамнина од дадените две топки.

Од условот (38) за нормалност следува дека која да е од топките (50) е ортогонална и на топката

$$(51)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1 + a = 0,$$

при произволен λ, т. е. на сите топки од снопот што е определен со топките (48). Значи:

Ако една топка е ортогонална на две топки, е ортогонална и на сите топки од снопот што го определуваат тие топки.

Со тоа покажавме и тоа дека *кон секој сноп топки постои една таква мрежа топки да секоја топка од снопот е ортогонална на секоја топка од мрежата.*

13. Топки што сечат ортогонално три топки кои не му припаѓаат на еден сноп. Дадени нека ни се три топки чии центри не се колинеарни. Нивната рамнина ја избираме за x_2x_3-рамнина, а заедничката радикална оска за x_1-оска на координатната система. Во нивните равенки го нема — поради првиот услов — членот со x_1, а поради вториот услов слободните членови се еднакви, што лесно се проверува. Равенката на секоја од трите топки има, значи, облик (50), при подесни вредност за μ и ν. Координатната x_2-оска и x_3-оска можат да се изберат така да за тие вредности μ', ν'; μ'', ν''; μ''', ν''' од μ и ν важи $\mu' = \nu' = 0$; $\mu'' = 0$, $\nu'' \neq 0$; $\mu''' \neq 0$, $\nu''' \neq 0$.

Ако

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a_4 = 0$$

е равенка на која да е топка што е ортогонална со дадените, добиваме од условот за нормалност (38) за коефициентите a_1, a_2, a_3, a_4 три линеарни равенки, имено

$$-a + a_4 = 0, \quad -2a_3\nu'' + (-a + a_4) = 0,$$
$$-2(a_2\mu''' + a_3\nu''') + (-a + a_4) = 0,$$

од каде следува дека е $a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = a$, а a_1 е произволен. Ставувајќи $a_1 = -\lambda$, добиваме равенка од вид (51). Спрема тоа:

Топките што ги сечат ортогонално три топки, чии центри не се колинеарни, образуваат еден сноп топки.

Но условот (38) е исполнет и за топките (50) и (51), при произволни вредности за λ, μ, ν. Спрема тоа, *топките што ортогонално ги сечат три топки, чии центри не се колинеарни, ги сечат ортогонално и сите топки од мрежата на која ѝ припаѓаат дадените три топки.*

Да видиме сега дали постојат заеднички ортогонални топки за такви три топки што не му припаѓаат на еден сноп, а центрите им се колинеарни! Центрите на ортогоналните топки за две од нив лежат на нивната радикална рамнина, а центрите на ортогоналните топки на други две од дадените три топки пак на нивната радикална рамнина. Но тие две радикални рамнини немаат заеднички точки. Затоа важи:

За три топки чии центри се колинеарни, а не му припаѓаат на еден сноп, не постои заедничка ортогонална топка.

За вакви топки постои сноп ортогонални *рамнини*. Нивната оска минува низ центрите на топките.

ЗАДАЧИ

Определи го снопот кругови, конјугиран со дадениот сноп (λ е параметар).

1. $x_1^2 + x_2^2 - \lambda (a_1x_1 + a_2x_2) = 0$. 2. $x_1^2 + x_2^2 - 2 (1 + \lambda)(x_1 + x_2) + 1 = 0$.

Определи ги топките што се ортогонални на топките од фамилијата, дадена во зад. 3 и 4 (λ и μ се независни параметри).

3. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda x_1 + 2\mu x_2 + 2x_3 - 1 = 0$.
4. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda (x_1 + x_2 + x_3) = 0$.

Примери за геометриски места

1. Да се определи геометриското место на точките во рамнината чии што растојанија до две фиксни точки A_1 и A_2 во рамнината се во стален однос $m_1 : m_2$.

Решение. Правата A_1A_2 и симетралата на отсечката A_1A_2 ги избираме, за кородинатни оски. Во однос на оваа система нека е $A_1 (-a_1\ 0)$, $A_2 (+a_1\ 0)$, а $M(x_1, x_2)$ нека е една произволна точка од геометриското место. Имаме $\overline{A_1M} : \overline{A_2M} = m_1 : m_2$, или $\overline{A_1M}^2 : \overline{A_2M}^2 = m_1^2 : m_2^2$, или $m_2^2\overline{A_1M}^2 = m_1^2\overline{A_2M}^2$. Оттука е

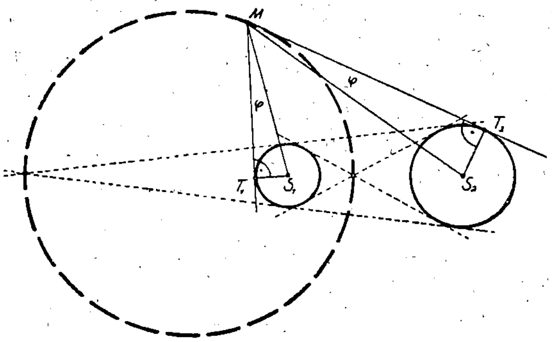
$$m_2^2 [(x_1 + a)^2 + x_2^2] = m_1^2 [(x_1 - a)^2 + x_2^2],$$

или

$$(m_1^2 - m_2^2) (x_1^2 + x_2^2 + a^2) - 2ax_1 (m_1^2 + m_2^2) = 0,$$

што е равенка на бараното геометриско место. Ако е $m_1 = m_2$, геометриското место е симетралата од $\overline{A_1A_2}$; а ако е $m_1 \neq m_2$, геометриското место е еден круг (*Аполониев круг*). Може да се провери дека овој круг е ортогонален на кругот чиј дијаметар е $\overline{A_1A_2}$.

2. Да се определи геометриското место на точките во рамнината, од кои два зададени круга во рамнината се гледаат под еднакви агли.



Сл. 94

Решение. Централната линија S_1S_2 на круговите и симетралата од S_1S_2 ги избираме за координатни оски. Равенките на круговите се тогаш во вид

$$(x_1 + a)^2 + x_2^2 - r_1^2 = 0 \quad \text{и} \quad (x_1 - a)^2 + x_2^2 - r_2^2 = 0.$$

Нека $M(x_1, x_2)$ е една точка од геометриското место. За должините $\overline{MT_1}$ и $\overline{MT_2}$ на тангентите, спуштени од M на круговите, важи (степен на точка во однос на круг!)

$$\overline{MT_1}^2 = (x_1 + a)^2 + x_2^2 — r_1^2, \quad \overline{MT_2}^2 = (x_1 — a)^2 + x_2^2 — r_2^2.$$

Спрема условот на задачата, аголот φ помеѓу $\overrightarrow{MT_1}$ и $\overrightarrow{MS_1}$ е еднаков на аголот помеѓу $\overrightarrow{MT_2}$ и $\overrightarrow{MS_2}$. Имаме, значи, (сл. 94) $\text{ctg}^2\,\varphi = \overline{MT_1}^2/\overline{S_1T_1}^2 = \overline{MT_2}^2/\overline{S_2T_2}^2$, или

$$\frac{(x_1 + a)^2 + x_2^2 — r_1^2}{r_1^2} = \frac{(x_1 — a)^2 + x_2^2 — r_2^2}{r_2^2},$$

од каде следува

$$(r_1^2 — r_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + a^2) — 2a\,(r_1^2 + r_2^2)\,x_1 = 0,$$

што е равенка на бараното геометриско место. Ако е $r_1 = r_2$, геометриското место е една *права;* а ако е $r_1 \neq r_2$, геометриското место е еден *круг*. Тој е и (прим. 1) геометриско место на точките чии растојанија до центрите на круговите се однесуваат како радиусите на дадените кругови.

3. Да се определи геометриското место на ортогоналните проекции од една точка P_0 на рамнините кои минуваат низ една стална точка M_0.

Решение. Средината на отсечката P_0M_0 ја избираме за почеток на радиус-векторите. Нека е $M_0\,(\mathfrak{r}_0)$; тогаш е $P_0\,(— \mathfrak{r}_0)$. Нормалната равенка во векторски облик на една рамнина низ M_0 нека е

(52) $$(\mathfrak{r} — \mathfrak{r}_0)\,\boldsymbol{n} = 0.$$

Правата низ P_0 што е нормална на таа рамнина е $\mathfrak{r} = — \mathfrak{r}_0 + \boldsymbol{n}t$. Заменувајќи го овој израз за $\mathfrak{r}$ во (52), добиваме $t = 2\mathfrak{r}_0\boldsymbol{n}$. За радиус-векторот $\mathfrak{r}$ на проекцијата од P_0 на рамнината добиваме, значи,

$$\mathfrak{r} = — \mathfrak{r}_0 + 2\,(\mathfrak{r}_0 \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n}.$$

Дигајќи ги двете страни на ова равенство скаларно на квадрат, добиваме, поради $\boldsymbol{n}^2 = 1$, $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r}_0^2 + 4\,(\mathfrak{r}_0\,\boldsymbol{n})^2 — 4\,(\mathfrak{r}_0\,\boldsymbol{n})^2$, или

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r}_0^2.$$

Бараното геометриско место е, значи, топка чиј дијаметар е $\overline{P_0M_0}$.

4. Да се најде геометриското место на средините на тетивите што на правите, кои минуваат низ една стална точка P, ги исечува една топка.

Решение. Нека топката има центар во S, а радиусот нека ѝ е R. Средината на отсечката PS ја избираме за почеток на радиус-векторите. Нека е $S(\mathfrak{r}_0)$; тогаш е $P(—\mathfrak{r}_0)$. Равенката на топката гласи

(53) $$(\mathfrak{r} — \mathfrak{r}_0)^2 = R^2,$$

а равенката на која да е права низ P:

(54) $$\mathfrak{r} = — \mathfrak{r}_0 + \boldsymbol{n}t,$$

каде што $\boldsymbol{n}$ е произволен единичен вектор, а t параметар. За да ги определиме пресечните точки на правата и топката, го заменуваме изразот за $\mathfrak{r}$ од (54) во (53). Добиваме $(— \;2\mathfrak{r}_0 + \boldsymbol{n}t)^2 = R^2$, или

$$t^2 — 4\,(\mathfrak{r}_0\,\boldsymbol{n})\,t + 4\,\mathfrak{r}_0^2 — R^2 = 0.$$

Ако t_1, t_2 се корените (реални) на оваа равенка, добиваме (*Виет*):

$$t' = (t_1 + t_2)/2 = 2\,(\mathbf{r}_0\mathbf{n}).$$

Заменувајќи ја оваа вредност за t' наместо t во (54), добиваме

$$\mathbf{r} = -\,\mathbf{r}_0 + 2\,(\mathbf{r}_0\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}.$$

Тоа е радиус-векторот на онаа точката од геометриското место што лежи на правата. Од оваа равенка ќе го елиминираме $\mathbf{n}$, ако двете страни ги квадрираме скаларно, со што добиваме

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_0^2.$$

Точките од геометриското место лежат, значи, на топката чиј дијаметар е $\overline{PS}$. Разгледај го случајот кога P е во внатрешноста и случајот кога P е во надворешноста од дадената топка!

5. Да се најде геометриското место на средините од отсечките PM, ако P е една фиксна точка, а M која да е точка на една топка.

Решение. Координатната система ја избираме така да точката P биде координатен почеток, а центарот на топката да лежи на x_1-оската. Равенката на топката е тогаш од облик

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a_1x_1 + a_4 = 0.$$

Нека е $M\,(x_1, x_2, x_3)$ која да е точка на топката. Средината M' на отсечката PM ги има координатите

$$x_1' = x_1/2,\ x_2' = x_2\,2,\ x_3' = x_3/2.$$

Бидејќи координатите $x_1 = 2x_1'$, $x_2 = 2x_2'$, $x_3 = 2x_3'$ од M ја задоволуваат равенката на топката, имаме

$$(2x_1')^2 + (2x_2')^2 + (2x_3')^2 + 2a_1\,(2x_1') + a_4 = 0,$$

или

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + a_1x_1' + a_4/4 = 0.$$

Геометриското место е, значи, една *топка*.

Задачи за геометриски места

1. Низ точката (2, 3) се повлечени тетиви на кругот $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + x_2 = 0$. Најди го геометриското место на нивните средини.

2. Точката A $(-4, 5)$ ја сврзуваме со која да е точка M од кругот $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - x_2 - 1 = 0$. Најди го геометриското место на средините на отсечките AM.

3. Една точка се движи во рамнината така да квадратот на нејзиното растојание до основата на еден рамнокрак триаголник е еднаков на производот од нејзините растојанија до краците на тој триаголник. Каква крива опишува точката?

4. Една точка се движи во рамнината така да збирот од квадратите на нејзините растојанија до страните од еден рамностран триаголник е стален. По каква крива се движи точката?

5. Дадена е една фиксна точка O и една фиксна права по која се движи една точка P. Да се најде геометриското место на точката Q на OP за која важи $\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = \text{const}$.

6. Најди го геометриското место на точката која се движи во рамнината така да должината на тангентата, спуштена од неа на кругот $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0$, е три пати поголема од должината на тангентата, спуштена од неа на кругот $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$.

7. Дадени се два круга K_1 и K_2. Да се најде геометриското место на центрите на круговите, за кои K_1 им е заеднички дијаметрален, а K_2 заеднички ортогонален круг.

8. Еден триаголник има основа $\overline{AB} = a$, а аголот при врвот C е γ. Да се најде геометриското место на ортоцентарот на триаголникот ABC.

9. Да се определи геометриското место на средината на една отсечка чии крајни точки се движат по две заемно нормални прави.

10. Покажи дека геометриското место на точката од просторот, за која што збирот од квадратите на нејзините растојанија до три дадени точки е стален, е една топка чиј центар е тежиштето на дадените точки.

11. Најди го геометриското место на точката за која збирот на нејзините степени во однос на две дадени топки е нула.

12. Определи го геометриското место на точката, за која збирот од квадратите на нејзините растојанија до страните на една коцка е стален.

13. Најди го геометриското место на точката чии поларни рамнини во однос на две дадени топки се нормални.

14. Најди го геометриското место на точката, за која тангентите спуштени на топките $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0$ имаат иста должина.

15. Што е геометриското место на центарот на топката, која од една зададена топка е пресечена по еден главен круг, а од една друга зададена топка ортогонално.

ГЛАВА III

КОНИКИ И КВАДРИКИ

I КОНИКИ

Афини особини на кониките

§ 70. Елипса

1. Дефиниција на елипсата. Секоја крива, чија што равенка во однос на подесно избрана афина рамнинска координатна система гласи

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \tag{1}$$

се вика *елипса*.

Спрема оваа дефиниција елипсата е афин поим.

Ако, специјално, равенката (1) се однесува до една правоагла картезична систем — која е една специјална афина система — тогаш таа претставува една специјална елипса — *круī*.

Афина слика на кругот. Во една рамнина π нека ни е зададен еден круг со центар O и радиус R. Во неа избираме една правоагла картезична координатна система со почеток во O, при која должините на координатните вектори се еднакви на R. Равенката на кругот во однос на оваа система гласи тогаш

$$(2) \qquad \overset{*}{x}_1{}^2 + \overset{*}{x}_2{}^2 = 1.$$

Извршуваме кое да е афино пресликување σ на рамнината π во себе. Во π може да се избере една таква нова афина координатна система (§ 45) што меѓу координатите $\overset{*}{x}_1$, $\overset{*}{x}_2$ на која да е оригинална точка и координатите x_1, x_2 на нејзината слика, при σ, да постојат релациите $\overset{*}{x}_1 = x_1$, $\overset{*}{x}_2 = x_2$. Точките што лежат на кругот (2) се пресликуваат, при пресликувањето σ, во точките чии координати x_1, x_2 ја задоволуваат равенката што се добива, ако во (2) $\overset{*}{x}_1$, $\overset{*}{x}_2$ ги замениме со x_1, x_2, а тоа е равенката (1). Со тоа е покажано дека секоја афина слика на кругот е елипса.

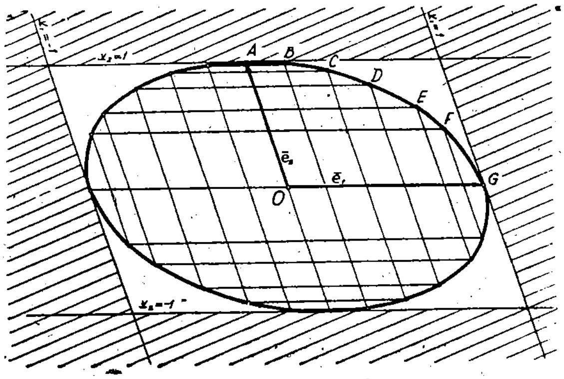
2. Форма на елипсата. Служејќи се со равенката (1), ќе испитаме каков облик има елипсата. Ако равенката ја решиме по x_1, добиваме

$$x_1 = \pm \sqrt{1 - x_2{}^2}.$$

Изразот од десната страна има смисол само тогаш ако е $1 - x_2{}^2 \geqq 0$, одн. $|x_2| \leqq 1$. Со решавање на равенката (1) по x_2 се убедуваме дека треба да биде $|x_1| \leqq 1$. Точките од елипсата се наоѓаат, значи, во внатрешноста на паралелограмот, заграден со правите $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_2 = -1$. Прва, груба, претстава за кривата добиваме, ако ги пресметаме координатите на неколку одделни нејзини точки. Заменувајќи ги во (1) за x_1, на пр., вредностите 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9 и 1, ја добиваме оваа таблица:

x_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1
x_2	1	$\sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$	$\sqrt{0{,}84} \approx 0{,}92$	0,8	0,6	$\sqrt{0{,}19} \approx 0{,}33$	0

На тој начин ги определивме точките $A(0,\ 1)$, $B(0,2,\ \sqrt{0{,}96})$, $C(0,4,\ \sqrt{0{,}84})$, $D(0,6,\ 0,8)$, $E(0,8,\ 0,6)$, $F(0,9,\ \sqrt{0{,}19})$, $G(1,0)$ од елипсата. Овие точки се во првиот квадрант. За останатите квадранти не мораме да вршиме испитување. Ако $(x_1{}^0,\ x_2{}^0)$ е, имено, една точка од елипсата, тогаш на нашата елипса лежат и точките $(-x_1{}^0,\ x_2{}^0)$, $(-x_1{}^0,\ -x_2{}^0)$ и $(x_1{}^0,\ -x_2{}^0)$, во што се убедуваме со заменување на координатите на овие точки во (1). За точките $(x_1{}^0,\ x_2{}^0)$, $(x_1{}^0,\ -x_2{}^0)$ ќе кажеме дека се *косо симетрични во однос на x_1-оската*, а за точките $(x_1{}^0,\ x_2{}^0)$, $(-x_1{}^0,\ x_2{}^0)$ — дека се *косо симетрични во однос на x_2-оската*. Одавде следува оваа конструкција: Ако е позната една точка M на елипсата (1), го нацртуваме паралелограмот на кој едното теме да му е M, страните да му се паралелни со координатните оски, а овие да се средни линии во него. Сите темиња на овој паралелограм лежат на елипсата.



Сл. 95

За елипсата (1) кажуваме, поради погоре спомнатите особини, дека е *косо симетрична* во однос на x_1-оската и во однос на x_2-оската. Елипсата е и *центрично симетрична* во однос на координатниот почеток O, зашто ако на неа лежи точката (x_1^0, x_2^0), лежи на неа и центрично симетричната точка $(-x_1^0, -x_2^0)$ во однос на O.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека елипсата (1) е косо симетрична по однос на координатните оски, земајќи предвид дека елипсата е афина слика на кругот.

2. Што е паралелна проекција од: *a*) еден круг; *b*) од една елипса — на една зададена рамнина?

3. Една афина конструкција на елипсата. Во рамнината нека е нацртан паралелограмот $ABCD$ и неговите средни линии SS' и EF, чии пресек нека е O. На EF избираме една произволна точка P'. Нека е $\overrightarrow{OP'} : \overrightarrow{OF} = \lambda$. На CD ја избираме онаа точка P за која важи $\overrightarrow{PC} : \overrightarrow{FC} = \lambda$. Правите SP и $S'P'$ нека се пресечуваат во M. Ќе испитаме какво е геометриското место на M, ако λ варира.

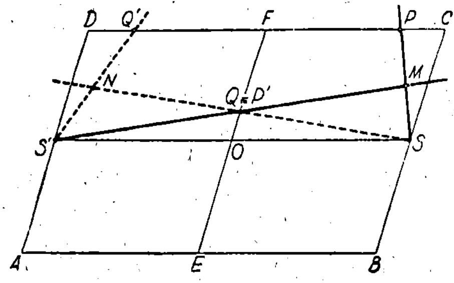
Ја избираме за координатна система системата $(O;\ e_1, e_2)$ со $e_1 = \overrightarrow{OS}$, $e_2 = \overrightarrow{OF}$. Во однос на неа имаме $S(1,\ 0)$, $S'(-1,\ 0)$, $P'(0,\ \lambda)$, $P(1-\lambda,\ 1)$. Правите SP и $S'P'$ имаат равенки

$$x_1 + \lambda x_2 - 1 = 0, \qquad \lambda x_1 - x_2 + \lambda = 0. \tag{3}$$

Пресекот на овие прави е M. Со елиминацијата на λ од (3) добиваме

$$x_1^2 + x_2^2 = 1. \tag{4}$$

Оваа равенка ја задоволуваат решенијата на системата (3) по x_1, x_2, одн. координатите на M — при произволен λ. Таа претставува равенка на геометриското место на M. Тоа геометриско место е, значи, елипса.



Сл. 96

За секоја вредност од λ добиваме по една точка M од елипсата. Ако отсечките OF и CF ги разделиме на ист број еднакви делови и разделните точки ги обележиме, почнувајќи од O одн. C, со $O \equiv 0', 1', 2', 3', \ldots$ одн. со $C \equiv 0, 1, 2, 3, \ldots,$ тогаш правите $S1$ и $S'1'$; $S2$ и $S'2'$; $S3$ и $S'3'$, итн. се пресечуваат во точките што лежат на елипсата.

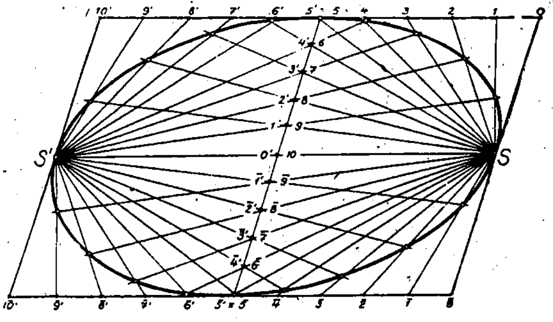
Точките на истата елипса можеме да ги конструираме и на следниот начин. На OF избираме една произволна точка Q, а на FD онаа точка Q' за која важи $\overrightarrow{OQ} : \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{Q'D} : \overrightarrow{FD}$ $(= \mu)$. Пресекот N на правите SQ и $S'Q'$ лежи на елипсата. Навистина, овие прави имаат, како што лесно се проверува, равенки

$$\mu x_1 + x_2 - \mu = 0, \quad x_1 - \mu x_2 + 1 = 0.$$

А резултатот на елиминацијата на μ одавде е пак равенката (4), со што трвдењето е докажано. — За секој μ добиваме по една точка N од елипсата.

Аналогни конструкции добиваме, ако точките P и Q' не ги избираме на правата CD туку на AB.

Комбинирајќи ги сите овие резултати, ја добиваме следната конструкција. Отсечката EF ја разделуваме на извесен број еднакви делови. На ист број делови ги разделуваме и отсечките AB и CD. Разделните точки ги обележуваме онака како што е покажано



Сл. 97

на сл. 97. Правите $S1$ и $S'1'$; $S2$ и $S'2'$;... и правите $S\overline{1}$ и $S'\overline{1}'$; $S\overline{2}$ и $S'\overline{2}'$; ... се пресечуваат на елипсата.

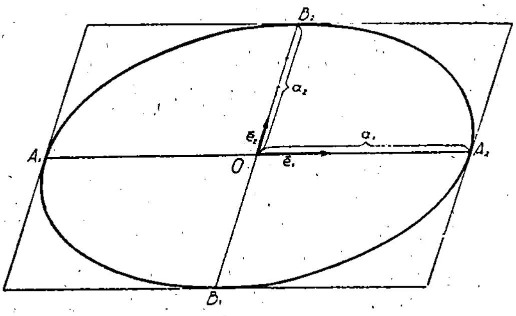
ПРИМЕРИ

1. Испитај ја кривата $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$!

Решение. Од системата x_i прејдуваме кон една нова, помошна система x_i', дефинирана со равенките $x_1' = x_1/a_1$, $x_2' = x_2/a_2$. Должините на новите координатни вектори се, значи, a_1 одн. a_2 пати поголеми од должините на старите координатни вектори. Во новата система равенката на кривата гласи

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 1.$$

Таа е од обликот (2); кривата е, значи, елипса.



Сл. 98

Ако x_1- одн. x_2-оската ја сече кривата во A_1, A_2 одн. во B_1B_2, тогаш е $\overline{OA}_1 = \overline{OA}_2 = |a_1| \cdot |e_1|$, $\overline{OB}_1 = \overline{OB}_2 = |a_2| \cdot |e_2|$. На сл. 98 е $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, а новите координатни вектори се $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OB_2}$.

2. Да се нацтра кривата

$$(2x_1 - x_2 + 6)^2 + (x_1 + 2x_2 - 2)^2 = 100. \tag{5}$$

Решение. Ја избираме помошната координатна система x_1', x_2', определена со равенките

$$x_1' = \frac{2x_1 - x_2 + 6}{10}, \quad x_2' = \frac{x_1 + 2x_2 - 2}{10}. \tag{6}$$

Овие равенки претставуваат, навистина, трансформациони равенки на координати, бидејќи детерминантата од коефициентите пред x_1 и x_2 е $\neq 0$. Во новата система равенката на дадената крива гласи

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 1.$$

Кривата е, значи, елипса.

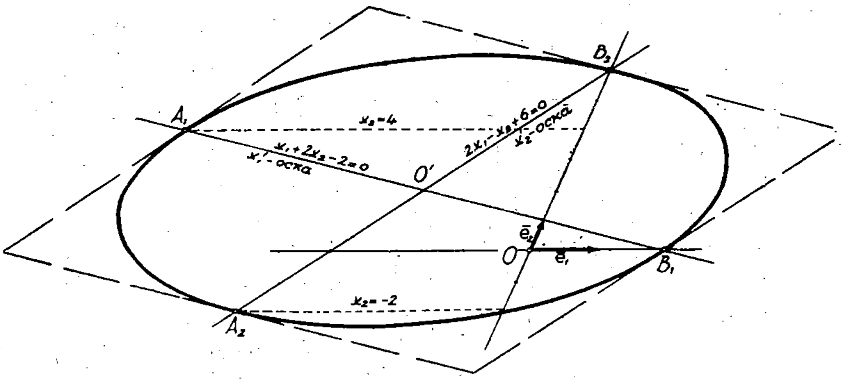
Ги нацртуваме новите координатни оски. x_1'-оската има во новата система равенка $x_2' = 0$, а спрема тоа — со оглед на (6) — во старата система: $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$; x_2'-оската има во новата система равенка $x_1' = 0$, а во старата: $2x_1 - x_2 + 6 = 0$. Сега можеме да ги нацртаме x_1'- и x_2'-оската, зашто нивните равенки се познати. Пресекот O' на овие две прави е новиот координатен почеток. Бараната елипса нека ја сече x_1'-оската во точките A_1 и B_1, а x_2'-оската во точките A_2 и B_2. Ќе треба да го конструираме паралелограмот чии средни линии се отсечките A_1B_1 и A_2B_2, а во тој паралелограм ќе ја впишеме елипсата по методата, изложена во т. 3. Треба, спрема тоа, да ги определиме прво точките A_1, A_2, B_1, B_2. Точките A_1 и B_1 се пресеците на x_1'-оската и кривата. Нивните координати ги задоволуваат равенките (5) и $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$, односно еквивалентната систама равенки

$$x_1 + 2x_2 - 2 = 0, \quad 2x_1 - x_2 + 6 = \pm 10.$$

Одавде следува, по елиминацијата на x_1, дека е $x_2=0$ и $x_2=4$. Ги нацртуваме правите $x_2 = 0$ и $x_2 = 4$, кои x_1'-оската ја сечат во бараните точки A_1 и B_1. — Точките A_2 и B_2 се пресеците на x_2'-оската и кривата. Затоа координатите на овие точки ги задоволуваат нивните равенки, одн. системите равенки

$$2x_1 - x_2 + 6 = 0, \quad x_1 + 2x_2 - 2 = \pm 10,$$

што им се еквивалентни на нив. Одавде добиваме $x_2 = 6$ и $x_2 = -2$. Правите $x_2 = 6$ и $x_2 = -2$ ја сечат x_2'-оската во бараните точки A_2 и B_2.



Сл. 99

Откако ги определивме точките A_1, B_1, A_2, B_2, ја нацртуваме кривата по методата, изложена во т. 3. На нашиот цртеж, за да не загуби од прегледноста, не е внесена оваа конструкција.

ЗАДАЧИ

Во зад. 1—3 координатите x, y и x', y' се однесуваат до една иста правоагла координатна система.

1. Ординатите на точките од кругот $x^2 + y^2 = a^2$ ги намалуваме во однос $a : b$, а апсцисите им ги оставаме непроменети. Покажи дека со тоа се добива една елипса. Цртеж!

2. Нацртај ја елипсата, во која се пресликува кругот $x^2 + y^2 - 25 = 0$ при пресликувањето $x' = x + y$, $y' = y$.

3. Нацртај ја елипсата, во која се пресликува кругот $x^2 + y^2 = 4$ при пресликувањето $x = 2(x' + y')$, $3y = x' - y'$.

Во зад. 4—8, каде што x_1, x_2 се координати на точките во однос на некоја зададена афина координатна система, да се нацрта кривата по дадената равенка.

4. $x_1^2/4 + x_2^2 = 1$. 5. $9x_1^2 + 4x_2^2 - 36 = 0$. 6. $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - 1 = 0$.
7. $x_1^2 + 4(x_1 - 2x_2 + 1)^2 = 1$. 8. $(x_1 - 2x_2 - 6)^2 + 4(2x_1 + x_2)^2 - 16 = 0$.

9. Покажи дека елипсите $x_1^2 + x_2^2 - \lambda^2 = 0$, каде што λ е произволен параметар, се слични и слично положени (хомотетични).

10. Реши ја системата (3) по x_1, x_2. Добиените равенки се *йарамейарски равенки* на елипсата (4).

Задачи за геометриски места

1. Зададен е еден триаголник $A_0A_1A_2$. Да се најде геометриското место на точка M, за која збирот од квадратите на површините на триаголниците A_0A_1M и A_0A_2M е еднаков на квадратот од површината на триаголникот $A_0A_1A_2$. *Найаш.*: Векторите $\overrightarrow{A_0A_1}$ и $\overrightarrow{A_0A_2}$ избери ги за координатни вектори!

2. Најди го геометриското место на средините на отсечките чии еден крај е во $(-1, 0)$, а другиот се движи по елипсата $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

3. Што е геометриското место на тежиштето на триаголникт чии две темиња се фиксни, а третото се движи по една елипса.

§ 71. Хипербола

1. Дефиниција на хиперболата. Секоја крива, чија што равенка во однос на некоја афина рамнинска координатна система гласи

$$x_1x_2 = 1, \tag{7}$$

се вика *хийербола*. И поимот за хипербола е, значи, еден афин поим.

Пример. Во рамнината нека ни се зададени три неколинеарни точки A_0, A_1, A_2. Да се најде геометриското место на оние точки M за кои важи

$$(A_0A_1M) \cdot (A_0MA_2) = (A_0A_1A_2)^2.^{*)}$$

Решение. Ја избираме координатната система со координатен почеток O во A_0, а со координатни вектори $e_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$, $e_2 = \overrightarrow{A_0A_2}$. Една произволна точка од бараното геометриско место нека е $M(x_1, x_2)$. Тогаш е $(A_0A_1A_2) = (e_1, e_2)$ и

$$(A_0A_1M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \cdot x_2, \quad (A_0MA_1) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} (e_1\, e_2) = (e_1\, e_2) \cdot x_1.$$

Од $(A_0A_1M)\,(A_0MA_2) = (A_0A_1A_2)^2$ добиваме одавде $x_1x_2 = 1$. Тоа е равенката на бараното геометриско место кое, спрема тоа, е една хипербола.

2. Форма на хиперболата. Хиперболата ќе ја цртаме прво, точка по точка, на тој начин што од равенката (7) ќе ги пресметаме координатите на извесен број нејзини точки. Ставувајќи ги

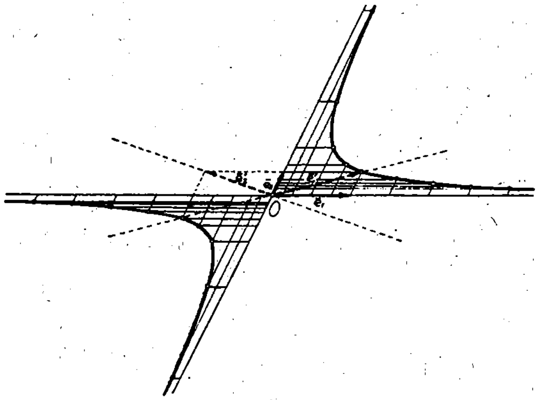
---

*) Симболот (ABC) ја означува површината на ориентираниот триаголник ABC при ориентацијата $A \to B \to C \to A$.

во (7) за x_1, на пр., вредностите ± 3, ± 5/2, ± 2,..., и пресметувајќи ги од така добиените равенки кореспондентните значења за x_2, ја добиваме оваа таблица:

x_1	± 3	$\pm 5/2$	± 2	$\pm 3/2$	± 1	$\pm 3/4$	$\pm 1/2$	$\pm 1/4$	$\pm 1/8$
x_2	$\pm 1/3$	$\pm 2/5$	$\pm 1/2$	$\pm 2/3$	± 1	$\pm 4/3$	± 2	± 4	± 8

Во неа можат да се бират, во секоја колона, или само горните или само долните знакови. На тој начин ги добивме точките (— 3, — 1/3), (— 5/2, — 2/5), ... , (3, 1/3) од хиперболата, а со тоа и нејзиниот облик (сл. 100).



Сл. 100

Ако (x_1^0, x_2^0) е една точка од хиперболата, тогаш на неа лежи и точката ($-x_1^0$, $-x_2^0$), која е централно симетрична со првата по однос на координатниот почеток. Затоа кажуваме дека хиперболата (7) е *централно симетрична* по однос на координатниот почеток.

Ќе испитаме сега кои од оние прави што му припаѓаат на снопот прави со центар во O (0, 0), ја сечат хиперболата. Равенката на која да е од овие прави — со исклучок на x_2-оската — е $x_2 = kx_1$. Заедничките решенија на оваа равенка и равенката (7) се

$$x_1 = \pm \sqrt{1/k}, \quad x_2 = \pm \sqrt{k}.$$

Решенијата постојат само за $k > 0$. Само оние прави од снопот ја сечат, значи, хиперболата, кои минуваат низ првиот и третиот квадрант. Правите $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ ја образуваат границата меѓу оние прави од снопот што ја сечат хиперболата од оние што не ја сечат. Овие две прави ги викаме *асимптоти* на хиперболата.

3. Друг вид равенка на хиперболата. Место погоре избраната координанта система (O; e_1, e_2) ќе избереме сега една друга координатна система. Таа нека има пак почеток во O, а координатните вектори нека ѝ бидат дадени со $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 + e_2$ (сл. 100). Равенките што ги врзуваат старите координати x_1, x_2 на една точка со нејзините нови координати x_1', x_2' гласат, според тоа,

$$(8) \qquad x_1 = x_1' - x_2', \qquad x_2 = x_1' + x_2'.$$

Во новата система равенката на хиперболата гласи
$(x_1' - x_2')\,(x_1' + x_2') = 1$, или

$$(9) \qquad x_1'^2 - x_2'^2 = 1.$$

Равенките на асимптомите во старата систeма гласат $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, и затоа во новата, поради (8), $x_1' - x_2' = 0$ и $x_1' + x_2' = 0$.

Обратно, ако е зададена една крива со равенката (9) во однос на една афина система x_1', x_2', тогаш таа крива во системата x_1, x_2, дефинирана со (8), ја има равенката $x_1\, x_2 = 1$. Таа е, значи, една хипербола. Според тоа:

Равенката $x_1^2 - x_2^2 = 1$ претставува во однос на секоја афина система една хипербола. Нејзините асимптоти се правите $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$.

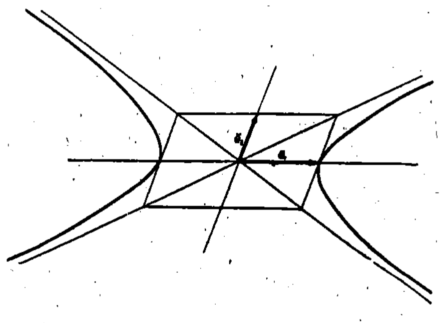
Да ја разгледаме уште малку равенката

$$(10) \qquad x_1^2 - x_2^2 = 1$$

на хиперболата, зададена во некоја система (O; e_1, e_2). Хиперболата (10) е *косо симетрична во однос на координатните оски.* Навистина, ако точката (x_1^0, x_2^0) лежи на хиперболата, лежат на неа и точките $(x_1^0, -x_2^0)$ и $(-x_1^0, x_2^0)$.

Запишувајќи ја равенката (10) во обликот $x_2 = \pm\sqrt{x_1^2 - 1}$, увидуваме дека треба да биде $x_1^2 - 1 \geqq 0$ одн. $|x_1| \geqq 1$. Во појасот на рамнината меѓу правите $x_1 = -1$ и $x_1 = +1$ нема, значи, точки од хиперболата.

Хиперболата (10) ќе ја нацртаме приближно на следниот начин. Го нацртуваме паралелограмиот, заграден со правите $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и $x_2 = -1$, а потоа неговите дијагонали. Овие дијагонали се асимптоти на хиперболата. Потоа ја нацртуваме хиперболата приближно онака како е покажано на сликата 101.



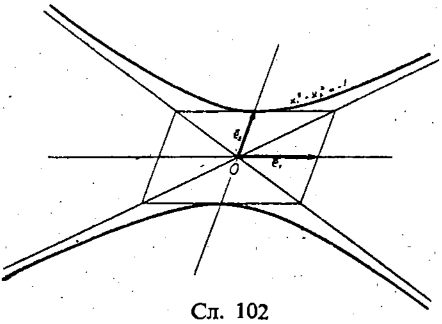
Сл. 101

За точките на хиперболата кои лежат во полурамнината $x_1 < 0$ ќе кажеме дека образуваат една *ѓранка* на хиперболата, а за оние нејзини точки што лежат во полурамнината $x_1 > 0$ — дека ја образуваат другата нејзина гранка.

4. Конјугирани хиперболи. Ќе ја разгледаме кривата

$$x_1^2 - x_2^2 = -1. \tag{11}$$

Равенката може да се напише во вид $x_2^2 - x_1^2 = 1$. Кривата е, значи, една хипербола. Улогите на координатните оски на оваа хипербола и хиперболата $x_1^2 - x_2^2 = 1$ (во однос на една иста координатна система) се заменети. Кривата (11) има, значи, облик и положба како што е покажано на сл. 102. Хиперболата (11) ја викаме *конјуѓирана* во однос на хиперболата (10), ако обете равенки се однесуваат до една иста координатна система.



Сл. 102

ЗАДАЧИ

Да се покаже дека во зад. 1—6 зададените равенки претставуваат хиперболи и да се нацртаат, избирајќи една подесно избрана нова координантна система.

1. $x_1(x_1 + x_2) = 1.$ 2. $2x_1(1 - x_2) = 3$ 3. $(3x_1 - 2x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 2.$
4. $x_1^2 - x_2^2/9 = 1.$ 5. $(x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 = 1.$
6. $(2x_1 - 3x_2 - 6)^2 - (x_1 + x_2 - 4)^2 - 20 = 0.$

7. Испитај ја кривата $x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 = 1.$

8. Дадени се два снопа прави $\lambda(x_1 + x_2) - 10 = 0$ и $x_1 - x_2 - \lambda = 0.$ Покажи дека оние прави од сноповите, на кои им припаѓаат еднакви вредности на параметарот λ, се сечат на една хипербола. Да се нацрта таа!

9. Употребувајќи ги ознаките од § 70 т. 3, покажи дека правите $S'\overline{1'}$ и $\overline{S1}$; $S'\overline{2'}$ и $\overline{S2}$; $S'\overline{3'}$ и $\overline{S2}$;..., како и правите $S'\overline{1'}$ и $\overline{S1}$; $S'\overline{2'}$ и $\overline{S2}$; $S'\overline{3'}$ и $\overline{S3}$;..., се сечат на хиперболата $x_1^2 - x_2^2 = 1.$

Користејќи ја конструкцијата од зад. 9, да се конструираат неколку точки на хиперболите, зададени во зад. 10—12, и потоа да се нацртаат хиперболите.

10. $x_1^2 - x_2^2 = 1.$ 11. $x_1^2 - x_2^2/4 = 1.$ 12. $x_2^2/a - x_1^2/4 = 1.$

Да се напишат равенките на хиперболите што се конјугирани со хиперболите, зададени во зад. 13—16.

13. $2x_1^2 - 3x_2^2 + 5 = 0.$ 14. $x_1x_2 = 1.$ 15. $(4x_1 - 2x_2 + 1)^2 - (x_1 + x_2)^2 = 5.$
16. $(5x_1 + 3x_2 - 7)(x_1 - 2x_2 + 4) + 8 = 0.$

Задачи за геометриски места

1. Една права се движи во рамнината така што со две зададени стални непаралелни прави во рамнината да заградува триаголник со константна површина. Какво е геометриското место на средината на отсечката што на подвижната права ја отсекуваат сталните прави?

2. Во рамнината е даден триаголникот $A_0A_1A_2$. Да се најде геометриското место на онаа точка M за која важи $(A_0A_1M)^2 - (A_0A_2M)^2 = (A_0A_1A_2)^2$.

3. Темето A на еден триаголник со константна површина е фиксно, а темињата B и C се движат по две непаралелни прави што минуваат низ A. Што е геометриското место на тежиштето на триаголникот ABC?

4. Правите на кои лежат дијагоналите на еден паралелограм со константна површина се фиксни. Што е геометриското место на средините на страните на паралелограмот?

§ 72. Заемна положба на правата и на елипсата, и на правата и хиперболата

1. Пресеци на правата со елипсата и хиперболата. Ќе испитаме сега каква заемна положба може да има една права во рамнината по однос на една елипса или хипербола. Елипсата и хиперболата нека бидат зададени со равенките

$$x_1^2 \pm x_2^2 = 1. \tag{12}$$

Во (12), како и во сите понатамошни равенки во овој §, ќе се однесуваат горните знакови на елипсата, а долните на хиперболата.

Зададената права нека минува низ точката $P(x_1^0, x_2^0)$ и нека е паралелна со векторот $l = \{l_1, l_2\}$. Нејзините параметарски равенки се тогаш

$$x_1 = x_1^0 + l_1t, \quad x_2 = x_2^0 + l_2t. \tag{13}$$

Заменувајќи ги изразите за x_1 и x_2 одавде во (12), добиваме

$$(x_1^0 + l_1t)^2 \pm (x_2^0 + l_2t)^2 = 1,$$

од каде следува

$$t^2(l_1^2 \pm l_2^2) + 2t(l_1x_1^0 \pm l_2x_2^0) + (x_1^0)^2 \pm (x_2^0)^2 - 1 = 0. \tag{14}$$

Тоа е една равенка по t. Правата (13) и кривата (12) имаат толку заеднички точки колку што има реални корени оваа равенка. На коренот t' му одговара заедничката точка $(x_1^0 + l_1t', \ x_2^0 + l_2t')$.

Равенката (14) е квадратна, ако коефициентот $l_1^2 \pm l_2^2$ е различен од нула. Бидејќи при елипсата е $l_1^2 + l_2^2 \neq 0$, тоа *правата може да има со елипсата две, една или ниедна заедничка точка.*

При хиперболата коефициентот $l_1^2 - l_2^2$ може да биде и нула, имено за $l_1 = l_2$ и $l_1 = -l_2$, т. е. ако правата е паралелна со една од асимптомите. За вакви прави ќе кажеме дека имаат *асимптомски* *правец*. Равенката (14) е, во овој случај, линеарна, ако е $l_1x_1^0 - l_2x_2^0 \neq 0$. Од $l_1x_1^0 - l_2x_2^0 \neq 0$ следува за $l_1 = l_2$ дека $x_1^0 - x_2^0 \neq 0$, а за $l_1 = -l_2$ дека е $x_1^0 + x_2^0 \neq 0$. Точката P, во овој случај, значи, не е на онаа асимптота со која е паралелна правата, т. е. правата не е асимптота. *Една права која има асимптотски правец, а не е асимптота, ја сече хиперболата, значи, во една точка.*

Ако правата (13) нема асимптотски правец, тогаш равенката (14) е квадратна. Таа има два, еден или ниеден реален корен. Затоа:

Една права што нема асимптотски правец може да има со хиперболата две, една или ниедна заедничка точка.

Ако една права ја сече која да е крива во две точки, ја викаме *сечица* или *секанта* на таа крива. Отсечката, чии крајни точки се на една крива, ја викаме нејзина *тетива*. Овие термини ги употребуваме, значи, и кај елипсата и кај хиперболата.

Правата, што една елипса ја сече само во една точка, се вика нејзина *тангента* или *допирка*, а заедничката точка — *допирна точка*. Една права што во однос на дадената хипербола нема асимптотски правец, а хиперболата ја сече во една точка, е, по дефиниција, нејзина *тангента* со допирот во заедничката точка.

ЗАДАЧИ

1. Една права p ја сече една зададена хипербола само во една точка, а ниедна права што е паралелна со p нема повеќе од една заедничка точка со хиперболата. Каква е положбата на p спрема хиперболата? Да се даде една геометриска дефиниција на правите со асимптотски правец по однос на една хипербола!

2. Една права p нема заеднички точки со една зададена хипербола, а секоја права што е паралелна со p има со хиперболата една пресечна точка. Што е правата p за хиперболата? Да се даде една геометриска дефиниција за асимптоти на хиперболата, различна од онаа во § 71, т. 2.

3. Да се даде дефиниција за тангента на хиперболата, не ползувајќи го поимот за асимптотски правец.

2. Дијаметри на елипсата и хиперболата. Нека правата (13) биде една сечица. Точката P ја избираме во средината на тетивата T_1T_2, која кривата (12) ја исечува на правата. Равенката (13) ја запишуваме во векторски облик:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + lt,$$

каде што $\mathfrak{r}_0 = \{x_1^0, x_2^0\}$ е радиус-векторот од P. Ако корените од (14) се t_1 и t_2, тогаш за радиус-векторите на точките $T_1(\mathfrak{r}_1)$ и $T_2(\mathfrak{r}_2)$ добиваме $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0 + lt_1$, $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_0 + lt_2$, од каде

$$t_1 = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)/l = \overrightarrow{PT_1}/l, \qquad t_2 = (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_0)/l = \overrightarrow{PT_2}/l.$$

Поради $\overrightarrow{PT_1} + \overrightarrow{PT_2} = \boldsymbol{0}$, добиваме одавде $t_1 + t_2 = 0$, а следствено (правило на *Виеш*) коефициентот пред t во (14) е нула, значи

$$l_1 x_1{}^0 \pm l_2 x_2{}^0 = 0. \tag{15}$$

Координатите $x_1{}^0, x_2{}^0$ на средината P од T_1T_2 ја задоволуваат оваа равенка. Но и координатите $x_1{}^0, x_2{}^0$ на средината на секоја тетива на кривата што е паралелна со l ја задоволуваат оваа равенка. Релацијата (15) е линеарна по $x_1{}^0, x_2{}^0$, и затоа претставува една права, ако $x_1{}^0, x_2{}^0$ се променливи. На оваа права лежат средините на оние тетиви на кривата (12) што се паралелни со l. Добиената права ја викаме *пречник* или *дијамешар* на кривата (12), *конјугиран* со правецот на векторот l. Секој пречник минува низ координатниот почеток — како што покажува равенката (15). Обратно, секоја права низ координатниот почеток е еден дијаметар на кривата (12); исклучок прават само асимптотите на хиперболата. Навистина, произволно зададената права $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ е еден дијаметар на кривата (12), имено оној што е конјугиран со правецот на векторот $\{a_1, \pm a_2\}$; само правите $x_1 \pm x_2 = 0$ не се дијаметри на кривата $x_1{}^2 - x_2{}^2 = 1$, бидејќи прави со асимтотски правец не се сечици.

Точката во која се сечат дијаметрите на кривата (12) се вика нејзин *ценшар*. При нашиот избор на координатната система центарот совпаднува со координатниот почеток O.

Ако еден дијаметар ја сече кривата во точките A_1 и A_2, тогаш под терминот „*дијамешар*", во потесна смисла на зборот, ја подразбираме отсечката A_1A_2, а точките A_1 и A_2 ги наречуваме *крајни шочки* на дијаметарот. Отсечките OA_1 и OA_2 ги викаме *йолудијамешри.* Ако дијаметарот од една хипербола не ја сече кривата туку ја сече нејзината конјугирана хипербола, тогаш тетивата што последната ја исечува на дијаметарот ќе ја викаме „*дијамешар*", во потесна смисла на зборот, на првата хипербола.

ЗАДАЧИ

1. Ако еден дијаметар на една хипербола не ја сече оваа крива, тогаш тој ја сече нејзе конјугираната хипербола. Доказ!

2. Што е геометриско место на средините на тетивите, паралелни со еден зададен правец, кај: *a*) елипсата; *b*) хиперболата?

3. Какви се дијаметрите на две заемно конјугирани хиперболи кои се конјугирани со еден ист правец?

3. Заемно конјугирани дијаметри. Правата (15) е паралелна со векторот $\{\mp l_2, l_1\}$. Со овој вектор е, значи, паралелен оној дијаметар на (12) што е конјугиран со правецот на l. Но за дијаметарот, кој е конјугиран со правецот на $\{\mp l_2, l_1\}$, ја добиваме од (15) равенката $\mp l_2 x_1{}^0 \pm l_1 x_2{}^0 = 0$, т. е., за обете криви (12), равенката

$$l_2 x_1{}^0 - l_1 x_2{}^0 = 0.$$

А тоа е равенка на една права, паралелна со векторот $\{l_1, l_2\}$, т. е. со правецот со кој е конјугиран дијаметарот (15). Ваков пар дијаметри на кривата (12), при кои секој од нив (или дел од него) е геометриско место на средините од тетивите, паралелни со другиот дијаметар, ги викаме *заемно конјугирани дијаметри* на кривата. *Ако правецот на едниот дијаметар е даден со векторот* $\{l_1, l_2\}$, *тогаш правецот на нему конјугираниот дијаметар е даден со векторот* $\{\mp l_2, l_1\}$. Координатните оски се, спрема тоа, еден пар заемно конјугирани дијаметри за кривите (12). За другите парови на заемно конјугирани, т. е. за оние при кои е $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$, важи, според добиеното, теоремата:

За аголовите коефициенти $k = l_2/l_1$ и $k' = \mp l_1/l_2$ *на дијаметрите од еден пар заемно конјугарани дијаметри на кривите* (12) *важи релацијата*

$$kk' = \mp 1. \tag{16}$$

ЗАДАЧИ

1. Ако AB е еден дијаметар, а C една точка на некоја елипса или хипербола, тогаш тетивите AC и BC се викаат *суплементи*. Покажи дека дијаметрите, паралелни со еден пар суплементи тетиви, се конјугирани.

2. Покажи: Ако во една елипса или хипербола е впишан паралелограм, тогаш неговите страни се паралелни со еден пар заемно конјугирани дијаметри.

3. Докажи: Секој пар нормални дијаметри на кругот се пресликува, при кое да е афино пресликување на рамнината, во еден пар заемно конјугирани дијаметри на елипсата, во која се пресликува кругот.

4. Покажи, на основа зад. 3, дека паралелограмите чии што темиња лежат во крајните точки на заемно конјугираните дијаметри на една иста елипса, имаат иста површина.

5. За една елипса (хипербола) се зададени крајните точки на еден пар заемно конјугирани дијаметри. Конструирај го правецот на дијаметарот што е конјугиран на правецот од еден зададен дијаметар. *Напат.:* Ползувај го фактот дека правците на векторите $\{l_1, l_2\}$ и $\{\mp l_2, l_1\}$ се правци на два заемно конјугирани дијаметри на кривата (12)!

6. Покажи дека меѓу аглoвите коефициенти k и k' на два конјугирани дијаметри во однос на кривата $x_1^2/a_1^2 \pm x_2^2/a_2^2 = 1$ важи релацијата $kk' = \mp a_2^2/a_1^2$.

7. Кој дијаметар од кривата $x_1^2/a_1^2 \pm x_2^2/a_2^2 = 1$ ги располовува тетивите, паралелни со правата $x_2 = kx_1$?

8. Покажи дека $a_1x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 - a_2x_2^2 = 0$ претставува еден пар конјугирани дијаметри на кривата $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = 1$, при секоја вредност за λ.

Задачи за геометриски места

1. OA и OB се еден пар заемно конјугирани полудијаметри на една елипса. Што е геометриското место на средината од отсечката AB?

2. Истото паршање како во зад. 1, ако OA и OB се заемно конјугитани полудијаметри на една хипербола.

4. Тангенти. Точката $P(x_1^0, x_2^0)$ од правата (13) ја избираме на самата крива (12). Равенката (14) има тогаш корени

$$t' = 0, \quad t'' = 2\,(l_1x_1^0 \pm l_2x_2^0)/(l_1^2 \pm l_2^2).$$

Коренот t' одговара на пресекот P на правата и кривата, а коренот t'' на другиот пресек Q. Сега го менуваме правецот на векторот $\{l_1, l_2\}$, вртејќи ја правата околу P така што точката Q да совпадне со P. Тогаш е $t'' = t' = 0$, значи

$$(17) \qquad l_1x_1^0 \pm l_2x_2^0 = 0.$$

Завртената права нема асимптотски правец. Навистина, при елипсата асимптотски правци и не постојат; а при хиперболата е тоа можно само при $l_1^2 - l_2^2 = 0$, или $l_1 = \pm l_2$, од каде следува, поради (17), дека $x_1^0 \pm x_2^0 = 0$, што значи дека точката P би лежела на една од асимптотите — што не е можно, бидејќи P е, по претпоставка, на кривата, а асимптотите со кривата немаат заеднички точки. Завртената права, спрема тоа, нема асимптотски правец, а со кривата (12) има само една заедничка точка: таа е, значи, една *тангента* на кривата.

Релацијата (17) важи за **произволен** вектор $\{l_1, l_2\}$, паралелен со тангентата на кривата (12) во P. Ако $M(x_1, x_2)$ е **која да е** точка на тангентата, е и $\overrightarrow{PM} = \{x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0\}$ еден таков вектор. Затоа важи

$$(x_1 - x_1^0)\,x_1^0 \pm (x_2 - x_2^0)\,x_2^0 = 0,$$

или, поради $(x_1^0)^2 \pm (x_2^0)^2 = 1$, равенката

$$(18) \qquad x_1x_1^0 \pm x_2x_2^0 = 1.$$

Тоа е равенка на тангентата во точката (x_1^0, x_2^0) *на кривата* (12).

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека страните на паралелограмот на сл. 97, 98 се тангенти на елипсата во точките, во кои тие страни ги сечат координатите оски.

2. Покажи дека оние страни на паралелограмот од сл. 101, кои се паралелни со x_2-оската, се тангенти на хиперболата, и дека нивните допирни точки се пресечните точки на тие страни со x_1-оската.

3. Покажи дека тангентите, положени на една елипса во крајните точки на два заемно конјугирани дијаметри, образуваат еден паралелограм чии страни се паралелни со дадените дијаметри.

4. Каква теорема, аналогна на онаа што е формулирана во зад. 3, важи за хиперболата?

5. Покажи: Ако на темињата на еден паралелограм, впишан во една елипса или хипербола, повлечеме тангенти, добиваме паралелограм чии дијагонали се паралелни со страните на впишаниот паралелограм.

6. Покажи дека равенката на тангентата на кривата $x_1^2/a_1^2 \pm x_2^2/a_2^2 = 1$ во точката (x_1^0, x_2^0) гласи $x_1x_1^0/a_1^2 \pm x_2x_2^0/a_2^2 = 1$. *Напат.*: Премини кон системата x_1', x_2', дефинирана со $x_1' = x_1/a_1$, $x_2' = x_2/a_2$!

Напиши ги равенките на тангентите на дадените криви во зададените точки во зад. 7—10.

7. $x_1^2 + x_2^2 = 1$; $(-3/5, 4/5)$. 8. $x_1^2 - x_2^2 = 1$; $(5/4, 3/4)$.
9. $2x_1^2 + x_2^2 = 9$; $(-2, 1)$. 10. $5x_1^2 - 4x_2^2 = 29$; $(3, -2)$.

11. Определи ја равенката на сечицата на кривата $x_1 = t$, $x_2 = 1/t$ што минува низ точките, определени со вредностите t_1, t_2 на параметарот t. Од добиениот резултат да се изведе равенката на тангентата за точката дадена со $t = t_1 = t_2$. Како гласи равенката на тангентата на кривата $x_1x_2 = 1$ со допир во (x_1^0, x_2^0)?

12. Тангентите во P и Q на една хипербола ја сечат една асимптота во L и M. Покажи дека правата PQ ја сече асимптотата во средината од LM.

13. PP' е еден пречник на кривата $x_1x_2 = 1$, а тангентата во P ги сече асимптотите во Q и R. Покажи дека $P'Q$ и $P'R$ ја допираат хиперболата $x_1x_2 + 1 = 0$.

14. Покажи дека тангентите на хиперболата заградуваат со асимптотите триаголник со константна површина.

15. Покажи дека тангентата со допир во P на елипсата или хиперболата е граничната положба на сечицата PP_1, кога точката P_1 се стреми, движејќи се по кривата, кон точката P.

5. Пол и полара. Да испитаме сега што претставува равенката (18), ако точката $P\,(x_1^0, x_2^0)$ не лежи на кривата (12). Таа претставува, секако, некоја права. Ја викаме *полара* на точката P во однос на кривата (12), а самата точка P ја викаме *пол* за таа полара.

Ако правата (18) ја сече кривата (12), нека е $T'(x_1', x_2')$ една нивна пресечна точка. Тогаш важи

$$x_1'x_1^0 \pm x_2'x_2^0 = 1. \tag{19}$$

Равенката (19) покажува дека P лежи на тангентата на кривата (12) со допир во T'. Значи, ако поларата на една точка P во однос на една крива (12) ја сече таа крива, тогаш поларата е правата што ги сврзува допирните точки на тангентите, спуштени на кривата од точката P. Обратно, (19) покажува дека допирот на секоја тангента, спуштена од P на кривата (12), лежи на поларата од P.

Бидејќи правата (18) може да ја сече кривата (12) во две, во една или во ниедна точка, а низ секоја таква точка минува по една тангента што е повлечена на кривата од P — а други тангенти, повлечени низ P на кривата, нема — *тоа од една точка во рамнината можат да се повлечат на кривата* (12) *две, една или ниедна тангента.*

Задачи

1. Покажи: На елипсата $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ можат да се повлечат од секоја точка (x_1^0, x_2^0) две, една или ниедна тангента според тоа дали важи $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 1 > 0$, $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 1 = 0$ или $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 1 < 0$.

2. Покажи: На хиперболата $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ можат да се повлечат од секоја точка (x_1^0, x_2^0) две, една или ниедна тангента (меѓу кои сега ќе ги убројаваме и асимптотите) — според тоа дали важи $(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 - 1 < 0$, $(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 - 1 = 0$ или $(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 - 1 > 0$.

Напиши ги равенките на тангентите, повлечени од дадената точка на кривата.

3. $x_1^2 + x_2^2 = 1$; (1, 1). 4. $x_1^2 - x_2^2 = 1$; (1/2, — 1/2).
5. $2x_1^2 + 3x_2^2 - 6 = 0$; (2, 5/3). 6. $5x_1^2 - 4x_2^2 - 24 = 0$; (8/3, 2).

6. Степен на точка во однос на елипса и хипербола. Нека правата (13) ја сече елипсата $x_1^2 + x_2^2 = 1$ во точките T_1 и T_2. За корените $t_1 = \overrightarrow{PT_1}/\mathbf{l}$, $t_2 = \overrightarrow{PT_2}/\mathbf{l}$ (т. 2) на равенката (14) добиваме, спрема правилото на *Виет*,

$$t_1 t_2 = [(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 1)]/(l_1^2 + l_2^2). \tag{20}$$

Нека векторот $\mathbf{l}$ биде положен на оној полудијаметар OE на елипсата што е паралелен со правата, т. е. $\mathbf{l} = \overrightarrow{OE}$. Тогаш е $l_1^2 + l_2^2 = 1$. Следствено, на основа (20):

$$\frac{\overrightarrow{PT_1}}{\overrightarrow{OE}} \cdot \frac{\overrightarrow{PT_2}}{\overrightarrow{OE}} = L(P). \tag{21}$$

Со $L\,(X)$ ја обележивме левата страна на равенката на елипсата (12). — За хиперболата $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ важи аналогно. Ако точката E лежи на неа, а $\mathbf{l} = \overrightarrow{OE}$, ја добиваме и за хиперболата, на ист начин како за елипсата, релацијата (21), ако со $L\,(X)$ ја означиме левата страна на равенката на нашата хипербола. А ако правата (13) има таков смер да точката E лежи на хиперболата што е конјугирана со дадената хипербола, а да при тоа е $\mathbf{l} = \overrightarrow{OE}$, тогаш, поради $l_1^2 - l_2^2 = -1$, добиваме, на ист начин како во првиот случај,

$$\frac{\overrightarrow{PT_1}}{\overrightarrow{OE}} \cdot \frac{\overrightarrow{PT_2}}{\overrightarrow{OE}} = -L(P). \tag{22}$$

Изразите на десните страни од (21) и (22) се, по својата апсолутна вредност, независни од правецот на $\mathbf{l}$, а затоа и нивните леви страни. Оттука го добиваме за елипсата и хиперболата ова обопштение на теоремата за степенот на точката во однос на кругот.

[1] *Ако една сечица што минува низ една стална точка P ја сече елипсата (хиперболата) во точките T_1 и T_2, тогаш производот од должините на отсечките PT_1 и PT_2, мерени со должината на оној полудијаметер на кривата што е паралелен со сечицата, е ист за сите сечици што врват низ P.*

Внатрешност на една елипса или хипербола е целокупноста на оние точки од рамнината, од кои на кривата можат да се повлечат две тангенти, а *внатрешност* на кривата — целокупноста на оние точки од рамнината од кои не можат да се повлечат тангенти. Користејќи ја теоремата [1], се докажува:

Внатрешност на една елипса е онаа област во рамнината што ја опишува една подвижна тетива па кривата.

Внатрешност на една хипербола е онаа област од рамнината што ја опишува една подвижна тетива со крајните точки на една нејзина гранка и од една подвижна тетива со крајните точки на другата гранка.

Докажи ја теоремата [1], користејќи ја аналогната теорема кај кругот и особините на афините пресликувања!

7. Една конструкција на хиперболата. Во т. 2 спомнавне дека за координатите x_1^0, x_2^0 на средината P од тетивата на кривата (12) важи (15). Ако T_1T_2 е една тетива на хиперболата $x_1^2 - x_2^2 = 1$, важи, спрема тоа,

$$(23) \qquad l_1x_1^0 - l_2x_2^0 = 0.$$

Истата права нека ги пресекува асимптотите на таа хипербола во P_1 и P_2. Равенките на асимптотите се $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$, или

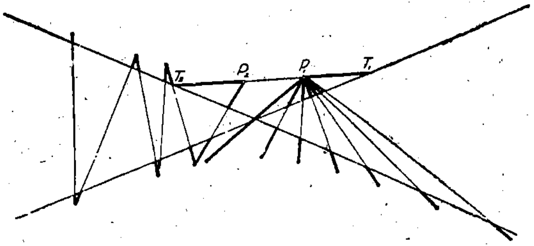
$$(24) \qquad x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

што е заедничка равенка на обете асимптоти. На ист начин, како што ги бараме пресеците T_1 и T_2 на кривата (12) со правата (13) во т. 1, ќе ги бараме пресеците P_1 и P_2 на оваа права со кривата (24). Равенката за t, аналогно на равенката (14), добива сега облик,

$$(25) \qquad t^2(l_1^2 - l_2^2) + 2t\,(l_1x_1^0 - l_2x_2^0) + (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 = 0.$$

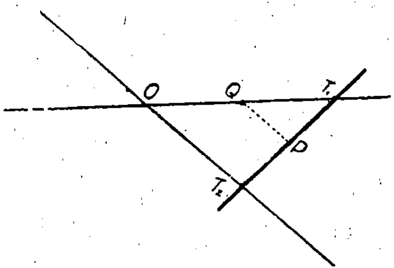
Бидејќи $P(x_1^0, x_2^0)$ е средина на отсечката T_1T_2, важи (23). Равенката (25) има, спрема тоа, спротивни корени. А тоа значи дека P е и средина на отсечката T_1T_2. Затоа е $\overrightarrow{T_1P_1} = \overrightarrow{P_2T_2}$, т. е. *хиперболата и нејзините асимптоти отсечуваат на секоја сечица две еднакви отсечки.*

Оваа особина ни позволува да конструираме произволно многу точки од хиперболата, ако се зададени нејзините асимптоти и една нејзина точка P_1. Низ P_1 треба само, имено, да повлечеме една произволна сечица, а потоа на неа да ја определиме онаа точка P_2 за која важи $\overrightarrow{P_1T_1} = \overrightarrow{T_2P_2}$, при што T_1 и T_2 се пресеците на сечицата и хиперболата. На секоја ваква сечица добиваме по една точка P_2 од хиперболата. Истата постапка може да се продолжи и од точката P_2 (сл. 103). Дебело извлечените отсечки на цртежот, што се на една иста сечица, се еднакви по должина.



Сл. 103

Ако точките P_1 и P_2 совпаднуваат во една точка P, тогаш правата T_1T_2 е тангента со допир во P. Спрема тоа, *отсечката што од една тангента на хиперболата ја исечуваат нејзините* *асимптоти има своја средина во допирната точка.* Важи и обратната теорема. Оттука следува оваа *конструкција на тангентата* на хиперболата во една нејзина точка P: Низ P ја повлекуваме паралелата со една од асимптотите до пресекот Q со другата асимптота. На оваа асимптота ја определуваме точката T_1 така да биде $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QT_1}$. Правата T_1P е бараната тангента.



Сл. 104

ПРИМЕРИ

1. Да се нацрта кривата

$$(5x_1 + 2x_2 - 10)(2x_1 + 3x_2 + 6) = 48. \tag{25}$$

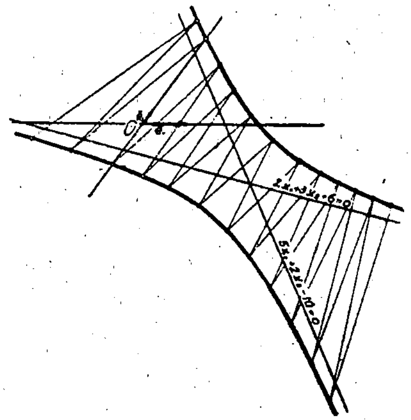
Решение. Преідуваме во нова, помошна координатна система x_1', x_2', определена со

$$x_1' = 5x_1 + 2x_2 - 10, \quad x_2' = (2x_1 + 3x_2 + 6)/48.$$

Во новата система равенката на кривата гласи $x_1' \cdot x_2' = 1$. Кривата е, значи, хипербола. Ги нацртуваме, прво, нејзините асимптоти $x_1' = 0$ и $x_2' = 0$, чии равенки во старата система се $5x_1 + 2x_2 - 10 = 0$ и $2x_1 + 3x_2 + 6 = 0$. За да можеме сега да ја користиме горе изучената констрикција, потребно е да најдеме една, но која да е, точка од кривата. Неа ќе ја најдеме од равенката (25), заменувајќи во неа, на пр., $x_1 = 0$. На тој начин ја добиваме равенката

$$x_2^2 - 3x_2 - 18 = 0,$$

чии корени се -3 и 6. Точките $P(0, 6)$ и $Q(0, -3)$ лежат на хиперболата. Избираме една од нив, на пр. P, и го применуваме горе изложениот метод.



Сл 105

2. Да се определи онаа вредност за λ, за која x_1-оската ќе биде тангента на хиперболата

$$(x_1 + x_2 + 1)(2x_1 - 3x_2 - 1) = \lambda. \tag{26}$$

Решение. При произволен $\lambda \neq 0$ равенката (26) претставува една хипербола со асимптоти $x_1 + x_2 + 1 = 0$ и $2x_1 - 3x_2 - 1 = 0$. Правата $x_2 = 0$, значи, нема асимптотски правец, и таа ќе биде тангента на хиперболата (26), ако ја сече само во една точка. Заменувајќи го во (26) наместо x_2 бројот 0, добиваме равенка за апсцисите на пресечните точки на апсцисната оска и хиперболата, имено

$$2x_1^2 + x_1 - 1 - \lambda = 0.$$

Оваа равенка има само еден корен, ако дискриминантата ѝ е нула, значи ако е $9 + 8\lambda = 0$, или $\lambda = -9/8$. Тоа е бараната вредност за λ.

ЗАДАЧИ

Нацртај ги кривите

1. $(x_1 + x_2 + 1)(x_1 - x_2 - 1) = 3$.
2. $(x_1 + 2x_2 + 4)(3x_1 - x_2 - 6) + 24 = 0$.
3. $x_1x_2 + 4x_1 - 3x_2 + 11 = 0$.

§ 73. Равенка на елипсата и хиперболата во однос на еден произволен пар конјугирани пречници

Зададени нека ни се пак една елипса и хипербола со равенките

$$x_1^2 \pm x_2^2 = 1. \tag{1}$$

Избираме еден произволен вектор $e_1' = \{l_1, l_2\}$, чиј почеток нека е во координатниот почеток O, а крајот E_1' на кривата (1). Тогаш е

$$l_1^2 \pm l_2^2 = 1. \tag{26}$$

Дијаметарот на кривата (1), што е конјугиран со правецот на e_1', е паралелен со векторот $e_2' = \{\mp l_2, l_1\}$. За овој вектор $e_2' = \overrightarrow{OE_2'}$ важи, поради (26), $(\mp l_2)^2 \pm l_1^2 = l_2^2 \pm l_1^2 = \pm 1$. Спрема тоа, E_2' лежи на елипсата (1), одн. на хиперболата што ѝ е конјугирана на хиперболата, дадена со (1); отсечката OE_2' е, значи, еден полудијаметар на кривата (1). Ќе испитаме сега како ќе гласи равенката на кривата (1) во однос на системата $(O; e_1', e_2')$. Трансформационите равенки за координатите на точките гласат

$$x_1 = l_1x_1' \mp l_2x_2', \quad x_2 = l_2x_1' + l_1x_2'.$$

За левата страна од (1) добиваме, значи,

$$\begin{aligned} x_1^2 \pm x_2^2 &\equiv (l_1x_1' \mp l_2x_2')^2 \pm (l_2x_1' + l_1x_2)^2 \equiv \\ &\equiv (l_1^2 \pm l_2^2)\, x_1'^2 \pm (l_1^2 \pm l_2^2)\, x_2'^2 \quad \equiv x_1'^2 \pm x_2'^2. \end{aligned}$$

Равенката на кривата (1) гласи во новата система, спрема тоа,

$$x_1'^2 \pm x_2'^2 = 1.$$

Равенките на елипсата и хиперболата во однос на кој да е пар заемно конјугирани пречници, земени како координатни оски, имаат облик (1), ако должините на полупречниците на кривите што лежат на тие пречници се земени како единици за должина на координатните оски.

Пример. Покажи дека паралелограмот, чии што дијагонали се еден пар заемно конјугирани дијаметри на една елипса или хипербола, има константна површина.

Решение. Нека бидат A_1, B_1 и A_2, B_2 крајните точки на два заемно конјугирани дијаметри на кривата (1), а O нека е центарот на кривата. Ставуваме $\overrightarrow{OA}_1 = \{l_1, l_2\}$. Тогаш е $\overrightarrow{OA}_2 = \{\mp l_2, l_1\}$. Површината на триаголникот OA_1A_2 е една четвртина од површината p на паралелограмот $A_1B_1A_2B_2$. Затоа е

$$p = 4 \cdot \frac{(e_1, e_2)}{2} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ \mp l_2 & l_1 \end{vmatrix} = 2\,(e_1, e_2)\,(l_1^2 \pm l_2^2) = 2\,(e_1, e_2).$$

Површината p, навистина, не зависи од изборот на двојката конјугирани пречници, што и требаше да се докаже.

ЗАДАЧИ

1. Да се покаже дека тангентите, повлечени на една елипса или хипербола во крајните точки на кој да е пар заемно конјугирани пречници, се паралелни со тие пречници.

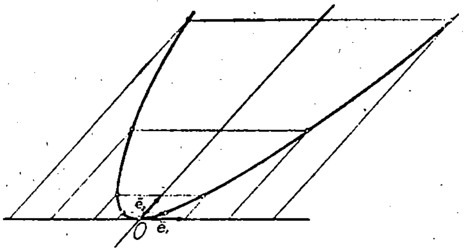
2. Покажи дека паралелограмот, опишан околу една елипса или на една хипербола и нејзе конјугираната хипербола, и тоа така да страните му се паралелни со кој да е пар заемно конјугирани пречници, има константна површина.

3. Зададени се крајните точки A_1, A_2 и B_1, B_2 на два заемно конјугирани дијаметри на една елипса. Над полудијаметрите OA_1 и OB_1 конструираме паралелограм OA_1CB_1. Нека е M средина на страната B_1C, а точката D нека ја дели отсечката A_1C во однос 1 : 2. Покажи дека правата MD е тангента на елипсата со допирна точка во нејзиниот пресек со правата B_2C.

§ 74. Парабола

1. Равенка на параболата. Во рамнината нека ни е зададена една афина координатна система. Ќе испитаме какво е геометриското место на точката, чиј радиус-вектор има аглов коефициент k еднаков на првата своја координата. Ако $M\,(x_1, x_2)$ е една точка од геометриското место, е $k \equiv x_2/x_1 = x_1$, или

$$x_2 = x_1^2. \tag{27}$$



Сл. 106

Тоа е равенка на геометриското место.

Кривата, дадена со равенката (27), се вика *парабола*.

2. Форма на параболата. Десната страна од равенката (27) на параболата не е негативна, а затоа и левата. Точките од параболата (27) се наоѓаат, значи, само во полурамнината $x_2 \geqq 0$.

Од равенката (27) ги пресметуваме координатите на неколку точки на кривата, заменувајќи во неа за x_1 произволни вредности. Така ги добиваме, на пр., точките (— 3, 9), (—2, 4), (— 1, 1), (— 1/2, 1/4), (0, 0), (1/2, 1/4), (1, 1), (2, 4), (3, 9) од параболата. Сврзувајќи ги со една крива, добиваме со тоа приближна претстава за параболата. Сликата 106 покажува дека кривата во позитивниот смер на x_2-оската сѐ повеќе се отвора. Но сѐ пак, секоја права што минува низ координатниот почеток O, а не совпаднува со x_1- или x_2-оската, ја сече оваа крива — освен во O — во уште една точка. Навистина, пресечните точки на правата $x_2 = kx_1$ со кривата (27) се $O(0, 0)$ и $P(k, k^2)$. За секој k постои, освен O, уште и пресекот P. Од правите што му припаѓаат на снопот со центар во O ја сечат параболата во една единствена точка — во точката O — само правата $x_1 = 0$ и правата $x_2 = 0$.

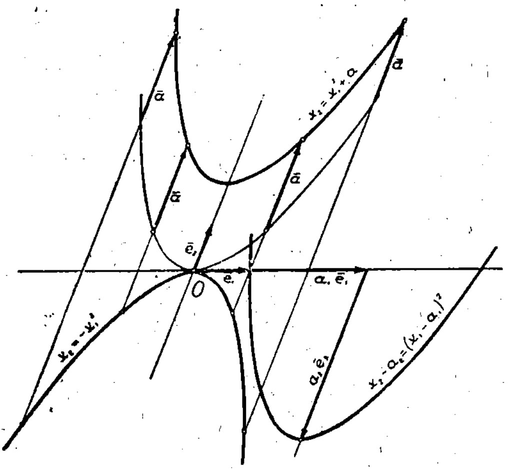
Параболата (27) е *кососиметрична* во однос на x_2-оската, зашто ако (x_1^0, x_2^0) е една нејзина точка, лежи на неа и точката $(— x_1^0, x_2^0)$. x_2-оската е, значи, геометриско место на средините на оние тетиви од параболата што се паралелни со x_1-оската.

ПРИМЕРИ

1. Да се испита кривата

$$x_2 = — x_1^2. \tag{28}$$

Решение. Кривата (28) е кососиметрична со кривата (27) во однос на x_1-оската. Навистина, ако на едната лежи точката (x_1^0, x_2^0), тогаш на другата лежи точката $(x_1^0, —x_2^0)$. Кривата (28) е парабола, бидејќи по трансформацијата на координатите $x_1 = x_1'$, $x_2 = — x_2'$ нејзината равенка гласи $x_2' = x_1'^2$ и има, значи, облик (27) (види сл. 107).



Сл. 107

2. Да се нацрта кривата

$$x_2 = x_1^2 + a. \tag{29}$$

Решение Ако над точките од рамнината, заедно со точките на кривата (29), го извршиме пресликувањето

$$x_1 = x_1' \; x_2 — a = x_2', \tag{30}$$

т. е. ако извршиме *транслација* за векторот $—\boldsymbol{a} = \{0, — a\}$, добиваме за пресликаната крива равенка $x_2' = x_1'^2$. Равенката (29) ја претставува, значи, кривата која се добива на тој начин што на точките на параболата (27) извршуваме транслација за векторот $\boldsymbol{a} = \{0, a\}$. На сл. 107 е земено $a = 2$. Кривата (29) е парабола, зашто равенките (30) можеме да ги толкуваме и како трансформациони равенки на координати, па во системата што тие ја определуваат равенката на кривата има вид (27).

3. Да се испита кривата

(31) $$x_2 - a_2 = (x_1 - a_1)^2.$$

Решение Го извршуваме пресликувањето

(32) $$x_1' = x_1 - a_1, \quad x_2' = x_2 - a_2,$$

т. е. секоја точка од рамнината ја поместуваме транслаторно за векторот $\{-a_1, -a_2\}$. Пресликаната крива има равенка $x_2' = x_1'^2$. Кривата (31) е, значи, кривата што се добива на тој начин што точките на параболата (27) ги поместуваме за векторот $\{a_1, a_2\}$. На сл. 107 е $a_1 = 3$, $a_2 = -4$. Кривата (31) е парабола, бидејќи равенките (32) можеме да ги толкуваме и како трансформациони равенки на координатите на точките.

Преместувањето на кривата $x_2 = x_1^2$ за векторот $\{a_1, a_2\}$ можеме да го извршиме така што кривата ја поместуваме прво за a_1 единици (еднакви на должината на e_1) во правец на x_1-оската, а потоа за a_2 единици (еднакви на должината на e_2) во правец на x_2-оската — и тоа во позитивен или негативен смер според тоа дали a_1 одн a_2 се позитивни или негативни.

ЗАДАЧИ

Нацртај ги кривите, зададени со равенките во зад. 1—6 во некоја зададена афина система.

1. $x_2 = x_1^2 - 3$. 2. $x_1 + x_2^2 + 1 = 0$. 3. $x_2 - 1 = (x_1 + 3)^2$.
4. $x_2 = -(x_1 + 1)^2$. 5. $x_1 + (x_2 - 2)^2 = 0$. 6. $(x_1 - 2) + (x_2 + 3)^2 = 0$.

Покажи со премин на други подесно избрани координатни системи дека кривите во зад. 7—9 се параболи.

7. $x_1 = a_2 x_2^2$. 8. $x_2 = a_1 x_1^2$. 9. $x_2 - a_2 = a(x_1 - a_1)^2$.

10. Нацртај ги кривите, зададени во зад. 7—9, за случај $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a = 1/2$.

11. Покажи дека кривата $x_2 = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3$ е парабола. *Напат.:* Доведи ја равенката во вид на равенката од зад. 9!

Нацртај ги кривите:

12. $x_2 = 2x_1^2 + 3x_2 + 1$. 13. $x_1 = 2x_2^2 + x_2 - 3$.

Преминувајќи кон други, подесно избрани, координатни системи, да се нацртаат кривите од зад. 14 и 15.

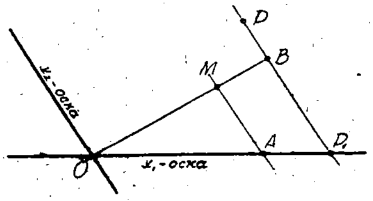
14. $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)$. 15. $(2x_1 + x_2)^2 - x_1 + 3x_2 = 0$.

3. Една афина конструкција на параболата.

Дадена нека ни е параболата

$$x_2 = x_1^2$$

и една нејзина точка $P(x_1^0, x_2^0)$. Тогаш е $x_2^0 = (x_1^0)^2$. Низ P повле-



Сл. 108

куваме паралела со x_2-оската. Таа ја сече x_1-оската во точката P_1. На OP_1 избираме една произволна точка A, а на P_1P онаа точка B да важи $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1B} : \overrightarrow{P_1P}$. Ако е $A(x_1{}^*, 0)$, $B(x_1{}^0, x_2{}')$, тогаш имаме оттука

$$(32) \qquad x_1{}^* : x_1{}^0 = x_2{}' : x_2{}^0.$$

Сврзуваме $O(0, 0)$ со B, а сврзницата ја сечеме со паралелата на x_2-оската, повлечена низ A. Пресекот нека е $M(x_1{}^*, x_2{}^*)$. Од сличноста на $\triangle\, OAM$ и $\triangle\, OPB$ следува $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{AM} : \overrightarrow{P_1B}$, и оттука

$$(33) \qquad x_1{}^* : x_1{}^0 = x_2{}^* : x_2{}'.$$

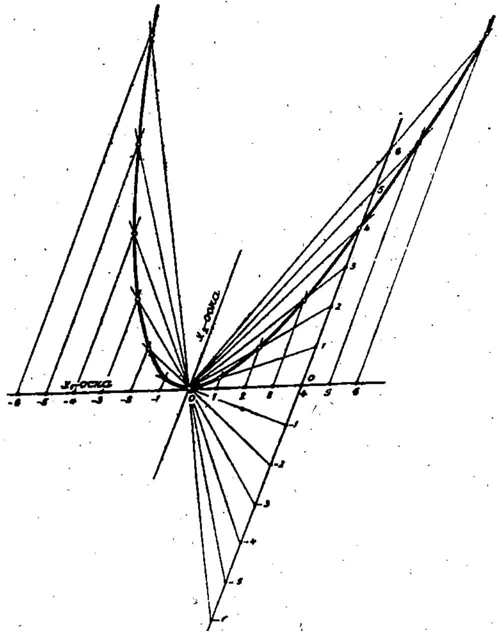
Елиминирајќи го $x_2{}'$ од добиените две пропорции (32) и (33), добиваме

$$x_2{}^* = \frac{x_2{}^0}{(x_1{}^0)^2} \cdot (x_1{}^*)^2.$$

Но поради $x_2{}^0 = (x_1{}^0)^2$ е $x_2{}^0/(x_1{}^0)^2 = 1$. Затоа имаме

$$x_2{}^* = (x_1{}^*)^2.$$

Координатите на M ја задоволуваат равенката на параболата; точката M е, значи, една нејзина точка.



Сл. 109

Бидејќи точката A можеме да ја избереме произволно на x_1-оската, тоа можеме по овој метод да нацртаме произволен број точки од параболата. Практично постапуваме на следниот начин. Отсечките OP_1 и P_1P ги разделуваме на ист број еднакви делови. Разделните точки ги обележуваме по ред со цифрите 0, 1, 2, 3,..., и тоа така да 0 совпадне со O одн. со P_1, како што е и покажано на сл. 109. Потоа O го соединуваме со сите разделни точки на отсечката P_1P, а низ разделните точки на отсечката OP_1 повлекуваме паралели со x_2-оската. Пресеците на оние двојки прави, кои минуваат низ еднакво обележените точки, се точки од параболата. Разделните точки на P_1P можеме да ги пренесеме и преку P_1 и преку P, а разделните точки на OP_1 преку O и преку P_1. Добиените точки од параболата ги сврзуваме со крива линија. Таа ќе ја претставува параболата толку поверно, на колку повеќе делови ги разделивме отсечките.

§ 75. Заемна положба на параболата и правата

1. Пресек на параболата и правата. Ги бараме пресеците на параболата

(27) $$x_1^2 - x_2 = 0$$

и правата $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + lt$, или

(34) $$x_1 = x_1^0 + l_1 t, \qquad x_2 = x_2^0 + l_2 t,$$

која минува низ точката $P(x_1^0, x_2^0)$ и е паралелна со векторот $l = \{l_1, l_2\}$. Заменувајќи ги во (27) изразите за x_1 и x_2 од (34), добиваме $(x_1^0 + l_1 t)^2 - (x_2^0 + l_2 t) = 0$, или

(35) $$l_1^2 \cdot t^2 + (2l_1 x_1^0 - l_2)\, t + (x_1^0)^2 - x_2^0 = 0.$$

Тоа е една равенка по t. На секој нејзин (реален) корен t' одговара по еден пресек на правата и параболата, имено точката $(x_1^0 + l_1 t', x_2^0 + l_2 t')$.

Ако е $l_1 = 0$, равенката (35) е линеарна, зашто во тој случај коефициентот пред t не е нула, бидејќи l_1 и l_2 истовремено не се нула. Спрема тоа, *секоја права, паралелна со x_2-оската, ја сече параболата* (27) *во една точка*. За овие прави кажуваме дека имаат *асимптотски* правец.

Ако е $l_1 \neq 0$, равенката (35) е квадратна. Таа има, значи, два, еден или ниеден корен. Спрема тоа, *правата која нема асимптотски правец може да има со параболата две, една или ниедна заедничка точка*. Во првиот случај правата ја викаме *сечица*, а во вториот *допирка* или *тангента* со *допир* (*допирна точка*) во заедничката точка.

2. Тангента на параболата. Нека правата (34) е една сечица на параболата (27). Точката $P(x_1^0, x_2^0)$ ја избираме на самата парабола. Затоа е $(x_1^0)^2 - x_2^0 = 0$. Равенката (35) ги има тогаш корените

$$t' = 0, \qquad t'' = -(2l_1 x_1^0 - l_2)/l_1^2.$$

На t' ѝ одговара точката P, а на t'' другата пресечна точка Q на правата и параболата. Правата (34) ја завртуваме сега околу P така да Q совпадне со P. Во тој случај е $t'' = t' = 0$. Равенката

(35) има еден сам корен. Во тој случај не е $l_1 = 0$, оти инаку за да би било $t'' = 0$, или $2l_1x_1^0 - l_2 = 0$, би требало да биде и $l_2 = 0$; но тоа не е можно, бидејќи е $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$. Завртената права нема, значи, асимптотски правец, а со параболата има само една заедничка точка. Таа е, спрема тоа, нејзина тангента со допир во P.

Од $t'' = 0$ следува

$$2l_1x_1^0 - l_2 = 0. \tag{36}$$

Оваа релација важи за секој вектор $\{l_1, l_2\}$, паралелен со тангентата. Затоа важи тоа и за координатите на векторот $\overrightarrow{PM}$, каде што $M(x_1, x_2)$ е која да е точка на тангентата. Заменувајќи ги во (36) место l_1 и l_2 координатите $x_1 - x_1^0$ и $x_2 - x_2^0$ од $\overrightarrow{PM}$, добиваме

$$2(x_1 - x_1^0)x_1^0 - (x_2 - x_2^0) = 0.$$

Земајќи предвид дека е $2(x_1^0)^2 = 2x_2^0$, следува одавде

$$2x_1x_1^0 - x_2 - x_2^0 = 0. \tag{37}$$

Тоа е равенка на тангентата на параболата (27) со допир во точката (x_1^0, x_2^0).

За $x_1^0 = x_2^0 = 0$ равенката (37) добива вид $x_2 = 0$. Спрема тоа, x_1-оската е тангента на параболата (27) во координатниот почеток.

Пример. Да се конструира тангента на параболата $x_1^2 = x_2$ во една нејзина зададена точка T.

Решение. Нека е $T(x_1^0, x_2^0)$. Равенката на бараната тангента е (37). Оваа тангента ја сече x_2-оската во точката $T_1(0, -x_1^0)$. Ако O е координатниот почеток, а T_0 проекцијата од T на x_2-оската, земена паралелно со x_1-оската, т. е. $T_0(0, +x_2^0)$, е $\overrightarrow{T_0O} = \overrightarrow{OT_1}$. Конструкцијата на тангентата можеме затоа да ја извршиме на тој начин што низ T ќе повлечеме паралела со x_1-оската до пресекот T_0 со x_2-оската; потоа отсечката T_0O ја пренесуваме преку O така да е $\overline{T_0O} = \overline{OT_1}$. Сврзницата T_1T е тангентата на параболата во T.

ЗАДАЧИ

1. Определи ја онаа тангента на параболата $x_2 = x_1^2$ што е паралелна со векторот $\{2, 3\}$.

2. Најди ја равенката на тангентата на параболата $x_1 = x_2^2$ која е паралелна со правата $4x_1 - 3x_2 + 1 = 0$.

3. Покажи дека постојат тангенти на параболата во секој правец освен во асимптотскиот.

4. Покажи дека равенката на тангентата на параболата $x_1^2 = 2a_2x_2$ со допир во точката (x_1^0, x_2^0) гласи $x_1x_1^0 = a_2(x_2 + x_2^0)$. *Напат.:* Стави $x_1 = x_1'$, $2a_2x_2 = x_2'$!

5. Тангентите во Q и Q' на една парабола се сечат во T, а V нека е средината од $\overline{QQ'}$. Покажи дека параболата ја располовува отсечката TV.

6. Покажи дека правата $x_1 = kx_1 + a/2k$ ја допира параболата $x_2^2 = 2ax_1$ во точката $(a/2k^2,\ a/k)$.

3. Пол и полара. Равенката (37) претставува една права и тогаш кога точката $P(x_1^0, x_2^0)$ не лежи на параболата. Ја викаме *полара* на точката P во однос на параболата (27), а самата точка — *пол* на поларата.

Ако поларата (37) ја сече параболата (27), нека е $T(x_1', x_2')$ една пресечна точка. Тогаш важи

$$2x_1'x_1^0 - x_2^0 - x_2' = 0. \tag{38}$$

Равенката (38) покажува дека P лежи на тангентата на параболата со допир во T; и, обратно, дека допирната точка на секоја тангента, повлечена низ P на параболата, лежи на поларата од P. Значи, *ако поларата од точката P ја сече параболата, тогаш таа е сврзница на допирните точки на тангентите, спуштени од P на параболата.*

Од горното следува, освен тоа, дека од една точка P од рамнината можат да се повлечат толку тангенти на параболата во колку што точки поларата од P ја сече параболата. Бидејќи една права со параболата може да има две, една или ниедна заедничка точка, тоа *од една точка во рамнината можат да се повлечат на параболата две, една или ниедна тангента.* Точките, од кои можат да се повлечат две тангенти, ја образуваат *надворешноста* на параболата; а точките, од кои на параболата не можат да се повлечат тангенти, — нејзината *внатрешност.*

Задачи

1. Да се покаже дека допирната тетива (тетивата што ги соединува допирните точки) на тангентите, спуштени од која да е точка од x_2-оската на параболата $x_1^2 = x_2$, е паралелна со x_1-оската, и обратно.

2. Како гласи равенката на поларата за точката (x_1^0, x_2^0) во однос на параболата $x_2^2 = 2a_1x_1$?

Определи ги равенките на тангентите, спуштени од дадените точки на параболата во зад. 3—6.

3. $x_1^2 = x_2$; $(-1, -15)$.
4. $x_2^2 = x_1$; $(0, -2)$.
5. $2x_1^2 + 3x_2 = 0$; $(-5/2, 4)$.
6. $x_2^2 + 3x_1 - 4 =$;0 $(5, -5)$.

7. Покажи: Од една точка (x_1^0, x_2^0) можат на параболата $x_1^2 = x_2$ да се повлечат две, една или ниедна тангента — според тоа дали изразот $(x_1^0)^2 - x_2^0$ е позитивен, нула или негативен.

8. Покажи дека за внатрешните точки P на една парабола важи $\overrightarrow{PT_1} \cdot \overrightarrow{PT_2} < 0$, ако T_1T_2 е која да е од оние тетиви на параболата што минуваат низ P.

9. Увери се дека од зад. 8 следува: *Внатрешноста на една парабола е онаа област од рамнината што ја опишува една подвижна тетива на параболата.*

4. Дијаметри на параболата. Правата (34) нека биде сега една сечица на параболата (27). Тогаш е $l_1 \neq 0$. Точката $P(x_1^0, x_2^0)$ ја избираме во средината на тетивата што параболата ја исечува на правата. Корените на равенката (35) се тогаш спротивни. Нивниот збир е, значи, нула, и затоа е нула (правилото на *Виет*) и коефициентот пред t во (35), значи

$$2l_1x_1^0 - l_2 = 0. \tag{39}$$

Ако во оваа равенка x_1^0 го сметаме како променлив, а l_1 и l_2 како две зададени константи, тогаш таа е задоволена со координатите x_1^0, x_2^0 на средината на секоја тетива од параболата (27) што е паралелна со векторот $l = \{l_1, l_2\}$. Равенката (39) е линеарна по x_1^0, x_2^0, и затоа претставува права. Спрема тоа, *средините на сите оние тетиви на една зададена парабола што се паралелни со некој вектор* $l = \{l_1, l_2\}$ *лежат на една права.* Таа права ја викаме *дијаметар* или *пречник* на параболата, *конјугиран* со правецот на l.

Ако во (39) место x_1^0 пишеме x_1 — за да означиме дека тоа е една променлива — и ако ставиме $k = l_2/l_1$, ја добиваме равенката на дијаметарот на параболата (27), конјугиран со правецот на $\{1, k\}$, во вид

$$x_1 = k/2.$$

Таа претставува, при секоја вредност на агловиот коефициент k на векторот l, една права што е паралелна со x_2-оската. Значи, *сите дијаметри на параболата се меѓу себе паралелни.*

За секој правец, кој не е асимптотски, постои дијаметар конјугиран со него.

Дијаметарот, конјугиран со правецот на x_1-оската, е $x_1 = 0$, т. е. x_2-оската. Равенката на нашата парабола (27) се однесува, значи, на една нејзина тангента и на дијаметарот што е конјугирна со нејзиниот правец — земени како координатни оски.

ЗАДАЧИ

1. Да се покаже аналитички дека дијаметарот, конјугиран со правецот на една тангента на параболата, минува низ нејзината допирна точка.

2. Најди ја равенката на онаа тетива на параболата $x_1^2=x_2$ чија средина е (1/2, 5/2).

3. Најди го геометриското место на средините на тетивите од параболата $x_1^2 = x_2$, паралелни со правата $2x_1 + 3x_2 + 5 = 0$.

4. Покажи дека дијаметарот на параболата $x_1^2 = 2a_2x_2$, конјугиран со правецот на правата $x_2 = kx_1$, гласи $x_1 = a_2k$.

5. Покажи дека тангентата во крајната точка на кој да е дијаметар на параболата е паралелна со правецот со кој е конјугиран тој дијаметар.

§ 76. Равенка на параболата во однос на една нејзина произволна тангента и дијаметарот, конјугиран со правецот на тангентата

На параболата

$$x_1^2 = x_2 \tag{27}$$

избираме која да е точка $O'(x_1^0, x_2^0)$ и во неа повлекуваме тангента на кривата. Ќе испитаме како гласи равенката на параболата, ако оваа тангента ја избереме како прва, а дијаметарот низ нејзиниот допир како втора оска на една координатна систем.

Равенката на тангентата гласи

$$2x_1x_1^0 - x_2 - x_2^0 = 0.$$

Таа е паралелна со векторот $e_1' = \{1, 2x_1^0\}$. Него го избираме за прв координатен вектор. Сите дијаметри се паралелни со x_2-оската. Затоа за втор нов координатен вектор ќе го избереме векторот $e_2' = \{0, 1\}$. Меѓу старите координати x_1, x_2 на една произволна точка и нејзините нови координати x_1', x_2' важат затоа (§ 41) релациите

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_1^0 \\ x_2 &= 2x_1^0x_1' + x_2' + x_2^0. \end{aligned}$$

Одавде следува

$$x_1^2 - x_2 = (x_1^0)^2 - x_2^0 + x_1'^2 - x_2' = x_1'^2 - x_2',$$

бидејќи е $(x_1^0)^2 - x_2^0 = 0$. Координатите на точките на параболата ја задоволуваат, значи, во новата система равенката

$$x_1'^2 - x_2' = 0.$$

Равенката на параболата во однос на една произволна нејзина тангента и дијаметарот што е конјугиран со нејзиниот правец, земени како координатни оски, има облик (27) *— при подесен избор на должините и смеровите на координатните вектори.*

ЗАДАЧА. Покажи: Ако T_1P и T_2P се тангенти на параболата со допирни точки во T_1 и T_2, тогаш правата што ги сврзува средините S_1 и S_2 на отсечките $\overline{T_1P}$ и $\overline{T_2P}$ е тангента на параболата и е паралелна со тетивата T_1T_2. Средината на отсечката $\overline{S_1S_2}$ е допирната точка на тангентата. Користи ја оваа теорема за конструкција на произволен број тангенти на една парабола на која ѝ се зададени две тангенти со допирните точки.

Задачи за геометриски места

1. Една подвижна права, паралелна со x_2-оската, ги сече параболите $x_2 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$ и $x_2 = b_1x_1^2 + b_2x_2 + b_3$ во точките A и B. Да се најде геометриското место на средината од отсечката AB.

2. Да се најде геометриското мето на средината на тетивата OP, ако O е една фиксна точка, а P — подвижна точка на една парабола.

3. Во рамнината се дадени три точки A, B, C. Да се определи геометриското место на точката M така да важи $(ABM)^2 = (ABC)(MBC)$. При тоа е (ABC) површината на $\Delta\, ABC$ при ориентацијата $A \to B \to C$.

4. Најди го геометриското место на средините на сите тетиви од една парабола што минуваат низ една точка.

5. Поларата од една точка P во однос на една парабола ја сече кривата во точките Q, R. Покажи што е геометриското место на средината од $\overline{QR}$, ако P се движи по една права.

6. Во една парабола се впишани триаголници чии тежишта лежат на еден нејзин дијаметар. Покажи дека тангентите на параболата во темињата на овие триаголници образуваат триаголници чии тежишта лежат пак на истиот дијаметар од таа парабола.

§ 77. Равенка од втора степен

Равенките на елипсата, хиперболата и параболата, со кои се запознавме досега, се од втора степен во однос на променливите. Ќе испитаме сега што може да претставува каква да е равенка од втора степен. Најопшта равенка од втора степен во однос на x_1 и x_2 можеме да ја пишеме во вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0, \tag{40}$$

каде што за ознаките на коефициентите се послуживме со двојни индекси. При тоа нека е $a_{ik} = a_{ki}$. При ова разгледување ќе игра важна улога детерминантата

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ќе ги разгледаме по ред кривите (40), при кои детерминантата Δ_2 е нула, негативна и позитивна.

I. Параболичен тип. Зададена нека ни е кривата (40), при која е $\Delta_2 \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Да претпоставиме прво дека е $a_{12} \neq 0$. Бидејќи во тој случај е $a_{11}a_{22} = a_{12}^2 > 0$, тоа a_{11} и a_{22} се со еднакви знаци. Ако се негативни, ја помножуваме равенката (40) со -1. Затоа смееме да претпоставиме дека е $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$, па можеме да ставиме

$$a_{11} = a_1^2, \quad a_{22} = a_2^2.$$

Тогаш е, поради $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, $a_{12} = a_1a_2$, ако на a_1 и a_2 му дадеме подесни знаци. Спрема тоа, ако е $a_{12} \neq 0$, имаме

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \equiv a_1^2x_1^2 + 2a_1a_2x_1x_2 + a_2^2x_2^2 \equiv \\ \equiv (a_1x_1 + a_2x_2)^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Ако сега претпоставиме дека е $a_{12} = 0$, тогаш е и еден од коефициентите a_{11} и a_{22} нула. Во тој случај изразот (41) има облик $a_{11}x_1^2$ или $a_{22}x_2^2$. Спрема тоа:

Ако е $\triangle_2 = 0$, квадратните членови во равенката (40) образуваат полен квадрат.

Се проверува наеднаш дека важи и обратната теорема.

Равенката (40) го добива сега видот

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \tag{42}$$

1. случај. Да претпоставиме прво дека коефициентите a_1, a_2 се пропорционални со a_{13}, a_{23}, т. е. дека важи

$$a_{13} = a_1k, \quad a_{23} = a_2k.$$

Равенката (42) добива тогаш вид

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^2 + 2k\,(a_1x_1 + a_2x_2) + a_{33} = 0.$$

Оваа равенка ја решаваме по $a_1x_1 + a_2x_2$, па добиваме

$$a_1x_1 + a_2x_2 = -k \pm \sqrt{k^2 - a_{33}}. \tag{43}$$

Ако е $k^2 > a_{33}$, равенката (43) претставува еден *пар паралелни прави;* ако е $k^2 = a_{33}$, равенката (43) претставува една права — или како уште се изразуваме — еден *пар сопаднати прави;* а ако е $k^2 < a_{33}$, равенката (43) не претставува *ништо*, зашто квадратниот корен на нејзината десна страна е тогаш во полето на реални броеви без смисол.

Пример. Да се испита кривата

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3 = 0$$

Решение. Равенката може да се запише во вид

$$(x_1 + 2x_2)^2 + 2\,(x_1 + 2x_2) - 3 = 0.$$

Решавајќи ја по $x_1 + 2x_2$, добиваме $x_1 + 2x_2 = -1 \pm 2$, или

$$x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 + 2x_2 + 3 = 0.$$

Тоа се равенките на правите што ги претставува дадената равенка.

2. случај. Останува да го разгледаме случајот кога a_1, a_2 не се пропорционални со a_{13}, a_{23}. Прејдуваме кон една нова афина координатна система, дефинирана со

$$x_1' = a_1x_1 + a_2x_2, \quad x_2' = -2a_{13}x_1 - 2a_{23}x_2 - a_{33}.$$

Овие равенки претставуваат, навистина, трансформациони равенки за координати на точките, бидејќи е

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ -2a_{13} & -2a_{23} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поради претпоставката дека a_1, a_2 не се пропорционални со a_{13}, a_{23}. Во новата система равенката на кривата (42) гласи $x_2' = x_1'^2$. Кривата е, значи, една *парабола;* x_1'-оската й е тангента, а x_2'-оската — дијаметар, конјугиран со правецот на таа тангента. Кривата (42) можеме, спрема тоа, да ја нацртаме на тој начин што прво ќе ги нацртаме правите

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \text{и} \quad 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0.$$

Втората од нив е тангента на параболата, а првата — дијаметар, конјугиран со нејзиниот правец. Ако најдеме уште една, која да е, точка од параболата, различна од пресекот на нацртаните прави, можеме да ја нацртаме параболата по методата од § 74 т. 3.

Пример. Да се нацрта кривата

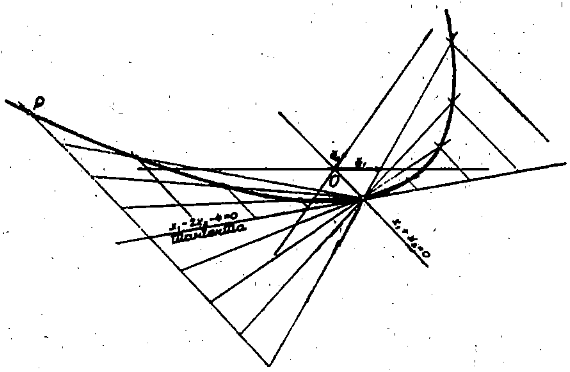
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 - 4 = 0.$$

Решение. Равенката ја запишуваме во вид

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 - 2x_2 - 4 = 0. \tag{44}$$

Во зададената координатна система ги нацртуваме правите

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 - 2x_2 - 4 = 0.$$



Сл. 110

За да добиеме една точка P од параболата, ја пресечуваме со една права, паралелна со дијаметарот, т. е. со една права што е паралелна со првата од горните две прави. Нека е тоа, на пр.,

$$x_1 + x_2 + 4 = 0. \tag{45}$$

Ставувајќи го во (44) наместо $x_1 + x_2$ бројот —4, добиваме

$$x_1 - 2x_2 + 12 = 0. \tag{46}$$

Решение на системата равенки (45) и (46) е $x_1 = -20/3$, $x_2 = +8/3$. Точката $P(-20/3, 8/3)$ лежи на параболата. Кривата сега можеме да ја нацртаме (сл. 110).

Горните резултати можеме вака да ги резимираме:

Ако коефициентите на равенката (40) *го задоволуваат условот* $\Delta_2 = 0$, *тогаш таа претставува една парабола, еден пар паралелни прави, еден пар совпаднати прави или ништо.*

За кривите, претставувани со равенката (40) за случај кога е $\Delta_2 = 0$, кажуваме дека се од *параболичен тип.*

II. Хиперболичен тип. Сега ќе ги разгледаме такви криви (40) при кои е $\Delta_2 < 0$.

1. случај. $a_{11} = a_{22} = 0$. Ако е $a_{11} = a_{22} = 0$, тогаш треба да е $a_{12} \neq 0$, оти инаку равенката (40) не би била од втора степен. Тогаш е $\Delta_2 = -a_{12}{}^2 < 0$. Равенката (40) го добива сега, после скратување со a_{12}, видот

$$2x_1x_2 + 2a_{13}'x_1 + 2a_{23}'x_2 + a_{33}' = 0.$$

Можеме да ја запишеме во обликот

$$2(x_1 + a_{23}')(x_2 + a_{13}') + a_{33}' - 2a_{13}'a_{23}' = 0.$$

Ако е $a_{33}' = 2a_{13}'a_{23}'$, равенката ги претставува правите

$$x_1 + a_{23}' = 0 \quad \text{и} \quad x_2 + a_{13}' = 0. \tag{47}$$

А ако е $a_{33}' \neq 2a_{13}'a_{23}'$, равенката претставува една хипербола чии асимптоти се правите (47).

2. случај: $a_{11} \neq 0$. Да го испитаме сега случајот кога барем еден од коефициентите a_{11} и a_{22} не е нула. Нека е $a_{11} \neq 0$. Тогаш е (§ 55, (46))

$$\begin{aligned} & a_{11}(a_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2) \equiv \\ & \equiv (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2)x_2{}^2 \equiv \\ & \equiv (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + \Delta_2 x_2{}^2, \end{aligned} \tag{48}$$

а тоа е еднакво, бидејќи е $\Delta_2 < 0$, на

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \sqrt{-\Delta_2}\,x_2)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \sqrt{-\Delta_2}\,x_2).$$

Множејќи ја равенката (40) со a_{11}, таа добива, спрема тоа, вид

$$(49)\quad \begin{aligned}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \sqrt{-\Delta_2}\,x_2)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \sqrt{-\Delta_2}\,x_2) +\\ + 2a_{11}a_{13}x_1 + 2a_{11}a_{23}x_2 + a_{11}a_{33} = 0.\end{aligned}$$

Во двете загради од левата страна на (49) додаваме по еден произволен број λ и μ, а потоа колку што со тоа сме додале на равенката — го вадиме, така што равенката да биде напишана само во друг вид. Добиваме

$$(49')\quad \begin{aligned}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \sqrt{-\Delta_2}\,x_2 + \lambda)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \sqrt{-\Delta_2}\,x_2 + \mu) -\\ - a_{11}(\lambda + \mu - 2a_{13})\,x_1\\ - (\lambda a_{12} + \mu a_{12} - \lambda\sqrt{-\Delta_2} + \mu\sqrt{-\Delta_2} - 2a_{11}a_{23})\,x_2 +\\ + a_{11}a_{33} - \lambda\mu = 0.\end{aligned}$$

При секакви вредности на λ и μ равенката (49′) е еквивалентна со (40). Сега ги определуваме λ и μ така што коефициентите пред x_1 и x_2 во вториот и третиот ред од (49′) да бидат нула, значи да биде

$$\begin{aligned}\lambda + \qquad\qquad\qquad \mu &= 2a_{13}\\ (a_{12} - \sqrt{-\Delta_2})\,\lambda + (a_{12} + \sqrt{-\Delta_2})\,\mu &= 2a_{11}a_{23}.\end{aligned}$$

Детерминантата на системата од овие линеарни равенки по λ и μ е $2\sqrt{-\Delta_2} \neq 0$. Системата има затоа секогаш едно (и само едно) решение. Ако $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ е тоа решение, го заменуваме во (49′) па добиваме

$$(50)\quad \begin{aligned}[a_{11}x_1+(a_{12}+\sqrt{-\Delta_2})\,x_2+\lambda_0]\,[a_{11}x_1+(a_{12}-\sqrt{-\Delta_2})\,x_2+\mu_0]=\\ =\lambda_0\mu_0 - a_{11}a_{33}.\end{aligned}$$

Ако е $a_{11}a_{33} = \lambda_0\mu_0$, равенката (50) ги претставува *правите*

$$(51)\quad \begin{aligned}a_{11}x_1 + (a_{12} + \sqrt{-\Delta_2})\,x_2 + \lambda_0 = 0\\ a_{11}x_1 + (a_{12} - \sqrt{-\Delta_2})\,x_2 + \mu_0 = 0,\end{aligned}$$

кои *не се паралелни.*

А ако е $a_{11}a_{33} \neq \lambda_0\mu_0$, равенката (50) претставува една *хипербола,* чии асимптоти се правите (51).

Ако при равенката (40) е $\Delta_2 < 0$, тогаш таа претставува една хипербола или еден пар непаралелни прави.

За кривите (40), при кои важи $\Delta_2 < 0$, кажуваме дека се од *хиперболичен тип.*

Пример. Да се испита кривата

$$3x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2 + 8x_1 - 5x_2 - 4 = 0. \tag{52}$$

Решение. Бидејќи е

$$3x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2 \equiv (3x_1 - x_2)(x_1 + 2x_2),$$

тоа равенката добива вид

$$(3x_1 - x_2)(x_1 + 2x_2) + 8x_1 - 5x_2 - 4 = 0.$$

Додавајќи ги λ и μ во заградите, ја преобразуваме равенката во

$$(3x_1 - x_2 + \lambda)(x_1 + 2x_2 + \mu) + (8 - \lambda - 3\mu)x_1 - (5 + 2\lambda - \mu)x_2 - 4 - \lambda\mu = 0. \tag{52'}$$

Ги определуваме λ и μ така да е

$$\lambda + 3\mu = 8, \quad 2\lambda - \mu = -5.$$

Добиваме $\lambda = -1$, $\mu = 3$. Ставувајќи ги овие вредности во (52'), добиваме

$$(3x_1 - x_2 - 1)(x_1 + 2x_2 + 3) = 1.$$

Кривата (52) е, спрема тоа, хипербола. Можеме да ја нацртаме по методот од § 72, т. 7.

III. Елиптичен тип. Останува уште да го разгледаме случајот кога е $\Delta_2 \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Во овој случај е, значи, $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$.

Бидејќи важи (48), тоа, множејќи ја равенката (40) со a_{11}, таа може да се претстави во облик

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + \Delta_2 x_2^2 + 2a_{11}a_{13}x_1 + 2a_{11}a_{23}x_2 + a_{11}a_{33} = 0. \tag{53}$$

Постапуваме аналогно како во хиперболичниот случај. Ја пишуваме равенката (53) во вид

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \lambda)^2 + \Delta_2(x_2 + \mu)^2 - 2a_{11}(\lambda - a_{13})x_1 - \\ &- 2(a_{12}\lambda + \Delta_2\mu - a_{11}a_{23})x_2 + a_{11}a_{33} - \lambda^2 - \Delta_2\mu^2 = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Равенката (54) е идентична со (53), при секакви вредности за λ и μ. Ако во (54) би извршиле редукција, би отпаднале сите членови со λ и μ.

Ги определуваме сега λ и μ така што третиот и четвртиот член во (54) да отпаднат, значи да биде

$$\lambda - a_{13} = 0 \quad \text{и} \quad a_{12}\lambda + \Delta_2\mu - a_{11}a_{23} = 0.$$

Добиваме $\lambda_0 = a_{13}$, $\mu_0 = (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})/\Delta_2$. Ставувајќи ги овие вредности за λ и μ во (54), имаме

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})^2 + \Delta_2(x_2 + \mu_0)^2 = a; \\ &a = \lambda_0^2 + \Delta_2\mu_0^2 - a_{11}a_{33}. \end{aligned} \tag{55}$$

Ако е $a < 0$, равенката (55) не претставува *ништо*, зашто таа во тој случај нема решенија: при секакви x_1 и x_2 левата страна не е негативна, додека десната страна е негативна.

Ако е $a = 0$, равенката е задоволена само за оние вредности за x_1 и x_2 кои ги задоволуваат обете равенки

$$(56) \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} = 0, \qquad x_2 + \mu_0 = 0.$$

Равенката претставува, значи, една *точка*.

Ако е, најпосле, $a > 0$, тогаш равенката (55) претставува една *елипса*. Правите (56) се еден пар нејзини заемно конјугирани дијаметри.

Кога е $\Delta_2 > 0$, *равенката* (40) *претставува*, спрема тоа, *една елипса, една точка или ништо.*

За кривите (40), при кои важи $\Delta_2 > 0$, кажуваме дека се од *елиптичен тип.*

Пример. Да се испита кривата

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 + 3 = 0.$$

Решение. Равенката ја помножуваме со коефициентот пред x_1^2, т. е. со 2:

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 + 6 = 0.$$

Квадратните членови можат да се пишат во вид на збир од два квадрати. Тоа се постигнува најлесно — за да не треба да се помни формулата (48) — на тој начин што првите два члена се дополнуваат до полен квадрат. Добиваме

$$(2x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 + 6 = 0.$$

Равенката ја трансформираме, додавајќи ги на основите на квадратните изрази консонантите λ и μ, со што добиваме

$$(57) \quad (2x_1 + x_2 + \lambda)^2 + (x_2 + \mu)^2 - 4(\lambda - 3)x_1 - 2(\lambda + \mu - 2)x_2 + 6 - \lambda^2 - \mu^2 = 0.$$

Ги определуваме λ и μ така да е

$$\lambda - 3 = 0, \qquad \lambda + \mu - 2 = 0,$$

т. е. $\lambda = 3$, $\mu = -1$. Заменувајќи ги овие вредности во (57), добиваме

$$(2x_1 + x_2 + 3)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4.$$

Кривата е, значи, *елипса*. Можеме да ја нацртаме по методата од § 70, т. 3.

ЗАДАЧИ

Да се испита што претставуваат зададените равенки во однос на една афина координатна система. Ако тие претставуваат криви, да се нацртаат.

1. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 = 0.$
2. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0.$

3. $9x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 11x_1 - 5x_2 + 3 = 0.$
4. $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0.$
5. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1 - 1 = 0.$
6. $2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - x_1 - x_2 = 0.$
7. $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 0.$
8. $x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2 = 0.$
9. $5x_1^2 + 14x_1x_2 + 10x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 3 = 0.$
10. $10x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 1 = 0.$
11. $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 10x_2 + 5 = 0.$
12. $x_1x_2 + 3x_1 - 5x_2 - 15 = 0.$
13. $2x_1^2 - 3x_1x_2 + 7x_1 - 9x_2 + 2 = 0.$
14. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1.$

ПРИМЕРИ

1. Да се определи равенката на фамилијата криви што се хомотетични со кривата

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 1, \tag{58}$$

ако цетнарот на хомотетијата е во координатниот почеток O.

Решение. Равенките на која да е хомотетија со центар во O се

$$x_1' = \lambda x_1, \quad x_2' = \lambda x_2.$$

Ги заменуваме во (58) место x_1, x_2 изразите x_1'/λ, $x_2'\,\lambda$, па добиваме

$$a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 = \lambda^2.$$

Тоа е бараната равенка.

Покажи: Ако кривата (58) е хипербола, тогаш равенката $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \mu = 0$, при севозможни значења за μ, претставува хиперболи кои се хомотетични со хиперболата (58) во однос на O, како и хиперболите што се конјугирани со нив.

2. Што претставува равенката

$$f(x_1, x_2) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0, \tag{59}$$

во која a_{11}, a_{12}, a_{22} се дадени константи, а a_{13}, a_{23}, a_{33} произволни параметри?

Решение. I. Ако е $\triangle_2 = 0$, кривите (59) се параболи или парови паралелни прави. Паровите паралелни прави можеме да ги сметаме како слични криви. А истото ќе го покажеме подоцна и за параболите (види зад. 20 § 80, т. 3).

II. Нека е $\triangle_2 \neq 0$. Извршуваме паралено преместување на координатната система, определено со

$$x_1 = x_1' + x_1^0, \quad x_2 = x_2' + x_2^0.$$

Во (59) ги заменуваме наместо x_1, x_2 изразите $x_1' + x_1^0$, $x_2' + x_2^0$, со што добиваме, по средувањето,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + 2\,(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13})\,x_1' + \\ + 2\,(a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}) + f(x_1^0, x_2^0) = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Сега ги определуваме x_1^0, x_2^0 така да во (60) отпаднат линеарните членови, значи да биде

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Системата (61) е решлива по x_1^0, x_2^0, бидејќи детерминантата на системата е $\triangle_2 \neq 0$.

Равенката (59) може, значи, во случај да е $\triangle_2 \neq 0$, со паралелно преместување на координатната система, да се сведе на облик

$$a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + a_{33}' = 0.$$

во кој a_{11}, a_{12}, a_{22} имаат исти значења како во (59).

Кривите (59) *се*, спрема прим. 1, *слични. Ако се хипереболи, меѓу нив спаѓаат и хиперболите што се конјугирани со нив.*

§ 78. Афина еквивалентност на елипсите, на хиперболите и на параболите

Елипса е секоја крива чија равенка може да се доведе, при подесен избор на афината координатна система, во облик $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Равенките на сите елипси во една иста или во две различни рамнини можат да се доведат, значи, на еден ист облик (при разни афини системи). Спрема тоа (§ 49, т. 4), *сите елипси се афино еквивалентни.*

По аналогни причини важи: *Сите хиперболи се афино еквивалентни.* А истотака и *сите параболи се афино еквивалентни.*

Тоа значи дека за кои да е две елипси (хиперболи; параболи) во една иста или во две различни рамнини постојат такви афини пресликувања, кои првата крива ја пресликуваат во втората.

Бидејќи паралелното проицирање е афино пресликување (§ 47), следува:

Ако една елипса (хипербола, одн. парабола) ја проицираме паралелно на која да е рамнина, која не е паралелна со правецот на проицирањето, добиваме пак една елипса (хипербола, одн. парабола).

ЗАДАЧИ

Нацртај ја кривата во која се пресликува дадената крива при зададеното афино пресликување во зад. 1—3. Равенките се однесуваат до една иста афина система.

1. $x_1^2 + x_2^2 = 1$; *a*) $x_1 = x_1'/2$, $x_2 = 3x_2'$. *b*) $x_1 = x_1' + x_2'$, $x_2 = x_2'$.
2. $x_1^2 = x_2$; *a*) $x_1' = x_1 + 2$, $x_2' = x_2 - 3$. *b*) $x_2 = x_1' + x_2'$, $x_1 = x_1' - x_2'$.
   c) $x_1 = x_1'$, $x_2 = kx_2'$, $(k = 4, -4, 1/4, -1/4)$.
3. $x_1^2 - x_2^2 = 1$; *a*) $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$. *b*) $x_1 = x_1'$, $x_2 = kx_2'$, $(k = 4, 2, 1/2, 1/4)$.

Најди ги равенките на едно афино пресликување, кое првата од дадените криви ја пресликува во втората (зад. 4—5).

4. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$; $x_1^2/b_1^2 + x_2^2/b_2^2 = 1$. 5. $x_1^2 = x_2$; $x_2 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$,

6. Покажи дека *a*) елипса и хипербола, *b*) елипса и парабола, *c*) хипербола и парабола, не се афино еквивалентни.

Метрични особини на кониките

§ 79. Оски на елипсата, хиперболата и параболата

1. Оски на елипсата. Во § 72, т. 3 видовме дека на секој дијаметар од една елипса постои еден нему конјугиран дијаметар. Сега ќе испитаме дали има парови заемно нормални конјугирани дијаметри.

Во една афина система $(O;\ e_1,\ e_2)$ нека е зададена елипсата

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1. \tag{1}$$

Еден нејзин дијаметар нека е паралелен со векторот $l = \{l_1,\ l_2\}$. Нему конјугираниот дијаметар е тогаш, спрема § 72, т. 3, паралелен со векторот $l' = \{-l_2, l_1\}$. Сакаме да испитаме дали правецот на l може да се избере така да l биде нормален на l'. За тоа е потребно и доволно да е $l \cdot l' = 0$, или (§ 29)

$$-g_{11}l_1l_2 + g_{12}(l_1{}^2 - l_2{}^2) + g_{22}l_1l_2 = 0, \tag{2}$$

каде што е $g_{ik} = e_i \cdot e_k$.

Ако е $g_{12} = 0$, т. е. ако афината система е правоагла (со различни единици на координатните оски), добиваме од (2) дека е $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$, или $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$, т. е. дека координатните оски се единствениот пар нормални заемно конјугирани дијаметри на елипсата (1).

Ако е, освен $g_{12} = 0$, и $g_{22} - g_{11} = 0$, тогаш равенката (2) е задоволена за секој l_1 и l_2. Секој пар нормални прави што минуваат низ координатниот почеток претставува, значи, еден пар заемно нормални конјугирани дијаметри на елипсата. Но во овој случај, поради $g_{11} = g_{22}$, единиците на координатните оски се еднакви, поради што равенката (1) претставува еден *круг* со центар во координатниот почеток.

Да претпоставиме сега дека $g_{12} \neq 0$. Ставувајќи $k = l_2/l_1$, равенката (2) добива вид

$$-g_{12}k^2 + (g_{22} - g_{11})k + g_{12} = 0. \tag{3}$$

Дискриминантата на оваа квадратна равенка за агловиот коефициент k од l е $(g_{22} - g_{11})^2 + 4g_{12}{}^2$, која — како збир од два квадрати — е позитивна. Равенката (3) има, значи, секогаш два (реални) корена k' и k''. Дијаметарот, конјугиран со правецот на $\{1,\ k'\}$, е, спрема тоа, нормален на овој вектор. Истотака и дијаметарот што е конјугиран со правецот на $\{1,\ k''\}$ е нормален на него. Но лесно се проверува дека и векторите $\{1, k'\}$ и $\{1, k''\}$ се нормални. Навистина, од (3) следува (правило на *Виет*)

$$k' + k'' = (g_{22} - g_{11})/g_{12}, \quad k'k'' = -1;$$

а одавде добиваме за нивниот скаларен производ дека е

$$g_{11} + g_{12}(k' + k'') + g_{22}k'k'' = g_{11} + g_{12} \cdot (g_{22} - g_{11})/g_{12} - g_{22} = 0,$$

што го докажува нашето тврдење.

При секоја елипса постои, спрема тоа, еден — а и само еден — нормален пар заемно конјугирани пречници, со исклучок на кругот, при кој секоја нормална двојка пречници е заемно конјугирана.

Нормалните заемно конјугирани пречници на елипсата ги наречуваме нејзини (главни) *оски*. Спрема тоа, *секоја елипса, која не е круг, има две оски.* Тие се оски на симетријата на елипсата.

Пресеците на главните оски со елипсата се викаат нејзини *темиња*. На секоја оска на елипсата има, значи, две темиња. Понекогаш ја означуваме со терминот „оска" и отсечката, заградена со темињата од една оска.

2. Оски на хиперболата. Сега ќе покажеме дека и секоја хипербола има еден пар заемно нормални конјугирани пречници, наречени *оски*. Нека ни е зададена затоа хиперболата

$$x_1^2 - x_2^2 = 1. \tag{4}$$

Ако правецот на еден нејзин пречник е даден со векторот $\{l_1, l_2\}$, тогаш нему конјугираниот дијаметар е паралелен со векторот $\{l_2, l_1\}$. Овие два вектори се нормални, ако е

$$g_{11}l_1l_2 + g_{12}(l_1^2 + l_2^2) + g_{22}l_1l_2 = 0. \tag{5}$$

Ако координатната система на која се однесува равенката (4) е правоагла, т. е. ако е $g_{12} = 0$, тогаш равенката (5) е задоволена за $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$ и за $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$. Во тој случај координатните оски се единствениот пар нормални заемно конјугирани пречници на хиперболата (4).

Да претпоставиме сега дека е $g_{12} \neq 0$. Тогаш, ставувајќи $k = l_2/l_1$, добиваме од (5)

$$g_{12}k^2 + (g_{11} + g_{22})k + g_{12} = 0. \tag{6}$$

За дискриминантата на оваа равенка по k добиваме

$$(g_{11} + g_{22})^2 - 4g_{12}^2 = e_1^4 + 2e_1^2e_2^2 + e_2^4 - 4e_1^2e_2^2 \cos^2 \omega =$$
$$= (e_1^2 - e_2^2)^2 + 4e_1^2e_2^2 \sin^2 \omega > 0,$$

каде што со e_1, e_2 ги означивме должините на координатните вектори, а со ω аголот помеѓу нив. Равенката (6) има, значи, два (реални) корени k' и k''. Како во т. 1 се проверува и тука дека векторите $\{1, k'\}$ и $\{1, k''\}$ се нормални. Двете решенија определуваат, спрема тоа, еден и ист пар заемно конјугирани и нормални пречници на хиперболата (4). Со тоа докажавме дека:

Секоја хипербола има еден — а и само еден — пар оски.

3. Оска на параболата. При параболата се сите дијаметри паралелни помеѓу себе. За секој правец постои еден конјугиран дијаметар, па, значи, и за оној кој е нормален на дијаметрите. Оној дијаметар на параболата, кој е конјугиран со правецот што е нормален на дијаметрите, се вика *оска* на параболата

§ 80. Метрични нормални облици на равенките на елипсата, хиперболата и параболата

1. Канонична равенка на елипсата. Од § 79 следува дека постои една правоагла координатна система, општо со различни единици на координатните оски, во однос на која равенката на која да е елипса гласи

$$x_1^2 + x_2^2 = 1. \tag{7}$$

Нека a и b бидат должините на координатните вектори од оваа система, мерени со една иста должинска единица e. Ако оваа единица ја избереме како единица за должина на обете координатни оски, добиваме една нова система, една правоагла картезична система. Координатите на точките во однос на оваа система ќе ги бележиме со x, y. Помеѓу координатите x, y и x_1, x_2 на една иста точка постојат тогаш релациите

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad x_2 = \frac{y}{b}.$$

Заменувајќи ги овие изрази за x_1 и x_2 во (7), добиваме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Оваа равенка ја викаме *метричен нормален облик* на равенката на елипсата, или уште и *метрична канонична равенка* на елипсата.

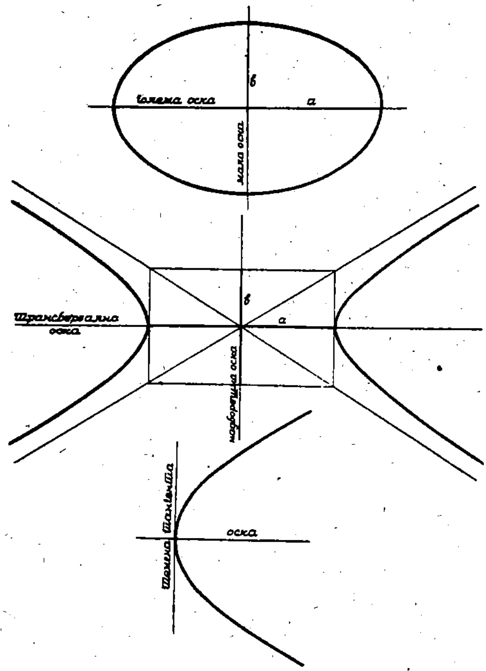
Темињата на елипсата се A_1 $(-a, 0)$, A_2 $(a, 0)$, B_1 $(0, -b)$, B_2 $(0, b)$. Ако е $a > b$, тогаш отсечката A_1A_2 ја викаме *голема оска*, а отсечката B_1B_2 *мала оска*. Отсечките OA_1 и OB_1 ги викаме *полуоски*.

2. Канонична равенка на хиперболата. По аналоген начин како при елипсата во т. 1 следува дека постои една правоагла картезична координатна система (со еднакви единици на оските), во однос на која равенката на една произволно зададена хипербола има вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

кој се вика *метричен нормален облик* на равенката или уште и *метрична канонична равенка* на хиперболата.

Оската на хиперболата што совпаднува со y-оската не ја сече кривата, а лежи исцело во надворешноста на хиперболата; затоа ја викаме *надворешна оска* на хиперболата. Другата оска на хиперболата ја викаме *трансверзална*, бидејќи минува низ внатрешноста и надворешноста на хиперболата. Нејзините пресеци со кривата се викаат *темиња* на хиперболата. Често пати под терминот „*оска*" ја подразбираме и *отсечката*, заградена со темињата на хиперболата, а и отсечката што на надворешната оска ја отсечува хиперболата што ѝ е конјугирана на дадената хипербола. Поради тоа броевите $2a$ и $2b$ ги викаме *должина на трансверзалната оска* одн. *должина на надворешната оска.*



Сл. 111

3. Канонична равенка на параболата. Според § 76 и § 79, т. 3 постои една таква правоагла система во однос на која равенката од една произволно зададена парабола гласи

$$(9) \qquad x_2 = x_1^2.$$

Ако на обете оски избереме еднакви единици за должина, и ако старите единици на оските, мерени со оваа единица, ги имаат мерните броеви e_1, e_2, тогаш за координатите x, y во така избраната система и за старите координати x_1, x_2 на една иста точка важи

$$x_1 = x/e_1, \quad x_2 = y/e_2.$$

Сменувајќи ги овие изрази за x_1, x_2 во (9), добиваме

$$y = ax^2, \tag{10}$$

каде што е $a = e_2/e_1^2$.

Равенката (10) е *метричен нормален облик* на равенката на параболата, или нејзина *метрична канонична равенка.*

Оската на параболата (10) е y-оската, а нејзиниот пресек со кривата — *теме* на параболата.

Тангентата во темето ја викаме *темена тангента.* При параболата (10) таа совпаднува со една координатна оска, имено со x-оската. Затоа равенката (10) ја викаме уште и *темена равенка* на параболата.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека пресекот на кружен цилиндер и рамнина е елипса.

2. Определи го растојанието $\overline{OM}$ од една точка M на елипсата со полуоски a, b до центарот O, ако е познат аголот θ што $\overline{OM}$ го затвора со големата оска.

3. Полудијаметрите $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$ од една елипса се нормални. Покажи дека $1/\overline{OM}^2 + 1/\overline{OM'}^2$ има константна вредност.

4. Покажи дека збирот од квадратите на должините на два конјугирани дијаметри од една елипса е константен.

5. Покажи дека разликата од квадратите на должините на два конјугирани дијаметри од една хипербола е константна.

6. Определи го аголот помеѓу два конјугирани дијаметри на една елипса со полуоски a, b. Кој пар конјугирани дијаметри зафаќа најмал агол?

Сметајќи ја елипсата $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ како афина слика на кругот $x^2 + y^2 = a^2$, да се покаже (зад 7—11):

7. Триаголниците со максимална површина што можат да се впишат во елипсата имаат површина $3ab\sqrt{3}/4$.

8. Триаголниците со најмала површина што можат да се опишат околу елипсата имаат површина $3ab\sqrt{3}$.

9. Тежиштата на триаголниците од зад. 7 и 8 лежат во центарот на елипсата.

10. Површината на паралелограмите со максимална површина, впишани во елипсата, е еднаква на $2ab$.

11. Површината на елипсата е $ab\pi$.

12. Интерпретирај го геометриски фактот дека резултатот на елиминацијата на λ од равенките $ay = \lambda b(x + a)$, $ay = b(x - a)/\lambda$ е равенка на една хипербола.

13. Покажи дека равенката на тангентата на кривата $x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$ може да биде запишана во облик $x \cos \alpha + y \sin \alpha = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha}$. Потоа најди го геометриското место на пресеците на нормалните тангенти.

14. Покажи дека равенките на тангентите на кривата $x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$, чии аголв коефициент е k, гласат $y = kx + \sqrt{a^2k^2 \pm b^2}$, $y = kx - \sqrt{a^2k^2 \pm b^2}$.

15. Покажи дека правоаголникот со максимална површина, опишан околу една елипса, е квадрат.

16. Покажи дека ортоцентарот на кој да е триаголник, впишан во (рамностраната) хипербола $x^2 - y^2 = a^2$, лежи на неа.

17. Еден круг ја сече некоја парабола во четири точки. Покажи дека тежиштето на тие точки лежи на оската на параболата.

18. *Нормала* во една точка на кривата е правата што минува низ таа точка, а е нормална на тангентата на кривата во таа точка. — Напиши ја равенката на нормалата во точката (x_1, y_1) на параболата $y^2 = 2px$.

19. Покажи дека нормалата со аглов коефициент k на параболата $y^2=2px$ има равенка $y = kx - pk - (p/2)k^3$.

20. Покажи дека сите параболи се слични. *Напат.:* Каноничните метрични равенки на кои да е две параболи со заедничка оска и теме се $y^2 = ax$, $y^2 = bx$. Изврши го пресликувањето $y = (a/b)y'$, $x = (a/b)x'$.

Задачи за геометриски места

1. Најди го и нацртај го геометриското место на средините на нормалите, спуштени од која да е точка од кругот $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ на y-оската.

2. Најди го геометриското место на центарот на една елипса, која се движи во рамнината така да се допира до две фиксни нормални прави.

3. Што е геометриското место на средините на оние тетиви на една парабола, кои од нејзиното теме се гледат под прав агол?

4. Една топка се тркала по една парабола, допирајќи се со неа во две точки. Покажи дека геометриското место на центрите на топката е парабола, конгруентна со дадената парабола.

5. Две тангенти на параболата $y^2 = 2px$ затвораат агол од 60°. Какво е геометриското место на нивниот пресек?

6. A и B се две зададени точки. Една парабола ја допира AB во A, а оската на параболата минува низ B. Покажи дека геометриското место на темето на параболата е еден круг.

7. Најди го геометриското место на оние точки за кои тангентите спуштени од нив на: a) една елипса, b) една хипербола, c) една парабола, се сечат под прав агол.

8. Најди го геометриското место на подножјата на нормалите, спуштени на нормалите на параболата $y^2 = 2px$ од точката $(p/2, 0)$.

§ 81. Параметарски равенки на елипса и хипербола

1. Параметарски равенки на елипсата. Равенката (8) на елипсата може да биде задоволена само за оние x за кои важи

$$|x/a| \leqq 1, \tag{11}$$

бидејќи инаку десната страна од (8) ќе беше поголема од 1. Поради (11) постои, при зададен x, таков агол φ да е

$$x/a = \cos\varphi, \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi. \tag{12}$$

Тогаш следува од (8)

$$y^2/b^2 = 1 - x^2/a^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi.$$

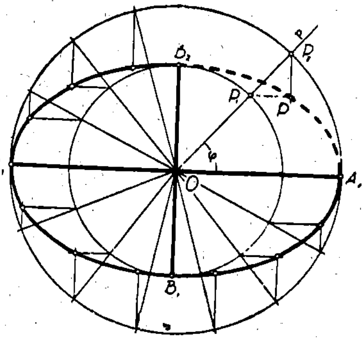
Оттука е $y = \pm b \sin\varphi$. Во (12) ја избираме онаа од двете можни вредности за φ за која во оваа последна формула важи горниот знак. За секоја точка (x, y) од елипсата постои, според тоа, еден таков φ да е

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi. \tag{13}$$

Но, важи и обратно. Со елиминацијата на φ од (13) се добива имено (8). При секој φ ги определуваат, значи, равенките (13) координатите x, y на една точка од елипсата (8). Затоа равенките (13) се еден вид *параметарски равенки* на елипсата (8); параметарот е φ.

2. Една конструкција на елипсата. Од равенките (13) се добива лесно еден начин на конструирање на точките од елипсата, на која ѝ се зададени полуоските a и b.

Нацртуваме два концентрични круга, еден со радиус a, друг со радиус b, а низ заедничкиот центар по еден дијаметар на секој круг, и тоа нормални еден на друг. На сл. 112 се тоа A_1A_2 и B_1B_2. Низ пресекот O на A_1A_2 и B_1B_2 повлекуваме една произволна полуправа p. Низ пресечните точки P_1 и P_2 на p со круговите повлекуваме паралели со A_1A_2 одн. со B_1B_2 до пресекот P, како што е покажано на сликата. Ако со φ го обележиме ориентираниот агол $\angle \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OP_2} >$, тогаш се покажува лесно дека во однос на правоаглата картезична система, во која A_1A_2 и B_1B_2 се прва



Сл. 112

и втора координатна оска, точката P има координати $a\cos\varphi$ и $b\sin\varphi$. При произволно избраната полуправа p конструираната точка P лежи на елипсата чии оски се A_1A_2 и B_1B_2.

3. Параметарски равенки на хиперболата. Каноничната равенка на хиперболата

$$(14) \qquad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

може да биде задоволена само за оне вредности од x за кои важи

$$(15) \qquad |x/a| \geqq 1.$$

Затоа при секој x, за кој важи (14), постои таков φ да е

$$(16) \qquad a/x = \cos\varphi, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi.$$

Од (14) следува тогаш

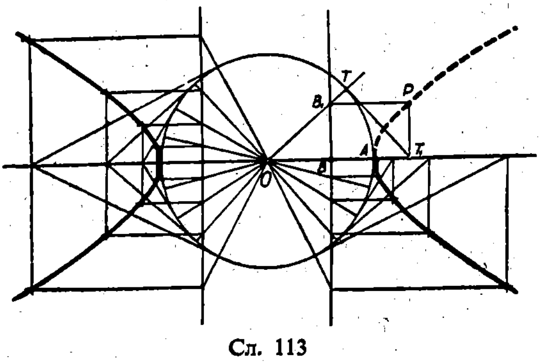
$$y^2/b^2 = 1/\cos^2\varphi - 1 = \mathrm{tg}^2\varphi,$$

и оттука $y = \pm b \,\mathrm{tg}\,\varphi$. Можеме да избереме таков φ да е $y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Тогаш добиваме одавде и од (16) за координатите x, y на една произволна точка од хиперболата (14):

$$(17) \qquad x = a/\cos\varphi, \qquad y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Со елиминацијата на φ одавде се добива пак (14). За секој φ ги определуваат, значи, равенките (17) координатите x, y на една точка од хиперболата (14). Затоа равенките (17) се еден вид *параметарски равенки* на хиперболата (14); параметарот е φ.

4. Една конструкција на хиперболата. Параметарските равенки (17) можеме да ги ползуваме за конструирање на произволен број точки на хиперболата (14). За таа цел нацртуваме еден круг со радиус $\overline{OA} = a$ и отсечка $\overline{OB} = b$. Во B издигаме нормала



Сл. 113

n на OB. Една произволна полуправа p низ центарот O на кругот нека ја пресечува n во B_1, а кругот во T. Низ точката T_1, во која тангентата на кругот во T ја сече правата OB, повлекуваме паралела со n. Оваа паралела ја пресекуваме со правата, повлечена низ B_1 и паралелна со OB. Пресекот P лежи на хиперболата (14), ако правата OB е избрана за x-оската, а O за координатен почеток на една правоагла картезична система $(O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Навистина, ако е $\varphi = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OT} \rangle$, тогаш од $\triangle OTT_1$ следува $\overrightarrow{OT_1} = \mathbf{e}_1 \cdot a/\cos\varphi$, а од $\triangle OBB_1$ дека е $\overrightarrow{T_1P} = \overrightarrow{BB_1} = \mathbf{e}_2 \cdot b \operatorname{tg}\varphi$. Затоа е $P(a/\cos\varphi, b\operatorname{tg}\varphi)$. При произволен агол φ добиваме, значи, со нашата конструкција по една точка од хиперболата.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека точките на елипсата $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, на кои одговараат параметрите $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + \pi/2$, каде што φ_0 е една зададена константа, лежат на два конјугирани дијаметри.

2. Покажи дека збирот од квадратите на должините на два конјугирани полудијаметри при една елипса е константен.

3. Определи ги оние конјугирани дијаметри на елипсата $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ кои имаат еднакви должини (*еквиконјугирани* дијаметри). Конструкција!

4. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата во точката $\varphi = \varphi_0$ од елипсата $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ на неа.

5. Покажи дека равенките $x = a/\cos\varphi$, $y = b\operatorname{tg}\varphi$ и $x = a\operatorname{tg}\varphi$, $y = b/\cos\varphi$ претставуваат две заемно конјугирани хиперболи. Точките кои кореспондираат на една иста вредност на параметарот φ лежат на два заемно конјугирани дијаметри во однос на секоја од двете хиперболи.

Задачи за геометриски места

1. Најди го геометриското место на една точка од една отсечка со фиксна должина чии што крајни точки се движат по две нормални прави.

2. Темињата A и B на триаголникот ABC се движат по две заемно нормални прави. Каква крива опишува при тоа темето C? Дискусија!

§ 82. Метрична дефиниција на елипсата, хиперболата и параболата

1. Фокуси на елипсата и хиперболата. Каноничните метрични равенки на елипсата и хиперболата се

$$x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1,$$

односно

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2. \tag{18}$$

При тоа горниот знак се однесува на елипсата, а долниот за хиперболата. Од овие равенки ќе изведеме една карактеристична метрична особина на елипсата и хиперболата.

Кај елипсата нека е $a > b$. Тогаш е $a^2 - b^2 > 0$, па можеме да ставиме

(19e) $$a^2 - b^2 = c^2.$$

Кај хиперболата ставаме

(19h) $$a^2 + b^2 = c^2.$$

Заменувајќи го во (18) изразот за b^2 што се добива од (19e) односно од (19h), добиваат равенките (18) еден ист облик:

(20) $$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

При елипсата е, поради (19e), $a > c$, а кај хиперболата, поради (19h), $a < c$. Затоа *равенкаѿа* (20) *е равенка на елиӣсаѿа ӣри* $a > c$, *а равенка на хиӣерболаѿа ӣри* $a < c$.

Од (20) следува, делејќи со a^2,

$$x^2(1 - c^2/a^2) + y^2 = a^2 - c^2,$$

или

$$(x^2 + c^2) + y^2 = a^2 + c^2x^2/a^2.$$

Изразот во заградата го дополнуваме до полен квадрат, па добиваме

$$(x \pm c)^2 \mp 2cx + y^2 = a^2 + c^2x^2/a^2,$$

или

(21) $$(x \pm c)^2 + y^2 = (a \pm cx/a)^2.$$

Ги избираме точките $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Ако $P(x, y)$ е која да е точка од кривата (20), тогаш за растојанијата ρ_1 и ρ_2 на P до F_1 и F_2, на основа (21), важи

(22) $$\pm \rho_1 = a + cx/a, \qquad \pm \rho_2 = a - cx/a.$$

Собирајќи ги овие равенства, добиваме

$$\pm \rho_1 \pm \rho_2 = 2a,$$

или

(23) $$\pm \overline{F_1P} \pm \overline{F_2P} = 2a.$$

Да видиме кои знакови треба да се земат во (23). На левата страна од (23) обата члена немаат знак —, бидејќи тогаш десната страна на (23) би била позитивна, а левата негативна. Да би установиле кои од другите можни знакови важат во (23), ќе ја разгледаме сега одделно елипсата и одделно хиперболата.

При елипсата е $c < a$, и затоа $\overline{F_1F_2} = 2c < 2a$. Ако знаковите на левата страна на (23) би биле различни, тогаш би имале, на пр., $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = 2a$, што значи $\overline{F_1P} > \overline{F_2P}$. Но од $\triangle F_1F_2P$ следува $2a = \overline{F_1P} - \overline{F_2P} \leqq \overline{F_1F_2} = 2c$, значи $a \leqq c$, што противречи на претпоставката дека е $a > c$. Истотака се покажува дека не може да биде $-\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$. Затоа при елипсата останува само една можност, имено

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a. \tag{24}$$

При хиперболата знаковите во (23) не можат да бидат еднакви. За негативните тоа е веќе покажано горе, па останува, значи, да го покажеме тоа и за позитивните знакови. Ако би било $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$, тогаш би добиле од $\triangle F_1F_2P$ дека

$$2a = \overline{F_1P} + \overline{F_2P} \geqq \overline{F_1F_2} = 2c,$$

или $a \geqq c$, што не е можно, бидејќи при хиперболата е $a < c$. Затоа при хиперболата во (23) важат различни знакови, значи

$$|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2a. \tag{25}$$

Еднаквостите (24) и (25) кажуваат дека:

Постојат две такви точки во рамнината да збирот на растојанијата на која да е точка од една зададена елипса до тие две точки е стален — еднаков на должината на големата оска на елипсата.

Во рамнината постојат две такви точки да разликата на растојанијата на која да е точка од една зададена хипербола до нив, по својата апсолутна вредност, е стална — еднаква на должината на трансверзалната оска на хиперболата.

Овие две точки ги викаме *фокуси* на елипсата одн. на хиперболата.

Ќе покажеме дека важи и обратно, имено дека:

[1] *Геометриското место на оние точки од една рамнина, што имаат таа особина да збирот на нивните растојанија до две фиксни точки од рамнината е стален, но различен од растојанието на фиксните точки, е елипса.*

[2] *Геометриското место на точките од рамнината чии што растојанија до две фиксни точки во таа рамнина имаат разлика, која по апсолутната вредност не се менува, а не е еднаква на растојанието на фиксните точки, е хипербола.*

Нека фиксните точки бидат F_1 и F_2, и нека $\overline{F_1F_2} = 2c$, а сталниот збир одн. разлика нека бидат еднакви на $2a$. Ја избираме онаа правоагла система во која F_1 и F_2 имаат координати $(-c, 0)$ и $(c, 0)$. По претпоставките на теоремите [1] и [2] е $a \neq c$.

За секоја точка P од првото геометриско место е

$$2a = \overline{F_1P} + \overline{F_2P} \geqq \overline{F_1F_2} = 2c, \qquad a \neq c,$$

т. е. $a > c$. А за секоја точка P од второто геометриско место важи

$$2a = |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| \leqq \overline{F_1F_2} = 2c, \quad a \neq c,$$

т. е. $a < c$. За растојанијата ρ_1 и ρ_2 на точката $P\ (x, y)$ до точките F_1 и F_2 добиваме

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (x + c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + c^2 + 2cx; \\ \rho_2^2 &= (x - c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + c^2 - 2cx. \end{aligned} \tag{26}$$

Оттука

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = 4cx. \tag{27}$$

При првото геометриско место е

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a. \tag{28}$$

Од (27) и (28) следува (22) со горните знакови. Со квадрирање на првата или втората од овие равенки добиваме (21), ако земаме предвид (26). Од (21) следува (20), и оттука, ако ставиме $c^2 = a^2 - b^2$, равенката (18) со горниот знак. Првото геометриско место е, значи, навистина елипса.

При второто геометриско место е $|\rho_1 - \rho_2| = 2a$, или

$$\rho_1 - \rho_2 = \pm 2a. \tag{29}$$

Од (27) и (29) следува

$$\rho_1 = \mp (a - cx/a), \quad \rho_2 = \pm (a + cx/a).$$

Со квадрирање на која да е од овие равенки се добива, како при случајот на елипсата, (21) и оттука (20). Ставувајќи $c^2 = a^2 + b^2$, добиваме одавде (18) со долниот знак. Со тоа покажавме дека второто геометриско место е, навистина, хипербола.

Горните четири теореми покажуваат дека докажаните особини на елипсата и хиперболата се карактеристични за овие криви. Елипсата и хиперболата би можеле, значи, да ги дефинираме и со [1] одн. со [2]. Бидејќи во нив доаѓаат метрични поими (растојанија), ги викаме *метрични дефиниции*.

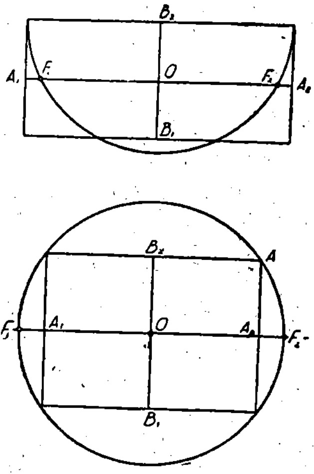
Воведениот број c се вика *линеарен ексцентрицитет* на елипсата одн. на хиперболата.

Прашање: Во што дегенерира првото и второто геометриско место во случајот $a = c$? На кое место во горното изведување е ползуван условот $a \neq c$?

2. Конструкција на фокусите на елипсата и хиперболата. Од метричните дефиниции [1], [2] на елипсата и хиперболата следува наеднаш и една конструкција на фокусите на овие криви, ако им се зададени оските $2a$ и $2b$ по големина и положба во рамнината.

Го нацртуваме правоаголникот со страните $2a$ и $2b$, и тоа така да оските A_1A_2 и B_1B_2 на елипсата одн. хиперболата паднат во неговите средни линии.

Фокусите F_1, F_2 на елипсата ги добиваме како пресеците на големата оска A_1A_2 со кругот чиј центар е во B_1 или B_2, а радиусот му е еднаков на a. Навистина, од $\triangle OF_1B_2$ следува $\overline{OF_1}^2 = \overline{B_2F_1}^2 - \overline{OB_2}^2 = a^2 - b^2$; и, спрема тоа, со оглед на (19), $\overline{OF_1} = c$. F_1 е затоа еден фокус на елипсата.



Сл. 114

Фокусите F_1, F_2 на хиперболата ги добиваме како пресеците на трансверзалната оска A_1A_2 со кругот, опишан околу нацртаниот правоаголник. Навистина OF_2 е еднаква на радиусот на тој круг, за кој од $\triangle OA_2A$ (сл. 114 долу) добиваме $\overline{OF_2} = \overline{OA} = \sqrt{\overline{OA_2}^2+\overline{A_2A}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$; затоа е, поради (19), навистина $\overline{OF_2} = c$.

3. Фокален параметар на елипсата и хиперболата. Должината p на половината од онаа тетива на елипсата одн. хиперболата што минува низ еден од нејзините фокуси, а е нормална на големата одн. на трансверзалната оска, се вика *фокален параметар* на таа крива. Точката чија што апсциса е c, ако равенката е дадена во каноничен вид, има значи ордината еднаква на тој параметар p. За елипсата важи, значи, $c^2/a^2 + p^2/b^2 = 1$, од каде

$$p^2 = b^2/a^2 \cdot (a^2 - c^2) = b^4/a^2,$$

или

$$p = b^2/a. \tag{30}$$

При хиперболата имаме $a^2/c^2 - p^2/b^2 = 1$, или

$$p^2 = b^2/a^2 \cdot (c^2 - a^2) = b^4/a^2.$$

од каде пак (30).

Отсечката p може лесно да се конструира, ако се зададени a и b.

4. Метрична дефиниција на параболата. Ако оската на една зададена парабола ја избереме за x-оска на една правоагла система, тогаш каноничната равенка на параболата добива вид

$$y^2 = 2px, \tag{31}$$

каде што коефициентот пред x го означивме со $2p$.

Како што во т. 1 за елипсата и хиперболата изведовме едни нивни метрични карактеристични особини, така ќе направиме сега и за параболата (31). За таа цел равенката (31) ја запишуваме во видот

$$y^2 - px = px.$$

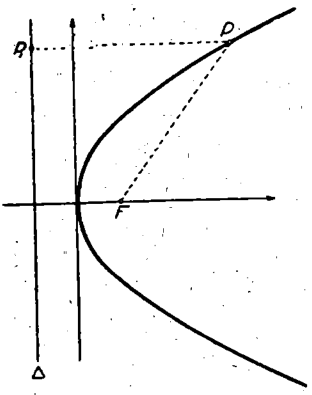
Ако на двете страни на оваа равенка им додадеме $x^2 + p^2/4$, добиваме

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2. \tag{32}$$

Левата страна од оваа равенка претставува квадрат од растојанието на произволната точка $P(x, y)$ на параболата до фиксната точка $F(p/2, 0)$, а десната страна квадрат од растојанието $\overline{PP_1}$ на $P(x, y)$ до фиксната права $x = -p/2$. Спрема тоа:

Точките на параболата се еднакво оддалечени од една фиксна точка и од една фиксна права.

Лесно се убедуваме дека важи и обратно, т. е. дека сите точки кои се еднакво оддалечени од една фиксна точка F и од една фиксна права Δ, која не минува низ F, лежат на една парабола. Ако, имено, растојанието од F до Δ то обележиме со p, и ако избереме таква правоагла система при која x-оската минува низ F и е нормална на Δ, а y-оската да ја располовува нормалата спуштена од F на Δ, тогаш за координатите x, y на која да е точка од бараното геометриско место важи (32); а затоа и (31), со што нашето тврдење е докажано.



Сл. 115

Со тоа покажавме дека:

[3] *Геометриското место на оние точки од рамнината, што се еднакво оддалечени од една фиксна точка и од една фиксна права во рамнината, е една парабола — ако фиксната права не минува низ фиксната точка.*

Фиксната точка ја викаме *фокус*, а фиксната права *директриса* на параболата.

Докажаната особина [3] можевме да ја земеме и за *дефиниција* на параболата, бидејќи таа за параболата е карактеристична. Во тој случај таа се вика *метрична дефиниција* на параболата.

Лесно се проверува дека половината од коефициентот пред x во (31), т. е. p, е ординатата на едната од параболините точки чии апсциси се еднакви на апсцисата p на фокусот. Затоа бројот p го викаме *фокален параметар* на параболата.

ЗАДАЧИ

1. Да се постројат неколку точки на една елипса (хипербола), ако ѝ се зададени фокусите и една нејзина точка, користејќи ја метричната дефиниција на кривата.

2. Да се постројат неколку точки од една парабола, на која ѝ е зададен фокусот и директрисата.

3. Покажи дека кругот, чиј што еден дијаметар има една крајна точка во фокусот, а другата во која да е точка на кривата $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, го допира кругот $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Тангентата и нормалата во некоја точка P на една парабола ја сече нејзината оска во T и G. Покажи дека средината на TG е фокусот на параболата.

5. Покажи дека равенката $x^2/(a^2 + \lambda) + y^2/(b^2 + \lambda) = 1$, каде што λ е произволен параметар, претставува една фамилија елипси и хиперболи со исти фокуси.

6. Покажи дека две параболи кои имаат ист фокус и оска, а темињата им лежат на различни страни од фокусот, се сечат ортогонално.

7. PFQ е една фокална тетива на некоја парабола. Покажи дека кругот кој минува низ фокусот F и параболата ја допира во P, и кругот што минува низ F а параболата ја допира во Q, се сечат ортогонално.

Задачи за геометриски места

1 Најди го геометриското место на средините на фокалните тетиви при параболата $y^2 = 2px$.

2. Најди го геометриското место на центрите на круговите што минуваат низ една фиксна точка и се допираат до еден даден круг.

3. Еден круг минува низ една фиксна точка и допира една дадена права. Најди го геометриското место на неговите центри.

4. Да се определи геометриското место на центрите на круговите кои се допираат до два круга, од кои едниот е во внатрешноста на другиот.

5. Истото прашање како во задача 4. за случај кога дадените два круга имаат произволна меѓусебна положба.

6. Тетивите низ едното теме на една елипса (хипербола) се разделени во еден ист однос. Најди го геометриското место на разделната точка.

7. Тетивите низ темето на една парабола се разделени во константен однос. Најди го геометриското место на разделната точка.

8. Најди го геометриското место на пресекот на нормалите од една парабола во крајните точки на нејзината променлива фокална тетива.

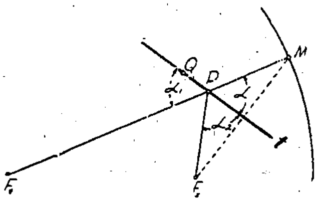
9. Ако P е која да е точка на една елипса со центар O и фокус F, а M средина на FP, тогаш $\overline{FM} + \overline{OM}$ е константно. Докажи! Што е геометриското место на M?

§ 83. Една фокална особина на елипсата, хиперболата и параболата

1. Една конструкција на точки и тангенти при елипсата. Нека бидат зададени фокусите F_1 и F_2 и должината на големата оска $2a$ на една елипса. При овие податоци можеме да конструираме произволно многу точки и тангенти на таа елипса на овој начин. Околу едниот фокус, на пр. F_1, како центар опишуваме круг со радиус $2a$ и нацртуваме произволен радиус F_1M, а потоа симетрала t на отсечката F_2M. Оваа симетрала t е тангента на елипсата во онаа точка P во која t го сече радиусот F_1M.

Доказ. Бидејќи P лежи на симетралата од $\overline{F_2M}$, тоа е $\overline{F_2P} = \overline{PM}$. Затоа е

$$2a = \overline{F_1M} = \overline{F_1P} + \overline{PM} = \overline{F_1P} + \overline{F_2P},$$



Сл. 116

што покажува дека P, според метричната дефиниција на елипсата, лежи на нашата елипса.

За да покажеме дека t е тангента, треба да покажеме дека таа елипсата ја сече само во една точка, имено во точката P. Ако освен P би постоела на t уште една точка Q од елипсата, би било

$$2a = \overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} = \overline{F_1Q} + \overline{QM},$$

бидејќи $\overline{F_2Q} = \overline{QM}$ (зашто Q лежи на t). Но од $\triangle\, F_1QM$ следува $\overline{F_1Q} + \overline{QM} > F_1M = 2a$, од каде заедно со горната еднаквост ја добиваме апсурдната релација $2a > 2a$. Со што нашето тврдење е докажано.

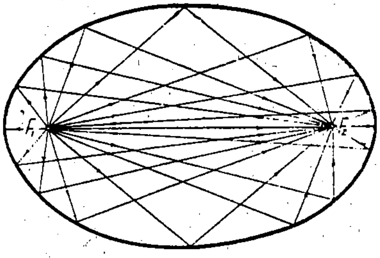
На овој начин можеме да конструираме произволно многу точки P и тангенти t на елипсата, ако избираме севозможни радиуси на спомнатиот круг.

2. Една фокална особина кај елипсата. Од горната конструкција добиваме лесно една теорема за елипсата. Тангентата t е имено симетрала на аголот F_2PM. Затоа е (види сл. 116) $\alpha_2 = \alpha$; освен тоа е $\alpha = \alpha_1$, и спрема тоа $\alpha_1 = \alpha_2$. Покажавме дека:

Отсечките, што фокусите на една елипса ги сврзуваат со која да е нејзина точка, зафаќаат со тангентата на елипсата во таа точка еднакви агли.

Ако замислиме дека во едниот фокус е положен еден точкаст светлински извор кој испушта зраци радијално по рамнината на елипсата, тогаш тие зраци по одбивањето од елипсата, спрема законот на одбивањето, познат од физиката, ќе минуваат сите низ другиот фокус. Оттука иде и името *фокус* — *огниште*.

3. Конструкција на точки и тангенти на хиперболата. Зададени нека се фокусите F_1, F_2 и должината $2a$ на трансверзалната оска на една хипербола. Околу едниот фокус како центар, на пр. околу F_1, опишуваме круг со радиус $2a$. Еден произволен негов пречник го сече кругот во две точки, една од кои нека е M. Симетралата t од F_2M нека го сече пречникот во P. Бидејќи P лежи на t, е $\overline{F_2P} = \overline{MP}$, и затоа



Сл. 117

$$|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = |\overline{F_1P} - \overline{PM}| = \overline{F_1M} = 2a.$$

Според метричната дефиниција на хиперболата, точката P лежи на нашата хипербола.

На t нема други точки од хиперболата освен P. Ако на t имаше, имено, уште една точка Q од хиперболата, ќе беше поради $\overline{F_2Q} = \overline{QM}$ (бидејќи Q лежи на t):

$$2a = |\overline{F_1Q} - \overline{F_2Q}| = |\overline{F_1Q} - \overline{QM}| < \overline{F_1M} = 2a,$$

односно $2a < 2a$, што е апсрудно. P е, спрема тоа, единствената точка од хиперболата што лежи на t.

Сега ќе покажеме дека t нема асимптотски правец. Лесно се проверува дека секоја асимптота на нашата хипербола е симетралата од F_2M, ако M има таква положба да таа симетрала не ја сече правата F_1M. Асимптотите се, значи, симетралите t_1 и t_2 од тангентите F_2M и F_2M' (M и M' се допирни точки) на кругот. Нека тоа го провери читателот. Сите симетрали кои ја сечат F_1M имаат правци што се различни од правците на t_1 и t_2, т. е. од асимптотските правци на хиперболата. Со тоа тврдењето е докажано.

Правата t има со хиперболата само една заедничка точка P, а нема асимптотски правец. Таа е, спрема тоа, тангента на хиперболата со допир во точката P.

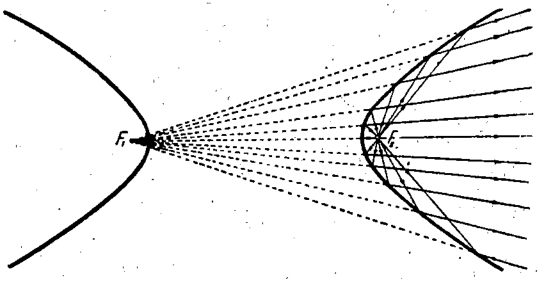
Избирајќи севозможни правци на радиусот F_1M, можеме на овој начин да конструираме произволен број точки P и тангенти t на хиперболата.

4. Една фокална особина на хиперболата. Триаголникот F_2MP во т. 3 е рамнокрак, а t е симетрала на аголот при врвот.

Затоа важи:

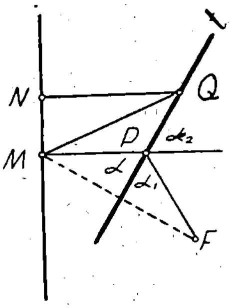
Тангентата во секоја точка на хиперболата го располовува аголот што го зафаќаат отсечките што таа точка ја сврзуваат со фокусите.

Оттука следува дека зраците кои излегуваат од еден точкаст светлински извор, положен во едниот фокус на хиперболата, по одбивањето од кривата имаат такви смерови какви што би ги имале ако би доаѓале, без одбивање, од другиот фокус.



Сл. 118

5. Конструкција на точки и тангенти кај параболата. Зададена нека биде директрисата Δ и фокусот F на една парабола. Една произволна права, нормална на Δ, нека ја сече Δ во M, а симетралата t од отсечката FM нека ја сече таа нормала во P. Бидејќи P е на симетралата од FM, е $\overline{FP} = \overline{MP}$. Точката P е, значи, на параболата. На t нема покрај P друга точка од параболата. Ако на неа имаше уште некоја точка Q од параболата, ќе беше $\overline{FQ} = \overline{QM}$ (бидејќи Q лежи на t); а $\overline{FQ}$ ќе беше еднакво на растојанието $\overline{NQ}$ од Q до Δ (бидејќи Q е на параболата). Оттука следува дека во Δ MNQ хипотенузата ќе беше еднаква на една катета, што не е можно. P е, значи, единствената точка од параболата што лежи на t, а t нема правец на оската на параболата. Конструираната права t е, значи, тангента на параболата со допир во P.



Сл. 119

6. Една фокална особина на параболата. Бидејќи t од т. 5 е симетралата на аголот при врвот во рамнокракиот Δ MFP, е $\alpha = \alpha_1$; освен тоа е $\alpha = \alpha_2$, а затоа и $\alpha_1 = \alpha_2$ (сл. 119).

Спрема тоа: *Зраците кои излегуваат од фокусот по одбивањето од параболата се паралелни со оската на параболата.* (Рефлектор! Види сл. 120.).

ЗАДАЧИ

1. Дадени се две тангенти на една парабола со своите допирни точки. Конструирај го фокусот и оската!

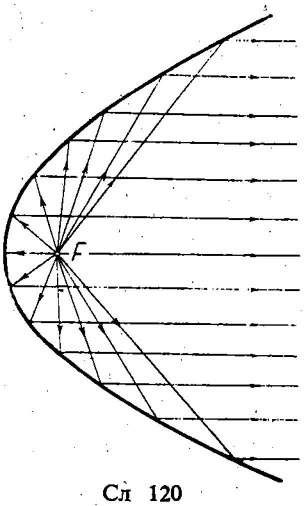
2. Нека се F_1, F_2 фокусите, а P, Q кои да е точки на една елипса. Ако тангентите во P и Q се сечат во T, покажи дека аглите QTF_1 и PTF_2 се еднакви.

3. Конструкција на елипса со превиткување на лист хартија. — Исечи од хартија еден круг со центар во O и избери на него една точка P.

Потоа превиткувај ја исечената хартија така што по превиткувањето лакот на превитканиот дел од кругот да минува низ P. Траговите (правите) на превиткувањата се тангенти на елипсата чии фокуси се O и P, а големата оска ѝ е еднаква на радиусот на кругот. Обосновај ја конструкцијата!

4. Постројаване на хипербола со превиткување на лист хартија. — Ако во зад. 3 точката P е во надворешноста на кругот, тогаш горната конструкција ни ги дава тангентите на хиперболата со фокуси во O и P, а со големата оска еднаква на радиусот на кругот. Објасни ја конструкцијата!

5. Постројаване на парабола со превиткување на лист хартија. — На еден лист хартија со еден праволиниски раб △ избираме една точка F. Листот го превиткуваме на што повеќе начини така што работ △ да минува низ F. Траговите на превиткувањата се тангенти на параболата чиј фокус е F, а директриса — работ △. Обосновувај ја конструкцијата!



Сл 120

6. Конструирај тангента на една елипса (хипербола) во една нејзина зададена точка, ако ѝ се дадени фокусите.

7. Конструкција на тангенти на елипсата (хиперболата) од една надворешна точка. *I. метода.* Дадени нека се фокусите F_1, F_2, должината $2a$ на големата (трансверзалната) оска на кривата и една надворешна точка P. Го нацртуваме кругот со центар во F_1 и со радиус $2a$, и оној круг со центар во P кој минува низ F_2. Ако нивните пресеци се T_1 и T_2, тогаш симетралите на $\overline{F_2T_1}$ и на $\overline{F_2T_2}$ се тангентите, спуштени од P на кривата. Обосновај ја конструкцијата!

II. метода. Го нацртуваме кругот чиј дијаметар е $2a$, а центарот му е во средината од F_1F_2, и кругот чиј дијаметар е F_1P или F_2P. Правите што точката P ја сврзуваат со пресеците на двата круга се тангентите спуштени од P на кривата. Обосновај ја конструкцијата! *Напат.*: Посматрај го геометриското место, дефинирано во зад. 2 на оваа страна!

8. Конструкција на тангентата на параболата од една надворешна точка. Нека е зададен фокусот F, темената тангента t и една надворешна точка P од некоја парабола. Правите што точката P ја сврзуваат со пресеците на t со кругот, чиј дијаметар е PF, се тангентите спуштени од P на параболата. Обосновај ја конструкцијата!

Задачи за геометриски места

1. Една променлива елипса (хипербола) има еден фокус во сталната точка F, а се допира до една фиксна права во една зададена точка. Што е геометриското место на другиот фокус?

2. Најди го геометриското место на подножјата на нормалите, спуштени од еден фокус од некоја елипса (хипербола) на нејзините тангенти.

3. Аналогна задача за параболата.

§ 84. Директоријални особини на елипсата и хиперболата

Во овој § ќе изведеме уште по една карактеристична особина на елипсата и хиперболата, аналогни на особината што ни послужи во § 82, т. 4 за метричната дефиниција на парабола.

За должините ρ_1 и ρ_2 на отсечките, што фокусите на кривата (18) ги сврзуваат со произволната точка на таа крива, добивме (§ 82, т. 1)

$$\rho_1 = \mp (a + cx/a), \qquad \rho_2 = \pm (a - cx/a),$$

каде што при елипсата треба да се земаат пред заградите знаковите $+$, а при хиперболата такви знакови за да биде $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$.

Воведувајќи ја ознаката $\varepsilon = c/a$, каде што бројот ε го викаме *нумеричен ексцентрицитет* на кривата, можат овие равенки во обата случаја (за елипсата и за хиперболата) да се запишат во вид

$$(33) \qquad \rho_1/\varepsilon = |a/\varepsilon + x|, \qquad \rho_2/\varepsilon = |a/\varepsilon - x|.$$

Правата Δ_1 чија што равенка е $a/\varepsilon + x = 0$, и правата Δ_2 со равенката $a/\varepsilon - x = 0$ играат при ова наше разгледување важна улога. Правата Δ_1 ја викаме *директриса* на елипсата одн. на хиперболата што му припаѓа на фокусот F_1 $(-c, 0)$, а правата Δ_2 — *директриса* што му припаѓа на фокусот F_2 $(c, 0)$.

При елипсата е $\varepsilon = c/a < 1$, и затоа $a/\varepsilon > a$. Директрисите при елипсата се положени симетрично спрема y-оската на растојание поголемо од $2a$.

При хиперболата е $\varepsilon = c/a > 1$, и затоа $a/\varepsilon < a$. Растојанието помеѓу директрисите при хиперболата е помало од $2a$.

Изразот $|a/\varepsilon + x|$ го претставува растојанието d_1 од точката $P(x, y)$ на елипсата одн. хиперболата до Δ_1, а изразот $|a/\varepsilon - x|$ растојанието d_2 од таа точка до Δ_2. Затоа равенките (33) можеме да ги пишеме во вид

$$(34) \qquad \rho_1/d_1 = \varepsilon, \qquad \rho_2/d_2 = \varepsilon.$$

Со тоа ја докажавме оваа теорема:

Односот на растојанието на која да е точка од елипсата одн. хиперболата до било кој фокус на таа крива и растојанието на таа точка до директрисата што му припаѓа на тој фокус е константен — еднаков на нумеричниот ексцентрицитет на кривата.

Оваа особина е карактеристична за елипсата и хиперболата, зашто може да се покаже, имено, *ако за некоја крива важи оваа особина, тогаш таа крива е елипса или хипербола, според тоа дали сталниот однос* ε *е* < 1 *или* > 1. Нека го покаже тоа самиот читател!

На овој начин успеавме кривите елипса, хипербола и парабола да ги опфатиме со една единствена метрична дефиниција, имено:

[4] *Геометриското место на точките од една рамнина, чии што растојанија до една фиксна точка и до една фиксна права имаат константен однос* ε, *е елипса, парабола или хипербола — според тоа дали позитивниот број* ε *е помал, еднаков или поголем од* 1.

Пример. Да се конструираат директрисите на елипсата и хиперболата, ако им се зададени оските.

Решение. 1. Елипса. Околу центарот O опишуваме круг со радиус a (голема полуоска). Определуваме еден фокус F, а низ него издигаме нормала на големата оска. Во едниот пресек T на оваа нормала и кругот конструираме тангента на кругот. Низ пресекот N на оваа тангента со големата оска минува, нормално на ON, директрисата што му припаѓа на фокусот F. Навистина, TF е висина во правоаголниот триаголник OTN, поради што е $\overline{OT}^2 = \overline{OF} \cdot \overline{ON}$, или $\overline{ON} = a^2/c = a/\varepsilon$, со што тврдењето е докажано.

2. Хипербола. На кругот со радиус a (трансверзална полуоска), опишан околу центарот O на хиперболата, повлекуваме една тангента од едниот фокус F. Правата што минува низ допирната точка на оваа тангента и е нормална на трансверзалната оска е директрисата на хиперболата што му припаѓа на фокусот F. Доказот е сличен како при елипсата.

ЗАДАЧИ

1. Конструкција на елипса, хипербола или парабола по зададениот фокус, директрисата што му припаѓа и нумеричниот екцентрицитет. Нека е F фокус, $\triangle$ — директрисата, а $\varepsilon = m_1/m_2$ нумеричниот ексцентрицитет. Во една точка A од $\triangle$ (во долниот дел на цртежот, поради поголема прегледност) ја нацртуваме нормалата AB на $\triangle$, а потоа правоаголниот триаголник ABC, во кој е $\overline{AB} = m_2$, $\overline{BC} = m_1$, а при хипербола и правата AC', симетрична со AC во однос на $\triangle$. Која да е права p, паралелна со $\triangle$, нека ги сече правите AB и AC (или AC') во точките D, E. Го нацртуваме кругот со центар во F и со радиус $\overline{DE}$. Пресеците на p со тој круг се точки од елипсата, хиперболата или параболата — според тоа дали е $\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 1$ или $\varepsilon = 1$.

2. Провери дека директрисата е полара на соодветниот фокус на кривата.

3. Покажи дека тангентите, повлечени во крајните точки на фокалните тетиви на една елипса, хипербола или парабола, се сечат на соодветната директриса.

4. Покажи дека при елипсата, хиперболата и параболата отсечокот на тангентата помеѓу допирот и една директриса се гледа од фокусот, што ѝ припаѓа на таа директриса, под прав агол.

5. Конструирај ја тангентата на една елипса (хипербола, парабола) во една нејзина зададена точка, ако е зададен еден фокус и соодветната директриса.

6. Испитај каква заемна положба има кругот, чиј дијаметар е една фокална тетива на една парабола, и директрисата на параболата.

7. Ако 2α е аголот помеѓу асимтотите на една хипербола, тогаш е $\varepsilon = \sec\alpha$. Доказ!

8. Напиши ја равенката на параболата чија директриса е $x + y + 1 = 0$, а фокусот $(1, 1)$.

9. Најди ја равенката на елипсата чиј еден фокус е $(2, -1)$, соодветната директриса $3x - 4y + 5 = 0$, а нумеричниот екцентрицитет $\varepsilon = 1/2$.

10. Најди ја равенката на кониката (т. е. елипсата, хиперболата или параболата) чиј еден фокус е во $(0, 0)$, а соодветната директриса $12x + 5y + 13 = 0$, ако точката $(-3, -4)$ лежи на кривата.

Какви криви претставуваат равенките:

11. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = c^2x^2$. 12. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = x^2y^2$.

13. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2/9$.

§ 85. Фокална равенка на елипсата, хиперболата и параболата во поларни координати

Со [4] покажавме дека помеѓу елипсата, хиперболата и параболата постои извесна сродност. Подоцна ќе покажеме дека секоја од овие криви може да се добие како пресек на една рамнина со една површина, наречена кружен *конус*. Затоа со заедничко име сите овие криви ги викаме *конусни пресеци* или *коники*.

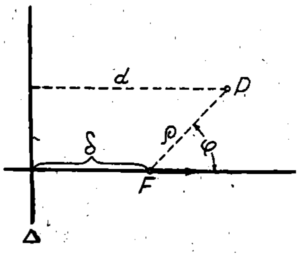
Користејќи ја теоремата [4], ќе изведеме сега една заедничка равенка за кониките.

Нека бидат F и Δ фокус и директриса на еден конусен пресек што си припаѓаат, а ε неговиот нумеричен ексцентрицитет. Ја избираме онаа обопштена поларна координатна система, при која полот совпаднува со F, а поларната оска ѝ е нормална на Δ и усмерена од F на спротивната страна од Δ. За растојанието ρ на F до произволната точка P од кривата и за растојанието d од P до Δ важи тогаш, на основа [4],

$$\rho/d = \varepsilon. \tag{35}$$

Обележувајќи го со φ ориентираниот агол помеѓу поларната оска и $\overrightarrow{FP}$, а со δ растојанието на F до Δ, имаме

$$d = \delta + \rho \cos \varphi.$$



Сл. 121

Заменувајќи го изразот за d одавде во (35), добиваме

$$\frac{\rho}{\delta + \rho \cos \varphi} = \varepsilon,$$

од каде

$$\rho = \frac{\varepsilon\delta}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \tag{36}$$

Ако е $\cos\varphi = 0$, отсечката $\overline{FP}$ е паралелна со Δ, и затоа еднаква на фокалниот параметар p. Затоа добиваме од (36) дека е $p = \varepsilon\delta$. Равенката (36) сега добива вид

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \tag{37}$$

Равенкаша (37) *е равенка на една елиūса, ūарабола или хиūербола — сūоред шоа дали е* $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ *или* $\varepsilon > 1$.

Забелешка. Во случај $\varepsilon > 1$, равенката претставува само една гранка на хиперболата, ако ρ, φ се обикновени поларни координати. За секоја вредност за φ, за која важи

$$\arccos(1/\varepsilon) < \varphi < 2\pi - \arccos(1/\varepsilon),$$

добиваме тогаш по една точка од таа гранка на хиперболата.

Ако ρ, φ се обопштени поларни координати, тогаш (37) ги претставува, при $\varepsilon > 1$, обете гранки на хиперболата.

ЗАДАЧИ

1. Ако MFM' е која да е фокална тетива на еден конусен пресек со фокус F, да се покаже дека $1/\overline{FF} + 1/\overline{FM'}$ е константно.

2. Која фокална тетива има најмала должина?

3. Секој од фокалните радиус-вектори $\overrightarrow{FM_1}$, $\overrightarrow{FM_2}, \ldots, \overrightarrow{FM_n}$ во еден конусен пресек образува со наредниот агол $2\pi/n$. Покажи дека $1/\overline{FM_1} + 1/\overline{FM_2} + \ldots + 1/\overline{FM_n}$ е константно.

4. Покажи дека асимптотските правци на хиперболата (37), $\varepsilon > 1$, се определени со аглите $\varphi = \pm \arccos(1/\varepsilon)$.

§ 86. Темена равенка на кониките

Во претходниот § изведовме една заедничка равенка за трите вида конусни пресеци во однос на една поларна система. Сега пак ќе најдеме една заедничка равенка на тие три криви, и тоа во однос на една декартова система.

Тангентата во едно теме A на *фокалнаша оска* (т. е. на оската на која лежат фокусите на дадената коника) ја избираме за y-оска, а самото теме A за координатен почеток. Позитивниот смер на апсцисната оска нека е смерот од A кон најблискиот фокус F.

При елипсата, чија што метрична канонична равенка гласи

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

избираме: $A\ (-a, 0)$, $F\ (-c, 0)$. Меѓу координатите x', y' во оваа система и координатите x, y на една иста точка во горе избраната система постојат релациите

$$x' = x - a, \quad y' = y.$$

Во новата система равенката на елипсата, спрема тоа, гласи

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

од каде, решено по y^2, добиваме

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Ставувајќи $b^2/a = p$ (§ 82, т. 3, 4), и $b^2/a^2 = (a^2 - c^2)/a^2 = 1 - \varepsilon^2$, добива оваа равенка вид

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2. \tag{38}$$

При хиперболата

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

избираме $A\ (a, 0)$, $F\ (c, 0)$. Равенката на оваа крива во однос на новата система (A, x, y) ја добиваме, спрема тоа, ако x' го замениме со $x + a$, а y' со y. Добиваме

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

или

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Бидејќи е $b^2/a = p$, а $b^2/a^2 = (c^2 - a^2)/a^2 = \varepsilon^2 - 1$, добива и оваа равенка облик (38).

Равенката (38) претставува при $\varepsilon < 1$ една елипса, при $\varepsilon > 1$ една хипербола. А ако ставиме во неа $\varepsilon = 1$, таа преѕдува во равенка на една парабола. Спрема тоа:

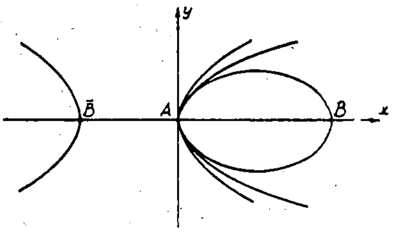
Равенкаша (38) *йрешсшавува елиԥса, ԥарабола или хиԥербола сԥоред шоа дали е* $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ *или* $\varepsilon > 1$; *йри шоа* p *е фокален йараметар, а* ε *нумеричен ексценшрициšеш на кривашa.* Равенката ја викаме *шеменска равенка.*

Теменската равенка може да се пише и во облик

$$y^2 = 2px + qx^2. \tag{39}$$

Тука е $q = \varepsilon^2 - 1$. Затоа *оваа равенка* (39) *претставува елипса, парабола или хипербола според тоа дали е* $q < 0$, $q = 0$ *или* $q > 0$.

Ако во (39) бројот p е сталeн, а q еден променлив параметар, тогаш за секој q добиваме по една крива — елипса, парабола или хипербола. Нека е на пр. $q < 0$. Кривата е елипса. Оската x ја сече кривата освен во A (0, 0) уште и во B $(-2p/q, 0)$, т. е. на позитивната страна на x-оската. Ако q (< 0) се менува и сè повеќе се доближува кон 0, тогаш B сè повеќе се оддалечува од A. Кога е $q = 0$, кривата (39) станува парабола. Кога пак q заземе позитивни вредности, кривата (39) е хипербола. Второто теме B $(-2p/q, 0)$ на хиперболата е на негативната страна од x-оската, и толку подалеку од A во колку q е помал.



Сл. 122

Ако, значи, q расте непрекинато од негативни вредности преку 0 на позитивни вредности, тогаш второто теме B на елипсата сè повеќе се оддалечува од A, и кога при $q = 0$ — како често се изразуваме — „бега" во бескрајност, кривата станува парабола; кога q, нарастувајќи, стане позитивен, кривата станува хипербола чие што теме B, кое прво е далеку од A, при понатамошно растење на q, сè повеќе се доближува кон A.

Задача. Нацртај ги кривите $y^2 = x + \lambda x^2$, земајќи ги за λ вредностите 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 0, — 1 4, — 1/2, — 1, — 2, — 4.

§ 87. Оскулаторен круг во темињата на кониките

Дадена нека е кривата

$$y^2 = 2px + qx^2. \tag{39}$$

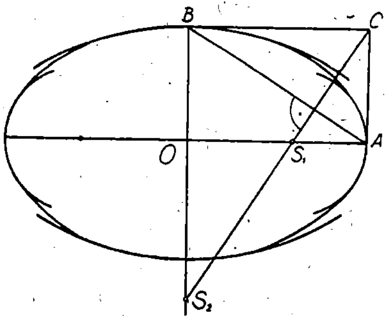
Избираме кој да е круг, кој оваа крива ја допира во темето O (0, 0), т. е. круг чија тангента во O совпаднува со темената тангента на кривата во таа точка. Неговата равенка има вид

$$x^2 + y^2 = 2\rho x. \tag{40}$$

Ако од (39) и (40) го елиминираме y^2, добиваме

$$(1 + q)\,x^2 + 2\,(p - \rho)\,x = 0.$$

Корените $x_1 = 0$ и $x_2 = 2\,(\rho - p)/(1 + q)$ на оваа равенка се апсциситe на пресечните точки на кривите (39) и (40). На апсцисата x_2 ѝ одговарат две пресечни точки T_1 и T_2, симетрични во однос на x-оската. Го менуваме радиусот ρ на кругот така што T_1 и T_2 да совпаднат со пресекот O. Тој граничен круг, кој од сите кругови најтесно се прилега до кривата во точката O, го наречуваме *оскулаторен* или *прилегнат* круг на кривата (39) во O. За да совпаднат пресеците T_1, T_2 со O, треба да е и $x_2 = 0$, значи $\rho = p$. Спрема тоа, *сите криви* (39), *при кои* p *е стален, имаат во заедничкото теме* O *ист оскулаторен круг; неговиот радиус е еднаков на фокалниот параметар* p.



Сл. 123

За радиусот ρ_1 на оскулаторниот круг на елипсата одн. хиперболата $x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$ во темето $(\pm a, 0)$ добиваме, значи $\rho_1 = b^2/a$. Аналогно, за радиусот ρ_2 на оскулаторниот круг при елипсата во темињата $(0, \pm b)$ добиваме $\rho_2 = a^2/b$.

На сл. 123 е дадена конструкција на ρ_1 и ρ_2 за елипсата. Во правоаголникот $OACB$ е $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Нормалата, спуштена од C на дијагоналата AB ги сече оските на кривата во центрите S_1 и S_2 на оскулаторните кругови на елипсата во темето A одн. B. Од сличните триаголници S_1AC и OAB следува, имено, $\overline{S_1A} = b^2/a$; а од $\triangle\ OBA$ и $\triangle\ BCS_2$ дека $\overline{S_2B} = a^2/b$.

За определување на ρ_1 кај хиперболата ја имаме оваа конструкција. Во пресекот на темената тангента во едно теме A и една асимптота повлекуваме нормала на оваа асимптота; нејзиниот пресек S со трансверзалната оска е центар на оскулаторниот круг за A, т. е. $AS = \rho_1$. Провери го тоа!

Оскулаторните кругови во темињата на кониките можат да ни послужат за приближно цртање на тие криви околу темињата.

II. КВАДРИКИ

Афини особини на квадриките

§ 88. Цилиндри

1. Равенка и форма на елиптичен цилиндер. Од површините до сега ја изучувавме рамнината и топката. А сега ќе разгледаме уште некои важни типови површини.

Да ја разгледаме прво равенката

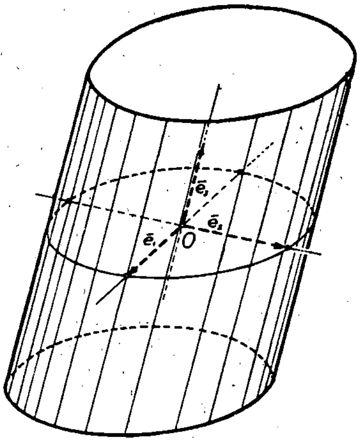
$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

толкувајќи ги x_1, x_2 како координати на точки во една просторна афина координатна система $(O;\ e_1,\ e_2,\ e_3)$. Во равенката ја нема променливата x_3. Затоа, ако (1) е задоволена за $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, тогаш на површината што ја претставува (1) лежат и точките (x_1^0, x_2^0, x_3), каде што x_3 е кој да е број. Тоа се сите точки од една права, паралелна со x_3-оската. Навистина, ставувајќи $x_3 = t$, добиваме за координатите x_1, x_2, x_3 на овие точки $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = t$; а тоа се параметарски равенки на правата што минува низ точката $(x_1^0, x_2^0, 0)$, а е паралелна со векторот $\{0, 0, 1\}$ — што го потврдува нашето тврдење.

Точките чии што координати ја задоволуваат (1), а да е при тоа $x_3 = 0$, образуваат една елипса во x_1x_2-рамнината. Навистина, во однос на рамнинските координати x_1, x_2 во системата $(O; e_1, e_2)$ равенката (1) претставува една елипса. А секоја точка $P(x_1, x_2)_{(O; e_1, e_2)}$ е при тоа идентична со точката $P(x_1, x_2, 0)_{(O; e_1, e_2, e_3)}$. Значи двете равенки

(2) $\quad x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 0$

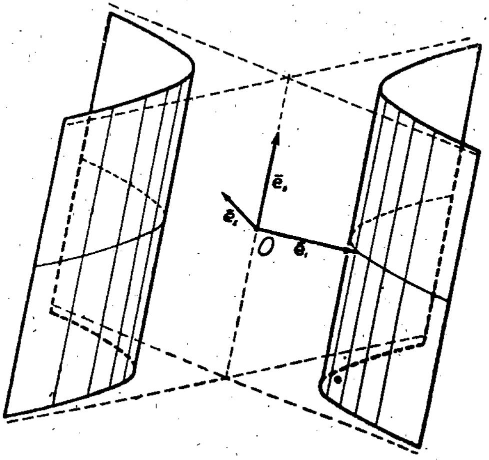
претставуваат една елипса во x_1x_2-рамнината.



Сл. 124

На површината (1) лежат, спрема тоа, исцело, т. е. со сите свои точки, сите оние прави што се паралелни со x_3-оската, а ја сечат елипсата (2). Оваа површина ја наречуваме *елиптичен цилиндер*.

Се изразуваме уште дека елиптичкиот цилиндер настанува при движењето на една права која при двињежето останува паралелна со еден правец, а да при тоа се лизга по една елипса чија што рамнина не е паралелна со тој правец. Подвижната права ја викаме *генератриса*, а елипсата — *директриса*.



Сл. 125

2. Хиперболичен цилиндер. Аналогно се покажува дека равенката

(3) $\quad x_1^2 - x_2^2 = 1$

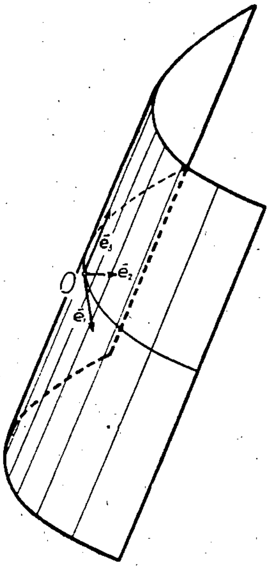
претставува површина која настанува при движењето на една права (генератриса), паралелна со x_3-оската, така да се лизга при тоа по хиперболата $x_1^2 - x_2^2 = 1$, $x_3 = 0$ (директриса). Површината ја викаме *хиперболичен цилиндер* (сл. 125).

3. Параболичен цилиндер. Равенката

$$x_1^2 = x_2 \tag{4}$$

претставува *параболичен цилиндер*. Тој е геометриско место на оние прави, паралелни со x_3-оската, што ја сечат параболата $x_1^2 = x_2$, која лежи во x_1x_2-рамнината.

Равенките (1), (3) и (5) на цилиндрите се од втора степен по однос на координатите x_1, x_2, x_3 на точките. Затоа овие три вида цилиндри ги наречуваме со заедничко име *цилиндри од втор ред*.



Сл. 126

4. Пресек на цилиндрите со рамнината $x_3 = a$. Во т. 1 покажавме дека двете равенки (2) претставуваат една елипса. Оваа елипса е, значи, пресек (целокупноста на заедичките точки) на цилиндерот $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и рамнината $x_3 = 0$.

Да видиме сега што претставуваат равенките

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = a, \tag{5}$$

т. е. што е пресек на цилиндерот $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и рамнината $x_3 = a$. Ако ја извршиме трансформацијата на координатите, дефинирана со $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3 - a$, ги добиваме равенките $x_1'^2 + x_2'^2 = 1$, $x_3' = 0$, што претставуваат една елипса. Спрема тоа, равенките (5) претставуваат една елипса.

По аналоген начин следува дека равенките

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad x_3 = a \tag{6}$$

претставуваат една хипербола, која е пресек на рамнината $x_3 = a$ со цилиндерот (3), а равенките

$$x_1^2 = x_2, \quad x_3 = a \tag{7}$$

една парабола што се добива како пресек на цилиндерот (4) со рамнината $x_3 = a$.

Равенките на овие криви можеме да ги запишеме и во *параметарски* облик. Да го направиме тоа за кривата (7). За x_1 избираме еден произволен број, ставувајќи $x_1 = t$; со тоа добиваме од (7)

$$x_1 = t, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = a. \tag{8}$$

За секоја вредност од t, наречен *параметар*, овие *параметарски равенки* ни ги определуваат координатите x_1, x_2, x_3 од една точка на параболата (7).

ЗАДАЧИ

1. Земајќи предвид дека афина слика на елипсата е елипса и дека паралелно проицирање е афино пресликување (§ 78 и § 47), покажи дека просекот на елиптичниот цилиндер со секоја рамнина, што не е паралелна со неговите генератриси, е една елипса.

2. На аналоген начин покажи дека хиперболичниот (параболичниот) цилиндер го сече секоја рамнина што не е паралелна со неговите генератриси во една хипербола (парабола).

3. Покажи дека паралелни рамнини го сечат кој да е цилиндер, чии генератриси не се паралелни со рамнините, во конгруентни криви.

Што претставуваат равенките во зад. 4—10.

4. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2=1$. 5. $x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 = 1$. 6. $x_1x_2= 1$. 7. $x_2^2= a_1x_2$.
8. $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 1$. 9. $(3x_1^2 + 4x_2 - x_3)(4x_1 - 3x_2 + x_3) = 5$.
10. $(x_1 + x_2 + x_3 + 1)^2 = x_1 - x_2 + x_3$.

§ 89. Конус

Видовме до сега како површините можеме да ги дефинираме не само како геометриско место на точки, ами и како геометриско место на прави, т. е. како целокупност на сите прави во просторот кои задоволуваат извесни (два) услови — или поточно, целокупност од сите точки на овие прави.

Ќе спомнеме уште еден таков пример, имено геометриското место на правите кои минуваат низ една фиксна точка и ја пресечуваат една елипса, чија што рамнина не врви низ таа точка. Оваа површина ја викаме *конусна површина* или *конус*.

Фиксната точка — *врв* на конусот — нека биде координарниот почеток O, а елипсата нека биде дадена со равенките

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 1. \tag{9}$$

Правата што ја сврзува која да е точка $P\,(x_1, x_2, x_3)$ од нашето геометриско место со O ја пресечува елипсата (9) во една точка $P_0\,(x_1^0, x_2^0, 1)$. Значи е

$$(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = 1. \tag{10}$$

Векторите $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OP_0}$ се колинеарни. Затоа за секоја точка P, која не соспаднува со O, постои еден таков λ да важи $\lambda \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0}$, или $\lambda \cdot \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1{}^0, x_2{}^0, 1\}$, или:

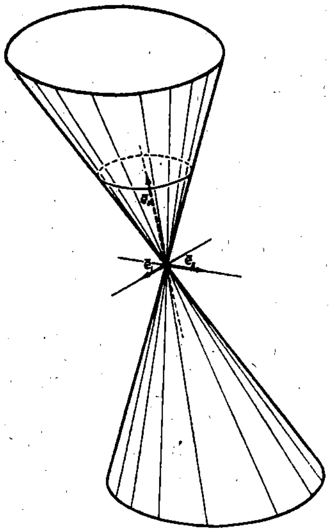
$$x_1{}^0 = \lambda x_1, \quad x_2{}^0 = \lambda x_2, \quad 1 = \lambda x_3,$$

односно, ако го елиминираме λ,

$$x_1{}^0 = x_1/x_3, \quad x_2{}^0 = x_2/x_3.$$

Заменувајќи ги овие вредности за $x_1{}^0$, $x_2{}^0$ во (10), добиваме

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 = 0. \tag{11}$$



Сл. 127

Координатите x_1, x_2, x_3 од секоја точка на нашето геометриско место ја задоволуваат оваа равенка. Обратно, ако некоја точка $P(x_1, x_2, x_3)$ лежи на површината (11), лежи на неа очигледно и точката Q $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, при произволен λ. А точките P и Q се колинеарни со O. За $\lambda = 1/x_3$ добива Q координати $x_1{}^0 = x_1/x_3$, $x_2{}^0 = x_2/x_3$, $x_3{}^0 = 1$. Овие координати ја задоволуваат (11), а затоа и (9). Точката лежи, значи, на една права што минува низ O и која со елипсата (9) има една заедничка точка; таа лежи, спрема тоа, на конусот.

Равенката (11) е, спрема тоа, равенка на нашиот конус. Оваа равенка е од втора степен во однос на x_1, x_2, x_3. Затоа овој конус го викаме поточно *конус од втор ред.*

ЗАДАЧИ

Што претставуваат равенките во зад. 1—3.

1. $x_1{}^2 - x_2{}^2 + x_3{}^2 = 0.$ 2. $-x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 0.$
3. $x_1{}^2/a_1{}^2 + x_2{}^2/a_2{}^2 - x_3{}^2/a_3{}^2 = 0.$

4. Во каква крива ги сече конусите во зад. 1—3 рамнината $x_3 = 1$, а во која крива рамнината $x_2 = 1$?

5. Покажи дека рамнините $x_3 = \lambda$, каде што λ е произволен параметар, го сече конусот во зад. 1—3 во меѓу себе слични криви.

6 Во какви криви го сечат конусот $x_1{}^2 - x_2{}^2 + x_3{}^2 = 0$ рамнините $x_1 + x_2 = \lambda$, каде што λ е произволен параметар *Напат*: Изврши ја трансформацијата на координатите $x_1 - x_2 = x_1{}'$, $x_1 + x_2 = x_2{}'$, $x_3 = x_3{}'$!

§ 90. Параболоиди

1. Елиптичен параболоид. Прејдуваме кон еден пример на површина, која ќе ја дефинираме како геометриско место не на прави туку на криви линии.

Во просторот избираме една афина система (O; e_1, e_2, e_3), и параболите

$$(12) \qquad x_3 = x_1^2, \quad x_2 = 0$$

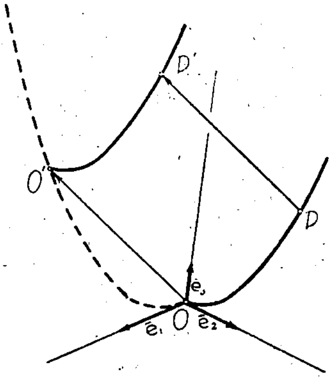
и

$$(13) \qquad x_3 = x_2^2, \quad x_1 = 0.$$

Параметарските равенки на овие параболи (12) и (13) се

$$(12') \qquad x_1 = \lambda, \; x_2 = 0, \; x_3 = \lambda^2,$$

$$(13') \qquad x_1 = 0, \; x_2 = \mu, \; x_3 = \mu^2.$$



Сл. 128

На сл. 128 параболата (12) е нацртана пунктирано, а параболата (13) со полна линија. Од двете параболи се нацртани само оние делови кои се наjдуваат во I-иот октант.

Ќе ја разгледаме онаа површина што настанува при движењето на параболата (13) така што нејзината рамнина да останува при тоа паралелна со x_2x_3-рамнината, а онаа нејзина точка што совпаднува со координатниот почеток да се лизга по параболата (12). Така образуваната површина ја викаме *елиптичен параболоид*.

Нека биде O' (λ, 0, λ^2) која да е точка од параболата (12). Онаа подвижна парабола што врви низ O' ја добиваме на тој начин што параболата (13) ја поместуваме паралелно за векторот $\overrightarrow{OO'} = \{\lambda, 0, \lambda^2\}$. Која да е точка P (0, μ, μ^2) од параболата (13) дојдува по тоа поместување во некоја точка P' (x_1, x_2, x_3). Имаме, значи

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'} = \{0, \mu, \mu^2\} + \{\lambda, 0, \lambda^2\},$$

или $\{x_1, x_2, x_3\} = \{\lambda, \mu, \lambda^2 + \mu^2\}$, т. е.

$$(14) \qquad x_1 = \lambda, \qquad x_2 = \mu, \qquad x_3 = \lambda^2 + \mu^2.$$

Оттука, елиминирајќи ги λ и μ, добиваме

$$(15) \qquad x_1^2 + x_2^2 = x_3.$$

Координатите од секоја точка од нашето геометриско место ја задоволуваат оваа равенка. Обратно, секое решение од (15) можеме да го пишеме во вид (14), со што се убедуваме дека и секое решение на равенката (15) претставува координати на една точка на нашиот елиптичен параболоид. Затоа равенката (15) е негова равенка.

Ако при ова наше разгледување параболите (12) и (13) си ги заменат улогите, доаѓаме до истиот резултат, т. е. параболоидот (15) може да се образува и со лизгањето на параболтата (12) по параболата (13).

Да ја пресечеме сега површината (15) со рамнината $x_3 = c$ ($c = \text{const.}$). Пресечната крива има равенка

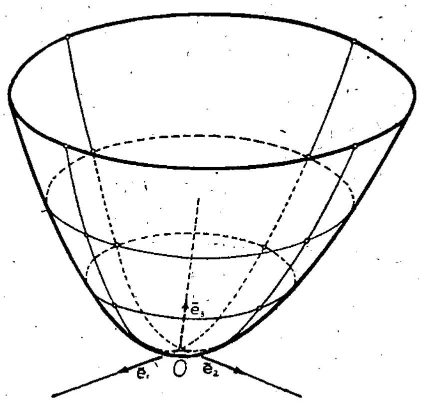
$$x_1^2 + x_2^2 = c, \qquad x_3 = c.$$

Овој систем равенки е решлив за $c \geqq 0$. Значи, параболоидот (15) се наоѓа во полупросторот $x_3 \geqq 0$. Ставаме $c = a^2$. Равенките на пресечната крива се тогаш

$$x_1^2/a^2 + x_2^2/a^2 = 1, \quad x_3 = a^2. \tag{16}$$

Пресеците на параболоидот (16) со рамнините кои се паралелни со x_1x_2-рамнината се, значи, елипси, и тоа меѓу себе слични елипси. Затоа овој параболоид и се вика елиптичен.

Елипсата (16) нека ја сече параболата (12) во точките A_1 и A_2, а параболата (13) во точките B_1 и B_2. Правите A_1A_2 и B_1B_2 се еден пар конјугирани пречници за таа елипса. Елиптичниот параболоид (15) го опишува, значи, една таква променлива елипса која се допира до параболите (12) и (13), и при која сврзниците на нејзините допирни точки со една иста парабола се еден пар нејзини конјугирани дијаметри, а рамнината во која лежи е паралелна со x_1x_2-рамнината.



Сл. 129

Елиптичниот параболоид е, значи, и едно геометриско место на конгруентни параболи, а и едно геометриско место на променливи, неконгруентни елипси.

2. Хиперболичен параболоид. Ако по параболата (12) се лизга место параболата (13), како во т. 1, параболата

$$x_3 = -x_2^2, \qquad x_1 = 0, \tag{17}$$

добиваме една површина која се вика *хиперболичен параболоид.*

Параметарските равенки на кривата (17) ги добиваме, ако ставиме $x_2 = \mu$. Тогаш е

$$(17') \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = -\mu^2.$$

За координатите x_1, x_2, x_3 на која да е точка од разгледуваната површина ги добиваме, на потполно ист начин што е применет во т. 1, изразите

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \lambda^2 - \mu^2.$$

Ако оттука ги елиминираме λ и μ, добиваме

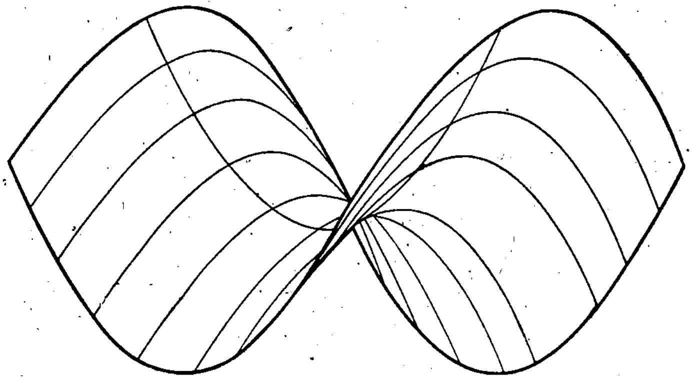
$$(18) \qquad x_1^2 - x_2^2 = x_3.$$

Тоа е равенка на хиперболичниот параболоид.

До истата равенка би дошле, ако параболата (12) се лизгаше по параболата (17).

Рамнината $x_3 = c$ ($c = \text{const.}$) го сече параболоидот (18) во кривата

$$x_1^2/c - x_2^2/c = 1, \quad x_3 = c.$$



Сл. 130

Тоа е една хипербола — при секој c, освен при $c = 0$, кога тоа е еден пар непаралелни прави. Сите рамнини, паралелни со x_1x_2-рамнината, го сечат, значи, параболоидот (18) во хиперболи, освен самата x_1x_2-рамнина која го сече во две прави. Оттука доаѓа и името хиперболичен параболоид.

ЗАДАЧИ

Што претставуваат равенките во зад. 1—7?

1. $x_1^2 + x_3^2 + x_2 = 0.$
2. $x_2^2 + x_3^2 - x_1 = 0.$
3. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = a_3x_3.$
4. $(x_1 + 2x_2)^2 + (3x_1 - x_2)^2 + x_1 + x_3 = 0.$
5. $x_3^2 - x_1^2 = x_2.$
6. $x_2^2 - x_3^2 + x_1 = 0.$
7. $(x_1 + 3x_2 - 3x_3)^2 - (2x_1 - x_2 + x_3 + 1)^2 + x_3 - 1 = 0.$

8. Покажи дека равенката на параболоидот $x_1^2 - x_2^2 = x_3$, по подесна трансформација на координатите, може да се доведе во вид $x_1'x_2' = x_3'$.

9. Што претставува равенката $(3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4)(x_1 + 2x_2 - x_3 + 1) + x_1 + x_3 + 5 = 0$?

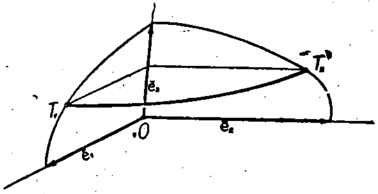
§ 91. Елипсоид

Ќе разгледаме пак една површина, која настанува со движење на една променлива елипса, чија рамнина останува паралелна со некоја определена рамнина.

Да избереме една афина координатна система $(O;\, e_1,\, e_2,\, e_3)$. Рамнината на подвижната елипса нека биде паралелна со x_1x_2-рамнината, а елипсата нека се допира при своето движење до елипсите

(19) $\quad x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_2 = 0 \quad$ и $\quad$ (20) $\quad x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 = 0,$

и тоа во точките T_1, T_1' одн. во T_2, T_2'; при тоа правите T_1T_1' и T_2T_2' нека бидат два заемно конјугирани пречници на подвижната елипса. Така образуваната површина ја викаме *елипсоид*.



Сл. 131

Подвижната елипса нека лежи во рамнината $x_3 = \lambda$. Равенките на елипсата се тогаш од облик:

$$x_1^2/A_1 + x_2^2/A_2 = 1, \qquad x_3 = \lambda. \tag{21}$$

Нека е $T_1(a_1, 0, \lambda)$, $T_2(0, a_2, \lambda)$. Координатите на T_1, T_2 ги задоволуваат равенките на елипсата (21). Заменувајќи ги во нив, добиваме $A_1 = a_1^2$, $A_2 = a_2^2$. Но T_1 лежи и на (19); затоа е $a_1^2 = 1 - \lambda_2$. T_2 лежи на (20); затоа е $a_2^2 = 1 - \lambda^2$. Равенките на подвижната елипса се, значи

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - \lambda^2, \qquad x_3 = \lambda. \tag{22}$$

Сите овие елипси се меѓу себе слични (§ 77, прим. 1). Со елиминацијата на λ од (22) добиваме

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{23}$$

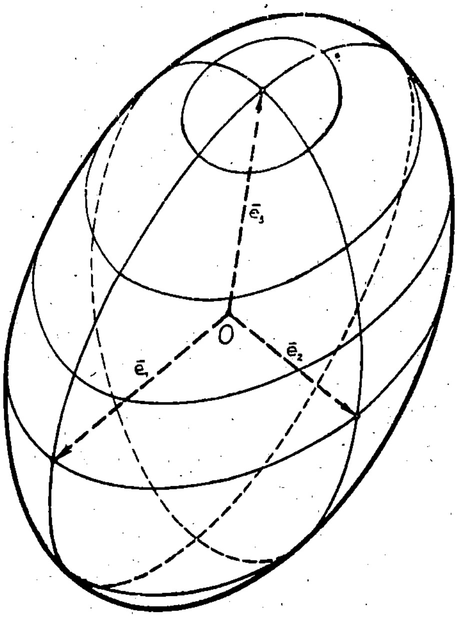
Координатите x_1, x_2, x_3 на секоја точка од нашиот елипсоид ја задоволуваат оваа равенка. А тоа се и сите точки чии координати ја заводолуваат (23). Ако е имено $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ една произволна точка чии координати ја задоволуваат (23), тогаш тие ги задоволуваат и равенките

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - (x_3^0)^2, \qquad x_3 = x_3^0,$$

кои се од видот (22), што покажува дека P_0 лежи на една од нашите подвижни елипси.

Спрема тоа, равенката (23) е равенка на нашиот елипсоид.

Од дефиницијата на елипсоидот следува дека неговите пресеци со рамнините, паралелни со x_1x_2-рамнината, се слични елипси.



Сл. 132

Ако елипсоидот го сечеме со рамнината $x_2 = \mu$ ($\mu = \text{const.}$), за пресек ја добиваме елипсата

$$x_1^2 + x_3^2 = 1 - \mu^2, \quad x_2 = \mu,$$

која е слична со елипсата (19); а ако го сечеме со рамнината $x_1 = \nu$ ($\nu = \text{const.}$), ја дибиваме елипсата

$$x_2^2 + x_3^2 = 1 - \nu^2, \quad x_1 = \nu,$$

слична со елипсата (20). Тоа е, впрочем, јасно непосредно веќе оттаму што равенката (23) на елипсоидит е наполно симетрична во однос на x_1, x_2 и x_3; особините што се изведуваат од неа за неговите пресеци со рамнините, паралелни со една од координатните рамнини, важат и за неговите пресеци со рамнините, паралелни со другите две координатни рамнини.

ЗАДАЧИ

1. Каква површина претставува равенката

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_2^2 = 1.$$

Определи ги нејзините пресеци со координатните рамнини.

2. Што претставува равенката $2(-x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2 = 2$? Нацртај ја во x_2x_3-рамнината пресечната крива на таа рамнина со површината.

3. Што претставува равенката $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \lambda$, при разни вредности на параметарот λ?

4. Покажи дека елипсоидот е афина слика на топката.

§ 92. Хиперболоиди

1. Еднокрилен хиперболоид. Сега ќе иследиме уште една површина, која настанува при движењето на една подвижна елипса паралелно со една зададена рамнина.

Избираме една афина система (O; e_1, e_3, e_3), а во однос на неа хиперболите

$$(24) \qquad x_1^2 - x_3^2 = 1,\ x_2 = 0 \quad \text{и} \quad (25) \qquad x_2^2 - x_3^2 = 1,\ x_1 = 0.$$

Рамнината на подвижната елипса нека биде паралелна со x_1x_2-рамнината и нека се допира до хиперболите (24) и (25); ако T_1, T_1' и T_2, T_2' се нејзините допири со првата одн. со втората хипербола, тогаш правите T_1T_1' и T_2T_2' нека бидат еден пар заемно конјугирани пречници на таа елипса.

Површината што се образува на тој начин ја викаме *еднокрилен хиперболоид* или *хиперболоид со едно крило.*

Рамнината на подвижната елипса ја сече хиперболата (24) во T_1 и T_1', а хиперболата (25) во T_2 и T_2'. Ако $x_3 = \lambda$ (λ = const.) е равенката на таа рамнина, тогаш координатите од T_1 и T_1' ги добиваме од (24), ако во нив x_3 го замениме со λ; а координатите од T_2 и T_2' ги добиваме, ако во (25) ја направиме истата смена. Ако ставиме T_1 (a_1, 0, λ) и T_2 (0, a_2, λ), добиваме, значи

$$a_1^2 = a_2^2 = 1 + \lambda^2.$$

Подвижната елипса има, спрема тоа, равенки

$$(26) \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1 + \lambda^2, \qquad x_3 = \lambda.$$

Со елиминацијата на λ добиваме

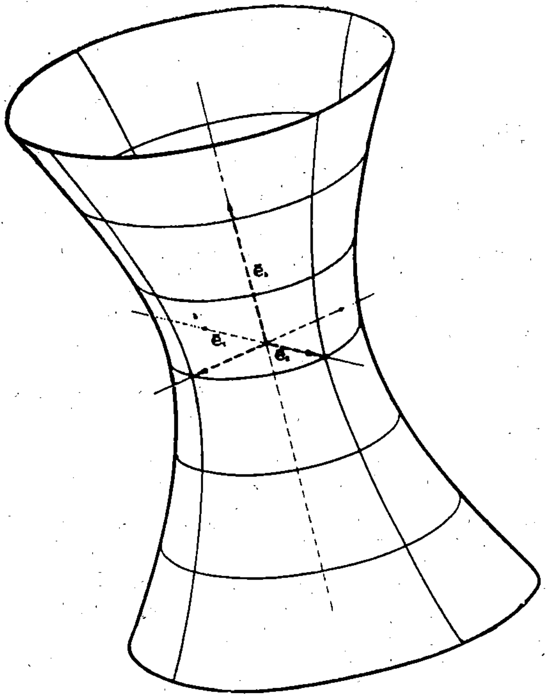
$$(27) \qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1.$$

Тука означуваат x_1, x_2, x_3 координати од која да е точка на една подвижна елипса, а спрема тоа координати од која да е точка на изучуваното геометриско место. Обратно, ако T_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) е една точка чии што координати ја задоволуваат равенката (27), тогаш тие координати ги задоволуваат и равенките

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 + (x_3^0)^2, \qquad x_3 = x_3^0,$$

кои се од обликот (26); тоа покажува дека точката P_0 лежи на една од нашите подвижни елипси и, спрема тоа, на испитуваниот еднокрилен хиперболоид.

Равенката (27) е, значи, равенка на нашиот еднокрилен хиперболоид.



Сл. 133

За да добиеме подобра претстава за оваа површина, ќе ја сечеме со рамнините, паралелни со одделните координатни рамнини.

Пресеците со рамнините што се паралелни со x_1x_2-рамнината се меѓу себе сличните елипси (26).

Да видиме која е пресечна крива на површината со рамнината $x_2 = \mu$ ($\mu = \text{const.}$). Равенките на пресекот се

$$x_1^2 - x_3^2 = 1 - \mu^2, \quad x_2 = \mu.$$

При секој μ, тој е една хипербола, освен за $\mu = \pm 1$, кога пресекот е парот прави $x_1^2 - x_3^2 = 0$, $x_2 = \pm 1$ одн.

$$x_1 \pm x_3 = 0, \ x_2 = 1 \quad \text{и} \quad x_1 \pm x_3 = 0, \ x_2 = -1.$$

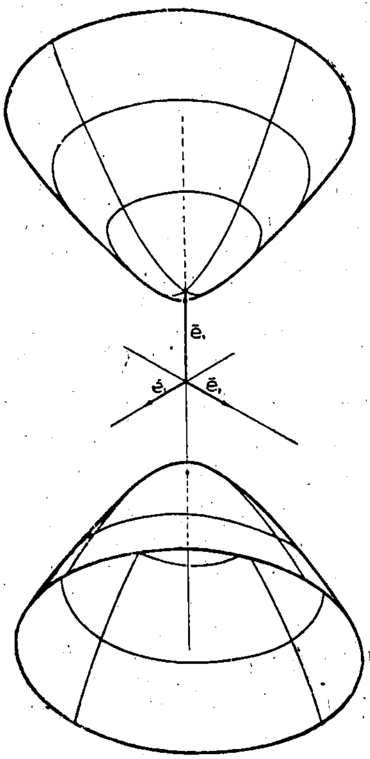
Проекциите на овие криви на рамнината $x_2 = 0$, ако проицираме паралелно со x_2-оската, претставуваат една фамилија хиперболи чии заеднички асимптоти се правите $x_1^2 - x_3^2 = 0$, $x_2 = 0$. При $|\mu| > 1$, трансверзална оска им е x_1-оската, а при $|\mu| < 1$ — x_3-оската.

Равенката (27) е симетрична во однос на x_1 и x_2 .Затоа важи аналогно за пресеците со рамнините, паралелни со x_2x_3-рамнината.

2. Двокрилен хиперболоид. Како последен пример ќе изучиме уште една површина, која настанува при движењето на една променлива елипса така да нејзината рамнина останува паралелна со една рамнина. Таа рамнина нека е пак x_1x_2-рамнината од една афина координатна система. Подвижната елипса нека се допира до хиперболите

$$(28)\quad x_1^2 - x_3^2 = -1,\ x_2 = 0 \quad \text{и} \quad (29)\quad x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_1 = 0,$$

а оние нејзини два пречници, кои лежат во x_1x_3- и x_2x_3-рамнината, нека бидат заемно конјугирани. Површината што ја образува подвижната елипса ја викаме *двокрилен хиперболоид* или *хиперболоид со две крила*.



Сл. 134

Ако $x_3 = \lambda$ (λ = const.) е равенка на рамнината на подвижната елипса, тогаш за равенките на таа елипса добиваме, на ист начин како во т. 1,

$$(30)\quad x_1^2 + x_2^2 = \lambda^2 - 1, \quad x_3 = \lambda.$$

Со елиминацијата на λ добиваме оттука

$$(31)\quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1.$$

Тоа е равенка на нашиот двокрилен хиперболоид.

Јасна нагледна претстава за оваа површина ќе добиеме, ако ги изучиме нејзините пресеци со рамнините што се паралелни со одделните координатни рамнини.

Рамнината $x_3 = \lambda$ ја сече површината во елипсата (30), ако е $|\lambda| > 1$, што е јасно и од дефиницијата на површината. Рамнината $x_3 = 1$ има со површината (31) само една заедничка точка — точката (0, 0, 1), а рамнината $x_3 = -1$ само точката (0, 0, —1). За $|\lambda| < 1$, рамнината $x_3 = \lambda$ не ја сече површината.

Рамнината $x_2 = \mu$ (μ = const.) ја сече површината во кривата

$$x_1^2 - x_3^2 = -\mu^2 - 1, \qquad x_2 = \mu,$$

т. е. во една хипербола, слична со хиперболата (28). За секој μ добиваме по една хипербола. Нивните проекции на x_1x_3-рамнината земени паралелно со x_2-оската, се хиперболите што се хомотетични со хиперболата (28).

Рамнината $x_1 = \nu$ ($\nu = \text{const.}$), при произволен ν, ја сече површината (31) во хиперболата

$$x_2^2 - x_3^2 = -\nu^2 - 1, \qquad x_1 = \nu.$$

Проекциите на овие хиперболи на x_2x_3-рамнината, земени паралелно со x_1-оската, се хиперболи, хомотетични со хиперболата (29).

ЗАДАЧИ

Што претставуваат равенките во зад. 1—4?

1. $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$. 2. $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

3. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 - x_3^2/a_3^2 = 1$.

4. $5(x_1 + x_2)^2 - 3(x_2 + x_3)^2 + 4(x_3 + x_1)^2 = 60$.

5. Определи ги пресеците на површините од зад. 1—3 со координатните рамнини.

Што претставуваат равенките во зад. 6—9?

6. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$. 7. $-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$.

8. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 - x_3^2/a_3^2 = -1$.

9. $(2x_1 + x_2 - x_3 + 1)^2 - 4(x_1 - x_2 + 2x_3 - 3)^2 + 3(x_2 - 2)^2 + 24 = 0$.

10. Определи ги пресеците на површините од зад. 6—9 со x_1x_3-координатната рамнина.

§ 93. Заемна положба на права и квадрика

1. Квадрики со центар и без центар. Сите површини, изучени во § 88—92, освен параболоидите и параболичниот цилиндер, можеме да ги опфатиме само со една равенка од видот

$$x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon' x_3^2 - \varepsilon'' = 0, \tag{32}$$

каде што ε, ε' и ε'' означуваат еден од броевите 0, 1 и -1. Но оваа равенка може да претставува, освен спомнатите површини, и други површини. За $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ равенката (32) добива вид $x_1^2 - x_2^2 = 0$ и ги претставува, според тоа, непаралелните рамнини $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$. — За $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, $\varepsilon'' = 1$ равенката (32) добива вид $x_1^2 - 1 = 0$, па ги претставува, според тоа, паралелните рамнини $x_1 - 1 = 0$ и $x_1 + 1 = 0$. А за $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ равенката (32) добива вид $x_1^2 = 0$; таа претставува, значи, една рамнина.

Сите површини, дадени со равенката (32), имаат една заедничка особина. Ако на која да е од тие површини лежи, имено, една точка $P(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, тогаш на неа лежи и точката $Q(-x_1^0, -x_2^0, -x_3^0)$, која е централно симетрична со P по однос на координатниот почеток O. Затоа точката O ја викаме *центар* на површината (32), а самата површина — *површина со центар*.

Параболоидите и параболичниот цилиндер ќе ги опфатиме со заедничката равенка

$$(33) \qquad x_1^2 + \varepsilon x_2^2 - x_3 = 0,$$

каде што ε е 1, — 1 или 0. За овие површини ќе покажеме (§ 96, т. 3) дека за нив не постои центар. Затоа ќе ги викаме *површини без центар*.

Равенките (32) и (33) се квадратни по однос на x_1, x_2, x_3. Затоа површините што тие ги претставуваат ги викаме, со заедничко име, *квадрики* или *површини од втор ред*.

2. Пресек на квадрика и права. Ќе ги бараме заедничките точки на која да е од квадриките (32) и (33) со една права. Равенките на правата нека се

$$(34) \qquad x_i = x_i^0 + l_i t \quad (i = 1, 2, 3).$$

Таа минува низ точката $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, а е паралелна со векторот $\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$.

Да ги земеме прво квадриките со центар. Заменувајќи ги изразите за x_i од (34) во (32), добиваме

$$(x_1^0 + l_1 t)^2 + \varepsilon (x_2^0 + l_2 t)^2 + \varepsilon' (x_3^0 + l_3 t)^2 - \varepsilon'' = 0,$$

или

$$(35) \qquad At^2 + 2\,Bt + C = 0,$$

каде што е

$$(36) \qquad \begin{aligned} A \equiv l_1^2 + \varepsilon l_2^2 + \varepsilon' l_3^2, \quad B \equiv l_1 x_1^0 + \varepsilon l_2 x_2^0 + \varepsilon' l_3 x_3^0,\\ C \equiv (x_1^0)^2 + \varepsilon (x_2^0)^2 + \varepsilon' (x_3^0)^2 - \varepsilon''. \end{aligned}$$

А ако ги разгледуваме квадриките без центар, ги заменуваме изразите за x_i од (34) во (33), па добиваме

$$(x_1^0 + l_1 t)^2 + \varepsilon (x_2^0 + l_2 t)^2 - x_3^0 - l_3 t = 0,$$

или — пак една равенка од видот (35), во која е сега:

$$(37) \quad A \equiv l_1^2 + \varepsilon l_2^2, \; B \equiv l_1 x_1^0 + \varepsilon l_2 x_2^0 - l_3/2, \; C \equiv (x_1^0)^2 + \varepsilon (x_2^0)^2 - x_3^0.$$

За секој корен $t = t'$ од равенката (35) добиваме по една заедничка точка $P(x_1^0 + l_1 t', x_2^0 + l_2 t', x_3^0 + l_3 t')$ — *пресечна точка* — на правата (34) и квадриката (32) одн. (33). Правата има, значи, со квадриката толку заеднички точки колку што (реални) корени има равенката (35).

Да претпоставиме прво дека е $A \neq 0$. Равенката (35) има тогаш два, еден или ниеден корен; а правата со површината две, една или ниедна заедничка точка.

Ако правата има таков правец да е $A = 0$, кажуваме дека таа има *асимптотски правец*. Терминот асимптотски „правец” е оправдан, бидејќи коефициентот A зависи само од правецот на правата, т. е. за сите паралелни прави (34), каде што l е стален, коефициентот A има иста вредност. Во овој случај равенката (35) добива вид

$$2\,Bt + C = 0.$$

Оваа равенка има еден корен ако е $B \neq 0$, нема ниеден корен ако $B = 0$, $C \neq 0$, а е задоволена за секоја вредност од t ако е $B = C = 0$. Во овој последен случај секоја точка од правата (34) лежи и на површината; се изразуваме дека правата *лежи на површината*.

Спрема тоа, *правите со асимптотски правец ја сечат површината само во една точка, или не ја сечат, или пак лежат на неа.* Оттука следува: *Секоја права, која една зададена квадрика ја сече само во една точка, има во однос на таа површина асимптотски правец, ако ниедна права, што е паралелна со неа, не ја сече квадриката во две (и само во две) точки.*

Правите кои со една квадрика имаат само една заедничка точка, а немаат асимптотски правец, ќе ги викаме *тангенти* на површината, а заедничката точка — нивна *допирна точка* или *допир*.

Од горното следува: *Една права може да има со квадриката две, една или ниедна заедничка точка, или да лежи на неа.*

ЗАДАЧИ

Каква заемна положба имаат површините и правите зададени во зад. 1—6?

1. $x_1^2 - x_2^2 = x_3$; $\quad x_1 - x_2 = 1$, $\; x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$; $x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0$, $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0$.
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; $\quad x_1 + 2x_2 - 2 = 0$, $x_1 - 2x_3 + 2 = 0$.
4. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$; $\quad x_1 = 2/3 + 2t$, $x_2 = 2/3 - t$, $x_3 = 1/3 - 2t$.
5. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$; $\; 4x_1 - 3x_2 + 2 = 0$; $\; 5x_1 - 3x_3 - 8 = 0$.
6. $x_1^2 + x_2^2 = x_3$; $\quad x_1 = x_2 = x_3 + 1$.

§ 94. Прави со асимптотски правци

Ќе испитаме сега кои се правите сѐ асимптотски правци при одделни квадрики. За една права, паралелна со векторот $l = \{l_1, l_2, l_3\}$, кажавме дека во однос на површината (32) одн. (33) има асимптотски правец, ако изразот A, дефиниран со (36) одн. (37), е нула.

1. Елипсоид. При површината $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ е $A \equiv l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$. При $l \neq 0$ е, значи, $A \neq 0$. *Кај елипсоидот не постојат прави со асимптотски правец.*

2. Хиперболоиди. Асимптотски конус. При хиперболоидите

$$(38) \qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \quad \text{и} \quad (39) \qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$$

е $A \equiv l_1^2 + l_2^2 - l_3^2$. Да испитаме, кои од оние прави што минуваат низ координатниот почеток O имаат асимптотски правец. Нека бидат

$$(40) \qquad x_1 = l_1 t, \quad x_2 = l_2 t, \quad x_3 = l_3 t$$

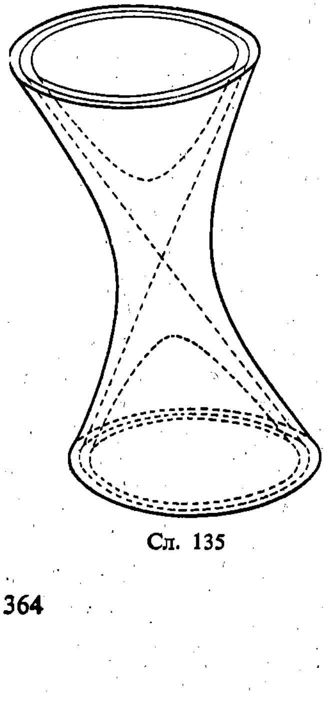
параметарски равенки на една од тие прави. Од $A \equiv l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 = 0$ добиваме $t^2 A^2 \equiv (l_1 t)^2 + (l_2 t)^2 - (l_3 t)^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Правите што минуваат низ O и имаат асимптотски правец се, спрема тоа, генератрисите на конусот

$$(41) \qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

наречен *асимптотски конус* на површината.

Ако равенките на хиперболоидите (38) и (39) се однесуваат до една иста афина координатна система, тогаш тие хиперболоиди се викаат *конјугирани* во однос еден на друг. *Два конјугирани хиперболоида имаат,* значи, *ист асимптотски конус.*

Да испитаме, кои од правите (40) ги сечат хиперболоидите (38) и (39). Равенката (35) добива за површината (38) облик $At^2 - 1 = 0$, а за површината (39) облик $At^2 + 1 = 0$. Правата (40) ја сече површината (38), спрема тоа, тогаш ако е $A > 0$, а не ја сече ако е $A \leqq 0$; а површината (39) таа ја сече ако е $A < 0$, а не ја сече ако е $A \geqq 0$. Секоја од правите (40), при кој е $A \neq 0$, ја сече само една од површините (38) и (39); а правите (40), при кои е $A = 0$ (генератрисите од асимптотскиот конус), не ја сечат ни едната ни другата. Спрема тоа, *генератрисите на заедничкиот асимптотски конус на два конјугирани хиперболоиди се единствени прави што минуваат низ врвот на конусот и не сечат ни еден од хиперболоидите.*



Сл. 135

За да добиеме уште подобра претстава за асимптотскиот конус, ќе го пресечеме заедно со хиперболоидите

(38) и (39) со една рамнина $x_3 = k$ ($k = \text{const.}$). Пресечната крива на оваа рамнина со асимптотскиот конус е елипсата

$$x_1^2 + x_2^2 = k^2, \qquad x_3 = k, \tag{42}$$

а со хипреболоидите (38) и (39) елипсите

$$x_1^2 + x_2^2 = k^2 + 1, \qquad x_3 = k, \tag{43}$$
$$x_1^2 + x_2^2 = k^2 - 1, \qquad x_3 = k. \tag{44}$$

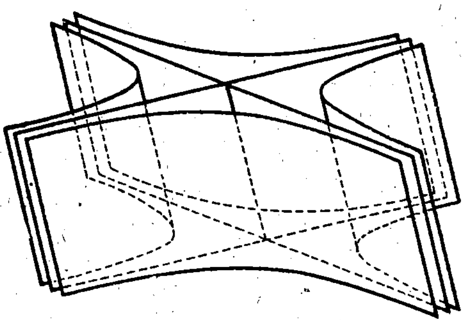
Должините на оние заемно конјугирани полудијаметри на елипсите (42), (43) и (44), што се паралелни со x_1- и x_2-оската, мерени со должините на првиот одн. вториот координатен вектор, се $|k|$, $\sqrt{k^2+1}$ и $\sqrt{k^2-1}$. Нивните разлики

$$\sqrt{k^2+1} - |k| = \frac{1}{|k| + \sqrt{k^2+1}}, \qquad |k| - \sqrt{k^2-1} = \frac{1}{|k| + \sqrt{k^2-1}}$$

се стремат кон нула, ако $|k|$ сѐ повеќе расте, т. е. ако пресечната рамнина сѐ повеќе се оддалечува од координатниот почеток.

Спрема тоа, рамнината $x_3 = k$, $|k| > 1$, ги сече хиперболоидите (38) и (39) и нивниот асимптотски конус во три слични и слично положени (хомотетични) елипси, чии димензии се разликуваат толку помалу, колку повеќе таа рамнина е оддалечена од x_1x_2-рамнината.

На ист начин се покажува дека секоја рамнина, паралелна со x_1x_3-рамнината (или со x_2x_3-рамнината), ги сече хиперболоидите и нивниот асимптотски конус во три хомотетични хиперболи кои толку повеќе се доближуваат една до друга во колку таа рамнина е подалеку од координатниот почеток.



Сл. 136

3. Хиперболичен цилиндер. Асимптотски рамнини. При површината $x_1^2 - x_2^2 = 1$ е $A = l_1^2 - l_2^2$. Во однос на неа асимптотски правец имаат оние прави, паралелни со l, за кои важи $l_1^2 - l_2^2 = 0$ одн. $l_1 - l_2 = 0$ или $l_1 + l_2 = 0$. Тоа се правите што се паралелни со едната од рамнините

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad x_1 + x_2 = 0. \tag{43}$$

Ќе разгледаме сега едновремено два цилиндра, имено

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \qquad x_1^2 - x_2^2 = -1. \tag{44}$$

Ако овие равенки се однесуваат до една иста афина координатна система, тогаш хиперболичните цилиндри (44) се викаат *конјугирани* еден на друг. Една произволна права, што минува низ пресекот на рамнините (43), има равенки $x_1 = l_1t$, $x_2 = l_2t$, $x_3 = x_3^0 + l_3t$. Равенката (35) за оваа права во однос на површините (44) добива облик $At^2 - 1 = 0$ одн. $At^2 + 1 = 0$. Оттука следува дека секоја од разгледуваните прави, при која е $A \neq 0$, ја сече само една од површините (44), а правите при кои е $A = 0$, т. е. оние кои лежат во една од рамнините (43), не ја сечат ниедна од површините (44). Рамнините (43) ги викаме *асимптотски рамнини* на хиперболичните цилиндри (44).

Правите, кои лежат во асимптотските рамнини на два конјугирани хиперболични хиперболоиди, се единствени прави кои минуваат низ нивниот пресек, а површините не ги сечат.

4. Параболоиди и параболичен цилиндер. При површината $x_1^2 + \varepsilon x_2^2 = x_3$ е $A \equiv l_1^2 + \varepsilon l_2^2$.

При елиптичниот параболоид е $A \equiv l_1^2 + l_2^2$. Од $A = 0$ следува $l_1 = l_2 = 0$. Спрема тоа: *При елиптичниот параболоид* $x_1^2+x_2^2=x_3$ *постои само еден асимптотски правец — правецот на* x_3*-оската.*

При параболичниот цилиндер е $\varepsilon = 0$ и $A = l_1^2$. Од $A = 0$ добиваме $l_1 = 0$. Значи: *Прави со асимптотски правец во однос на параболичниот цилиндер* $x_1^2 = x_3$ *се правите што се паралелни со рамнината* $x_1 = 0$.

Кај хиперболичниот параболоид е $\varepsilon = -1$ и $A \equiv l_1^2 - l_2^2$. За правите со асимптотски правец важи $l_1 - l_2 = 0$ или $l_1 + l_2 = 0$. Спрема тоа, *правите со асимптотски правец во однос на хипербилочниот параболоид* $x_1^2 - x_2^2 = x_3$ *се правите што се паралелни со една од рамнините* $x_1 - x_2 = 0$ *и* $x_1 + x_2 = 0$. Овие рамнини се викаат *директорни* или *смерни рамнини* на параболоидот.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека правите со асимптотски правци, во однос на еден конус, се правите паралелни со генератерисите на конусот.

2. Најди ги правите со асимптотски правци при елиптичниот цилиндер.

3. Определи ги правите со асимптотски правци за површината

a) $x_1^2 - x_2^2 = 0$; *b*) $x_1^2 - 1 = 0$.

4. Најди ја равенката на асимптотскиот конус на површината $a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 - a_3^2x_3^2 = a_4$.

§ 95. Тангенти и тангенцијални рамнини

1, Обопштение на поимот за тангента. Нека правата (34) биде тангента на квадриката (32) или (33) со допир во M_0. Точката

M_0 лежи, значи, на површината; затоа е, спрема (36) одн. (37), $C = 0$. Равенката (35) гласи тогаш

$$At^2 + 2\,Bt = 0, \tag{45}$$

во која е $A \neq 0$, бидејќи тангентите немаат, по дефиниција, асимптотски правци. На заедничката точка M_0 на правата и површината ѝ одговара коренот $t' = 0$ на равенката (45). Бидејќи таа точка е единствена заедничка точка на правата — тангентата — и површината, тоа други корени равенката (45) нема. Тоа е можно само ако е $B = 0$. Спрема тоа, *ако правата* (34) *е тангента со допир во* M_0 *на една од квадриките* (32) *и* (33), *важи* $B = 0$.

Да претпоставиме сега обратно: за една права (34), која минува низ една точка M_0 од површината (32) одн. (33), нека важи $B = 0$. Тогаш е и $C = 0$, и равенката (35) гласи $At^2 = 0$. Таа има само еден корен, ако е $A \neq 0$; правата тогаш нема асимптотски правец, а со површината има само една заедничка точка — правата е тангента со допир во M_0. А ако е $A = 0$, равенката е задоволена за секој t: правата лежи на површината.

Ја обопштуваме сега дефиницијата за тангентата на една квадрика во толку што и *правите, кои лежат на неа, ќе ги сметаме за нејзини тангенти, а секоја точка од овие прави за допирна точка.*

Сега можеме горните резултати да ги формулираме вака:

Ако точката M_0 $(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$ *од правата* (34) *лежи на квадриката* (32) *одн.* (33), *таа права е нејзина тангента тогаш и само тогаш кога е* $B = 0$.

2. Едно геометриско толкување на тангентата. Нека една права p биде сечица на една од нашите површини. Нејзините равенки нека бидат (34), а точката M_0 $(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$ нека е една од пресечните точки на правата и површината. На M_0 ѝ одговара параметарот $t' = 0$. Другиот пресек нека е M; нему му одговара некоја вредност t'' на параметарот t. t' и t'' се корени на една равенка од видот (35), во која е $C = 0$. t'' е, значи, корен од $At + 2B = 0$.

Сечицата M_0M ја завртуваме сега околу M_0 така да M совпадне со M_0, со што правата p добива една гранична положба p_0. Тогаш ќе е $t' = t'' = 0$, а во равенката (35) ќе е освен $C = 0$ и $B = 0$. Затоа, спрема т. 2, правата p_0 е тангента со допир во M_0.

До ист резултата дојдуваме и тогаш кога положбата на една сечица M_1M_2 ја менуваме така што пресечните точки M_1 и M_2 да совпаднат со една точка M_0 — со што добиваме една тангента како гранична положба на сечицата. Покажавме, значи:

Ако положбата на една сечица од некоја квадрика се менува, тогаш таа сечица во секоја нејзина „гранична" положба, кога двете нејзини пресечни точки совпаднат во една иста точка M_0, *е тангента на површината со допир во* M_0.

3. Тангенцијална рамнина. Ќе испитаме сега, каква заемна положба имаат тангентите на една квадрика со ист допир.

Нека допирот биде во M_0 $(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$. За која да е тангента со овој допир важи, спрема т. 1, дека $B = 0$.

I. Површини со центар. Ако површината е дадена со (32), тогаш е

$$(46)\qquad B \equiv l_1x_1^0 + \varepsilon l_2x_2^0 + \varepsilon' l_3x_3^0 = 0.$$

Секоја права (34), паралелна со кој да е вектор $l = \{l_1, l_2, l_3\}$ чии координати ја задоволуваат равенката (46), е една тангента на површината (32) со допир во M_0. Равенката (46) определува (§ 23, т. 7) една система компланарни вектори l. Тангентите во една точка M_0 на површината (32) лежат, значи, во една рамнина. Таа рамнина се вика *тангенцијална рамнина* на површината (32) со *допир* во M_0.

Ако $X(x_1, x_2, x_3)$ е која да е точка на тангенцијалната рамнина, тогаш координатите од $\overrightarrow{M_0X} = \{x_1 - x_1^0,\ x_2 - x_2^0,\ x_3 - x_3^0\}$ ја задоволуваат равенката (46), па имаме

$$(47)\qquad (x_1 - x_1^0)\, x_1^0 + \varepsilon\, (x_2 - x_2^0)\, x_2^0 + \varepsilon'\, (x_3 - x_3^0)\, x_3^0 = 0.$$

Обратно, ако важи (47), тогаш координатите од $\overrightarrow{M_0X}$ ја задоволуваат (46); правата M_0X е, значи, тангента. Точката X лежи, спрема тоа, на тангенцијалната рамнина. Равенката (47) е затоа равенка на таа тангенцијална рамнина. На равенката (47) можеме да ѝ дадеме попрегледен облик. Од (47) следува

$$xx_1^0 + \varepsilon xx_2^0 + \varepsilon' x_3\, x_3^0 = (x_1^0)^2 + \varepsilon(x_2^0)^2 + \varepsilon'(x_3^0)^2.$$

Точката M_0 е на површината, затоа е $(x_1^0)^2+\varepsilon(x_2^0)^2+\varepsilon'(x_3^0)^2 = \varepsilon''$. Равенката (47) сега затоа гласи

$$(48)\qquad x_1x_1^0 + \varepsilon x_2x_2^0 + \varepsilon' x_3x_3^0 = \varepsilon''.$$

Равенката (48) е равенка на тангенцијалната рамнина на површината (32) со допир во точката (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

II. Површини без центар. Ако површината е зададена со равенката (33), тогаш нејзините тангенти со допир во $M_0\,(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ се паралелни со оние вектори $\{l_1, l_2, l_3\}$, чии што координати ја задоволуваат равенката

$$(49)\qquad B \equiv l_1x_1^0 + \varepsilon l_2x_2^0 - l_3/2 = 0,$$

која определува една система компланарни вектори. Тангентите со допир во M_0 лежат, значи, и тука на една рамнина, пак наречена *тангенцијална рамнина* на површината со *допир* во M_0. Потребно и доволно за тоа, една точка $X(x_1, x_2, x_3)$ да лежи на неа, е условот, координатите од $\overrightarrow{M_0X}=\{x_1 - x_1^0,\ x_2 - x_2^0,\ x_3 - x_3^0\}$ да ја задоволуваат равенката (49), значи

$$(x_1 - x_1^0)\, x_1^0 + \varepsilon\, (x_2 - x_2^0)\, x_2^0 - (x_3 - x_3^0)/2 = 0.$$

Оттука, поради $(x_1^0)^2 + \varepsilon(x_2^0)^2 - x_3^0 = 0$, имаме

$$x_1x_1^0 + \varepsilon x_2x_2^0 = (x_3 + x_3^0)/2. \tag{50}$$

Равенката (50) *е равенка на тангенцијалната рамнина на површината* (33) *со допир во точката* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

ЗАДАЧИ

Изведи ја равенката на тангенцијалната рамнина на површините, зададени во зад. 1—4, со допир во точката (x_1^0, x_2^0, x_3^0). *Напат.*: Изврши ја трансформацијата на координатите $x_i' = x_i/a_i$ $(i = 1, 2, 3)$!

1. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1.$ 2. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 - x_3^2/a_3^2 = 1.$
3. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 - x_3^2/a_3^2 = -1.$ 4. $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 - x_3^2/a_3^2 = 0.$

Истата задача за површините во зад. 5 и 6, извршувајќи една подесна трансформација на координатите.

5. $x_1^2/p_1 + x_2^2/p_2 = 2x_3.$ 6. $x_1^2 = 2p\,x_3.$

Од точката M_0 се спуштени тангенти на квадриката, зададена во зад. 7—9. Најди ја равенката на површината што ја образуваат овие тангенти. *Напат.*: Постави го условот $B^2 - AC = 0$, а потоа замени ги l_i со $x_i - x_i^0$!

7. $x_1^2 + x_2^2 = x_3$; $M_0\,(0, 0, -1)$.

8. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$; $M_0\,(1\ 1\ ,1)$.

9. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$; M_0 $(0, 0, a)$. Кон која површина се стреми бараната површина, ако a се стреми кон нула?

На квадриките, зададени во зад. 10—14, се повлечени тангенти, паралелни со векторот $\mathbf{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$. Определи ја равенката на површината што ја образуваат овие тангенти. *Напат.*: Постави го условот за допир $B^2 - AC = 0$, а x_1^0, x_2^0, x_3^0 сметај ги како променливи!

10. $x_1^2 + x_2^2 = x_3$; $\mathbf{l} = \{1, 0, 0\}$.

11. $x_1^2 - x_2^2 = x_3$; $\mathbf{l} = \{0, 1, 0\}$.

12. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; $\mathbf{l} = \{0, 0, 1\}$.

13. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; $\mathbf{l} = \{1, 1, 0\}$. Покажи дека површината е еден пар рамнини.

14. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$; $\mathbf{l} = \{1, -1, 0\}$. Покажи дека површината е хиперболичен цилиндер.

4. Пол и поларна рамнина. Да испитаме што претставува равенката (48), ако точката $M_0\,(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ не лежи на површината (32). Бидејќи равенката (48) е линеарна по x_1, x_2, x_3, таа претставува една рамнина. Ја наречуваме *поларна рамнина* на *полот* M_0 во однос на порвшината (32). Во курсот по Проективна геометрија ќе ја испитаме оваа рамнина поподробно. Сега ќе спомeнеме едно нејзино својство, и тоа за случај кога од точката M_0 можат на површината да се повлечат тангенти. Ако е тоа случај, која да е од нив нека има допир во $M'(x_1', x_2', x_3')$. Оваа точка лежи во тангенцијалната рамнина

$$x_1x_1' + \varepsilon x_2x_2' + \varepsilon' x_3x_3' = \varepsilon''.$$

Во неа лежи и точката $M_0\,(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$; затоа е

$$x_1^0x_1' + \varepsilon x_2^0x_2' + \varepsilon' x_3^0x_3' = \varepsilon''.$$

А оваа еднаквост покажува дека координатите од M' ја задоволуваат равенката на поларната рамнина (48) од точката M_0. Според тоа, *допирните точки на тангентите, повлечени од една точка M_0 на квадриката* (32), *лежат на една рамнина — поларната рамнина на точката M_0*.

Аналогно важи за квадриките (33).

5. Пресек на квадриката со една нејзина тангенцијална рамнина. Нека точката $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ биде допирната точка на една тангенцијална рамнина на некоја квадрика, а M која да е заедничка точка, различна од M_0, на квадриката и таа рамнина. Равенките на правата M_0M нека се дадени во вид (34), а равенката на квадриката во вид (32) одн. (33). Тогаш е во равенката (35) $B = C = 0$, и таа гласи $At^2 = 0$. На точката M ѝ одговара еден корен од оваа равенка кој е различен од нула. А оваа равенка има корен, различен од нула, само ако е $A = 0$. Бидејќи е, значи, $A = B = C = 0$, тоа правата M_0M лежи на површината. Значи, *заедничките точки на една квадрика и која да е нејзина тангенцијална рамнина лежат на правите што минуваат низ допирот, ако допирот не е единствената заедничка точка на површината и тангенцијалната рамнина.*

Обратно, *правите што лежат на една квадрика и се сечат во една точка M_0, лежат на тангенцијалната рамнина на квадриката со допир во M_0*. Навистина, ако равенките (34) претставуваат една таква права, тогаш е $A = B = C = 0$; а $B = C = 0$ е услов за тоа, правата (34) да биде тангента на површината со допир во M_0. Правата лежи, значи, во тангенцијалната рамнина со допир во M_0.

I. *Квадрики со центар*. Да ги разгледаме прво површините (32). Заедничките точки на оваа површина со нејзината тангенцијална рамнина чија допирна точка е M_0 ги образуваат оние прави (34) кои лежат на површината. За тоа е потребно и доволно да е

$$A \equiv l_1^2 + \varepsilon l_2^2 + \varepsilon' l_3^2 = 0, \tag{51}$$

$$B \equiv l_1 x_1^0 + \varepsilon l_2 x_2^0 + \varepsilon' l_3 x_3^0 = 0, \tag{52}$$

$$C \equiv (x_1^0)^2 + \varepsilon (x_2^0)^2 + \varepsilon' (x_3^0)^2 - \varepsilon'' = 0. \tag{53}$$

Да претпоставиме прво дека е $x_1^0 \neq 0$. Со елиминација на l_1 од (51) и (52), и на x_1^0 од така добиената равенка и (53), добиваме

$$\varepsilon l_2^2 [\varepsilon'' - \varepsilon' (x_3^0)^2] + 2\varepsilon\varepsilon' l_2 l_3 x_2^0 x_3^0 + \varepsilon' l_3^2 [\varepsilon'' - \varepsilon (x_2^0)^2] = 0. \tag{54}$$

Делејќи ја оваа равенка со l_3^2, добиваме една квадратна равенка по l_2/l_3, ако претпоставиме дека $\varepsilon \neq 0$. Нејзината дискриминантна е

$$D = 4\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' [\varepsilon'' - \varepsilon (x_2^0)^2 - \varepsilon' (x_3^0)^2] = -4\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' (x_1^0)^2.$$

Равенките (54) и (52) даваат две, едно или ниедно решение за $l_1 : l_2 : l_3$ — според тоа дали е $D > 0$, $D = 0$ или $D < 0$.

1. Елипсоид. $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1$; значи $D < 0$. Допирната точка е единствената заедничка точка на тангенцијалната рамнина и елипсоидот.

2. Еднокрилен хиперболоид. $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$, $\varepsilon'' = 1$; затоа $D > 0$. Тангенцијалната рамнина ја сече површината во две прави.

3. Двокрилен хиперболоид. $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = \varepsilon'' = -1$, од каде $D < 0$. Тангенцијалната рамнина нема со површината други заеднички точки освен допирот.

4. Конус. $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$, $\varepsilon'' = 0$; затоа $D = 0$. Тангенцијалната рамнина го сече конусот во една права. Бидејќи равенката на секоја тангенцијална рамнина на нашиот конус е задоволена за $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоа таа права е онаа права што допирот го сврзува со врвот на конусот, а тоа е токму една негова генератриса.

5. Елиптичен и хиперболичен цилиндер. $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = 0$, $\varepsilon'' = 1$; затоа $D = 0$. Имаме едно решение. Од (54) следува $l_2 = 0$, а потоа од (51) $l_1 = 0$. Заедничката права е паралелна со x_8-оската; таа е, спрема тоа, онаа генератриса на цилиндерот што мунува низ допирот.

Да претпоставиме сега дека $x_1{}^0 = 0$, но $x_2{}^0 \neq 0$. Со елиминација на l_2 од (51) и (52) следува, бидејќи $\varepsilon = 1/\varepsilon = \pm 1$,

$$l_1{}^2(x_2{}^0)^2 + \varepsilon' l_3{}^2\,[(x_2{}^0)^2 + \varepsilon\varepsilon'\,(x_3{}^0)^2] = 0.$$

Од (53) добиваме $\varepsilon\varepsilon'(x_3{}^0)^2 + (x_2{}^0)^2 = \varepsilon[\varepsilon\,(x_2{}^0)^2 + \varepsilon'\,(x_3{}^0)^2] = \varepsilon\varepsilon''$. Затоа имаме

$$l_1{}^2(x_2{}^0)^2 + \varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' l_3{}^2 = 0.$$

Оттука следуваат пак горните резултати.

Најпосле нека биде $x_1{}^0 = x_2{}^0 = 0$. Од (53) следува дека тоа е можно само кај елипсоидот и двокрилниот хиперболоид. Од (52) добиваме $l_3 = 0$, за која вредност равенката (51) нема решенија, што пак ни ги дава горните резултати.

Тоа беа сите можности, зашто $x_1{}^0 = x_2{}^0 = x_3{}^0 = 0$ може да биде само кај конусот, т. е. за неговиот врв. Но тангенцијалната рамнина на конусот во врвот не е определена.

Бидејќи горното изведување е направено за една произволна точка M_0 на површината (32), т. е. за која да е нејзина тангенцијална рамнина, тоа на тој начин го докажавме следното:

Елипсоидот и двокрилниот хиперболоид имаат со секоја своја тангенцијална рамнина само една заедничка точка — допирната точка на рамнината.

Еднокрилниот хиперболоид ја пресечува секоја своја тангенцијална рамнина во две прави чии пресек е допирната точка од рамнината.

Конусот, елиптичниот и хиперболичниот цилиндер имаат со секоја своја тангенцијална рамнина заедничка по една права, имено онаа генератриса на површината што минува низ допирот.

II. Квадрики без центар. Да ги разгледаме сега површините (33). За да ги добиеме сите пресечни точки на површината (33) со нејзината тангенцијална рамнина (50), треба да ги најдеме сите оние тангенти со допир во M_0 кои лежат на површината. За тоа е потребно и доволно да биде

(55) $$A \equiv l_1{}^2 + \varepsilon l_2{}^2 = 0,$$

(56) $$B \equiv x_1{}^0 l_1 + \varepsilon x_2{}^0 l_2 - l_3/2 = 0,$$

(57) $$C \equiv (x_1{}^0)^2 + \varepsilon(x_2{}^0)^2 - x_3{}^0 = 0.$$

Да претпоставиме прво дека е $x_1{}^0 \neq 0$. Елиминирајќи го l_1 од (55) и (56), добиваме

$$4\varepsilon l_2{}^2\,[(x_1{}^0)^2 + \varepsilon\,(x_2{}^0)^2] - 4\varepsilon x_2{}^0 l_2 l_3 + l_3{}^2 = 0.$$

Делејќи ја оваа равенка со $l_2{}^2$, добиваме една квадратна равенка за l_3/l_2, чија дискриминанта е

$$D = -16\,\varepsilon(x_1{}^0)^2.$$

1. **Параболичен цилиндер.** $\varepsilon = 0$, значи $D = 0$. Имаме една заедничка права. Таа права е една генератриса на цилиндерот, зашто од (55) следува $l_1 = 0$, а од (56) дека $l_3 = 0$.

2. **Елиптичен параболоид.** $\varepsilon = 1$, значи $D < 0$. Нема пресечни прави.

3. **Хиперболичен параболоид.** $\varepsilon = -1$, значи $D > 0$. Постојат две пресечни прави.

До исти резултати доаѓаме ако е $x_1^0 = 0$, $x_2^0 \neq 0$, или ако е $x_1^0 = x_2^0 = 0$, што наеднаш се верификува. Значи:

Елиптичниот параболоид нема со своите тангенцијални рамнини други заеднички точки освен допирните точки.

Хиперболичниот параболоид ја пресечува секоја своја тангенцијална рамнина во две прави чии пресек е допирната точка на тангенцијалната рамнина.

Параболичниот цилиндер ја допира секоја своја тангенцијална рамнина во една своја генератриса.

ЗАДАЧИ

Најди го пресекот на квадриката, зададена во зад. 1 и 2, со нејзината тангенцијална рамнина во M_0.

1. $x_1^2 - x_2^2 = x_3$; *a*) $M_0\,(0, 0, 0)$; *b*) $M_0\,(a, a, 0)$.
2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$; *a*) $M_0\,(1, 0, 0)$; *b*) $M_0\,(0, 1, 0)$.

3. Покажи дека тангенцијалните рамнини на површината $x_1^3 - x_2^2 = x_3$, чии допирни точки лежат на правата $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$, образуваат еден сноп.

§ 96. Дијаметрални рамнини

1° Дефиниција и равенка на дијаметралните рамнини. Да посматраме една квадрика и правите кои се паралелни со еден произволен правец. Меѓу тие прави има и сечици на квадриката само тогаш ако смерот на правите не е асимптотски, што лесно се проверува.

Ќе испитаме сега какво е геометриското место на средините од оние тетиви на една квадрика кои имаат еден определен правец. Квадриката нека е зададена со равенката (32) одн. (33), а тетивите нека бидат паралелни со векторот $\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$. Една од тие тетиви — ќе ја означиме со $\overline{M_1M_2}$ — нека лежи на правата чии равенки се (34), а $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ нека е средината од $\overline{M_1M_2}$. Пресечните точки M_1 и M_2 на сечицата M_1M_2 со квадриката ги определуваат корените t', t'' на равенката (35). Бидејќи векторскиот облик на равенките (34) е

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \boldsymbol{l}t,$$

каде што е $\mathfrak{r}_0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$, тоа точките M_1 и M_2 се определени со радиус-векторите $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0 + \boldsymbol{l}t'$ и $\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}_0 + \boldsymbol{l}t''$. Оттука добиваме

$$t' = (\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_0)/\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_0M_1}/\boldsymbol{l}, \qquad t'' = (\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}_0)/\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_0M_2}/\boldsymbol{l}.$$

Бидејќи $\overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_0M_2} = \mathbf{0}$, тоа $t' + t'' = 0$. Спрема правилото на Виет е тогаш $B = 0$.

Ако квадриката е дадена со равенката (32), имаме, значи,

$$B \equiv l_1x_1^0 + \varepsilon l_2x_2^0 + \varepsilon' l_3x_3^0 = 0, \tag{58}$$

а ако квадриката е дадена со (33), е

$$B \equiv l_1x_1^0 + \varepsilon l_2x_2^0 - l_3/2 = 0. \tag{59}$$

Координатите x_1^0, x_2^0, x_3^0 на средината на секоја тетива на површината (32) одн. (33), која е паралелна со $\{l_1, l_2, l_3\}$, ја задоволуваат равенката (58) одн. (59). Овие равенки претставуваат, спрема тоа, ако x_1^0, x_2^0, x_3^0 се променливи, равенки на бараното геометриско место. Пишувајќи x_i место x_i^0, имаме

(60) $l_1x_1 + \varepsilon l_2x_2 + \varepsilon' l_3x_3 = 0$ одн. (61) $l_1x_1 + \varepsilon l_2x_2 - l_3/2 = 0.$

Овие равенки се линеарни во однос на x_1, x_2, x_3; затоа претставуваат рамнини. Со тоа покажавме дека:

Средините на тетивите од една квадрика што се паралелни со еден (неасимптотски) правец лежат на една рамнина.

Таа рамнина се вика *дијаметрална рамнина* на квадриката, *конјугирана* со правецот на паралелните тетиви. *Равенката* (60) *е равенка на дијаметралната рамнина на квадриката* (32), *конјугирана со правецот на векторот* $\{l_1, l_2, l_3\}$; *а равенката* (61) *е равенка на дијаметралната рамнина на квадриката* (33), *конјугирана со правецот на* $\{l_1, l_2, l_3\}$.

2. Квадрики со центар. Да ја разгледаме прво равенката (60). Таа е задоволена за $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, при секакви вредности за l_1, l_2, l_3. Спрема тоа, сите дијаметрални рамнини на една квадрика со центар минуваат низ нејзиниот центар.

Обратно, секоја точка низ која минуваат сите дијаметрални рамнини на една квадрика е еден нејзин центар. Навистина, таа точка ги располовува тетивите што минуваат низ неа. А таква точка ја дефиниравме (§ 93, т. 1) како центар на површината.

Кај елипсоидот, хиперболоидите и конусот постои само еден центар, зашто рамнините (60), при $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon' \neq 0$, имаат само една заедничка точка.

Ако е во (32) $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = 0$, $\varepsilon'' = 1$, површината е елиптичен или хиперболичен цилиндер. Сите рамнини (60) минуваат тогаш низ x_3-оската. Затоа таа права ја викаме *оска* на цилиндерот. *Секоја точка од оската на елиптичниот или хиперболичниот цилиндер е еден центар на површината.*

3. Квадрики без центар. Сега да ја разгледаме равенката (61).

При $\varepsilon = \pm 1$, т. е. при параболоидите, рамнините (61) се паралелни со x_3-оската, зашто коефициентот пред x_3 во равенката е нула. *Сите дијаметрални рамнини при кој да е параболоид се паралелни со еден ист правец — тие образуваат една ѕвезда.*

Ако е $\varepsilon = 0$, т. е. ако површината (33) е параболичен цилиндер, рамнините (61) се паралелни со x_2x_3-рамнината. Значи, *дијаметралните рамнини кај параболичниот цилиндер се паралелни меѓу себе — тие образуваат еден сноп паралелни рамнини.*

Меѓу рамнините (61) има и рамнини кои се меѓу себе паралелни и несовпаднати. Сите рамнини (61), при се возможни вредности за l_1, l_2, l_3 немаат, значи, некоја заедничка точка. Површините (33) затоа немаат центри. Оттука доаѓа и нивното име — квадрики без центар.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека при секоја од изучените квадрики постојат тетиви што се паралелни со кој да е неасимптотски правец.

2. Покажи дека дијаметралната рамнина на која да е квадрика не е паралелна со правецот со кој е конјугирана.

На која рамнина лежат средините на тетивите што се паралелни со векторот l, при квадриките зададени во зад. 3—6.

3. $x_1^2 - x_2^2 = x_3$; $l = \{1, 0, 1\}$.
4. $x_1^2 + x_2^2 = x_3$; $l = \{1, 1, 0\}$.
5. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$; $l = \{2, -1, 1\}$.
6. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$; $l = \{1, 1, 1\}$.

На рамнините, зададени во зад. 7—12, лежат средините на паралелните тетиви во зададените површини. Определи го правецот на тие тетиви.

7. $5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
8. $3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$.
9. $2x_1 - 3x_3 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$.
10. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
11. $3x_1 + 5x_2 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
12. $6x_1 - 5x_2 - 1 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 = x_3$.

13. Покажи дека тетивите што се располовуваат во некоја зададена точка M_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0), која не е центар, при која да е од изучените квадрики, лежат во една рамнина. Напиши ја равенката на таа рамнина. *Напат.*: Во (60) одн. (61) смени ги x_i со x_i^0, а l_i со $x_i - x_i^0$, $(i = 1, 2, 3)$!

Во која рамнина лежат тетивите на зададените површини што се располовуваат во M_0 (зад. 14—15).

13. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$; $M_0\,(1/2, 1/2, 1/2)$.
14. $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$; $M_0\,(3, 2, -4)$.
15. $x_1^2 - x_2^2 = 0$; $M_0\,(2, 1, 0)$.

16. Да се покаже: Ако векторите l образуваат една система компланарни вектори, тогаш дијаметралните рамнини од која да е квадрика, конјугирани со нивните правци, образуваат еден сноп рамнини.

Изведи ги равенките на дијаметралните рамнини на зададените површини, во зад. 17—20, конјугирани со правецот на векторот $\{l_1, l_2, l_3\}$.

17. $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4 = 0$.
18. $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3 = 0$.
19. $x_1^2/a_1 + x_2^2/a_2 = 2x_3$
20. $x_1^2 = 2px_3$.

§ 95. Фамилии прави на квадриките

Во § 95, т. 5 покажавме дека на некои квадрики лежат прави — пресеците на квадриките со нивните тангенцијални рамнини. Низ секоја точка на еднокрилниот хиперболоид и на хиперболичниот параболоид минуваат две прави кои лежат на површината. Ќе го покажеме сега тоа на друг начин.

1. Еднокрилен хиперболоид. Равенката на еднокрилниот хиперболоид

(62) $$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$$

можеме да ја запишеме во облик $x_1^2 - x_3^2 = 1 - x_2^2$, или

(63) $$(x_1 - x_3)(x_1 + x_3) = (1 - x_2)(1 + x_2).$$

Ги формираме равенките

(64) $$x_1 + x_3 = \lambda(1 + x_2); \quad x_1 - x_3 = (1 - x_2)/\lambda,$$

во кои λ е произволен параметар. Тие претставуваат една фамилија прави во просторот.

Нека е $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ која да е точка на површината (63). Вредноста на $(x_1^0 + x_3^0)/(1 + x_2^0)$ нека е λ_0; тогаш следува од (63) дека $(1 - x_2^0)/(x_1^0 - x_3^0) = \lambda_0$. Точката M_0 лежи, значи, на онаа права од фамилијата (64) која се добива за $\lambda = \lambda_0$. Ако е $1 + x_2^0 = 0$, или $x_1^0 - x_3^0 = 0$, ќе ставиме $1/\lambda = 0$. Спрема тоа, *низ секоја точка на површината* (63) *одн.* (62) *минува една и само една права од фамилијата* (64).

Избираме сега која да е права од фамилијата (64), ставајќи $\lambda = \lambda_0$. Множејќи ги равенките (64), го елиминираме со тоа λ_0 и добиваме (63). *Сите прави* (64) *лежат*, значи, *на површината* (62).

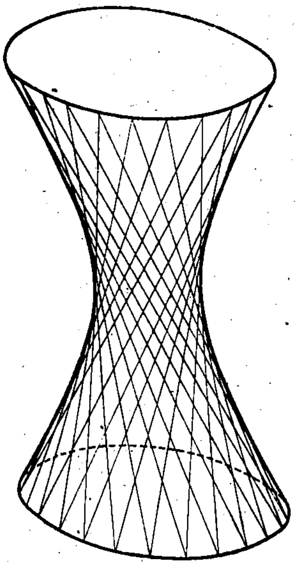
Бидејќи низ секоја точка на површината минува само една права од фамилијата, тоа следува оттука дека *кои да е две прави од фамилијата* (64) *не се сечат.*

Да видиме сега дали меѓу овие прави има паралелни прави. Правите (64) се паралелни со векторите $\{\lambda - 1/\lambda, 2, \lambda + 1/\lambda\}$. Да избереме кои да е две прави од фамилијата (64), ставајќи $\lambda = \lambda'$

и $\lambda = \lambda''$. Тие се паралелни со векторите $\{\lambda' - 1/\lambda', 2, \lambda' + 1/\lambda'\}$ и $\{\lambda'' - 1/\lambda'', 2, \lambda'' + 1/\lambda''\}$. Овие два вектори се паралелни ако е

$$\lambda' - 1/\lambda' = \lambda'' - 1/\lambda'', \quad \lambda' + 1/\lambda' = \lambda'' + 1/\lambda''.$$

Со собирање на овие две равенки добиваме $\lambda' = \lambda''$; тоа значи дека избраните прави се паралелни само тогаш ако совпаднуваат. Меѓу правите (64) нема, значи, паралелни прави. Според тоа, *кои да е две прави од фамилијата* (64) *се разминувачни.* Тоа го докажавме за случај кога е $\lambda \neq 0$, $1/\lambda \neq 0$. Но важи и тогаш кога е $\lambda = 0$ или $1/\lambda = 0$. Провери го тоа!



Сл. 137

Аналогни теореми што ги докажавме за правите (64), важат и за правите

$$(65) \qquad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= \mu(1 - x_2), \\ x_1 - x_3 &= (1 + x_2)/\mu. \end{aligned}$$

Доказите се аналогни на горните.

Според тоа, *на еднокрилниот хиперболоид постојат две фамилии прави. Две кои да е прави од една иста фамилија се разминувачни.*

Ќе покажеме дека, општо, секоја права од едната фамилија ја сече секоја права од другата фамилија. Решенијата на системата равенки (64) и првата од равенките (65) по x_1, x_2, x_3 се

$$(66) \qquad x_1 = \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda + \mu}, \quad x_2 = \frac{-\lambda + \mu}{\lambda + \mu}, \quad x_3 = \frac{\lambda\mu - 1}{\lambda + \mu}.$$

Но тоа е решение и на втората од равенките (65). Која да е права од првата фамилија и која да е права од втората фамилија се сечат значи во една точка, ако не е $\lambda + \mu = 0$. За правите, за кои важи $\lambda + \mu = 0$, се проверува дека се паралелни. Значи, *секоја права од едната фамилија ги сече сите прави од другата фамилија освен една, која е паралелна со неа.*

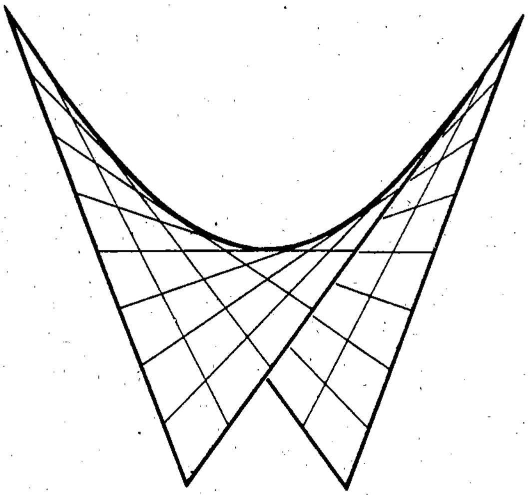
Равенките (66) определуваат, при секоја вредност на λ, μ, координати x_1, x_2, x_3 на една точка од површината (62), а и секоја точка од површината определува еден λ и μ (при тоа е можно и $1/\lambda = 0$ или $1/\mu = 0$; во тој случај соодветните равенки треба да се трансформираат така да во нив настапуваат место λ, μ дропките $1/\lambda$, $1/\mu$). Равенките (66) се затоа *параметарски равенки* на површината (62).

2. Хиперболичен параболоид. Равенката на хиперболичниот параболоид

$$x_1^2 - x_2^2 = x_3 \tag{67}$$

можеме да ја запишеме во облик

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_3. \tag{68}$$



Сл. 138

Тогаш правите

$$x_1 + x_2 = \lambda, \qquad x_1 - x_2 = x_3/\lambda \tag{69}$$

и правите

$$x_1 - x_2 = \mu, \qquad x_1 + x_2 = x_3/\mu, \tag{70}$$

кадешто λ и μ се произволни параметри, лежат на површината (68) одн. (67). Навистина, елиминирајќи го λ од (69), или μ од (70), добиваме (68). Правите (69) се паралелни со рамнината $x_1 + x_2 = 0$, а правите (70) со рамнината $x_1 - x_2 = 0$.

Равенките (69) и (70) го имаат заедничкото решение

$$x_1 = (\lambda + \mu)/2, \qquad x_2 = (\lambda - \mu)/2, \qquad x_3 = \lambda\mu. \tag{71}$$

Спрема тоа, *секоја права од фамилијата* (69) *ја сече секоја права од фамилијата* (70).

А две прави од една иста фамилија немаат заеднички точки. Низ секоја точка на површината (67) минува имено по една и само една права од секоја фамилија. Навистина, ако $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ е една точка од површината, тогаш $x_1^0 + x_2^0$ определува само една вредност за λ, а $x_1^0 - x_2^0$ само една вредност за μ.

Правите (69) се паралелни со векторите $\{1, —1, 2\lambda\}$. А овие вектори при различни вредности за λ не се колинеарни. Кои да е две прави од фамилијата (69) не се, значи, паралелни. Аналогно се покажува и за правите (70). *Правите од истата фамилија не се паралелни и не се сечат; тие се,* значи, *разминувачни.*

Равенките (71) определуваат за секоја вредност на λ и μ координати на една точка од површината (76); а и обратно, секоја точка од површината определува еден пар броеви λ, μ. Равенките (71) се, значи, *параметарски равенки* на површината (67).

ЗАДАЧИ

Кои прави на зададената површина минуваат низ точката M_0:

1. $x_1^2 + x_2^2 — x_3^2 — 1 = 0$; *a)* $M_0(3/5, —4/5, 0)$; *b)* $M_0(5/4, 0, —3/4)$;
c) $M_0(1, 1, 1)$.

2. $x_1^2 — x_2^2 = x_3$; *a)* $M_0(1, 1, 0)$; *b)* $M_0(1, 0, 1)$; *c)* $M_0(3, 2, 5)$.

3. Направи модел од картон за хиперболичен параболоид.

4. Најди ги равенките на оние прави што лежат на површините во зад. 1, а кои се паралелни со оние прави од површината што минуваат низ дадената точка M_0.

§ 98. Пресек на квадрика со рамнина

1. Пресек на квадриката со паралелни рамнини. Сите изучени квадрики можеме да ги опфатиме со равенката

$$(72) \qquad x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon' x_3^2 + \varepsilon'' x_3 + \varepsilon''' = 0,$$

каде што ε, ε', ε'', ε''' значат 1, —1 или 0.

Рамнините, паралелни со x_1x_2-рамнината, ја сечат оваа површина во слични криви (елипси, хиперболи или парови паралелни прави). Ќе ги разгледаме сега уште пресеците на површината (72) со рамнините што не се паралелни со рамнината $x_3 = 0$. Равенката на една таква рамнина нека гласи

$$(73) \qquad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0.$$

Тука е барем еден од коефициентите A_1, A_2 различен од нула. Да претпоставиме дека е $A_1 \neq 0$. Извршуваме трансформација на координатите, дефинирана со

$$x_1' = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3.$$

Во новата система равенката на површината (72) гласи

$$(74) \qquad (x_1' — A_2x_2' — A_3x_3' — A_4)^2/A_1^2 + \varepsilon x_2'^2 + \varepsilon' x_3'^2 + \varepsilon'' x_3' + \varepsilon''' = 0.$$

Пресекот на површината (74) со рамнината $x' = \lambda$ е

$$(75)\quad (A_2x_2' + A_3x_3')^2/A_1^2 + \varepsilon x_2'^2 + \varepsilon' x_3'^2 + \ldots = 0, \quad x_1' = \lambda.$$

Во првата од овие равенки се запишани само квадратните членови. Тие се независни од λ. Затоа сите рамнини што се паралелни со рамнината (73) ја сечат површината (72) — спрема § 77, стр. 321, прим. 2 — во слични коники, ако заемно конјугираните хиперболи ги убројуваме меѓу „слични" криви.

Истото се покажува и за $A_1 = 0$, $A_1 \neq 0$. Затоа важи општо:

Паралелните рамнини ја сечат секоја квадрика во слични конусни пресеци, сметајќи ги тука и заемно конјугираните хиперболи.

2. Пресек на рамнина и конус. Резултатите од т. 1 важат за сите квадрики (72). Ќе ги иследиме добиените резултати поподробно за случајот кога површината (72) е конус.

Ќе испитаме прво со колку генератриси од конусот

$$(76)\qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

може да биде паралелна рамнината (73). Ако една генератриса од (76), паралелна со векторот $\{l_1, l_2, l_3\}$, е паралелна со рамнината (73), важи

$$(77)\qquad l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 = 0, \qquad A_1l_1 + A_2l_2 + A_3l_3 = 0,$$

и обратно. Да претпоставиме дека $A_1 \neq 0$. Го елиминираме l_1 од (77), па добиваме

$$l_2^2(A_1^2 + A_2^2) + 2A_2A_3\,l_2l_3 + l_3^2(A_3^2 - A_1^2) = 0.$$

Делејќи ја оваа равенка со l_3^2, добиваме за l_2/l_3 една квадратна равенка, чија дискриминантна е $4A_1^2(A_1^2 + A_2^2 - A_3^2)$. Поради $A_1 \neq 0$, системата (77) има две, едно или ниедно решение по $l_1 : l_2 : l_3$ — според тоа дали изразот $A_1^2 + A_2^2 - A_3^2$ е позитивен, нула или негативен. Истото се покажува и за случаевите кога $A_2 \neq 0$, или $A_3 \neq 0$. Значи, имаме:

[1] *Рамнината (73) е паралелна со две, една или ниедна од генератрисите на конусот (76) — според тоа дали изразот* $A_1^2 + A_2^2 - A_3^2$ *е позитивен, нула или негативен.*

Да видиме сега каква е кривата (75), ако (72) е конус, т. е. ако е $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$, $\varepsilon'' = \varepsilon''' = 0$. Изразот Δ_2, дефиниран во § 77, е тогаш

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2^2/A_1^2 + 1 & A_2A_3/A_1^2 \\ A_2A_3/A_1^2 & A_3^2/A_1^2 - 1 \end{vmatrix} = -(A_1^2 + A_2^2 - A_3^2)/A_1^2.$$

Кривата е, значи од елиптичен, параболичен или хиперболичен тип — според тоа дали $A_1^2 + A_2^2 - A_3^2$ е < 0, $= 0$ или > 0. Овој резултат е добиен при претпоставката дека $A_1 \neq 0$. Но истиот резултат се добива и во случај кога е $A_2 \neq 0$ или $A_3 \neq 0$.

Со оглед на [1] следува оттука:

Рамнините што се паралелни со две генератриси на еден конус го пресечуваат во хиперболи, рамнините што се паралелни со една негова генератриса го сечат во параболи, а рамнините што не се паралелни со ниедна негова генератриса го сечат во елипси — освен рамнините што минуваат низ неговиот врв, кои го сечат конусот во дегенерирани криви: во две прави, една права одн. во една точка.

Поради тоа што пресекот на една рамнина со конусот може да биде и елипса, и хипербола, и парабола, тоа овие криви ги викаме со заедничко име *конусни пресеци* или *коники*.

§ 99. Афина еквивалентност на квадриките

Ќе испитаме сега во што прејдува секоја од изучените квадрики, ако над точките од просторот извршиме кое да е афино пресликување. Ако во просторот е избрана една афина координатна система, може во просторот да се избере и една таква система, да кореспондентните точки, при кое да е зададено афино пресликување, имаат во однос на првата одн. втората координатна система еднакви хомологни координати (§ 45, 48). Тоа значи, ако точките од некоја површина ги подвргнеме на некое афино пресликување, тогаш координатите на пресликаните точки ја задоволуваат истата равенка, само во однос на некоја друга, подесно избрана афина координатна система.

Елипсоид, на пр., е површината чија што равенка е (23), и тоа во каква да е афина система. Значи, *сите елипсоиди се афино еквивалентни* (§ 49, т. 4). *Афина слика на елипсоидот е елипсоид.* Аналогно важи за сите други квадрики. Значи, *секоја од изучените квадрики е афино еквивалентна со сите еднаквоимени квадрики. Афина слика на една квадрика е една еднаквоимена квадрика.*

ЗАДАЧИ

Во што се пресликуваат дадените квадрики при означените пресликувања? Координатите се однесуваат до една иста координатна система.

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; $x_1 = x_1'/a_1$, $x_2 = x_2'/a_2$, $x_3 = x_3'/a_3$.

2. $x_1 x_2 = x_3$; $x_1 = x_1' - x_2'$, $x_2 = x_1' + x_2'$, $x_3 = x_3'$.

3. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 1 = 0$; $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_2 + x_3$, $x_3' = x_3 + x_1$.

Некои метрични особини на квадриките

§ 100. Метрични канонични равенки на квадриките

Досега се запознавме со површините

(1) $$x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon' x_3^2 = \varepsilon''$$

и површините

(2) $$x_1^2 + \varepsilon x_2^2 = x_3,$$

каде што ε, ε', ε'' е 0, 1, или —1. Подоцна ќе покажеме (гл. V) дека постојат безброј афини координатни системи во однос на кои равенките на овие површини го имаат истиот облик (1) одн. (2). Посебно ќе покажеме дека постои и една правоагла система, општо со различни должини на координатните вектори, во однос на која равенката на површината истотака си го запазува видот (1) одн. (2). Да претпоставиме дека равенките (1) и (2) се однесуваат веќе на таква координатна система. Сега избираме една единица за должина *e*. Координатните вектори e_1, e_2, e_3 на нашата система, мерени со оваа единица, нека имаат должини *a*, *b*, *c*. Прејдуваме кон една нова координатна система, при која оските совпаднуваат со соодветните оски на старата система, но сите три нови координатни вектори нека имаат должина еднаква на *e*. Трансформационите равенки за премин од старите кон новите координати, што ќе ги бележиме со *x*, *y*, *z*, гласат

$$x_1 = x/a, \quad x_2 = y/b, \quad x_3 = z/c.$$

Во новата система равенката на површината (1) гласи

(3) $$x^2/a^2 + \varepsilon y^2/b^2 + \varepsilon' z^2/c^2 = \varepsilon'',$$

а равенката на квадриката (2):

(4) $$x^2/a^2 + \varepsilon y^2/b^2 = z/c.$$

Да ги разгледаме прво површините (3), т. е. површините со центар. Според разни вредности за ε, ε', ε'', равенката (3) ги добива следните видови и претставува:

(5)	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$	*Елипсоид;*
(6)	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$	*Еднокрилен хиперболоид;*
(7)	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$	*Двокрилен хиперболоид;*
(8)	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$	*Конус;*
(9)	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	*Елиптичен цилиндер;*

(10) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$ *Хиперболичен цилиндер;*

(11) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ *Пар непаралелни рамнини.*

Асимптотскиот конус на хиперболоидот (6) и (7) има равенка (8).

Равенките (5) — (11) ги викаме *метрични канонични равенки* на површините.

Правите што совпаднуваат со координатните оски имаат во однос на овие површини нарочна положба; ги наречуваме *оски* на површината. Нивните пресеци со површината ги викаме *темиња* на површината. А и отсечките што ги соединуваат темињата на една оска ги наречуваме „*оски*" во потесна смисла на зборот. Броевите a, b, c во (5) — (7) и (9) — (10) ги викаме *должини на полуоските.*

Ќе ја разгледаме сега уште површината (4). Ставувајќи $a^2/2c = p$, $\varepsilon \cdot b^2/2c = q$, таа добива вид

$$x^2/p + y^2/q = 2z, \tag{12}$$

ако е $\varepsilon \neq 0$, а ако е $\varepsilon = 0$:

$$x^2 = 2pz. \tag{13}$$

Равенката (12) ја викаме *метрична канонична равенка* на параболоидот, и тоа елиптичен ако е $pq > 0$, а хиперболичен ако е $pq < 0$. Точката во која z-оската — *оската на параболоидот* — ја сече површината, ја викаме *теме* на параболоидот.

Равенката (13) е *метрична канонична равенка* на параболичниот цилиндер.

§ 101. Ротациони квадрики

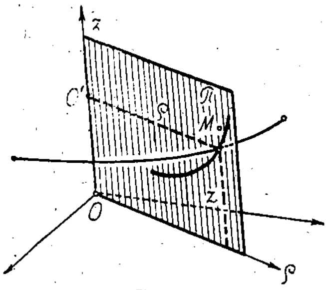
1. Равенка на ротациона површина, ако ротационата оска совпаднува со една координатна оска. *Вртење* или *ротирање* на една фигура околу една права, наречена *ротациона оска*, е такво движење на фигурата, при кое секоја нејзина точка опишува по една кружна линија што лежи во една рамнина, нормална на оската, на која лежи и нејзиниот центар. Ако ротира некоја крива, тогаш таа опишува некоја површина, наречена *ротациона површина.*

Избираме една правоаглa картезична система O; x, y, z. Низ z-оската положуваме една рамнина π. Во пресекот на π и xy-рамнината положуваме една оска ρ со почеток во O (со иста единица како на x-, y- и z-оската). Во рамнината π нека е зададена една крива K со равенката

$$f(\rho, z) = 0. \tag{14}$$

Ако π, заедно со кривата, ротира околу z-оската како ротациона оска, кривата опишува една ротациона површина. Ако M_0 (ρ_0, z_0)

е која да е точка на кривата K, а O' нејзината ортогонална проекција на z-оската, тогаш ротационата површина е геометриското место на кружните линии се центар во O' и радиус $\overline{O'M_0}$; рамнините на овие кружни линии се паралелни со xy-рамнината. Кривата K ја викаме *меридијан* на ротационата површина.



Сл. 139

Бидејќи M_0 лежи на кривата (13), е

$$f(\rho_0, z_0) = 0. \tag{15}$$

Нека ги има M_0 во однос на системата O; x, y, z координатите x_0, y_0, z_0. Тогаш е $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Нека е $M\,(\rho, z) \equiv M\,(x, y, z)$ која да е точка на кругот по кој се движи M_0 при ротирањето на кривата K. Тогаш е $\rho = \rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = z_0$. Затоа е, со оглед на (15),

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{16}$$

Координатите на произволната точка M на ротационата површина ја задоволуваат равенката (16), и обратно. Тоа е равенка на ротационата површина.

Ако π совпадне со xz-рамнината, тогаш равенката (14) на меридијанот гласи

$$f(x, z) = 0, \quad y = 0. \tag{17}$$

Спрема тоа, *ако равенката на меридијанот на една ротациона површина, чија ротациона оска е z-оската, е дадена со* (17), *тогаш равенката на површината е равенката* (16), *што ја добиваме на тој начин што во првата равенка* (17) x *го смениме со* $\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Примери на ротациони површини. Ќе разгледаме сега неколку најпознати ротациони површини — ротациони квадрики.

Ротационен конус. Правата $x = kz$ во xz-рамнината нека ротира околу z-оската. Површината што ја опишува се вика *ротационен конус*. Сменувајќи го x со $\sqrt{x^2 + y^2}$ во равенката на правата, ја добиваме, по квадрирањето, равенката на конусот:

$$x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0. \tag{18}$$

Ако со φ го обележиме аголот помеѓу ротационата оска и генератрисите, имаме $k = \operatorname{tg} \varphi$; равенката на ротациониот конус можеме да ја запишеме, значи, во вид

$$x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot z^2.$$

Од обликот на равенката (18) следува, дека ако во метричната канонична равенка (8) коефициентите пред x^2, y^2 се еднакви, таа претставува еден ротационен конус.

Ротационен елипсоид. Во xz-рамнината е дадена елипсата

$$x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Ако оваа елипса ротира околу z-оската, ја опишува површината

$$(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Тоа е елипсоидот (5) при кој е $a = b$. Го наречуваме *ротационен елипсоид*. Ако е $a < c$, елипсоидот е „издолжен", а ако е $a > c$ тој е „сплеснат"; ако е $a = c$, елипсоидот е топка.

Ротационен хиперболоид. Ако хиперболата

$$x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1, \quad y = 0$$

ротира околу својата надворешна оска, т. е. околу z-оската, ја опишува ротационата површина

$$(x^2 + y^2)/a^2 - z^2/c^2 = 1.$$

Тоа е специјалната површина (6) при која е $a = b$. Затоа ја викаме *ротационен хиперболоид со едно крило.*

Да ја земеме сега хиперболата

$$x^2/a^2 - z^2/c^2 = -1, \quad y = 0.$$

Ако таа ротира околу својата трансверзална оска, т. е. околу z-оската, ја опишува ротационата површина

$$(x^2 + y^2)/a^2 - z^2/c^2 = -1.$$

Тоа е една специјална површина (7) при која е $a = b$. Затоа ја викаме *ротационен хиперболоид со две крила.*

Асимптотските конуси на нашите два ротациони хиперболоиди (при иста координатна система) имаат равенка

$$(x^2 + y^2)/a^2 - z^2/c^2 = 0.$$

Тој конус е, спрема тоа, ротационен. Тоа е, како што се гледа од неговата равенка, конус што настанува при ротирањето на асимптотите на хиперболите-меридијани околу ротационата оска.

Ротационен параболоид. Нека ротира параболата

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0$$

околу z-оската. Таа ја опишува при тоа ротационата површина

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Тоа е специјален случај на површината (12), каде што е $p = q$. Затоа површината ја викаме *ротационен* (елиптичен) *параболоид*.

ЗАДАЧИ

1. Испитај какви површини се добиваат, ако при ротационите квадрики, разгледани во овој §, ги намалиме ординатите на нивните точки во ист однос $a : b$.

2. Параболата $z = ax^2 + b, y = 0$ ротира околу z-оската. Напиши ја равенката на образуваната ротациона површина.

3. y-оската е ротациона оска на еден ротационен конус со врвот во $V(0, a, 0)$. Напиши ја равенката на конусот, ако точката A $(b, 0, 0)$ лежи на него.

4. Најди ја равенката на ротациониот конус која x-оската ја има како ротациона оска, врвот во координатниот почеток, а генератрисите образуваат со оската агол од 30^0.

5. Правата $ax + by + c = 0$, $z = 0$ ротира околу: *a*) x-оската, *b*) околу y-оската. Најди ги равенките на ротационите површини.

§ 102. Кружни пресеци на квадриките

1. Кружни пресеци кај квадриките со центар. Ако пресекот на некоја квадрика со една рамнина е круг, тогаш тој пресек го викаме *кружен пресек*.

Ќе испитаме прво дали постојат кружни пресеци при квадриките со центар. Нивните метрични канонични равенки можат да се запишат во вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \tag{19}$$

Површината ја пресечуваме со топката

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{20}$$

Секое заедничко решение на (19) и (20) е и решение на секоја линеарна комбинација на овие равенки. Значи и на равенката која се добива ако од (19) ја извадиме со r^2 поделената равенка (20), значи

$$(A - 1/r^2)\,x^2 + (B - 1/r^2)\,y^2 + (C - 1/r^2)\,z^2 = 0. \tag{21}$$

Тоа е конус со теме во координатниот почеток кој минува низ пресекот на површината (19) и топката (20), ако ниеден од коефициентите пред x^2, y^2, z^2 во (21) не е нула, и ако сите немаат ист знак. Ќе ги избереме за радиусот r на топката (20) сите такви вредности да еден од овие коефициенти биде нула. Тогаш конусот (21) дегенерира во еден пар рамнини, ако другите два коефициенти добијат при тоа различни знаци. Имаме три можности: $r^2 = 1/C$, $r^2 = 1/B$, $r^2 = 1/A$. Во овие случаи равенката (21) добива еден од следните видови:

$$(A - C)\, x^2 + (B - C)\, y^2 = 0, \tag{22}$$
$$(A - B)\, x^2 + (C - B)\, z^2 = 0, \tag{23}$$
$$(B - A)\, y^2 + (C - A)\, z^2 = 0. \tag{24}$$

I. Ако површината (19) е елипсоид, тогаш A, B, C се позитивни. Нека е $A > B > C$. Тогаш равенката (23) можеме да ја запишеме во вид

$$(A - B)\, x^2 - (B - C)\, z^2 = 0; \qquad A - B > 0,\ B - C > 0. \tag{23′}$$

Таа ги претставува рамнините

$$\sqrt{A - B}\ x \pm \sqrt{B - C}\ z = 0. \tag{25}$$

Овие две рамнини минуваат низ пресеците на површината (19) и топката (20). Бидејќи пресекот на рамнината и топката е круг, тоа најдовме со тоа две рамнини кои површината (19) ја сечат во кругови. Површините (22) и (24) во овој случај не распаднуваат во рамнини.

II. Површината (19) нека биде еднокрилен хиперболоид. Тогаш еден од коефициентите A, B, C е негативен, а два позитивни. Да претпоставиме да е $A > B > 0$, $C < 0$. Во тој случај равенката (23) може да се запише во вид (23′), која распаднува пак во равенките (25); површината (23) распаднува во рамнините (25). Површините (22) и (24) не распаднуваат во рамнини. Рамнините (25) ја пресечуваат површината (19) во кругови.

III. Површината (19) нека биде двокрилен хиперболоид. Два од коефициентите A, B, C треба да се негативни, а еден позитивен. Да претпоставиме дека е $A > 0$, $C < B < 0$. Површината (23) распаднува во рамнините (25), кои се рамнини на два кружни пресеци на површината (19). Равенките (22) и (24) не распаднуваат во линеарни фактори.

IV. Површината (19) нека е елиптичен цилиндер. Да претпоставиме дека $A > B > 0$, $C = 0$. Од површините (22), (23) и (24) само површината (23) распаднува во пар рамнини — во рамнините (25). Тие се рамнини на два кружни пресека на цилиндерот.

V. Површината (19) нека е хиперболичен цилиндер. Секоја рамнина што не е паралелна со неговите генератриси го сече во една хипербола. При оваа површина нема, спрема тоа, кружни пресеци.

Ако една рамнина сече една квадрика во некоја елипса, тоа нејзе паралелните рамнини ја сечат во слични елипси, ако рамнината воопшто ја сече квадриката (§ 98). Бидејќи круговите се слични меѓу себе, тоа следува од горното:

При елипсоидот, хиперболоидите и елиптичниот цилиндер постојат две фамилии кружни пресеци чии рамнини се паралелни меѓу себе.

При хиперболичниот цилиндер не постојат кружни прессци.

2. Кружни пресеци кај квадриките без центар. Каноничните метрични равенки на површините без центар можат да се доведат во облик

$$Ax^2 + By^2 = 2z. \tag{26}$$

I. Ако еден од коефициентите A, B е нула, површината е параболичен цилиндер. Таа нема кружни пресеци, бидејќи секоја рамнина што не е паралелна со нејзините генератриси (§ 88, зад. 2) ја сече во една парабола.

II. Ако A и B се со различни знаци, површината е хиперболичен параболоид. Лесно се убедуваме дека ниедна рамнина не ја сече оваа површина во крива од елиптичен тип. И за оваа површина не постојат, значи, кружни пресеци.

III. Ако A и B имаат еднакви знаци, површината (26) е елиптичен параболоид. Да претпоставиме дека е $A > B > 0$. Ако кај него постојат кружни пресеци, постои и кружниот пресек кој минува низ координатниот почеток. Ако постои, тој лежи на една топка

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\rho z, \tag{27}$$

или

$$x^2/\rho + y^2/\rho + z^2/\rho = 2z. \tag{28}$$

Вадејќи ја равенката (26) од (28), добиваме

$$x^2 (1/\rho - A) + y^2 (1/\rho - B) + z^2/\rho = 0. \tag{29}$$

Ставуваме во (29) $1/\rho = B$, па добиваме $Bz^2 - (A - B) x^2 = 0$, односно

$$\sqrt{B} \cdot z \pm \sqrt{A - B} \cdot x = 0.$$

Овие рамнини ја сечат топката (27) и параболоидот (26) во исти криви; тие се, значи, рамнини на кружни пресеци. Ставајќи во равенката на конусот (29) $1/\rho = A$, тој не распаднува во рамнини. Спрема тоа:

При елиптичниот параболоид постојат две фамилии меѓу себе паралелни кружни пресеци.

При хиперболичниот параболоид и параболичниот цилиндер не постојат кружни пресеци.

3. Сферни точки. Допирните точки на оние тангенцијални рамнини што се паралелни со рамнините на кружните пресеци на една квадрика се викаат нејзини *сферни* или *тупчести точки.*

I. Квадрики со центар. При претпоставките од т. 1, равенките на рамнините на кружните пресеци на квадриката (19) гласат

$$\sqrt{A - B}\, x \pm \sqrt{B - C}\, z = \lambda, \tag{30}$$

каде што λ е произволен параметар. Ќе го определиме λ така, рамнините (30) да бидат тангенцијални рамнини на површината (19), ако тоа е можно. Равенката на тангенцијалната рамнина на квадриката (19) со допир во точката (x_0, y_0, z_0) гласи

$$Axx_0 + Byy_0 + Czz_0 = 1. \tag{31}$$

За да равенките (30) и (31) претставуваат една иста рамнина, е потребно да биде

$$Ax_0 : By_0 : Cz_0 : 1 = \sqrt{A - B} : 0 : \pm \sqrt{B - C} : \lambda.$$

Оттука добиваме

$$x_0 = \sqrt{A - B}/A\lambda, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \pm \sqrt{B - C}/C\lambda. \tag{32}$$

Бидејќи (x_0, y_0, z_0) лежи на површината (19), е

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = 1. \tag{33}$$

Заменувајќи ги вредностите за x_0, y_0, z_0 од (32) во (33), добиваме

$$(A - B)/A\lambda^2 + (B - C)/C\lambda^2 = 1,$$

од каде е

$$\lambda^2 = B (A - C)/AC.$$

Ако добиената вредност за λ ја замениме во (32), добиваме

$$x_0 = \pm \sqrt{(A - B)\, C/(A - C)\, AB}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \pm \sqrt{A (B - C)/(A - C)\, BC},$$

каде што знаковите можат да се бираат произволно.

За елипсоидот имаме $A > B > C > 0$, значи $A - B > 0$, $A - C > 0$, $B - C > 0$. *Елипсоидот има, значи, четири сферни точки.*

За еднокрилниот хиперболоид имаме $A > B > 0$, $C < 0$, значи $A - B > 0$, $A - C > 0$, $B - C > 0$. Поткорените величини при x_0 и z_0 се негативни. Значи, *еднокрилниот хиперболоид нема сферни точки.*

При двокрилниот хиперболоид е $A > 0$, $0 > B > C$ и затоа $A - B > 0$, $A - C > 0$, $B - C > 0$. Поткорените величини за x_0 и z_0 се позитивни. *Двокрилниот хиперболоид има,* спрема тоа, *четири сферни точки.*

II. **Квадрики без центар.** Меѓу квадриките без центар кружни пресеци има само елиптичниот параболоид. Ако неговата равенка е

$$Ax^2 + By^2 = 2z, \quad A > B > 0, \tag{34}$$

тогаш равенките на рамнините на кружните пресеци гласат

$$\sqrt{B}\,z \pm \sqrt{A - B}\,x + \lambda = 0,$$

каде што λ е произволен параметар. Него го определуваме така да овие рамнини бидат тангенцијални рамнини на (34), т. е. да можат да се запишат во облик

$$Axx_0 + Byy_0 = z + z_0,$$

каде што x_0, y_0, z_0 се координати на една точка на површината (34). За тоа е потребно да е

$$Ax_0 : By_0 : -1 : -z_0 = \pm\sqrt{A - B} : 0 : \sqrt{B} : \lambda.$$

Одавде и од $Ax_0{}^2 + By_0{}^2 = 2z$ за координатите x_0, y_0, z_0 на кружните точки ги добиваме изразите

$$x_0 = \pm\sqrt{(A - B)}\,A\sqrt{B}, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = (A - B)/2AB.$$

Кај елиптичниот параболоид постојат, значи, *две сферни точки.*

ЗАДАЧИ

Во кои рамнини лежат кружните пресеци на површините во зад. 1—5?

1. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, \quad a < b < c.$
2. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0, \quad a < b.$
3. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = \pm 1, \quad a < b.$
4. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad a < b$
5. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z, \quad a < b.$

6. Определи ги сферните точки на површините во зад. 1—5, ако постојат.

7. Колку фамилии кружни пресеци постојат при ротационите квадрики?

8. Рамнините, нормални на ротационата оска на која да е ротациона квадрика (топка, ротационен елипсоид, ротациони хиперболоиди, ротационен параболоид, ротационен конус) ја сечат површината во кругови. Заврти ги овие кругови за еден ист агол околу оние нивни дијаметри кои лежат во која да е рамнина што минува низ оската. Покажи дека завртените кругови претставуваат кружни пресеци на некоја квадрика, и која е таа квадрика. *Напат.*: Покажи дека завртените кругови се добиваат при едно афино пресликување од дадените кругови!

9. Како може да се направи модел на елипсоид, користејќи ја теоремата од зад. 8?

ГЛАВА IV

НЕКОИ ПОВАЖНИ ТИПОВИ ПОВРШИНИ

§ 103. Општо за површините

Во досегашното излагање ги разгледавме оние површини кои обикновено подробно се изучуваат во курсевите по Аналитичната геометрија — рамнините и квадриките. Сега ќе се запознаеме на кратко уште со некои поважни типови површини.

1. Аналитичко претставување на површините. Како површина ја дефиниравме во § 50, т. 5. целокупноста од сите точки, чии координати x_1, x_2, x_3 во однос на една дадена афина координатна система задоволуваат некоја равенка $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, која ја наречуваме равенка на површината.

Ако равенката на површината содржи само две променливи, на пр. x_1, x_2, тогаш таква равенка $f(x_1, x_2) = 0$ претставува една површина од специјален вид. Ако е (x_1^0, x_2^0, x_3^0) кое да е решение на оваа равенка, тогаш е решение и (x_1^0, x_2^0, x_3), каде што x_3 е произволен број. Ако е, спрема тоа, P_0 која да е точка на површината, тогаш на неа лежат и точките на правата што минува низ P_0 а е паралелна со x_3-оската. Ваква површина ја викаме *цилиндрична*, а правите што ја образуваат — нејзини *образувателни* или *генератриси*. Во x_1x_2-рамнината равенката $f(x_1, x_2) = 0$ претставува една крива. Генератрисите на површината $f(x_1, x_2) = 0$ се, значи, правите што ја сечат оваа крива, а се паралелни со x_3-оската. Спрема тоа:

Ако равенката на една површина не ја содржи променливата x_i, тогаш таа претставува еден цилиндер чии генератриси се паралелни со x_i-оската.

Ако, најпосле, равенката на површината содржи само една променлива, на пр. x_1, тогаш таква равенка $f(x_1) = 0$, во колку има решенија, претставува извесен број рамнини, паралелни со x_2x_3-рамнината.

2. Аналитичко претставување на кривите во просторот. Видовме дека една права во просторот е определена со две равенки — со равенките на две рамнини; дека кругот во просторот е определен со две равенки — со равенката на една топка и равенката на една рамнина; дека една елипса во просторот е определена со две равенки — со равенката на еден елипсоид и равенката на една рамнина; итн. Секоја од овие криви беше дефинирана, значи, како пресек на две површини. Обопштувајќи го тоа, дефинираме:

Целокупноста на заедничките точки на две површини е една просторна крива.

Една просторна крива е дефинирана, значи, аналитички со две равенки

(1) $$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Ако од овие равенки елиминираме една од непознатите, на пр. x_1, добиваме една релација $\varphi_1(x_2, x_3) = 0$. Сите заеднички решенија на равенките (1) се решенија и на оваа равенка. Последната равенка претставува еден цилиндер. На него лежат сите генератриси на оној цилиндер, чии генератриси се паралелни со x_1-оската и ја сечат дадената крива (1) — на цилиндерот што го проицира кривата во правецот на x_1-оската*).

3. Образување на површините. При разгледувањето на квадриките видовме како тие можат да се дефинираат освен како геометриско место на точки и како геометриско место на криви. Ќе ги разгледаме сега овие два начини на определување на површините поподробно.

Образување на површините со точки. Особината што го дефинира едно геометриско место на точките може аналитички да биде изразена со една равенка. Тоа е веќе равенка на површината — иследуваното геометриско место.

Пример. Да се најде геометриското место на точката M за која важи $\overline{OM}^2 : \overline{M'M} = \text{const.}$, каде што O е една фиксна точка од една стална рамнина π, а M' отрогоналната проекција од M на π.

Решение. Избираме една правоагла координатна система со O како координатен почеток и со π како yz-рамнина. Означувајќи ја константната вредност на односот $\overline{OM}^2 : \overline{M'M}$ со $2c$ и ставувајќи $M(x, y, z)$, добиваме

$$\overline{OM}^2/\overline{M'M} = (x^2 + y^2 + z^2)/x = 2c,$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cx = 0.$$

Тоа е равенка на бараното геометриско место. Површината е топка.

Особината што го дефинира геометриското место често не може непосредно да се изрази аналитички со една равенка.

Пример. Да се определи геометриското место на тежиштето на триаголникот, чии темиња се движат по координатните оски на една косоагла система, и тоа така да збирот на отсечоците што рамнината на триаголникот ги отсечува на оските е еднаков на 1.

---

*) Во алгебрата се докажува дека сите *заеднички* решенија на (1) се и решенија на елиминантата $\varphi_1(x_2, x_3) = 0$; и обратно, дека равенките (1) имаат барем едно заедничко решение по x_1, ако во нив место x_2, x_3 го замениме кое да е решение на $\varphi_1(x_2, x_3) = 0$. Но тоа заедничко решение може да биде и имагинарно. А нас не интересуваат само реални решенија. *Затоа површината* $\varphi_1(x_2, x_3) = 0$ *може, освен точките на проицирниот цилиндер на кривата* (1), *да содржи и други точки.* Тоа треба во секој одделен случај да се испита.

Решение. Рамнината

$$x_1/\lambda_1 + x_2/\lambda_2 + x_3/\lambda_3 - 1 = 0$$

ги отсечува на оските отсечоците λ_1, λ_2, λ_3. За нив важи, спрема условот на задачата,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1 = 0. \tag{2}$$

Темињата на триаголнико се $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0)$ и $(0, 0, \lambda_3)$. Неговото тежиште има, значи, координати

$$x_1 = \lambda_1/3, \quad x_2 = \lambda_2/3, \quad x_3 = \lambda_3/3. \tag{3}$$

Елиминирајќи ги λ_1, λ_2, λ_3 од (2) и (3), ја добиваме за координатните x_1, x_2, x_3 на тежиштето релацијата

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1/3 = 0.$$

Геометриското место е, значи, рамнината што на оските ги отсечува отсечоците 1/3.

Образување на површини со подвижни криви. Површините можеме да ги дефинираме и како целокупност од точки на една подвижна крива. Кажуваме дека *подвижната крива ја опишува површината.* Самите криви ги викаме *образувателни* или *генератриси* на површината.

Подвижната крива што го дефинира геометриското место може да биде дадена со две равенки

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0,$$

кои содржат еден променлив параметар λ, кој може да варира во некој определен интервал. За секоја вредност на λ во тој интервал равенките претставуваат по една крива. Со елиминација на λ од овие равенки добиваме една релација

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

која е задоволена за координатите на секоја точка од бароното геометриско место. Но, обратно не мора да важи.

Пример. Да се определи површината што ја опишуваат круговите кои се допираат до оските на една правоагла координатна система така да отсечуваат на нив еднакви отсечки.

Решение. Равенките на кругот кој на оските отсечува отсечоци λ гласат

$$x^2 + y^2 + z^2 - \lambda x - \lambda y - \lambda z = 0, \quad x + y + z - \lambda = 0.$$

Ако од овие равенки го елиминираме λ, добиваме

$$xy + yz + zx = 0.$$

Оваа равенка ја задоволуваат координатите на сите точки од бараното геометриско место. Равенката претставува еден конус (гл. V).

Некогаш е згодно да се воведат и повеќе параметри. Подвижната крива може да биде дадена, на пр., со равенките

$$(4) \qquad f_1(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

кои содржат два параметри λ_1, λ_2, врзани со една релација

$$(5) \qquad \varphi(\lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Ако имено еден од параметрите го елиминираме од $f_1 = 0$, $\varphi = 0$ и $f_2 = 0$, $\varphi = 0$, дојдуваме на претходниот случај. Според тоа, со елиминација на λ_1, λ_2 од (4) и (5) ја добиваме равенката на бараното геометриско место.

Пример. Да се определи геометриското место на една права која сече две разминувачни прави p_1, p_2, а да при тоа останува паралелна на една рамнина π.

Решение. Рамнината π ја избираме за x_1x_3-рамнина; за x_2x_3-рамнина ја избираме онаа рамнина, положена низ p_1, која е паралелна со p_2, а x_1x_2-рамнината нека е рамнината што минува низ p_1 и низ пресекот на p_2 и π. Правата p_1 лежи, значи, на x_2-оската. На оските избираме такви единици да равенките на p_2 гласат

$$x_2 = x_3, \quad x_1 = 1.$$

Една произволна рамнина π_1, која минува низ p_1, е $x_1 + \lambda_1 x_3 = 0$; а која да е рамнина π', паралелна со π, е $x_2 + \lambda_2 = 0$. Овие рамнини се сечат во една генератриса, ако се пресечуваат на p_2. Рамнината π_1 ја сече p_2 во $(1, -1/\lambda_1, -1/\lambda_1)$. А рамнината π' минува низ оваа точка, ако е $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Ја имаме значи системата

$$x_1 + \lambda_1 x_3 = 0, \quad x_2 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 - 1 = 0.$$

Елиминацијата на λ_1 и λ_2 од нив дава

$$x_1x_2 = x_3.$$

Бараното геометриско место е еден хиперболичен параболоид.

ЗАДАЧИ

1. Да се испита кривата $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ (координатите се правоагли). Покажи дека тоа се две конгруентни елипси!

Најди ги равенките на пресеците на рамнините, паралелни со x_1x_2-рамнината, и површините од зад. 2—5. Направи цртеж (нивојни линии, котирана проекција на површината).

2. $x_1x_3 - x_2 + x_3 - 1 = 0$. 3. $x_3^2 - 2x_1 = 0$.

4. $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 1 = 0$. 5. $x_2^2 - 2x_1x_3 - x_3^2 = 0$.

6. Покажи дека кривата $x^2 + y^2 = a^2$, $z^2 = 2ax$ (координатите се правоагли) е и пресек на една топка и еден еднокрилен хиперболоид.

7. Проицирај ја кривата $(z + a)^2 - x^2 = a^2$, $(z - a)^2 + y^2 = a^2$ (координатите се правоагли) на xy-рамнината. Во неа воведи поларни координати и нацртај ја проекцијата!

8. Напиши ја равенката на цилиндерот чии генератриси се паралелни со x_2-оската и ја сечат кривата

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2, \quad x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = -1.$$

9. Проицирај ја кривата $x_3^2 = 4(x_1^2 + x_2^2), \quad x_3 = 2x_1 + 1$ на x_1x_2-рамнината.

10. Најди го геометриското место на правите што ги сечат разминуваните прави

$$x_1 - x_2 = 0,\ x_3 - 1 = 0; \quad x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + 1 = 0; \quad x_2 = 0,\ x_3 = 0.$$

11. Дадени се два снопа рамнини со оските $x_1 = x_2 = x_3$ и $x_1 - 1 = -x_2 = x_3$, како и правата $x_2 + x_2 - 1 = 0$; $x_3 = 0$. Да се определи геометриското место на пресечните прави на оние рамнини од сноповите што се пресечуваат на дадената права.

§ 104. Цилиндрични површини

Во претходниот § се запознавме со цилиндричните површини чии генератриси се паралелни со една од координатните оски. Сега обопштуваме:

Цилиндрична површина е геометриско место на правата што ќе движи по определен закон (правило), останувајќи паралелна сама на себе.

I. метода. Генератрисите нека бидат паралелни на правата

$$(6) \quad A \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0, \quad B \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0.$$

Равенките на една произволна права, паралелна со неа, имаат вид

$$(7) \qquad A = \lambda, \quad B = \mu.$$

Законот по кој генератрисата се движи може да биде даден со една релација меѓу λ и μ, значи со

$$(8) \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

Елиминирајќи ги λ и μ од (7) и (8), добиваме

$$(9) \qquad \varphi(A, B) = 0.$$

Координатите на секоја точка од геометриското место ја задоволуваат равенката (9). А и секоја точка која лежи на површината (9), лежи и на цилиндерот. Ставајќи ги нејзините координати во A и B добиваме, имено, $A = \lambda_0$, $B = \mu_0$ и $\varphi(\lambda_0, \mu_0) = 0$. Рамнините $A = \lambda_0$ и $B = \mu_0$ се сечат, значи, во една генератриса на дадениот цилиндер.

Равенката (9) е, спрема тоа, равенка на цилиндерот.

И обратно, секоја равенка од видот (9), каде што A и B се од обликот (6), претставува еден цилиндер. Навистина, ако ставиме $A = \lambda$, $B = \mu$, ја добиваме од (9) релацијата (8). Таа ни го дава законот по кој се движат паралелните прави $A = \lambda$, $B = \mu$, со кое нешто го докажуваме тврдењето.

Ако законот по кој се движи генератрисата е даден со задавање на една крива што треба да ја сечат генератрисите, тогаш таа крива ја викаме *директриса* на површината. Нека директрисата на една површина биде зададена со равенките

$$(10) \qquad f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

а правецот на генератрисите со (6). Една произволна права, паралелна со генератрисите, е дадена со (7). Треба λ и μ да ги определиме така што правата (7) да ја сече директрисата. За такви λ, μ равенките (7) и (10) имаат барем едно заедничко решение по x_1, x_2, x_3. Ако од нив ги елиминираме x_1, x_2, x_3, добиваме една релација $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ како услов за тоа, правата (7) да ја сече директрисата. Равенката на површината е затоа $\varphi(A, B) = 0$.

За најдување равенката на една цилиндрична површина можеме да го дадеме, спрема тоа, ова правило:

Ако директрисата на една цилиндрична површина е дадена со равенките (10), *а правецот на нејзините генератриси со* (6), *тогаш, за да ја добиеме равенката на површината, треба од системата равенки* (10) *и* (7) *да се елиминираат* x_1, x_2, x_3, *со што се добива една релација* $\varphi(\lambda, \mu) = 0$; *равенката на повртината е тогаш* $\varphi(A, B) = 0$.

Пример. Да се определи равенката на цилиндерот чии генератриси се паралелни со правата $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, а директрисата ѝ е

$$(11) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Решение. Од равенките (11) и од

$$x_1 - x_2 - \lambda = 0, \quad x_1 - x_3 - \mu = 0$$

треба да ги елиминираме x_1, x_2, x_3. Решавајќи ја системата равенки

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 - x_2 = \lambda, \quad x_1 - x_3 = \mu$$

по x_1, x_2, x_3, добиваме

$$x_1 = (1 + \lambda + \mu)/3, \quad x_2 = (1 - 2\lambda + \mu)/3, \quad x_3 = (1 + \lambda - 2\mu)/3.$$

Овие вредности ги сменуваме во $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, со што добиваме

$$\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 - 1 = 0.$$

Тоа е бараната релација $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Заменувајќи ги во неа место λ и μ изразите $x_1 - x_2$ и $x_1 - x_3$, ја добиваме бараната равенка на цилиндерот:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 - 1 = 0.$$

II. метода. Директрисата нека е зададена пак со (10), а правецот на генератрисите со векторот $a = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Нека е $M(x_1, x_2, x_3)$ која да е точка на било која од генератрисите. Тогаш координатите на која да е точка P на таа генератриса се дадени со $(x_1 + \lambda a_1, x_2 + \lambda a_2, x_3 + \lambda a_3)$, каде што λ е една подесно избрана константа. Бидејќи правата е генератриса, таа ја сече директрисата барем во една точка. Го избираме таков λ, таа точка да биде токму точката P. Нејзините координати ги задоволуваат равенките на директрисата; затоа

$$(12)\qquad \begin{aligned} f_1(x_1 + \lambda a_1, x_2 + \lambda a_2, x_3 + \lambda a_3) &= 0,\\ f_2(x_1 + \lambda a_1, x_2 + \lambda a_2, x_3 + \lambda a_3) &= 0. \end{aligned}$$

Ако одавде го елиминираме λ, добиваме една релација

$$(13)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Кооординатите x_1, x_2, x_3 на секоја точка од испитуваниот цилиндер ја задоволуваат оваа равенка. Но обратно не мора да важи: секое решение x_1, x_2, x_3 на оваа равенка не мора да претставува координати на некоја точка од испитуваното место. Сè пак ќе велиме дека равенката (13) е равенка на иследуваниот цилиндер. Оттука го имаме ова правило:

Ако директрисата на една цилиндрична површина е дадена со (10), *а правецот на генератрисите со векторот* $\{a_1, a_2, a_3\}$, *тогаш равенката на површината се добива како резултат на елиминацијата на* λ *од равенките* (12).

Пример. Директрисата на еден цилиндер нека биде

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 0,$$

а правецот на генератрисите нека е даден со $\{a_1, a_2, a_3\}$. Да се најде равенката на површината.

Решение. Треба да го елиминираме λ од равенките

$$(x_1 + \lambda a_1)^2 + (x_2 + \lambda a_2)^2 = 1, \quad x_3 + \lambda a_3 = 0.$$

Добиваме

$$(a_3x_1 - a_1x_3)^2 + (a_3x_2 - a_2x_3)^2 = a_3^2.$$

Тоа е равенката на бараниот цилиндер.

Ќе го илустрираме сега со еден пример фактот дека равенката на цилиндричната површина, добиена по оваа метода, претставува една површина која покрај сите точки од испитуваниот цилиндер може да содржи и други точки.

Пример. Да се определи равенката на цилиндерот чии генератриси се паралелни со x_1-оската, а директрисата ѝ е

$$(14)\qquad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \quad x_1^2 - x_3 = 0.$$

Решение. По елиминацијата на λ од равенките

$$(x_1+\lambda)^2+x_2^2-1=0;\quad (x_1+\lambda)^2-x_3=0$$

ја добиваме за цилиндерот равенката

$$x_2^2=1-x_3. \tag{15}$$

Но овој цилиндер содржи и такви генератриси кои не му припаѓаат на бараното геометриско место. Правите

$$x_2=\sqrt{1+\lambda^2},\quad x_3=-\lambda^2,$$

на пр., лежат на цилиндерот (15), но тие генератрисата (14) не ја сечат, што лесно се проверува.

*ЗАДАЧИ**)

Рамнините, положени низ зададените прави во зад. 1—2, се сечат под прав агол. Најди го геометриското место на нивните пресеци.

1. $x=y=0;\quad x-1=y=0.$ 2. $x=y=z;\quad x-1=y-1=z-1.$

3. Рамнините што минуваат низ правите $x-2=y+3=2z$ и $x=y-$ $-1=2z+4$ се сечат под агол 45°. Определи го геометриското место на пресечните прави.

Напиши ја равенката на цилиндерот чии генератриси се паралелни со правата p, а директрисата му е зададена.

4. p е x_2-оската; $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2,\quad x_1/a_1+x_2/a_2+x_3/a_3=1.$

5. p е x_3-оската; $x_3^2-x_1=0;\quad x_1+x_2+x_3-1=0.$

6. p е правата $x_1=x_2=x_3;\quad x_2^2=x_1,\quad x_3=0.$

7. p е правата $x_1=a_3x_3,\ x_2=b_3x_3;\quad x_1+x_2+x_3-1=0,$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0.$

Генератрисите на цилинддерот се паралелни со l, а директрисата му е зададена. Најди ја равенката на цилиндерот.

8. $l=\{l_1,l_2,l_3\};\quad x_1/a_1^2-x_2^2/a_2^2=1,\ x_3=0.$

9. $l=\{0,1,0\};\quad x_1^2+x_2^2=x_3(mx_1-x_3),\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-r^2=0.$

10. $l=\{1,1,0\};\quad x_1x_2=x_3,\ x_1+x_2+x_2=0.$

11. Најди го геометриското место на точката, еднакво оддалечена од правата $x=5+3t,\ y=-4+t,\ z=3-2t$, ако координатниот почеток му припаѓа на геометриското место.

12. Најди го геометриското место на точката чии растојанија до правите $x-a=y-a=z-a$ и $x+a=y+a=z+a$ се однесуваат како $m:n$.

Најди ја, во зад. 13—15, равенката на цилиннерот чии генератриси се паралелни со l, а ја допираат дадената површина. Потоа покажи дека цилин-

---

*) Координатите, обележени со x_1, x_2, x_3, се произволни **афини**, а координатите, обележени со x, y, z, се **правоагли картезични**.

дерот ја допира површината во кривата, во која површината ја сече онаа нејзина дијаметрална рамнина што е конјугирана со правецот на l.

13. $l = \{l_1, l_2, l_3\}$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
14. $l = \{l_1, l_2, 0\}$; $x_1 x_2 = x_3$.
15. $l = \{l_1, l_2, l_3\}$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0$.

§ 105. Конусни површини

Се запознавме веќе со конусните површини од втор ред. Сега поимот за конусот го обопштуваме со дефиницијата:

Конусна површина или конус е геометриско место на прави кои се движат по еден определен закон и минуваат низ една стална точка, наречена врв.

Да ја најдеме равенката на една зададена конусна површина!

I. метода. Врвот V на конусот нека биде определен како пресек на три рамнини, на пр.

$$(16)\qquad \begin{aligned} A &\equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0,\\ B &\equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0,\\ C &\equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4 = 0. \end{aligned}$$

Тогаш равенките на една произволна права низ V имаат вид

$$(17)\qquad A = \lambda C, \quad B = \mu C.$$

Законот, по кој оваа права треба да се движи, може да биде даден аналитички со една релација од вид

$$(18)\qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

Елиминацијата на λ и μ од (17) и (18) ни дава

$$(19)\qquad \varphi(A/C,\ B/C) = 0.$$

Секоја точка од конусот лежи на површината (19). Но важи и обратно. Ако една точка лежи, имено, на површината (19), тогаш за нејзините координати добиваме $A/C = \lambda_0$, $B/C = \mu_0$ и $\varphi(\lambda_0, \mu_0) = 0$; таа точка лежи, спрема тоа, на генератрисата $A = \lambda_0 C$, $B = \mu_0 C$ од зададениот конус.

Затоа равенката (19) е равенка на дадениот конус.

Равенката на секој конус може да се доведе во облик (19). А и обратно, секоја равенка од тој облик претставува еден конус, во колку изопшто претставува некоја површина. Доказ: Ако е зададена каква да е равенка од облик (19), ставуваме $A/C = \lambda$, $B/C = \mu$. Тогаш е $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Последните три равенки покажуваат дека површината (19) е, навистина, копус.

Функцијата $\varphi(A/C, B/C)$ има таа особина што не се менува, ако A, B, C ги замениме со kA, kB, kC ($k \neq 0$ е произволна константа). Тоа е еден пример на таканаречените *хомогени* функции во однос на променливите A, B, C. Општо, за една функција $f(A, B, C)$ од A, B, C ќе велиме дека е хомогена во однос на A, B, C, ако за произволен број $k \neq 0$ важи

$$f(kA, kB, kC) = |k|^n f(A, B, C),$$

каде што n е некој реален број. Равенката $f(A, B, C) = 0$ ќе ја викаме истотака *хомогена* во однос на A, B, C, ако $f(A, B, C)$ е хомогена функција.

Равенката (19) на конусот е, значи, хомогена во однос на A, B, C. Ќе покажеме сега дека важи и обратно, имено дека:

Секоја хомогена равенка во однос на три линеарни изрази A, B, C претставува еден конус, ако рамнините $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ имаат една заедничка точка.

Навистина, ако е зададена која да е равенка $f(A, B, C) = 0$, хомогена во однос на A, B, C, добиваме, ставајќи $A = \lambda C$, $B = \mu C$:

$$f(\lambda C, \mu C, C) \equiv |C|^n f(\lambda, \mu, 1) = 0.$$

Правите $A = \lambda C$, $B = \mu C$ минуваат низ точката, определена со $A = B = C = 0$ и се движат по законот, изразен со релацијата

$$f(\lambda, \mu, 1) \equiv \varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

Површината е навистина конус.

Пример. Генератрисата на еден конус нека биде правата во која се пресечуваат две подвижни рамнини, кои ротираат околу x- одн. y-оската на една правоагла система, и тоа така да зафаќаат со y- одн. со z-оската стално еднакви агли. Која површина е тоа?

Решение. Подвижните рамнини имаат равенки

$$z - \lambda y = 0 \quad \text{и} \quad x - \mu z = 0.$$

Ако аглите што овие рамнини ги зафаќаат со y-, одн. со z-оската ги означиме со φ и ψ, имаме

$$\operatorname{tg} \varphi = \lambda, \quad \operatorname{tg} \psi = \mu.$$

Спрема условот е $\lambda = \pm \mu$, со еден од двата можни знака. Тоа е релацијата $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Заменувајќи ги во неа $\lambda = z/y$ и $\mu = x/z$, добиваме

$$xy \pm z^2 = 0.$$

Бараната површина е, значи, еден конус од втор ред.

II. **метода.** Законот спрема кој треба да се движи генератрисата на еден конус може да биде даден, се разбира, и со една директриса, т. е. со една крива низ која треба да минуваат генератрисите.

Нека врвот на конусот биде $V(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, а директрисата

$$(20) \qquad f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Нека биде сега $M(x_1, x_2, x_3)$ која да е точка на конусот. За која да е точка P на генератрисата VM ги добиваме тогаш координатите $(x_1^0 + \lambda(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \lambda(x_2 - x_2^0), x_3^0 + \lambda(x_3 - x_3^0))$, ако λ е еден подесно избран број. Барем за една вредност на λ добиваме една точка P, која лежи на директрисата (20). За тие вредности од λ ќе важи, значи

$$(21) \qquad f_i\,[x_1^0 + \lambda(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \lambda(x_2 - x_2^0), x_3^0 + \lambda(x_3 - x_3^0)] = 0, \quad (i = 1, 2)$$

Со елиминацијата на λ одавде, добиваме една релација

$$(22) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

која е задоволена за координатите од произволната точка M на конусот. Но површината, дадена со (22), може да содржи освен сите точки од зададениот конус и други точки. Сè пак ќе велиме дека (22) е равенката на тој конус. Спрема тоа:

Ако директрисата на еден конус е дадена со (20), *а врвот му е* (x_1^0, x_2^0, x_3^0), *тогаш равенката на тој конус се добива како резултат на елиминацијата на* λ *од равенките* (21).

Пример. Да се напише равенката на конусот со врв во $V(0, 0, 1)$, чија директриса е $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_3 = 0$.

Решение. Треба да го елиминираме λ од равенките

$$(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 = 1, \quad 1 + \lambda(x_3 - 1) = 0.$$

Со тоа ја добиваме бараната равенка

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 0.$$

Фактот дека равенката на конусот, добиена по оваа метода, може да претставува површина што содржи и точки што не му припаѓаат на бараното геометриско место, ќе го илустрираме со следниот пример.

Пример. Да се најде равенката на конусната површина со врв во $(0, 0, 0)$, а чија директриса е

$$(23) \qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

каде што $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ е каква да е површина.

Решение. Треба да го елиминираме λ од

$$(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 - (\lambda x_3)^2 \equiv \lambda^2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = 0, \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = 0.$$

Првата од овие равенки е задоволена, при секаква вредност за λ, ако е

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{24}$$

Со тоа λ е елиминиран. За равенка на геометриското место ја добивме равенката (24). Но бидејќи директрисата (23) е пресек на површината (24) со површината $f = 0$, тоа на бараното геометриско место му припаѓаат само оние генератриси од (24) во кои површината $f = 0$ го пресечува. А површината $f = 0$ може да биде таква што да не ги сече сите генератрисите од (24), па дури и таква да не сече ниедна од нив. Во тој случај добиената равенка (24) претставува, значи, не само точки од бараното геометриско место, туку и други точки, а може и само други точки — во колку бараното геометриско место не постои.

ЗАДАЧИ

1. Рамнините што минуваат низ правите

$$(x - 2)/3 = y/2 = (z + 1)/4 \quad \text{и} \quad (x - 2)/2 = y = -(z + 1)/3$$

се сечат ортогонално. Најди ја равенката на геометриското место на пресечните прави. Координатите се правоагли картезични.

Најди ја равенката на конусот, чиј врв V и директрисата се зададени во зад. 2—8.

2. $V(0, 0, 0)$; $x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_3 = 1,$
3. $V(0, 0, 0)$; $x_3^2 - x_2^2 = 1, \ x_1 = 1.$
4. $V(0, 0, 0)$; $x_2^2 + 2x_1 - 1 = 0, \ x_1 - x_2 = 1.$
5. $V(0, 0, 0)$; $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1, \ x_1/d_1 + x_2/a_2 + x_3/a_3 = 1.$
6. $V(0, 0, 0)$; $x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 = 2x_3, \ x_3 + 1 = 0.$
7. $V(0, 0, a)$; $x_1^2 - x_2 = 0, \ x_3 - x_1 = 0.$
8. $V(1, -3, 2)$; $x_1 x_2 = x_3^2, \ x_1 = x_2.$

Најди ја равенката на оној конус со врв V чии генератриси ја допираат дадената површина во зад. 9—10.

9. $V(a_1, a_2, a_3)$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$
10. $V(a_1, a_2, a_3)$; $x_1^2 + x_2^2 = x_3.$

11. Во точката $(5, 1, -1)$ е поставен еден точкаст светлински извор. Определи ја контурата на сенката што на yz-рамнината ја фрла топката $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

12. Што претставува равенката $f(A, B, C) = 0$, хомогена во однос на A, B, C, ако $A = 0, B = 0, C = 0$ се рамнини што немаат заеднички точки?

§ 106. Ротациони површини

Во § 101 изучивме како се формира равенката на една ротациона површина, ако ротационата оска совпаднува со една од координатните оски. Сега ќе го разгледаме општиот случај, кога ротационата оска има произволна положба во просторот.

Нека ротационата оска биде дадена со

$$(25)\qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + lt, \quad \mathfrak{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad l = \{m, n, p\}$$

во однос на една правоагла картезична система. Оската е паралелна со векторот l, а минува низ точката P_0 (x_0, x_0, z_0).

Ја посматраме целокупноста на сите кругови во просторот, чија рамнина е нормална на l, а центарот им лежи на ротационата оска. Секој таков круг можеме да го сметаме како пресек на една рамнина, нормална на l, и на една топка со центар на оската. Равенката на оваа фамилија кругови има, значи, облик

$$(26)\qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda, \quad mx + ny + pz = \mu,$$

каде што λ и μ се произволни параметри. Ако меѓу овие два параметри постои некоја релација

$$(27)\qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

тогаш горните кругови ќе опишат некоја ротациона површина, чија ротациона оска е дадената права. Овие кругови ги нарекуваме *паралелни кругови* на површината.

Ако од равенките (26) и (27) ги елиминираме λ и μ, добиваме

$$(28)\qquad \varphi\,[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \; mx + ny + nz] = 0,$$

што претставува равенка на ротационата површина.

Обратно, секоја равенка од обликот (28), во колку изопшто претставува некоја површина, е равенка на една ротациона површина. Навистина, ако е зададена една равенка (28), тогаш ако ставиме (26), важи (27). Површината е образувана, спрема тоа, од една еднопараметарска фамилија кругови (26) кои се нормални на правата (25), а центарот им лежи на таа права. Тоа го потврдува тврдењето.

Една ротациона површина е зададена обикновено на тој начин што е дадена нејзината ротациона оска и една крива на површината, наречена *директриса*. Ако оние од круговите (26), кои сечат една зададена крива, се токму сите паралелни кругови на ротационата површина, тогаш таа крива е една директриса на површината. Спрема тоа, ако една директриса на некоја ротациона површина, чија оска е зададена со (25), е определена со равенките

$$(29)\qquad f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

тогаш на ротационата површина лежат круговите (26) при оние вредности за λ и μ, за кои равенките (26) и (29) имаат заеднички решенија по x, y, z. Ако од овие равенки ги елиминираме x, y, z, добиваме една релација

$$(30)\qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

За оние вредности на λ и μ што ја задоволуваат оваа равенка, кругот (26) лежи на бараната површина. Елиминирајќи ги уште λ и μ од (26) и (30), добиваме една равенка од облик (28) — равенката на ротационата површина. Важи, значи ова правило:

Ако ротационата оска на една ротациона површина е дадена со (25), а нејзината директриса со (29), тогаш за да ја најдеме равенката на површината треба:

1. *од равенките (26) и (29) да се елиминираат x, y, z, со што се добива една релација од видот (30);*
2. *од (26) и (30) да се елиминираат λ и μ, со што се добива бараната равенка.*

Пример. Правата $y = kz$, $x = 1$ ротира околу z-оската. Најди ја равенката на образуваната ротациона површина.

Решение. Ротационата оска е $x = y = 0$. Спрема правилото треба да ги елиминираме x, y, z од равенките

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \qquad z = \mu, \qquad y = kz, \qquad x = 1.$$

Добиваме

$$1 - \lambda + (1 + k^2)\mu^2 = 0.$$

Во оваа равенка ги сменуваме место λ и μ изразите $x^2 + y^2 + z^2$ и z, па добиваме, по средувањето

$$x^2 + y^2 - k^2z^2 = 1.$$

Тоа е равенката на бараната површина. Ако правата што ротира не е паралелна со ротационата оска, т. е. ако е $k \neq 0$, површината е еден еднокрилен хиперболоид; ако подвижната права е паралелна со ротационата оска, т. е. ако е $k = 0$, површината е еден ротационен цилиндер.

Истата површина се добива при ротацијата на правата $y = -kz$, $x = 1$. Со тоа покажавме повторно дека на ротацоиниот еднокрилен хиперболоид постојат две фамилии прави.

Равенката на ротационата површина, добиена со примената на горе формулираното правило, може да биде задоволена и со координатите на точките што не му припаѓаат на испитуваното геометриско место. Ќе го илустрираме тоа со следниот пример.

Пример. Да се најде равенката на површината што се образува при ротирањето на кривата $2x = 1 - z^2$, $x = y^2$ околу x-оската.

Решение. По горниот метод ја добиваме за бараната површина равенката

$$x = 1 - y^2 - z^2,$$

што претставува еден ротационен параболоид. На секоја рамнина $x = -t^2$, секако, лежи по еден паралелен круг од оваа површина. Но ниеден од овие кругови не ја сече дадената директриса. Навистина, нејзината втора равенка ($x = y^2$) за $x = -t^2$ не може да биде задоволена. Бараното геометриско место е, значи, само еден дел од добиениот параболоид.

ЗАДАЧИ

1. Определи ја равенката на ротационата површина што се образува при ротацијата на една права околу оската $x = y = z$, ако x-оската е една положба на таа права.

2. Параболата $(y-x)^2 = x+y$, $z=0$ ротира околу правата $x=y$, $z=0$. Најди ја равенката на образуваната ротациона површина.

3. Правата $(x-a)/l = (y-b)/m = (z-c)/n$ ротира околу правата $(x-p)/l = (y-q)/m = (z-r)/n$. Најди ја равенката на ротационата површина.

Испитај дали равенките, дадени во зад. 4—8, претставуваат ротациони површини. Во случај на позитивен одговор, да се определи оската и проекцијата на xz-рамнината од оној меридијан (пресек на површината со една рамнина што минува низ оската) чија рамнина е паралелна со z-оската.

4. $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$. 5. $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$.

6. $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2-(x-2y+3z)^2=0$.

7. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2+x^2-4x+3=0$.

8. $(x^2+y^2+z^2)^2=2(x-2z)^3$.

§ 107. Коноидни површини

Коноидна површина е таква површина што ја образува една подвижна права, која останува паралелна со една фиксна рамнина π и која сече една фиксна права p и една фиксна крива k. Правата p ја викаме *оска* а, кривата k — *директриса*, а рамнината π — *директорна рамнина* на коноидот.

Координатната система ќе ја избереме така што x_3-оската да совпадне со оската на коноидот, а x_1x_2-рамнината со директорната рамнина. Во оваа система нека ни биде зададена директрисата со равенките

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{31}$$

Тогаш генератрисите имаат равенки од вид

$$x_2 = \lambda_1 x_1, \quad x_3 = \lambda_2. \tag{32}$$

Бидејќи генератрисите ја сечат кривата (31), тоа равенките (31) и (32) треба да имаат заеднички решенија по x_1, x_2, x_3. Ако ги елиминираме x_1, x_2, x_3 од (31) и (32), добиваме една релација

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \tag{33}$$

како услов за тоа, правата (32) да ја сече кривата (31). Елиминирајќи ги λ_1 и λ_2 од (32) и (33), добиваме

$$\varphi(x_2/x_1, x_3) = 0. \tag{34}$$

Тоа е равенка на коноидот. Координатите на секоја точка на коноидот ја задоволуваат оваа равенка. Но површината (34) може да содржи и точки што испитуваниот кониод не ги содржи.

Пример. При горните ознаки нека е зададена директрисата

$$x_1 = 1, \; x_2 = x_3{}^2 \tag{34}$$

на еден коноид. Да се најде неговата равенка.

Решение. Од (32) и (34) ги елиминираме x_1, x_2, x_3, па добиваме $\lambda_1 = \lambda_2^2$. Во оваа релација ставуваме $\lambda_1 = x_2/x_1$ и $\lambda_2 = x_3$, со што ја добиваме бараната равенка

$$x_2 = x_1x_3^2.$$

Ако добиената површина ја сечеме со рамнините $x_1 = c$, ги добиваме како пресечни криви параболите $x_1 = cx_3^2$, $x_1 = c$, значи криви кои се слични со директрисата. Оваа парабола се „отвора" сѐ повеќе, ако c по апсолунтата вредност расте, т. е. ако рамнината $x_1 = c$ се оддалечува од координатниот почеток.

ЗАДАЧИ

Оската на коноидот е x_3-оската, а x_1x_2-рамнината неговата директорна рамнина. Најди ја равенката на површината, ако директрисата е зададена со равенките во зад. 1—6.

1. $x_1^2 + x_3^2 = 1$, $x_2 = 1$.
2. $x_1^2 - x_3^2 = 0$, $x_2 = 1$.
3. $x_1x_3 = 1$, $x_2 = 1$.
4. $x_3 = x_1^8$, $x_2 = 1$.
5. $x_1 = x_3$, $x_2 = 1$.
6. $x_3 = x_2^2$, $x_1 = x_3^2$.

§ 108. Класификација на криви и површини

1. Алгебарски и трансцендентни криви и површини. Во нашето досегашно излагање се запознавме со разни криви и површини. За поголема прегледност ќе извршиме сега едно групирање и расподелување на сите можни криви во рамнината и површините во просторот. Ќе ги класираме спрема некои нивни заеднички особини.

Бидејќи кривите и површините ги испитуваме преку нивните равенки во некои координатни системи, тоа класификацијата ќе ја извршиме спрема равенките со кои кривите и површините се претставуваат. Но во разни видови координатни системи равенките на една иста крива одн. површина имаат сосем различни видови, па дури и во разни системи од ист тип равенките на иста крива одн. површина можат многу да се разликуваат. Затоа при нашето класирање ќе се одлучиме за равенките, кои се однесуваат кон такви координатни системи, во кои равенките на најважните и најчесто употребуваните криви и површини имаат нарочно прост облик. Помеѓу кривите и површините претставуваат нарочно голем интерес правата и рамнината. Нивните равенки во афините системи се многу едноставни. Затоа ќе се одлучиме, кривите и површините да ги класираме на некој начин според нивните равенки во однос на афините координатни системи.

Една крива во рамнината е зададена, во однос на една афина система, со некоја релација $F(x_1, x_2) = 0$, а секоја површина во однос на некоја просторна афина система со една равенка $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Класификацијата ќе ја вршиме, значи, спрема видот на функциите $F(x_1, x_2)$ и $f(x_1, x_2, x_3)$.

Ако $F(x_1, x_2)$ е полином во x_1, x_2, тогаш ќе е полином и функцијата $F'(x_1', x_2')$ која се добива од $F(x_1, x_2)$, ако на x_1 и x_2 извршиме која да е линеарна трансформација, значи ако ставиме:

(35) $$x_1 = e_{11}x_1' + e_{12}x_2' + e_{13}, \quad x_2 = e_{21}x_1' + e_{22}x_2' + e_{23}.$$

Спрема тоа, *ако во една афина система некоја крива е претставена со равенката $F(x_1, x_2) = 0$, каде што $F(x_1, x_2)$ е еден полином по x_1 и x_2, тогаш таа крива е претставена во секоја афина система од таа рамнина со една равенка $F'(x_1', x_2') = 0$, каде што $F'(x_1', x_2')$ е пак некој полином.* Аналогно важи за површините.

А ако равенката на една крива, во однос на некоја афина система, не може да се доведе во облик $F(x_1, x_2) = 0$, каде што $F(x_1, x_2)$ е полином, тогаш тоа не може да се направи во ниедна друга афина система. Зашто, ако во некоја система $(O'; x_1', x_2')$ би било тоа можно, тогаш, спрема горната теорема, по трансформирањето во старата система би добиле една равенка $F(x_1, x_2) = 0$, во која $F(x_1, x_2)$ е полином. А тоа противречи на претпоставката дека во таа система равенката на кривата не може да се доведе во таков облик. Аналогно важи за површините.

Затоа рамнинските криви и површини можеме да ги распределиме во две групи: во оние чии равенки можат да се доведат во облик $F(x_1, x_2) = 0$ одн. $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, каде што F, одн. f е полином, и во оние при кои тоа не може да стане. Првите ќе ги викаме *алгебарски*, а вторите *трансцендентни*. Правата и кониките се, значи, примери на алгебарски рамнински криви, а рамнината и квадриките — примери на алгебарски површини. Трансцендентна крива е, на пр., кривата $x_2 = \sin x_1$.

2. Алгебарски криви и површини. При алгебарските криви и површини расподелбата, класификацијата, можеме да ја продолжиме. За таа цел прво ќе докажеме една теорема.

Полиномите F и f ги делиме во алгебрата спрема нивниот степен, т. е. спрема степените на нивните членови со највисока степен. И алгебарските рамнински криви и површини ќе можеме да ги класираме по ист начин, ако *степенот од F одн. f не зависи од тоа во која афина система е дадена равенката на кривата одн. површината.* Ќе покажеме дека тоа е навистина така.

Да ја извршиме трансформацијата на координатната система, дефинирана со (35). Ако $a_{pq}x_1^p x_2^q$ е кој да е член од $F(x_1, x_2)$, ќе е

$$a_{pq}x_1^p x_2^q = a_{pq}(e_{11}x_1' + e_{12}x_2' + e_{13})^p (e_{21}x_1' + e_{22}x_2' + e_{23})^q.$$

Изразот на десната страна нема поголема степен од изразот на левата. Спреме тоа, ако равенката на кривата $F(x_1, x_2) = 0$ во новата система гласи $F'(x_1', x_2') = 0$, тогаш за степените n и n' на полиномите F и F' важи $n \geq n'$. А ако сега извршиме обратна трансформација, равенката $F'(x_1', x_2') = 0$ ќе се трансформира во равенката $F(x_1, x_2) = 0$ и ќе важи $n' \geqq n$. Затоа е $n = n'$, со што тврдењето е докажано. Аналогно важи и за површините.

Степенот од F одн. f го викаме *ред* на алгебарската крива $F = 0$ одн. на површината $f = 0$.

Алгебарските криви и површини ги делиме, спрема тоа, според нивниот ред во криви одн. површини од прв, втор, трет итн. ред. Правите во рамнината се алгебарски криви ов прв ред, кониките — алгебарски криви од втор ред, рамнините — алгебарски површини од прв ред, квадриките — алгебарски површини од втор ред.

3. Геометриско толкување на редот на една алгебарска крива или површина. Нека е $F(x_1, x_2) = 0$ равенка на една алгебарска крива од n-ти ред. Кривата ја сечеме со која да е права p. Оваа права ја избираме за x_1'-оската на некоја нова афина координатна система. Во новата система кривата има равенка ов вид $F'(x_1' x_2') = 0$ каде што $F'(x_1', x_2')$ е полином од n-та степен по x_1', x_2'. Пресечните точки на кривата и правата p се дадени аналитички со

$$F'(x_1', 0) = 0, \quad x_2' = 0.$$

Првата од овие равенки е една алгебарска равенка за x_1'; за нејзиниот степен n' важи $n' \leqq n$. Оваа равенка има, како што не учи алгебрата, најмногу n' (реални) корени. Ако сите коефициенти на равенката се нула, таа е задоволена со секоја вредност за x_1'. На секој (реален) корен на равенката одговара една заедничка точка на правата p и кривата. p има, значи, или најмногу n' заеднички точки со кривата, или пак секоја нејзина точка ѝ припаѓа на кривата. Во последниов случај кажуваме дека правата p е една *компонента* на кривата. Значи:

Една права ја сече алгебарската крива од n-ти ред најмногу во n точки или е една нејзина компонента.

По аналоген начин следува за површините теоремата:

Една права ја сече алгебарската површина од n-ти ред најмногу во n точки или лежи на неа.

Задача. Покажи: Ако една алгебарска рамнинска крива од n-ти ред минува низ $n + 1$ точки од една права p, тогаш е p една нејзина компонента. Како гласи аналогната теорема за површините?

ГЛАВА V

КОМПЛЕКСНА РАМНИНА И КОМПЛЕКСЕН ПРОСТОР

I. *КРИВИ ОД ВТОР РЕД*

§ 109. Комплексна рамнина

За да можевме во геометриските иследувања да го користиме силниот аналитички апарат, створивме за двата основни поими со кои оперираме — за векторот и точката — нивни аналитички репрезентанти — координати. Со воведување на координатните системи можевме, имено, да дефинираме такви подредени парови броеви да помеѓу нив и векторите одн. точките во дадената рамнина постоеше една обратно-еднозначна кореспонденција; секој пар броеви определуваше еден вектор одн. точка, и обратно. Затоа можевме иследувањата над каква да е геометриска фигура да ги вршиме преку координатите на векторите и точките што ја образуваат таа фигура.

Координати беа реални броеви. Во алгебрата, веќе при решавањето на алгебарските равенки, се покажува меѓу тоа како многу корисно проширувањето на областа реални броеви во областа на таканаречените *комплексни* броеви. И во Аналитичната геометрија е многу полезно да се воведат комплесните броеви. Некои геометриски теореми ќе добијат попроста формулација, ќе се избегнат разни исклучоци. А освен тоа и на самите геометриски факти ќе се фрли со тоа нова светлина, со помошта на која подобро ќе се видат меѓусебните односи на геометриските облици — како што ќе го видиме тоа во курсот по *Проективна геометрија*. Затоа ќе го обопштиме поимот за вектор и точка во една рамнина.

Ако во рамнината се избрани два координатна вектора, тогаш ќе се договориме, секој пар подредени комплексни броеви, било да се тие реални или не, да ни претставува еден вектор; ќе го наречеме *комплексен вектор*. Ако обата броја — *координати* — се реални, тоа ќе е вектор, дефиниран во § 10; ќе го наречеме сега *реален вектор*. А ако барем една координата не е реална, ќе кажеме дека тоа се координати на еден *имагинарен вектор*. Комплексниот вектор може да биде, значи, реален или имагинарен. Се разбира дека за имагинарните вектори во рамнината немаме никаква геометриска претстава. *За сметање со имагинарните вектори нека важат, по договор, истите правила како и за изучените веќе реални вектори, ако овие се зададени со своите координати.*

Аналогно го обопштуваме и поимот за точка во рамнината. Ако во неа е избрана една афина координатна система, тогаш, по договор, секој пар подредени броеви ќе ги сметаме како координати на една точка и ќе ја наречеме комплексна точка. Ако обата броја се реални, тогаш тоа е обична точка, за која е зборувано во § 12; ќе ја наречеме сега *реална точка*. А ако барем еден од тие броеви — *координати* — не е реален, точката ќе ја наречеме *имагинарна*. Имагинарните точки, се разбира, не можеме да си ги претставиме во рамнината. *При премин на некоја нова координатна система координатите на имагинарните точки нека подлежат, по договор, на истите линеарни трансформации како и координатите на реални точки од таа рамнина*

Рамнината во која се воведени коплексни вектори и комплексни точки ќе ја наречеме *комплексна рамнина*.

Формулите кои аналитички изразуваат извесни геометриски факти помеѓу реални вектори и точки нека ги изразуваат, по дефиниција, аналогните геометриски факти, ако некои (или сите) од тие вектори и точки се имагинарни.

На пр., точките (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), каде што некои или сите од броевите x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 се имагинарни, се колинеарни, спрема таа дефиниција, ако важи

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Векторот со почеток во (x_1, x_2) и крај во (y_1, y_2) е даден со $\{y_1 - x_1, y_2 - x_2\}$.

Под *отсечка* што ги соединува точките (y_1, y_2) и (z_1, z_2) во комплексната рамнина ја подразбираме целокупноста на точките (x_1, x_2) за кои важи

$$(1) \qquad x_1 = y_1 + \lambda (z_1 - y_1), \quad x_2 = y_2 + \lambda (z_2 - y_2),$$

каде што λ е реален и $0 \leqq \lambda \leqq 1$ (види § 14, т. 4).

Целокупноста на точките (x_1, x_2), дефинирани со (1), каде што λ е произволен комплексен број, реален или имагинарен, е *права* во комплексната рамнина. Ако од (1) го елиминираме λ, добиваме релација од вид

$$(2) \qquad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 = 0,$$

во која коефициентите (кои зависат од y_1, y_2, z_1, z_2) се комплексни броеви. Равенката (2) е *равенка* на правата. И обратно, секоја равенка од видот (2), во која барем еден од коефициентите A_1, A_2 не е нула, а инаку коефициентите се произволни комплексни броеви, претставува една права во комплексната рамнина. Навистина, ако (y_1, y_2) и (z_1, z_2) се две решенија од (2), важи

$$(3) \qquad A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 = 0, \quad A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 = 0,$$

и оттука

$$(4) \qquad A_1 (z_1 - y_1) + A_2 (z_2 - y_2) = 0.$$

Ако во (2) за x_1, x_2 ги ставиме вредностите од (1), го добиваме на левата страна изразот

$$A_1y_1 + A_2y_2 + A_3 + \lambda . [A_1(z_1 - y_1) + A_2(z_2 - y_2)],$$

кој, поради (3) и (4), е нула при секоја вредност од λ. Со тоа тврдењето е докажано.

Под *крива* во комплексната рамнина ја подразбираме целокупноста на точки (x_1, x_2), реални и имагинарни, чии што координати задоволуваат некоја равенка $f(x_1, x_2) = 0$, а самата равенка ја викаме *равенка на кривата*. Ако е $f(x_1^0, x_2^0) = 0$, велиме дека точката (x_1^0, x_2^0) *лежи* на кривата, а ако е $f(x_1^0, x_2^0) \neq 0$, велиме дека точката (x_1^0, x_2^0) *не лежи* на кривата. Ако сите коефициенти на равенката на кривата се реални или ако равенката може да се сведе на таква равенка, тогаш кажуваме дека кривата е *реална*. Но не секоја реална крива мора да има реални точки; може да ги има безброј, може да ги има само краен број, а може и да ги нема На пр., кривата $x_1^2 + x_2^2 = 0$ има само една реална точка — точката (0, 0), а кривата $x_1^2 + 1 = 0$ нема ниедна; но двете имаат безброј имагинарни точки.

Ако некоја крива во комплексната рамнина има иста равенка како некоја позната крива во обикновената — реална — рамнина, на кривата од комплексната рамнина ќе ѝ го дадеме името на кривата од реалната рамнина.

Со оглед на дефиницијата на комплексната рамнина е јасно дека, ако во оваа рамнина ги посматраме само реалните обекти (точки, вектори), ја добиваме порано изучената обикновена аналитична геометрија, т. е. аналитичната геометрија во обикновената (*реална*) рамнина. Аналитичната геометрија во комплексната рамнина е, значи, едно апстрактно обопштение — проширение — на аналитичната геометрија во реалната рамнина.

Афини особини на кривите од втор ред

§ 110. Општо за кривите од втор ред

1. Општа равенка на кривата од втор ред. Најопшт вид равенка од втора степен по однос на x_1, x_2 има облик

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0, \tag{5}$$

каде што коефициентите $a_{ik} = a_{ki}\,(i, k = 1, 2, 3)$ се произволни комплексни броеви, а барем еден од коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} не е нула. Ако x_1, x_2 ги толкуваме како афини координати на точки во една комплексна рамнина, тогаш равенката (5) е равенка на една *крива од втор ред*. Бидејќи равенката (5) е најопшт вид равенка од втора степен, тоа ја викаме *општа равенка* на крива од втор ред.

Равенката (5) содржи шест коефициенти. Со едниот од нив равенката можеме да ја поделиме и така остануваат уште, освен единицата, пет коефициенти. Сега можеме да одговориме на прашањето, низ најмногу колку произволно избрани точки во рамнината минува некоја крива од втор ред. Ако во рамнината избереме една точка и нејзините координати ги замениме наместо x_1, x_2 во равенката (5), добиваме една линеарна равенка за коефициентите a_{ik}. За да бидат определени петте односи на пет од коефициентите кон шестиот, се потребни, општо, пет равенки. Бидејќи од секоја избрана точка добиваме по една ваква равенка, тоа *низ пет точки од рамнината минува, општо, една и само една крива од втор ред.* Кажавме „општо", зашто може да се случи, при специјален избор на точките, некои од добиените равенки да не бидат независни. Во тој случај еден или повеќе коефициенти во бараната равенка остануваат произволни. Затоа тогаш низ избраните пет точки не минува само една, туку безброј криви од втор ред.

2. Споп криви од втор ред. Избираме две криви од втор ред, дадени со своите равенки

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2) = 0. \tag{6}$$

Ја формираме равенката

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2) = 0, \tag{7}$$

каде што λ_1, λ_2 можат да се бират произволно. Ги викаме *хомогени параметри.* Ако ставиме $\lambda_2 : \lambda_1 = \lambda$, можеме равенката (7) да ја пишеме во вид

$$f_1(x_1, x_2) + \lambda f_2(x_1, x_2) = 0. \tag{8}$$

Произволниот коефициент λ го викаме *нехомоген параметар.* Се разбира дека равенките (7) и (8) се квадратни во однос на x_1, x_2. За секоја вредност од λ равенката (8) претставува една крива од втор ред, а исто така претставува равенката (7) една таква крива за секоја вредност на односот $\lambda_1 : \lambda_2$. Бидејќи λ може да се избере на безброј начини, а истотака и односот $\lambda_1 : \lambda_2$, тоа равенките (7) и (8) претставуваат безброј криви од втор ред. Оваа целокупност од криви ја викаме *сноп криви од втор ред*, а равенката (7) одн. (8) — *равенка на снопот.*

И тогаш кога една од кривите (6), на пр. $f_2 = 0$, не е од втор ред, туку од прв, т. е. ако $f_2(x_1, x_2)$ е еден линеарен израз во однос на x_1, x_2, па и тогаш кога $f_2(x_1, x_2)$ воопшто не зависи од x_1, x_2, т. е. ако е некоја константна, велиме дека кривите претставени со равенката (7) или (8) образуваат еден сноп криви од втор ред.

Ако равенките (7) и (8) ги уредиме по степените од x_1 и x_2, добиваме една квадратна равенка чии коефициенти се линеарни функции од λ идн. хомогени линеарни функции од λ_1, λ_2. И обратно, секоја ваква равенка може да се пише во облик (7) одн. (8), уредувајќи ја по λ одн. по λ_1 и λ_2. Важи значи:

Ако коефициентите во равенката на кривата од втор ред се линеарни функции од еден расположив параметар, тогаш целокупноста на кривите што ги претставува равенката е еден сноп криви од втор ред. Истото важи ако коефициентите се линеарни хомогени функции од два параметри.

Снопот кругови, изучен во § 69, е еден пример за сноп криви од втор ред во реалната рамнина.

Ако кривите (6) имаат некоја заедничка точка P, тогаш е $f_1(P) = 0$, $f_2(P) = 0$*). Но тогаш е и $\lambda_1 f_1(P) + \lambda_2 f_2(P) = 0$, и тоа за секакви вредности на λ_1, λ_2. Низ точката P минуваат, значи, сите криви од снопот.

Пресечните точки на кривите (6), ако постојат, се викаат *базни точки* на снопот. Покажавме, значи, дека *сите криви од снопот минуваат низ базните точки на снопот.*

Нека е M која да е точка од рамнината која не совпаднува со ниедна базна точка. Низ оваа точка минува една и само една крива од снопот. Навистина, ако минува некоја крива од снопот низ M, треба координатите од M да ја задоволуваат равенката (8), т. е.

$$\lambda_1 f_1(M) + \lambda_2 f_2(M) = 0. \tag{9}$$

Барем еден од коефициентите $f_1(M)$ и $f_2(M)$ е различен од нула, оти инаку M би лежала на обете криви (6), т. е. би била една базна точка, што е противно на нашата претпоставка. Нека е, на пр., $f_1(M) \neq 0$. Тогаш добиваме од (9) $\lambda_1 : \lambda_2 = -f_2(M) : f_1(M)$. Спрема тоа, кривата

$$f_2(M)\, f_1(x_1, x_2) - f_1(M)\, f_2(x_1, x_2) = 0$$

претставува една крива од снопот што минува низ M. Но низ M не може да врви повеќе од една крива од снопот. Ако би врвеле две, на пр. $\lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0$ и $\lambda_1'' f_1 + \lambda_2'' f_2 = 0$, би имале

$$\lambda_1' f_1(M) + \lambda_2' f_2(M) = 0, \qquad \lambda_1'' f_1(M) + \lambda_2'' f_2(M) = 0,$$

каде $\lambda_1' : \lambda_2' = \lambda_1'' : \lambda_2''$, што значи дека кривите совпандуваат. Спрема тоа:

Низ секоја точка од рамнината која, не е базна точка, минува една единствена крива од снопот.

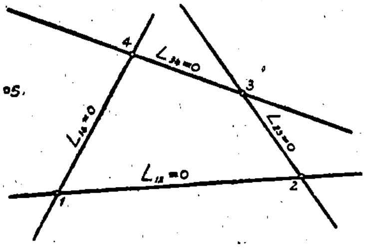
3. Криви од втор ред низ пет зададени точки. Зададени нека ни се пет точки од кои четири не лежат на една права. Ќе ги обеле-

---

*) Ознаката $f(P)$ значи дека во $f(x_1, x_2)$ место x_1, x_2 треба да се заменат координатите од P.

жиме со цифрите 1, 2, 3, 4, 5. Применувајќи ги резултатите од т. 2, ќе најдеме еден лесен начин за најдување равенката на кривата од втор ред која минува низ низ.

Од зададените пет точки избираме кои да е четири. Нека бидат тоа точките 1, 2, 3, 4. Избираме една од правите која сврзува кои да е две од овие четири точки, а потоа правата која ги сврзува другите две точки. Нека бидат тоа правите што ги сврзуваат точките 1, 2 и точките 3, 4. Нивните равенки нека се $L_{12} = 0$ и $L_{34} = 0$. Равенката $L_{12} \cdot L_{34} = 0$ е заедничката равенка на двете прави. Таа претставува, очигледно, една крива од втор ред која минува низ точките 1, 2, 3 и 4. Ќе образуваме уште една таква крива. За таа цел ги избираме, на пр., правите што ги сврзуваат точките 2, 3 и точките 1, 4. Ако се нивните равенки $L_{23} = 0$ и $L_{14} = 0$, тогаш равенката $L_{23} \cdot L_{14} = 0$ претставува една крива од втор ред која истотака минува низ точките 1, 2, 3, 4.



Сл. 140

Го образуваме снопот

$$L_{12} \cdot L_{34} + \lambda L_{23} \cdot L_{14} = 0.$$

Неговите базни точки се точките 1, 2, 3, 4. Сите криви од овој сноп врват, значи, низ нив. Сега го определуваме λ така да ја добиеме онаа крива од снопот која минува низ точката 5. Добиената крива е бараната крива, бидејќи таа врви низ базните точки 1, 2, 3, 4 и низ точката 5, па значи, низ сите пет зададени точки.

Едновремено со оваа метода за определување равенката на кривата од втор ред што врви низ пет зададени точки покажавме дека *низ пет точки од рамнината, од кои четири не лежат на една права, минува само една крива од втор ред.*

Пример. Да се определи равенката на кривата од втор ред која минува низ точките A (0, 0), B (1, 0), C (0, 1), D (3, 1), E (1, 3).

Решение. Го избираме четириаголникот $ABCD$, а во него правите AB, CD и AC, BD. Нивните равенки се по ред:

$$x_2 = 0,\ x_2 = 1; \quad x_1 = 0,\ x_1 - 2x_2 - 1 = 0.$$

Равенката $x_2(x_2 - 1) = 0$ ги претставува правите AB, CD; а равенката $x_1(x_1 - 2x_2 - 1) = 0$ парот прави AC, BD. Тоа се две криви од втор ред кои минуваат низ точките A, B, C, D. Го образуваме снопот

$$x_1(x_1 - 2x_2 - 1) + \lambda x_2(x_2 - 1) = 0. \tag{10}$$

Координатите од E треба да ја задоволуваат оваа равенка. Ставуваме во неа, значи, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, и добиваме $\lambda = 1$. Заменувајќи ја оваа вредност за λ во (10), добиваме

$$x_1(x_1 - 2x_2 - 1) + x_2(x_2 - 1) = 0, \quad \text{или} \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 0.$$

Тоа е бараната равенка. Равенката може да се запише во вид

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1 + x_2.$$

Според § 77, кривата е парабола.

ЗАДАЧИ

Да се најде равенката на кривата од втор ред што минува низ петте зададени точки во зад. 1—5.

1. $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.
2. $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$.
3. $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(4, -8)$, $(2i, 2)$ $(-2i, 2)$.
4. $(0, i)$, $(0, -i)$, $(i, 0)$, $(-i, 0)$, $(3i/5, 4i/5)$.
5. $(i, 2)$, $(2, i)$, $(1 + i, 1 + i)$, $(-1-i, -1-i)$, $(1, 2i)$.

§ 111. Асимптоти, тангенти и пречници на кривите од втор ред

1. Пресек на крива од втор ред со права. Нека ни е зададена кривата (5) и една права која минува низ точката $M_0(x_1^0, x_2^0)$, а паралелна е со векторот $a = \{a_1, a_2\}$. Параметарските равенки на правата се

$$x_1 = x_1^0 + a_1 t, \qquad x_2 = x_2^0 + a_2 t. \tag{11}$$

Левата страна од (5) ќе ја означиме со $f(x_1, x_2)$.

Заменувајќи ги изразите за x_1, x_2 од (11) во (5), добиваме

$$f(x_1^0 + a_1 t,\ x_2^0 + a_2 t) \equiv At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{12}$$

каде што е

$$\begin{aligned} A &= a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2, \qquad C = f(x_1^0, x_2^0), \\ B &= a_1(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}) + a_2(a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}). \end{aligned} \tag{13}$$

Коефициентот C го добиваме лесно, ако во (12) ставиме $t = 0$. А коефициентот B може да се пише во друг, за запомнување поподесен облик, ако се послужиме со симболиката на парцијалните изводи. Важи имено

$$2B = a_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2}, \tag{14}$$

каде што $\dfrac{\partial f_0}{\partial x_i}$ значи дека во изразот $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ треба да се стави $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$.

Заменувајќи го секој од корените на равенката (12) наместо t во (11), ги добиваме координатите x_1, x_2 на заедничките точки на кривата (5) и правата (11).

2. Прави со асимптотски правец. Асимптоти. Коефициентот A зависи, освен од коефициентите a_{ik}, само од правецот на правата

(11). Сите прави, паралелни со една дадена права имаат, значи, ист A. Ако правите имаат таков правец да е $A = 0$, ќе кажеме дека имаат *асимптотски* правец. За такви прави равенката (12) добива вид

$$2Bt + C = 0.$$

Ако е $B \neq 0$, оваа равенка има точно едно решение; правата ја сече кривата во една точка. Ако е $B = 0$, $C \neq 0$, равенката нема решенија; правата не ја сече кривата. А најпосле ако е $B = C = 0$, равенката ја задоволува секој t; секоја точка од правата ѝ припаѓа и на кривата — кажуваме дека правата е една *компонента* на кривата. Значи:

Една права со асимптотски правец ја сече кривата од втор ред во една точка, или не ја сече, или е една нејзина компонента.

Да испитаме колку асимптотски правци постојат за една крива од втор ред!

Ако правата (11) има асимптотски правец, важи

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0. \tag{15}$$

Ако е $a_{22} = 0$, равенката (15) има две решенија за $a_1 : a_2$, и тоа: $a_1 = 0$, a_2 произволен и $a_1 : a_2 = -2a_{12} : a_{11}$. Во тој случај кривата има два или еден асимптотски правец — според тоа дали е $a_{12} \neq 0$ или $a_{12} = 0$. А ако е $a_{22} \neq 0$, ја поделуваме равенката (15) со a_1^2, со што добиваме една квадратна равенка за $a_2 : a_1$, значи за агловиот коефициент на правата (11). Во областа на комплексните броеви има секоја квадратна равенка два корени, кои евентуално можат и да совпаднат. Спрема тоа:

Секоја крива од втор ред има два асимптотски правци, кои можат и да совпаднат.

Ако кривата (5) е реална, т. е. ако коефициентите a_{ik} се реални броеви, можеме да испитаме во кои случаи асимптотските правци се реални, а во кои имагинарни. Дискриминантата на квадратната равенка за a_2/a_1 (во која е $a_{22} \neq 0$) е $4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$. Спрема тоа:

Реалната крива (5) има два реални, два имагинарни или еден реален асимптотски правец — според тоа дали изразот $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *е негативен, позитивен или нула.*

Тоа очигледно важи и за случајот кога е $a_{22} = 0$.

Оние прави од рамнината што дадената крива од втор ред не ја сечат (ни во реални, ни во комплексни точки) ги викаме *асимптоти* на кривата. За нив, ако постојат, е значи карактеристично $A = B = 0$, $C \neq 0$. Ако за правата (11) важи само $A = B = 0$, таа е асимптота (ако $C \neq 0$) или една компонента (ако $C = 0$) на кривата. Да ги најдеме равенките на правите кои се асимптоти или компоненти на зададената крива! Ако правата (11) е една таква права, важи за неа освен (15) и $B = 0$, т. е.:

$$a_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} = 0. \tag{16}$$

Со равенката (15) ги определуваме односите $a_1 : a_2$, а добиените вредности ги внесуваме во (16). Координатите на точката $M_0(x_1{}^0, x_2{}^0)$ која лежи на таа права ја задоволуваат равенката (16). Но за точката M_0 можевме да избереме која да е точка на правата (11), која е асимптота или компонента на кривата. Затоа координатите на секоја точка од таа права ја задоволуваат равенката (16). Спрема тоа:

Равенката

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

во која a_1, a_2 се едно решение на равенката (15), *е равенка на една асимптота или една компонента на кривата* (5).

За хиперболата $x_1{}^2 - x_2{}^2 = 1$ равенките на асимптотите, спрема оваа теорема, гласат $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ (види § 71!).

Дефиницијата на асимптоти на кривите од втор ред, дадена во овој §, е, значи, во склад со дефиницијата на асимптоти за овие две реални криви, дадена во § 71.

ПРИМЕРИ

1. Да се определат асимптотите на кривата

$$x_1{}^2 - 5x_1x_2 + 6x_2{}^2 + 4x_1 - 2x_2 + 5 = 0.$$

Решение. Асимптотските правци ги определуваме со равенката

$$a_1{}^2 - 5a_1a_2 + 6a_2{}^2 = 0.$$

Ставувајќи $k = a_2/a_1$, добиваме

$$6k^2 - 5k + 1 = 0,$$

чии корени се $k' = 1/2$, $k'' = 1/3$. Можеме да ставиме $a_1' = 2$, $a_2' = 1$ и $a_1'' = 3$, $a_2'' = 1$. Равенките на асимптотите гласат, спрема тоа:

$$2 \cdot (2x_1 - 5x_2 + 4) + 1 \cdot (-5x_1 + 12x_2 - 2) = 0$$

$$3 \cdot (2x_1 - 5x_2 + 4) + 1 \cdot (-5x_1 + 12x_2 - 2) = 0,$$

или

$$x_1 - 2x_2 - 6 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 - 3x_2 + 10 = 0.$$

Дека добиените прави се асимптоти, а не компоненти, треба да се провери. Ако би биле компоненти, тогаш координатите на која да е нивна точка би ја задоволувале равенката на дадената крива. А тоа тука не е случај.

2. Какви се асимптотите на кривите чии равенки се разликуваат само во слободниот член (во членот a_{33})?

Решение. Во равенките (15) и (16) не фигурира a_{33}. Кривите имаат, спрема тоа, исти асимптоти.

3. Да се најде равенката на правите што минуваат низ координатниот почеток, а се паралелни со асимптотите на кривата (5).

Решение. Ако (x_1, x_2) е која да е точка на една од тие прави, тогаш векторот $\{x_1, x_2\}$ лежи на неа. Равенката (15) е задоволена, спрема тоа, за $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$. Равенката на бараните прави гласи, значи,

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

3. Тангенти. Правите, кои кривата ја сечат во една единствена точка, но немаат асимптотски правец, ги викаме *тангенти* на кривата, а заедничката точка — нејзина *допирна точка*. И правите, кои се компоненти на кривата, ќе ги сметаме како тангенти, а секоја нивна точка како допирна точка.

Нека биде точката M_0 (x_1^0, x_2^0) еден пресек на правата (11) со кривата (5). Бидејќи M лежи тогаш на кривата, тоа е $f(x_1^0, x_2^0) = C = 0$. Равенката (12) гласи сега $At^2 + 2Bt = 0$. Коренот $t = 0$ на оваа равенка го определува пресекот M_0, а другиот корен, т. е. коренот на равенката

$$At + 2B = 0, \quad A \neq 0 \tag{17}$$

го определува другиот пресек M на правата и кривата. Правата ја завртуваме околу M_0 така M да совпадне со M_0. Тогаш и коренот на (17) е еднаков на нула. А за тоа е потребно да е $B = 0$. Правата (11) ја сече кривата (5), во случај да е по завртувањето $A \neq 0$, само во една точка — во точката M; правата е тангента. А ако е тогаш $A = 0$, тогаш, поради $B = C = 0$, равенката (17) е задоволена за секој t; правата е една компонента на кривата, значи, пак тангента. Оттука следува: *Ако една сечица од некоја крива од втор ред ја завртиме околу едната пресечна точка така, втората пресечна точка да совпадне со правата, тогаш правата во граничната положба е тангента на кривата.* Аналогно важи, ако кривата од втор ред се менува така што едниот од двата нејзини пресеци со една фиксна права да совпадне со другиот пресек:

Видовме дека, ако за правата (11), при која е $C = 0$, важи и

$$2B \equiv a_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} = 0, \tag{18}$$

таа е тангента со допир во M_0. Но и обратно, ако правата (11) е тангента со допир во M_0, имаме покрај $C = 0$ и $B = 0$.

Множејќи ја равенката (18) со t, а потоа ставувајќи, на основа равенките (11),

$$a_1 t = x_1 - x_1^0, \quad a_2 t = x_2 - x_2^0,$$

добиваме

$$(x_1 - x_1^0) \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0) \frac{\partial f_0}{\partial x_2} = 0. \tag{19}$$

Оваа равенка е задоволена со координатите x_1, x_2 од секоја точка на тангентата. *Затоа равенката (19) е равенка на тангентата на кривата (5) со допир во* (x_1^0, x_2^0).

На равенката (19) ќе й дадеме уште еден друг облик. Лесно се проверува дека е

$$\frac{1}{2}\left(x_1^0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + x_2^0 \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\right) + a_{13}x_1^0 + a_{23}x_2^0 + a_{33} = f(x_1^0, x_2^0),$$

односно поради, $f(x_1^0, x_2^0) = 0$,

$$-\left(x_1^0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + x_2^0 \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\right) = 2\,(a_{13}x_1^0 + a_{23}x_2^0 + a_{33}).$$

Затоа равенката (19) можеме да ја запишеме во вид

$$(20)\qquad (a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13})\,x_1 + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23})\,x_2 + \\ + a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33} = 0,$$

или

$$(21)\qquad a_{11}x_1x_1^0 + a_{12}(x_1x_2^0 + x_1^0x_2) + a_{22}x_2x_2^0 + a_{13}(x_1 + x_1^0) + \\ + a_{23}(x_2 + x_2^0) + a_{33} = 0.$$

Обликот (21) на равенката на тангентата ќе го запомниме за практична примена.

ПРИМЕРИ.

1. Да се напише тангентата на кривата

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_1 - 10x_2 - 3 = 0 \text{ со допир во } (1,\ 2).$$

Решение. Спрема (21), равенката на тангентата гласи

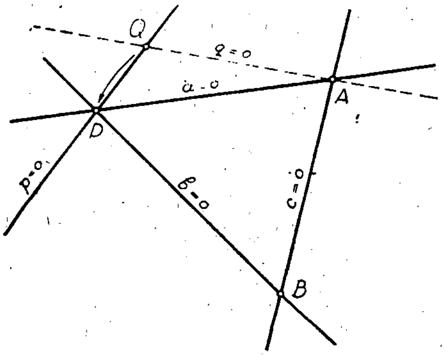
$$x_1 \cdot 1 + 2\,(x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 1) + 2 \cdot x_2 \cdot 2 + 3\,(x_1 + 1) - 5\,(x_2 + 2) - 3 = 0,$$

о каде имаме

$$8x_1 + x_2 - 10 = 0.$$

2. Да се определи равенката на кривата од втор ред, која ја допира правата $p = 0$ во точката P и која минува низ други две точки A, B кои не лежат на правата.

Решение. Ја избираме правата AP чија равенка нека е $a = 0$, правата BP со равенката $b = 0$ и правата AB чија равенка нека е $c = 0$. На правата $p = 0$ избираме уште една точка Q. Правата AQ нека има равенка $q = 0$.



Сл. 141

Кривите од втор ред кои минуваат низ точките A, B, P, Q ја имаат равенката (§ 110, т. 3).

$$pc + \lambda bq = 0.$$

Правата PQ ги сече сите овие криви во точките P и Q. Ако точката Q се стреми, движејќи се по правата $p = 0$, неограничено кон P, се стреми сечицата PQ кон тангентата на секоја од кривите во точката P. Бидејќи при тоа правата AQ преjдува во правата AP, тоа равенката на сите криви од втор ред кои ја допираат правата $p = 0$ во P и кои врват низ A и B, гласи

$$pc + \lambda ab = 0,$$

каде што λ е произволен параметар. Бараните криви образуваат, значи, еден сноп.

Пример. I. Да се напише равенката на кривите од втор ред кои ја допираат правата $x_1 + x_2 = 0$ во координатниот почеток O и минуваат низ точките A (1, 0) и B (0, 1).

Решение. Правите OA и OB имаат равенки $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, а правата AB има равенка $x_1 + x_2 - 1 = 0$. Равенката на бараниот сноп криви е, значи,

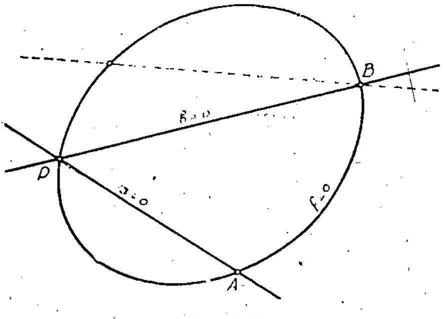
$$(x_1 + x_2)\,(x_1 + x_2 - 1) + \lambda x_1 x_2 = 0.$$

Пример. II. Да се определи кривата од втор ред која ги задоволува условите на прим. I, а освен тоа минува низ точката C (1, 1).

Решение. Координатите од C ја задоволуваат равенката на снопот од прим. I. Тоа ни дава $\lambda + 2 = 0$. Со заменување на добиената вредност за λ во равенката на снопот, добиваме

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 0.$$

Тоа е равенката на бараната крива.



Сл. 142

3. Да се определат кривите од втор ред кои се допираат во една точка P до една крива од втор ред $f = 0$ и минуваат низ две зададени точки A и B од таа крива.

Решение. За две криви велиме дека се допираат во некоја точка P ако двете минуваат низ P и во P имаат иста тангента.

На кривата $f = 0$ избираме уште една точка Q. Правата QB нека има равенка $q = 0$. Равенката

$$f + \lambda aq = 0$$

е тогаш равенка на снопот криви од втор ред кои минуваат низ точките A, B, P, Q. Сите овие криви ја сечат правата PQ во точките P и Q. Ако точката Q, движејќи се по кривата, се стреми неограничено кон P, тогаш сечицата PQ се стреми кон заедничката тангента на кривите со допир во P. Бидејќи при тоа правата QB преjдува во правата PB, тоа равенката

$$f + \lambda ab = 0$$

ја претставува равенката на бараните криви.

Пример. Да се определи кривата од втор ред, која ја допира параболата $x_1^2 = x_2$ во точката (1, 1) и која врви низ точките (0, 0), (— 1, 1) на параболата и уште низ точката (0, 2).

Решение. Равенката на кривите што ги задоволуваат сите услови освен последниот гласи

$$x_2 - x_1^2 + \lambda (x_2 - x_1)\cdot(x_2 - 1) = 0.$$

Ставувајќи во неа $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, добиваме $\lambda = -1$. Бараната крива има, значи, равенка

$$x_2 - x_1^2 - (x_2 - x_1)\ (x_2 - 1) = 0,$$

или

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 = 0.$$

4. Да се најде равенката на кривите од втор ред кои се допираат до две зададени прави $a = 0$ и $b = 0$ во точките, во кои нив ги сече една дадена права $p = 0$.

Решение. Ако во примерот **2.** точката B се стреми по правата AB неограничено кон A, тогаш сечицата AB преjдува во заедничка тангента на сите криви од снопот. Правата PB преjдува во правата PA. Затоа, при сегашните ознаки, равенката

$$ab + \lambda p^2 = 0$$

ја претставува равенката на бараните криви.

Пример. Да се определи равенката на кривата од втор ред која ги допира координатните оски во точките A (0, 1) и B (1, 0) и минува низ точката C (1, 1).

Решение. Равенката на кривите кои ги задоволуваат сите услови освен последниот, спрема изложеното, гласи

$$x_1x_2 + \lambda (x_1 + x_2 - 1)^2 = 0.$$

Заменувајќи ги во оваа равенка наместо x_1, x_2 координатите на C, добиваме $\lambda + 1 = 0$. Бараната крива има, значи, равенка

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0.$$

5. Да се најде равенката на кривите од втор ред, кои една зададена крива од втор ред $f = 0$ ја допираат во точките во кои таа крива ја сече правата $p = 0$.

Решение. На потполно аналоген начин како во **4.** се покажува дека бараната равенка гласи

$$f + \lambda p^2 = 0.$$

ЗАДАЧИ

Да се напишат равенките на тангентите на кривите од втор ред од зад. 1—4 во зададените точки.

1. $a_{11} x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0$; (x_1^0, x_2^0).
2. $x_1x_2 + a = 0$; (x_1^0, x_2^0).
3. $x_1^2 - 4x_2 + 8 = 0$; $(-2, 3)$.
4. $x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 - 3x_2 + 10 = 0$; $(1, 2)$.

5. Една крива од втор ред ја допира страната AB на триаголникот ABC во B, а страната AC во C. Напиши ја равенката на кривата од втор ред, ако таа врви низ тежиштето на триаголникот, и ако е A (1, 1), B (3, 2) и C (— 2, 4).

6. Најди ја равенката на онаа крива од втор ред, опишана околу триаголникот ABC од зад. 5, која ја допира апсцисната оска во координатниот почеток.

7. Најди ја равенката на кривата од втор ред, која кривата $x^2 + xy + y^2 + 2x + 4y = 0$ ја допира во (0, 0) и минува низ нејзините точки (0, — 4) и (— 2, 0).

4. Полара. Ако во равенката (19), (20) или (21) координатите (x_1^0, x_2^0) не се кординати на една точка што лежи на кривата (5), туку на која да е друга точка P во рамнината, тогаш равенката пак претставува една права. Ја викаме *полара* на кривата (5) во однос на точката P како *пол*. Нека M' (x_1', x_2') биде еден пресек на таа полара со кривата. Тогаш е

$$(x_1' - x_1^0)\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + (x_2' - x_2^0)\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = 0.$$

Оваа равенка покажува дека на тангентата на кривата $f = 0$ со допир во M' лежи точката P. *Поларата од полот P е*, спрема тоа, *сврзницата на допирните точки од тангентите, спуштени од P на кривата.*

5. Дијаметри. Центар. Нека правата (11) ја сече кривата (5) во точките T', T'', а точката M (x_1^0, x_2^0) нека биде во средината на отсечката $T'T''$. Ако равенката (12) во тој случај ги има корените t', t'', тогаш следува, како во § 72, т. 2, дека $t' + t'' = 0$. Затоа е (правилото на Виет), $B = 0$ или

$$a_1\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = 0. \tag{22}$$

Координатите x_1^0, x_2^0 на средината од секоја онаа тетива на кривата (5), која е паралелна со векторот $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$, ја задоволуваат равенката (22). Бидејќи сите прави, паралелни со една сечица, ја пресечуваат кривата (во реални или имагинарни точки), тоа *геометриско место на средините на тетивите на кривата од втор ред $f = 0$, кои се паралелни со векторот $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$, е правата*

$$a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0; \tag{23}$$

оваа права ја нарекуваме дијаметар на кривата, конјугиран со правецот на $\mathbf{a}$.

Ако ставиме $a_2/a_1 = k$, можеме да кажеме дека *правата*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + k\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \tag{23'}$$

е дијаметар на кривата $f = 0$, конјугиран со правецот на правата $x_2 = kx_1$.

Ако правите

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \tag{24}$$

или

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} = 0, \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} = 0 \tag{24'}$$

се совпаднати, равенките (23) и (23′) претставуваат, при секакви вредности за a_1, a_2 одн. k, една иста права. А ако правите (24), (24′) не се совпаднати, равенките (23) одн. (23′), во кои a_1, a_2 одн. k се расположиви параметри, претставуваат еден сноп прави. Спрема тоа:

Дијаметрите на една крива од втор ред минуваат сите низ една точка или се паралелни меѓу себе, а можат и сите да совпаднат.

Секоја точка низ која минуваат сите дијаметри на една крива од втор ред ја викаме *центар* на кривата, а самата крива во тој случај — *крива со центар* или *централна крива*. Центрите на една крива (5) се сите оние точки од рамнината чии што координати x_1, x_2 ја задоволуваат системата равенки (24′). Еден сам центар имаат, спрема тоа, оние криви (5) при кои важи

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Неговите координати x_1^0, x_2^0 се дадени, значи, со пропорцијата

$$x_1^0 : x_2^0 : 1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

ЗАДАЧИ

1. Определи го оној дијаметар на кривата $x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 7x_2 + 5 = 0$ што минува низ координатниот почеток.

Определи ги центрите на дадените криви во зад. 2—5, ако постојат:

2. $3x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 + 8x_2 + 10 = 0.$
3. $2x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 + 4 = 0.$
4. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 6 = 0.$
5. $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 + 5x_2 - 7 = 0.$

6. Определи го геометриското место на центрите на кривата $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$, ако

a) a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} се константни, а a_{33} произволен;

b) a_{11}, a_{12}, a_{22} се константни, a_{13}, a_{23} линеарни функции од еден ист параметар, а a_{33} произволен;

c) a_{33} е произволен, а останатите коефициенти се линеарни функции од еден ист параметар.

6. Заемно конјугирани дијаметри. Дијаметарот (23), конјугиран со правецот на векторот $\{a_1, a_2\}$, е паралелен со некој вектор $\{a_1', a_2'\}$. Да испитаме каква врска постои помеѓу координатите на векторите $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_1', a_2'\}$.

Равенката (23) гласи во испишан вид

$$a_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}) + a_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}) = 0,$$

или

$$(a_1a_{11} + a_2a_{21})x_1 + (a_1a_{12} + a_2a_{22})x_2 + a_1a_{13} + a_2a_{23} = 0.$$

Правата (23) е, значи, паралелна со векторот $\{-(a_1a_{12}+a_2a_{22}), a_1a_{12}+a_2a_{21}\}$. За секој друг вектор $\{a_1', a_2'\}$, колинеарен со него, важи, спрема тоа

$$\begin{vmatrix} -(a_1a_{12}+a_2a_{22}) & a_1a_{11}+a_2a_{21} \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$a_{11}a_1a_1' + a_{12}(a_1a_2' + a_1'a_2) + a_{22}a_2a_2' = 0. \tag{25}$$

Равенството (25) ѐ бараната релација. Таа е наполно симетрична по однос на a_1, a_2 и a_1', a_2'. Тоа значи: ако дијаметрите што се конјугирани со правецот на $\{a_1, a_2\}$ се паралелни со $\{a_1', a_2'\}$, тогаш дијаметрите што се паралелни со $\{a_1, a_2\}$ — ако постојат такви — се конјугирани со правецот на $\{a_1', a_2'\}$. Правците на $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_1', a_2'\}$, за кои важи релацијата (25), ги викаме *конјугирани правци* во однос на кривата (5), а дијаметрите со вакви правци — *заемно конјугирани дијаметри* во овнос на кривата.

За агловите коефициенти $k = a_2/a_1$ и $k' = a_2'/a_1'$ на векторите $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_1', a_2'\}$ со конјугирани правци ја добиваме од (25) релацијата:

$$a_{22}kk' + a_{12}(k + k') + a_{11} = 0. \tag{26}$$

§ 112. Упростување на равенките на кривите од втор ред при специјален избор на координатна система

1. Нека кривата (5) биде централна. Координатната система нека биде избрана така да координатниот почеток совпаднува со центарот. Координатите на центарот ги задоволуваат равенките (§ 111, т. 5)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} = 0.$$

Ставувајќи во нив $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, добиваме

$$a_{13} = a_{23} = 0.$$

Ако центарот на една крива од втор ред лежи во координатниот почеток, нејзината равенка ги нема линеарните членови.

Очигледно важи и обратно.

2. Нека x_1-оската има асимптотски правец во однос на кривата. Векторот $\{a_1, a_2\}$ има асимптотски правец, ако важи

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0.$$

Во нашиов случај векторот $e_1 = \{1, 0\}$ има асимптотски правец. Затоа е

$$a_{11}\cdot 1 + 2a_{12}\cdot 1\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 = 0, \quad \text{или} \quad a_{11} = 0.$$

Ако x_i-оската има асимптотски правец, равенката на кривата го нема членот со x_i^2.

Важи, очигледно, и обратната теорема.

3. Оските на координатната система нека имаат заемно конјугирани правци. Векторите $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1', a_2'\}$ имаат конјугирани правци, ако важи (25). Во нашиов случај конјугирани се правците на векторите $e_1 = \{1, 0\}$ и $e_2 = \{0, 1\}$. Затоа важи

$$a_{11} \cdot 1 \cdot 0 + a_{12}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) + a_{22} \cdot 0 \cdot 1 = 0, \text{ или } a_{12} = 0.$$

Обратно, ако е $a_{12} = 0$, тогаш e_1, e_2 се заемно конјугирани.

Ако координатните оски имаат заемно конјугирани правци, тогаш равенката на кривата го нема членот со x_1x_2, и обратно.

§ 113. Афина класификација на кривите од втор ред.

1. Трансформација на равенката по методата на одделување на квадрати. Ќе иследиме сега какви сѐвозможни криви претставува една равенка од втора степен

$$(27) \quad f(x_1, x_2) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0,$$

во која коефициентите a_{ik} можат да заземаат какви да е реални вредности. Ќе испитаме, значи, какви *реални криви* од втор ред постојат во комплексната рамнина. Прашањето ќе го разрешиме на тој начин што ќе прејдеме кон нови подесно избрани координатни системи. Прво равенката (27) ќе ја преведеме на друг облик.

Да предпоставиме, за сега, дека барем еден од коефициентите a_{11}, a_{22} не е нула. Нека е, на пр., $a_{11} \neq 0$.

Равенката (27) ја уредуваме по x_1 и добиваме

$$f(x_1, x_2) \equiv Ax_1^2 + 2Bx_1 + C = 0,$$

каде што е

$$A \equiv a_{11}, \quad B \equiv a_{12}x_2 + a_{13}, \quad C \equiv a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33}.$$

Користејќи го идентитетот

$$A(Ax_1^2 + 2Bx_1 + C) \equiv (Ax_1 + B)^2 + AC - B^2,$$

добиваме

$$(28) \quad \begin{aligned} f(x_1, x_2) \equiv {} & a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})^2 + \\ & + a_{11}^{-1}(b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2 + b_{33}), \end{aligned}$$

каде што

$$(29) \quad b_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{ik} \end{vmatrix}, \quad b_{ik} = b_{ki}.$$

На ист начин постапуваме и со триномот во втората заграда од (28), при предпоставка да е $b_{22} = \Delta_2 \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2 + b_{33} = b_{22}^{-1}(b_{22}x_2 + \\
+ b_{23})^2 + b_{22}^{-1}(b_{22}b_{33} - b_{23}^2).
\end{aligned} \tag{30}
$$

На изразот

$$
b_{22}\,b_{33} - b_{23}^2 = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}
$$

ќе му дадеме друг облик. Важи имено

$$
a_{11}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix}.
$$

Множејќи ги елементите од првиот ред на оваа детерминанта со $-a_{21}$, и додавајќи ги добиените производи на соодветните елементи од вториот ред, а потоа множејќи ги елементите од првиот ред со $-a_{13}$ и додавајќи ги добиените производи кон соодветните елементи од третиот ред, добива детерминантата од десната страна облик:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{33} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.
$$

Спрема тоа е

$$
a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \tag{31}
$$

Ставувајќи

$$
\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{32}
$$

можеме изразот $f(x_1, x_2)$ да го пишеме, со оглед на (28), (30) и (31), во облик

$$
f(x_1, x_2) \equiv \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{\Delta_1}x_2 + \frac{a_{13}}{\Delta_1}\right)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\left(x_2 + \frac{b_{23}}{\Delta_2}\right)^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}. \tag{33}
$$

2. Класификација за случајот да е $\Delta_2 \neq 0$. Избираме една нова координатна система, дефинирана со равенките

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + a_{12}\,x_2/\Delta_1 + a_{13}/\Delta_1 \\
x_2' &= \qquad\qquad x_2 + b_{23}/\Delta_2.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Оваа система равенки навистина претставува една трансформација на координатната система, бидејќи детерминантата на коефициентите пред x_1, x_2 е 1, значи, различна од нула.

Во новата система равенката на кривата (27), со оглед на (33) и (34), гласи

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2'^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0. \tag{35}$$

За секоја крива од втор ред, при која е $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, може, значи, да се најде таква афина система да нејзината равенка го добива прегледниот облик (35). Множејќи ја оваа равенка со Δ_1, добиваме

$$\Delta_1^2 x_1'^2 + \Delta_2 x_2'^2 + \Delta_1 \cdot \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0. \tag{36}$$

Да претпоставиме прво да е $\Delta_2 < 0$. Ако е $\Delta_3 \neq 0$, равенката (36) претставува една хипербола; а ако е $\Delta_3 = 0$ — парот прави $\Delta_1 x_1 \pm \sqrt{-\Delta_2}\, x_2 = 0$. Кривите, при кој е $\Delta_2 < 0$, се викаат *криви од хиперболичен тип.*

Сега да претпоставиме дека $\Delta_2 > 0$. Ако е $\Delta_1 \Delta_3 < 0$, кривата (36) е елипса. Ако е $\Delta_1 \Delta_3 > 0$, кривата (36) нема реални точки; ја викаме *имагинарна елипса.* Ако е $\Delta_3 = 0$, равенката (36) ни ги претставува правите $\Delta_1 x_1 \pm \sqrt{-\Delta_2}\, x_2 = 0$. Бидејќи е $\Delta_2 > 0$, тоа $\sqrt{-\Delta_2}$ е имагинарно; правите имаат само една реална точка — точката (0, 0); сите други точки и се имагинарни. Затоа овие прави ги викаме *имагинарни прави.* Сите криви, при кои е $\Delta_2 > 0$, ги викаме *криви од елиптичен тип.*

Резултатите ги резимираме со табелата:

<table>
<tr><th colspan="2">$\Delta_2 < 0$
Криви од
хиперболичен тип</th><th colspan="4">$\Delta_2 > 0$
Криви од
елиптичен тип</th></tr>
<tr><td>$\Delta_3 \neq 0$</td><td>Хипербола</td><td rowspan="2">$\Delta_3 \neq 0$</td><td rowspan="2">Елипса</td><td>$a_{11} \Delta_3 < 0$</td><td>реална</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta_3 = 0$</td><td rowspan="2">Пар реални прави што се сечат</td><td>$a_{11} \Delta_3 > 0$</td><td>имагинарна</td></tr>
<tr><td>$\Delta_3 = 0$</td><td colspan="3">Пар имагииарни прави што се сечат</td></tr>
</table>

3. Класификација за случај $\Delta_2 = 0$. Ако е $\Delta_2 = 0$, тогаш равенката (27), на основа (28), може да се запише во вид

$$a_{11} f(x_1, x_2) \equiv (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13})^2 + 2 b_{23} x_2 + b_{33} = 0.$$

1. Да претпоставиме дека $b_{23} \neq 0$. Избираме една нова $x_1'x_2'$-координатна система, дефинирана со системата равенки

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}, \qquad x_2' = -2b_{23}x_2 - b_{33},$$

кои, навистина, претставуваат трансформациони равенки на координатите, бидејќи детерминантата ѝ е $-2a_{11}b_{23}$, значи, различна од нула. Во новата система равенката на кривата гласи $x_1'^2 - x_2' = 0$. Кривата е, значи, една парабола.

Ако во (31) ставиме $\Delta_2 = b_{22} = 0$, добиваме

$$-b_{23}^2 = a_{11} \cdot \Delta_3.$$

Поради $a_{11} \neq 0$ следува оттука дека, ако е $b_{23} = 0$, е и $\Delta_3 = 0$, и обратно. Значи, ако $b_{23} \neq 0$, е и $\Delta_3 \neq 0$, и обратно. Спрема тоа, *ако коефициентите на кривата* (27) *ги задоволуваат условите* $a_{11} \neq 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 \neq 0$, *кривата е парабола.*

2. Сега да претпоставиме дека $b_{23} = 0$, т. е. $\Delta_3 = 0$. Во тој случај равенката (27) може да се запише, со оглед на (28), во вид

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})^2 + b_{33} = 0.$$

Таа ги претставува, значи, паралелните прави

(37) $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} \pm \sqrt{-b_{33}} = 0.$$

Ако е $b_{33} < 0$, правите се *реални*, т. е. имаат безброј реални точки; ако е $b_{33} = 0$, правите *совпаднуваат;* а ако е $b_{33} > 0$, тие немаат реални точки — ги викаме *имагинарни прави* (иако тие се, во смисла на деф. од § 109, реални криви).

Кривите, при кои е $\Delta_2 = 0$, ќе ги викаме *криви од параболичен тип.*

Ги добиваме овие резултати:

$\Delta_2 = 0$ Криви од параболичен тип			
$\Delta_3 \neq 0$	Парабола		
$\Delta_3 = 0$	Пар паралелни прави	$b_{33} < 0$	реални
		$b_{33} = 0$	реални совпаднати
		$b_{33} > 0$	имагинарни

4. Обобштение за случајот $a_{11} = 0$. Горните изведувања важат само за случајот $a_{11} \neq 0$. Сега ќе го испитаме и случајот $a_{11} = 0$.

Ако е $a_{11} = 0$, но $a_{22} \neq 0$, ги заменуваме улогите на x_1, x_2, и ги добиваме пак горните резултати.

Ако е $a_{11} = a_{22} = 0$, тогаш е $a_{12} \neq 0$, оти инаку равенката (27) не би била квадратна. Скратувајќи ја таа равенка со a_{12}, таа добива вид

$$2x_1x_2 + 2a_{13}'x_1 + 2a_{23}'x_2 + a_{33}' = 0. \tag{38}$$

За неа имаме $\Delta_2 = -1 < 0$, $\Delta_3 = -a_{33}' + 2a_{13}'a_{23}'$. Равенката (38) можеме да ја напишеме во вид

$$2(x_1 + a_{23}')(x_2 + a_{13}') = \Delta_3$$

Оваа равенка претставува една хипербола, ако $\Delta_3 \neq 0$, а еден пар прави што се сечат, ако $\Delta_3 = 0$. Значи, ако е $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 \neq 0$, кривата (38) е хипербола, а ако е $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 = 0$, таа претставува еден пар непаралелни прави. Тоа се истите критерии што сме ги добиле и во случајот $a_{11} \neq 0$.

Покажавме дека *критериите за распознавање на типот на кривите од втор ред, изведени при претпоставка* $a_{11} \neq 0$, *важат и во случајот* $a_{11} = 0$.

5. Афини канонични равенки на кривите од втор ред. Во т. 2—4 покажавме какви видови криви од втор ред постојат. Кривите, за кои е $\Delta_3 \neq 0$, се кривите што поподробно ги изучивме во глава III. Овие криви ќе ги викаме *недегенерирани криви* од втор ред. А кривите, при кои е $\Delta_3 = 0$ (парови прави), ќе ги наречеме *распаднати* или *дегенерирани криви* од втор ред.

Да видиме сега, со каква равенка од најпрост вид може да се претстави која да е крива од втор ред. Кривата нека е дадена со една равенка од вид (27).

Ако е $\Delta_2 \neq 0$, равенката може да се доведе, избирајќи една нова подесно избрана координатна система, во вид (36). Ако потоа ги промениме уште на подесен начин должините на координатните вектори, може равенката (36) да се сведе — означувајќи ги новите координати пак со x_1, x_2 — на еден од овие облици и претставува:

$$\begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 & \textit{Имагинарна елипса} \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 & \textit{Реална елипса} \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 & \textit{Хипербола} \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 & \textit{Пар непаралелни имагинарни прави} \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 & \textit{Пар непаралелни реални прави.} \end{array} \tag{39}$$

Ако е $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 \neq 0$, кривата е парабола, а нејзината равенка може да добие облик

$$x_1^2 - x_2 = 0 \qquad \textit{Парабола.} \tag{40}$$

Ако е $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, равенката на кривата има облик (37). Ако е при тоа $b_{33} \neq 0$, ставаме $b_{33} = \pm b_1^2$ и ја извршуваме трансформацијата на координатите (при $a_{11} \neq 0$)*):

$$bx_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}, \quad x_2' = x_2.$$

Равенката на кривата добива еден од овие два вида и претставува

(41) $x_1^2 + 1 = 0$ *Пар паралелни имагинарни прави*

$x_1^2 - 1 = 0$ *Пар паралелни реални прави*

А ако е, при $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ и $b_{33} = 0$, ја извршуваме трансформацијата (при $a_{11} \neq 0$)*):

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}, \quad x_2' = x_2$$

Равенката на кривата во новата система гласи, пишувајќи пак x_1, x_2 место x_1', x_2':

(42) $x_1^2 = 0$ *Пар совпаднати реални прави.*

Спрема тоа, какви и да се коефициентите на равенката (27), таа може, при подесен избор на една нова координатна афина система, да се доведе на еден од деветте видови (39) — (42). Сите криви, кои во однос на произволните афини координатни системи имаат една иста равенка ги викаме афино еднакви или еквивалентни (§ 49, т. 4). *Во комплексната рамнина постојат*, спрема тоа, *девет афино различни* (*реални*) *криви од втор ред*. Најпрости нивни равенки во афини координати се равенките (39) — (42); ги наречуваме нивни *канонични афини равенки*.

ПРИМЕРИ

1. Да се определи каква крива претставуваат равенките:

a) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - x_1 = 0$; *b*) $x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2 + 1 = 0$;
c) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 3 = 0$; *d*) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$;
e) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$; *f*) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 + 8 = 0$;
g) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_2 + 1 = 0$.

Решение. *a*) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Кривата е недегенерирана крива од параболичен тип, значи, *парабола*.

---

*) Ако е $a_{11} = 0$ и $a_{22} = 0$, тогаш за да равенката (27) биде квадратна е $a_{12} \neq 0$. Во тој случај за втора од трансформационите равенки ја избираме равенката $x_2' = x_1$.

b) $\triangle_2 = 1$, $\triangle_3 = 1/2$, $a_{11} \cdot \triangle_3 = 1 \, . \, 1/2 = 1/2 > 0$. Равенката претставува една *имагинарна елипса*.

c) $\triangle_2 = -1$, $\triangle_3 = 3 \neq 0$. Кривата е *хипербола*.

d) $\triangle_3 = 0$, $\triangle_3 = 0$, $b_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Равенката претставува еден *пар совпаднати прави*.

e) $\triangle_2 = 1$, $\triangle_3 = 0$. Равенката претставува еден *пар непаралелни имагинарни прави*.

f) $\triangle_2 = 0$, $\triangle_3 = 0$, $b_{33} = -1 < 0$. Равенката претставува еден *пар паралелни реални прави*.

g) $\triangle_2 = 9$, $\triangle_3 = -9$, $a_{11}\triangle_3 = 2 \, . \, (-9) = -18 < 0$. Кривата е *реална елипса*.

2. Определи го типот на кривата $x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 4x_2^2 - 2x_2 = 0$ според разни вредности за λ.

Решение. $\triangle_2 = 4 - \lambda^2$, $\triangle_3 = -1$. Кривата е од елиптичен тип, ако е $\triangle_2 > 0$, т. е. $4 - \lambda^2 > 0$, или $-2 < \lambda < 2$. Бидејќи е $a_{11}\triangle_3 = -1 < 0$, тоа кривата, во овој случај, е *елипса*.

Кривата е од хиперболичен тип, ако е $\triangle_2 < 0$, т. е. ако $-2 > \lambda > 2$. Бидејќи $\triangle_3 = -1 \neq 0$, тоа кривата, во овој с.лучај, е *хипербола*.

Кривата е од параболичен тип, ако $\triangle_2 = 0$, т. е. $\lambda = \pm 2$. Бидејќи $\triangle_3 \neq 0$, кривата е *парабола*.

Го имаме, спрема тоа, следниот резултат:

$-\infty < \lambda < -2$	$\lambda = -2$	$-2 < \lambda < 2$	$\lambda = 2$	$2 < \lambda < \infty$
хиперболи	парабола	елипси	парабола	хиперболи

3. Да се определат оние криви од втор ред од параболичен тип што минуваат низ точките (—1, 0), (0, —1), (2, 0) и (0, 2).

Решение. Равенката на снопот од оние криви од втор ред што минуваат низ дадените точки гласи

$$(x_1 + x_2 + 1)(x_1 + x_2 - 2) + 2\lambda x_1 x_2 = 0,$$

или

$$x_1^2 + 2(1 + \lambda) x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 - 2 = 0.$$

За кривите од параболичен тип треба да е

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

од каде $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. За $\lambda = 0$ добиваме $(x_1 + x_2 + 1)(x_1 + x_2 - 2) = 0$, т. е. паралелните прави $x_1 + x_2 + 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 2 = 0$; а за $\lambda = -2$ ја добиваме параболата $x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 - 2 = 0$. Провери дека тоа навистина е парабола!

4. Да се определат асимптотите на кривата (27), при која е $\triangle_2 \neq 0$.

Решение. Равенките $f(x_1, x_2) = 0$ и $f(x_1, x_2) + \lambda = 0$, каде што λ е произволен параметар, се разликуваат само во слободниот член; затоа кривите што ги претставуваат имаат исти асимптоти (§ 111, т. 2, прим. 2). Дегенерираната крива од снопот $f(x_1, x_2) + \lambda = 0$ го претставува токму парот на заедничките асимптоти на сите криви од снопот, а значи и на испитуваната крива. За дегенерираните криви важи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix} = \Delta_3 + \lambda\Delta_2 = 0.$$

Оттука следува, поради $\Delta_2 \neq 0$, дека $\lambda = -\Delta_3/\Delta_2$.

Равенката на асимптотите на кривата $f(x_1, x_2) = 0$ е, значи,

$$f(x_1, x_2) - \Delta_3/\Delta_2 = 0.$$

На пр., за асимптотите на кривата

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0$$

добиваме, поради $\Delta_3 = a_{33}\Delta_2$, равенка

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

5. Да се покаже дека кривите од *параболичен тип* имаат паралелни дијаметри или еден сам дијаметар.

Решение. Кривата (27) е од параболичен тип, ако важи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

Дијаметрите на кривата го образузаат снопот

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}) + \lambda_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}) = 0.$$

Поради условот (43), правите

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} = 0$$

се паралелни. Ако не се совпаднати, горниот сноп претставува сноп паралелн прави — дијаметри. А ако се совпаднати, равенката на „снопот" претставува само една права. Покажи дека во последниов случај кривата е *распадната*! Види и § 75, т. 4!

6. Провери дека дијаметрите на кривите од параболичен тип имаат асимптотски правец.

Решение. За кривата (5) нека важи $\Delta_2 = 0$. Кривата е од параболичен тип, а дијаметрите ѝ се паралелни со паралелните прави (24'), значи со векторот $\{-a_{12}, a_{11}\}$ одн. $\{-a_{22}, a_{21}\}$. А еден вектор $\{l_1, l_1\}$ има асимптотски правец, ако важи

$$a_{11}l_1^2 + 2a_{12}l_1l_2 + a_{22}l_2^2 = 0.$$

Но оваа релација е задоволена за $l_1 = -a_{12}$, $l_2 = a_{11}$ и за $l_1 = -a_{22}$, $l_2 = a_{21}$. Со тоа тврдењето е докажано, зашто барем еден од векторите $\{-a_{12}, a_{11}\}$ и $\{-a_{22}, a_{21}\}$ е различен од $\mathbf{0}$.

ЗАДАЧИ

Да се определи типот на кривите чии што равенки се дадени во зад. 1—6.

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 + 1 = 0.$
2. $x_1x_2 + x_1 + x_2 = 0.$
3. $2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0.$
4. $4x_1^2 + 20x_1x_2 + 25x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 = 0.$
5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0.$
6. $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0.$

Да се определи типот на кривите во зад. 7—9, според разни вредности на параметарот λ.

7. $x_1^2 - 2\lambda x_1x_2 + x_2^2 + \lambda = 0.$
8. $x_1^2 + 2x_1x_2 + \lambda x_2^2 + x_2 + 2\lambda x = 0.$
9. $x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + \lambda^2x_2^2 + \lambda x_1 + x_2 + \lambda = 0.$

7. Нацртување на кривите од втор ред, зададени во една афина координатна система. Ако треба да нацртаме една крива од втор ред чија што равенка ни е дадена, ќе испитаме прво каков тип крива од втор ред претставува равенката. Еден метод е даден во §§ 70, 72, 77. А сега ќе споменеме уште еден метод за кривите од елиптичен и хиперболичен тип.

I. Ако кривата е од елиптичен тип, ќе можеме да ја нацртаме само тогаш кога е (реална) елипса или точка.

Равенката ќе ја доведеме во таков подесен облик што кривата ќе можеме да ја нацртаме лесно. Левата страна од равенката ќе ја трансформираме во една сума од квадрати.

Нека ни е дадена, на пр., равенката

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 = 0.$$

Бидејќи е $\Delta_2 = 9$, $\Delta_3 = -9$, $a_{11}\Delta_3 = -45 < 0$, тоа кривата е *реална елипса.*

Равенката ја множиме со коефициентот пред x_1^2, т. е. со 5:

$$25x_1^2 - 10\,x_1x_2 + 10\,x_2^2 + 10\,x_1 + 10\,x_2 = 0,$$

и ја уредуваме по степените од x_1:

$$25x_1^2 - 10x_1(x_2 - 1) + 10x_2^2 + 10x_2 = 0.$$

Првите два члена ги дополнуваме до полен квадрат, па добиваме

$$(5x_1 - x_2 + 1)^2 + 9x_2^2 + 12x_2 - 1 = 0.$$

Триномот $9x_2^2 + 12x_2 - 1$ го трансформираме во каноничен облик:

$$9x_2^2 + 12x_2 - 1 = (9x_2 + 6)^2/9 - 5.$$

Равенката на кривата гласи сега

$$(5x_1 - x_2 + 1)^2 + (9x_2 + 6)^2/9 - 5 = 0.$$

Кривата ја цртаме сега како што е покажано во § 70, т. 3.

II. Ако кривата е од хиперболичен тип, ќе постапиме инаку. Ќе разгледаме прво еден пример кога равенката нема линеарни членови, кога, значи, центарот на кривата совпаднува со координаЗниот почеток. Нека ни е дадена на пр. кривата

$$2x_1^2 + x_1x_2 - 6x_2^2 - 8 = 0.$$

Асимптотите на кривата се дадени со равенката (т. 6)

$$2x_1^2 + x_1x_2 - 6x_2^2 = 0.$$

Ако ја решиме по x_1, добиваме

$$x_1 = (-x_2 \pm 7x_2)/4, \quad \text{или} \quad 4x_1 + x_2 \pm 7x_2 = 0.$$

Равенките на асимптотите се, значи $x_1 + 2x_2 = 0$, $2x_1 - 3x_2 = 0$.

Кога ги имаме асимптотите, треба да најдеме уште една, која да е точка од хиперболата. Ставувајќи во равенката на хиперболата $x_2 = 0$, добиваме $x_1 = \pm 2$. Точките (2, 0) и (— 2, 0) лежат, значи, на хиперболата.

Хиперболата можеме сега да ја нацртаме по начинот, изложен во § 72, т. 7.

Ако ни е зададена кривата од хиперболичен тип, во чија што равенка има и линеарни членови, можеме да постапиме аналогно. Нека е зададена, на пр., равенката

$$x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 - 3x_2 - 2 = 0.$$

За неа е $\Delta_2 = -9/4$, $\Delta_3 = 9/4$. Кривата е хипербола. Равенката на асимптотите е

$$x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 - 3x_2 - 2 - \Delta_3/\Delta_2 = 0,$$

или

$$x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 - 3x_2 - 1 = 0.$$

Решавајќи ја оваа равенка по x_1, добиваме

$$x_1 = \frac{x_2 \pm \sqrt{x_2^2 + 4\,(2x_2^2 + 3x_2 + 1)}}{2} \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{x_2 \pm (3x_2 + 2)}{2}.$$

Равенките на асимптотите се, значи

$$2x_1 - x_2 \pm (3x_2 + 2) = 0$$

или

$$x_1 + x_2 + 1 = 0, \quad x_1 - 2x_2 - 1 = 0.$$

За конструкцијата ни е потребна уште една точка од хиперболата. Ставуваме, на пр., во равенката на хиперболата $x_2 = 0$. Добиваме $x_1 = \pm \sqrt{2}$. Точките $(\sqrt{2}, 0)$ и $(-\sqrt{2}, 0)$ лежат на хиперболата, која сега по познатиот начин можеме да ја нацртаме.

Една точка од хиперболата може лесно да се најде и на следниот начин. Равенката на хиперболата можеме да ја запишеме во вид

$$(x_1 + x_2 + 1)(x_1 - 2x_2 - 1) - 1 = 0. \tag{44}$$

Кривата ја сечеме со една права која има асимптотски правец, на пр. со правата

$$x_1 + x_2 = 0. \tag{45}$$

Системата од равенките (44) и (45) е еквивалентна на системата од равенката (45) и равенката

$$x_1 - 2x_2 - 2 = 0.$$

Решението на оваа система е $x_1 = 2/3$, $x_2 = -2/3$. Точката $(2/3, -2/3)$ лежи на хиперболата.

ЗАДАЧИ

Да се нацртаат кривите во една зададена афина координатна система чии што равенки се зададени во зад. 1—6.

1. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_1 + 1/3 = 0.$
2. $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4 = 0.$
3. $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 5.$
4. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + 4 = 0.$
5. $x_1^2 - 9x_2^2 - 12x_1 - 18x_2 = 0.$
6. $2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2 - 1 = 0.$

Метрички проблеми

§ 114. Главни правци. Оски

1. Дефиниција и равенки на оските. Во § 111, т. 6 се запознавме со поимот за заемно конјугирани правци и поимот за заемно конјугирани дијаметри на кривите од втор ред во комплексната рамнина. Сега ќе испитаме дали постојат кај реалните криви од втор ред и нормални конјугирани правци и нормални конјугирани дијаметри.

Правците што се и конјугирани и нормални, ако постојат такви, ќе ги викаме *главни правци* на кривата. Дијаметрите на кривата што имаат главни правци ги викаме *оски* на кривата.

За да испитаме дали постојат главни правци на кривите од втор ред, ќе прејдеме прво кон некоја *правоаголна картезична* координатна система. Нека равенката

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

ни ја претставува дадената крива веќе во една таква система. За агловите коефициенти k и k' на главните правци на кривата, спрема нивната дефиниција, важи

$$a_{22}kk' + a_{12}(k + k') + a_{11} = 0 \quad \text{и} \quad kk' = -1.$$

Елиминирајќи го k' од овие две равенки, добивме

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})\, k - a_{12} = 0. \tag{2}$$

I. Да претпоставиме прво дека е $a_{12} \neq 0$. Равенката (2) е тогаш квадратна по k. Нејзината дискриминанта е $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2 > 0$. Равенката (2) има, значи, два реални корени k_1 и k_2. За нив важи, спрема правилото на Виет, дека $k_1k_2 = -1$. Тоа значи дека парот на главните правци што го определува едниот корен совпаднува со парот што го определува другиот корен. Во овој случај постои, спрема тоа, еден пар главни правци на кривата.

II. Нека е сега $a_{12} = 0$. Ако е при тоа $a_{11} - a_{22} \neq 0$, равенката (2) има само еден корен, $k = 0$. Кривата има еден единствен пар главни правци.

А ако е освен $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$, т. е. ако кривата е *круг*, равенката (2) е задоволена за секој k. *Кај кругот*, значи, *секој пар нормални правци е еден пар главни правци.* Кругот може да биде реален, имагинарен или дегенериран во точка (види § 115). Значи:

При секоја крива од втор ред која не е круг има еден единствен пар главни правци.

Да ги определиме сега *оските* на кривата (1). Нека k_1 и k_2 се корени од (2). Дијаметрите, конјугирани со правците на правите $y = k_1x$ и $y = k_2x$ — во колку постојат такви дијаметри — се *оски*. Нивните равенки се, значи

$$\frac{\partial f}{\partial x} + k_1 \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + k_2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Равенките (3) *се равенки на оските од кривата* (1), *ако* k_1 *и* k_2 *се корени на равенката* (2) — *во колку равенките* (3) *навистина претставуваат прави.*

Да видиме кога некоја од равенките (3) не претставува права. Нека е тоа првата од нив, значи

$$(a_{11}x + a_{12}\, y + a_{13}) + k_1\, (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Ако оваа равенка не претставува права (или ако е задоволена за секој x и y), коефициентите пред x и y се нула, значи

$$a_{11} + k_1a_{21} = 0, \quad a_{12} + k_1a_{22} = 0.$$

А тоа е можно тогаш и само тогаш кога детерминантата на оваа система е нула, значи $\Delta_2 = 0$, т. е. *ако кривата е од параболичен тип.* Другата од равенките (3), бидејќи е $k_1 \neq k_2$, претставува секако права. Обратно, ако кривата е од параболичен тип, се проверува лесно дека едната од равенките (3) не претставува права. Навистина, секоја крива од параболичен тип може да се запише во вид

$$(ax + by)^2 + 2cx + 2dy + e = 0.$$

За корените од (2) за оваа крива добиваме $k_1 = -a/b$, $k_2 = b/a$. Равенките (3) гласат тогаш

$$b\,(a^2x + aby + c) - a\,(abx + b^2y + d) = 0$$

и

$$a\,(a^2x + aby + c) + b\,(abx + b^2y + d) = 0,$$

од кои првата се сведува на $bc - ad = 0$, која е или апсурдна или еден нумеричен идентитет. Тоа го докажува тврдењето.

Со тоа покажавме дека *кривите од елиптичен и хиперболичен тип имаат две оски, а кривите од параболичен тип една.*

ПРИМЕРИ

1. Да се најдат равенките на оските на кривата

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 6x + 2y + 1 = 0.$$

Решение. Равенката (2) гласи сега

$$2k^2 - 3k - 2 = 0.$$

Нејзините корени се $k_1 = 2$, $k_2 = -1/2$. Равенките на оските се, значи,

$$(4x + 4y + 6) + 2(4x + 10y + 2) = 0 \quad \text{и} \quad (4x + 4y + 6) - (1/2)(4x+10y+2) = 0,$$

или

$$6x + 12y + 5 = 0, \qquad 2x - y + 5 = 0.$$

2. Да се определат оските на кривата

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 6y = 0.$$

Решение. Равенката (2) гласи $12k^2 + 7k - 12 = 0$. Нејзините корени се $k_1 = -4/3$, $k_2 = 3/4$. За разенките (3) ја добиваме апсурдната еднаквост $11 = 0$ и равенката

$$25\,(3x + 4y) + 27 = 0.$$

Тоа е равенката на оската. Кривата е од параболичен тип.

ЗАДАЧИ

Да се определат оските на кривите чии што равенки се дадени во зад. 1—6.

1. $3x^2 + 4xy + 8y^2 - 2x + 4y + 5 = 0.$ 2. $5x^2+4xy+10y^2+6x-2y-3=0.$
3. $3x^2 + 4xy + 6x - 7y + 10 = 0.$ 4. $2x^2+12xy+7y^2-2x+3y = 0.$
5. $9x^2 - 12xy + 4y + 5x + 2y + 3 = 0.$ 6. $x^2 - 4xy + 4y^2-6x-12y+5=0.$

7. Кривата (1) нека има центар во (x_0, y_0). Покажи дека заедничката равенка на нејзините оски гласи

$$a_{12}(x-x_0)^2-(a_{11}-a_{22})(x-x_0)(y-y_0)-a_{12}(y-y_0)^2=0.$$

2. Оска при кривите од параболичен тип. Равенката на оската на една крива од параболичен тип можеме да ја најдеме и на попрост начин. Нека (1) е равенка на една таква крива. Нејзините дијаметри се паралелни. Едниот од нив е (конјугиран со смерот на правата $y = 0$):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0.$$

Тој е нормален на векторот $\{a_{11}, a_{12}\}$. Дијаметарот, конјугиран со неговиот правец, е, според тоа, оска; нејзината равенка е, значи,

$$a_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+a_{12}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{4}$$

Равенката (4) е равенка на оската на кривата (1), ако таа е од параболичен тип.

Пример. Најди ја равенката на оската на кривата

$$9x^2-6xy+y^2-4x+8y-3=0.$$

Решение. Равенката (4) гласи за овој случај:

$$9(18x-6y-4)-3(-6x+2y+8)=0,$$

од каде

$$3x-y-1=0.$$

ЗАДАЧИ

Најди ги оските на кривите

1. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x + 5y = 0.$ 2. $x^2-2xy+y^2+8x-10y + 6 = 0.$
3. $9x^2 - 24xy + 16y^2+20x-15y=0.$ 4. $a^2x^2+2abxy+b^2x^2+2cx+2dy+e=0.$

3. Оска и темена тангента на параболата. Ќе споменеме уште една метода за најдување на оската при параболата, а едновремено и на темената тангента. Равенката на параболата нека е

$$(ax+by)^2+2cx+2dy+e=0. \tag{5}$$

На изразот $ax + by$ му додаваме еден произволен број λ, така што равенката на кривата (5) добива вид

$$(ax+by+\lambda)^2+2(c-a\lambda)x+2(d-b\lambda)y+e-\lambda^2=0. \tag{6}$$

Равенката (6), по својот облик, покажува дека правите

$$(7)\quad ax + by + \lambda = 0 \text{ и } 2(c - a\lambda)\,x + 2(d - b\lambda)\,y + e - \lambda^2 = 0$$

се еден дијаметар и онаа тангента, со чиј што смер е конјугиран тој дијаметар. Тоа важи за секој λ. Го определуваме сега λ така, правите (7) да бидат нормални, значи така да важи

$$a\,(c - a\lambda) + b\,(d - b\lambda) = 0.$$

Ако вредноста за λ, добиена одавде, ја замениме во (7), тогаш тие равенки ја претставуваат оската и темената тангента на параболата.

Пример. Да се определи оската и темената тангента на параболата $(x - 2y)^2 - 10x + 15y + 8 = 0$.

Решение. Равенката ја запишуваме во вид

$$(x - 2y + \lambda)^2 - (2\lambda + 10)\,x + (4\lambda + 15)\,y + 8 - \lambda^2 = 0.$$

Равенките на оската и темената тангента се

$$(8)\quad x - 2y + \lambda = 0 \text{ и } -(2\lambda + 10)\,x + (4\lambda + 15)\,y + 8 - \lambda^2 = 0,$$

ако важи

$$-(2\lambda + 10) - 2\,(4\lambda + 15) = 0.$$

Одавде добиваме $\lambda = -4$. Заменувајќи ја оваа вредност за λ во (8), добиваме

$$x - 2y - 4 = 0 \text{ и } 2x + y + 8 = 0.$$

Тоа се равенките на оската и темената тангента.

ЗАДАЧИ

Најди ја оската и темената тангента на параболите, зададени во зад. 1—4.

1. $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0$. 2. $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - y - 5 = 0$.
3. $(3x + 4y - 12)^2 = 24\,(y + 6)$. 4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$.

5. Нацртај ги параболите, зададени во зад. 1—4, определувајќи ја оската, темената тангента и една точка на кривата.

§ 115. Метрични канонични равенки на кривите од втор ред

1. Метрична класификација на кривите од втор ред. Сега ќе испитаме какви метрично различни реални криви од втор ред постојат. Ќе извршиме, значи, *метрична класификација* на реалните криви од втор ред.

Да ја посматраме општата равенка на кривата од втор ред

$$(8)\quad a_{11}\,x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0.$$

Ќе бараме такви правоагли картезични координатни системи, во кои оваа равенка ќе добие најпрост можен вид.

Ако е $\Delta_2 \neq 0$, ќе ги избереме оските на кривата како нови координатни оски — x- и y-оската. Бидејќи тие имаат заемно конјугирани правци, равенката нема да го има членот со xy, а бидејќи центарот на кривата совпаднува со новиот координатен почеток, таа нема да има линеарни членови. Равенката на кривата ќе има, значи, облик

$$a_{11}'x^2 + a_{22}'y^2 + a_{33}' = 0. \tag{9}$$

Тоа е *метрична канонична равенка* на кривите од елиптичен и хиперболичен тип. Според знаците на коефициентите, како и спрема тоа дали a_{33}' е нула или различен од нула, може оваа равенка да се доведе на еден од следните видови и претставува:

$$\begin{array}{ll} x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1 = 0 & \textit{Имагинарна елипса} \\ x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0 & \textit{Реална елупса} \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0 & \textit{Хипербола} \\ x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0 & \textit{Пар непаралелни имагинарни прави} \\ x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0 & \textit{Пар паралелни реални прави.} \end{array} \tag{10}$$

За секоја реална вредност, различна од 0, за a и b, секоја од овие равенки претставува по една крива. Секоја од овие равенки претставува, при разни вредности на параметрите a и b безброј метрично нееквивалентни криви.

Специјалната имагинарна елипса

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + 1 = 0, \quad a \neq 0,$$

ја викаме *имагинарен круг* со радиус ai (i е имагинарна единица). А парот непаралелни имагинарни прави

$$x^2 + y^2 = 0$$

го викаме и *круг* со радиус нула; тоа е, значи, реален круг, дегенериран во една *точка*.

Кога е $\Delta_2 = 0$, имаме крива од параболичен тип. Нејзината оска ја избираме за y-оска, а за x-оската која да е права, нормална на неа. Избраните координатни оски имаат заемно конјугирани правци; затоа равенката го нема членот со xy. А бидејќи правецот на оската (§ 113, т. 5, зад. 6) е и асимптотски правец, равенката го нема членот со y^2. Таа гласи, спрема тоа,

$$a_{11}'x^2 + 2a_{13}'x + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0.$$

Равенката на оската на кривата е $a_{11}'x + a_{13}' = 0$ (§ 114, т. 2). Бидејќи оската совпаднува со y-оската, т. е. со правата $x = 0$, тоа е $a_{13}' = 0$. Равенката на секоја крива од параболичен вид може, според тоа, да се доведе на следниот *метрично-каноничен* вид:

$$a_{11}'x^2 + 2a_{13}'y + a_{33}' = 0. \tag{11}$$

Ако е при тоа $a_{23}' = 0$, добива оваа равенка еден од овие облици и претставува:

	$x^2 + a^2 = 0$	*Пар паралелни имагинарни прави*
(12)	$x^2 - a^2 = 0$	*Пар паралелни реални прави*
	$x^2 = 0$	*Пар совпаднати реални прави.*

Останува уште можноста да е $a_{13}' \neq 0$. Тогаш го извршуваме паралелното пренесување на координатната система, определено со

$$x = x^*, \quad 2a_{23}'y + a_{33}' = 2a_{23}'y^*$$

Равенката на кривата го добива видот $a_{11}'x^{*2} + 2a_{13}'y^* = 0$, или, ставувајќи $x^* = y'$, $y^* = x'$, $a_{11}' : 2a_{13}' = -2p$, следниот вид и претставува

(13)	$y'^2 = 2px'$	*Парабола.*

Равенките (12) и (13) се *метрични канонични равенки* на кривите од параболичен тип. Кривите при различни вредности на параметарот a и p се метрично нееквивалентни.

Покажавме дека за каква да е крива од втор ред може да се избере една таква правоагла координатна система да нејзината равенка добие еден од облиците (10), (12), (13), во кои параметрите a, b и p можат да заземат произволни, но различни од нула, вредности.

Додека при афината класификација на кривите од втор ред најдовме само девет афино различни криви, тоа сега — при метричната класификација — најдовме безброј метрично различни криви.

2. Редукција на равенките на кривите од втор ред во метрично-каноночен облик. Сега си ја поставуваме задачата, како практично една зададена равенка на кривата од втор ред да ја доведеме во каноничен облик.

Ако равенката на кривата е дадена во однос на некоја афина неправоагла координатна система, ќе прејдеме прво кон која да е правоагла картезична координатна система. Потоа ќе испитаме дали кривата е од елиптичен, хиперболичен или од параболичен тип.

I. Зададената крива нека биде од елиптичен или хиперболичен тип. Ги определуваме нејзините оски, кои потоа ги избираме за нови координатни оски. Да ја земеме за пример кривата, зададена во однос на една правоагла координатна система со равенката

$$6x^2 + 4xy + 9y^2 + 10y - 2 = 0.$$

Спрема § 113 ги определуваме нејзините оски. Најдуваме

$$x + 2y + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - y - 1 = 0.$$

Овие прави ги избираме за нови координатни оски. Затоа ставуваме

$$x' = \frac{x + 2y + 1}{\sqrt{5}}, \quad y' = \frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}}.$$

Оваа система равенки ја решаваме по x, y и добиваме

$$x = \frac{\sqrt{5}\,x' + 2\sqrt{5}\,y' + 1}{5}, \quad y = \frac{2\sqrt{5}\,x' - \sqrt{5}\,y' - 3}{5}.$$

Добиените изрази за x и y ги заменуваме во дадената равенка на кривата. По упростувањето добиваме

$$2x'^2 + y'^2 - 1 = 0.$$

Тоа е равенката на нашата крива во новата система. Равенката навистина, има, канончен облик.

II. Зададената крива нека е од **параболичен** тип. Прејдуваме кон една нова координатна система, во која за едната оска ја избираме оската на кривата, а за другата оска која да е права, нормална на првата.

1. Да разгледаме прво една **дегенерирана крива**. Нека ни е зададена равенката

$$f(x, y) \equiv 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 30x - 40y - 75 = 0.$$

Кривата е навистина од параболичен тип, зашто $\Delta_2 = 0$. Нејзината оска е $3x + 4y - 5 = 0$. Оваа права ја избираме за y-оска, а една нејзе нормална права, на пр. правата $4x - 3y = 0$, за x'-оска на една нова координатна система. Ставаме, значи,

$$x' = \frac{3x + 4y - 5}{5}. \quad y' = \frac{4x - 3y}{5}.$$

Оттука следува

$$x = \frac{3x' + 4y' + 3}{5}, \quad y = \frac{4x' - 3y' + 4}{5}.$$

Имаме

$$f(x, y) \equiv (3x + 4y)^2 - 30x - 40y - 75 \equiv (5x' + 5)^2 -$$
$$- 6(3x' + 4y' + 3) - 8(4x' - 3y' + 4) - 75 \equiv 25x'^2 - 100.$$

Равенката на кривата во новата система гласи, значи $x'^2 - 4 = 0$. Кривата распаднува во правите $x' - 2 = 0$ и $x' + 2 = 0$.

2. Сега да ја канонизираме равенката на една **недегенерирана крива** од параболичен тип. Нека ни е зададена на пр. кривата

$$25x^2 + 120xy + 144y^2 - 24x + 10y + 26 = 0.$$

За нејзината оска добиваме $5x + 12y = 0$. Неа ја избираме за y'-оска а нејзе нормалната права $12x - 5y = 0$ за x'-оска на една нова координатна система. Имаме значи

$$x' = \frac{5x + 12y}{13}, \quad y' = \frac{12x - 5x}{13},$$

и оттука

$$x = \frac{65x' + 156y'}{169}, \quad y = \frac{156x' - 65y'}{169}.$$

Со заменување на овие изрази за x и y во дадената равенка на кривата добиваме, по упростувањето,

$$13x'^2 - 2y' + 2 = 0.$$

Го извршуваме уште паралелното преместување на координатната $x'y'$-системата, дефинирано со

$$x' = x^*, \quad y' - 1 = y^*.$$

Во x^*y^*-системата кривата има равенка

$$13x^{*2} = 2y^*,$$

која е во каноничен облик.

3. Ако кривата е **парабола**, можеме нејзината равенка да ја канонизираме и на друг начин. Ќе го изложиме тој начин на примерот

$$(x - 2y)^2 - 10x + 15y + 8 = 0.$$

Спрема примерот во § 114, т. 3 равенката на оваа крива можеме да ја пишеме во вид

$$(x - 2y - 4)^2 - (2x + y + 8) = 0.$$

Оската и темената тангента на кривата ги избираме за нови координатни оски. Ставуваме, значи

$$x'=\frac{2x+y+8}{\sqrt{5}},\quad y'=\frac{x-2y-4}{\sqrt{5}}.$$

Во новата система равенката на нашата крива гласи, спрема тоа

$$y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'.$$

ЗАДАЧИ

Напиши ги каноничните равенки на зададените криви и нацртај ги, исползувајќи ги каконичните равенки.

1. $72x^2 + 60xy + 97y^2 = 568.$
2. $4xy + 2x + 2y - 1 = 0.$
3. $37x^2 - 18xy + 13y^2 + 60x - 60y + 32 = 0.$
4. $x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 6y - 8 = 0.$
5. $4x^2 - 4xy + y^2 - 10y - 19 = 0.$
6. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + x + 2y + 3 = 0.$

§ 116. Ортогонални инваријанти на кривите од втор ред.

1. Дефиниција на инваријанти на равенките на кривите од втор ред. До сега видовме како со изменувањето на координатната система се менуваат и равенките на дадените криви. Коефициентите на равенките на кривите во новите системи — коефициентите на „трансформираните равенки" — се разликуваат, општо, од соответните коефициенти на првобитната равенка. Но може да се случи, некој функции од тие коефициенти да си ја запазуваат својата вредност при некои трансформации на координатите. Важни се такви функции од коефициентите, кои се запазуваат при сите оние трансформации на координатите кои образуваат некоја група. Такви изрази, неизменливи (инваријантни) по вредност, ќе ги викаме *инваријанти*. Нас ќе не интересува сега ортогоналната група трансформации. Затоа дефинираме:

Инваријанта на равенката на една реална крива од втор ред, во однос на групата ортогонални трансформации (или ортогонална инваријанта), се вика секоја таква функција од коефициентите на таа равенка, која ја запазува својата вредност, ако над нејзините променливи извршиме која да е трансформација од ортогоналната група.

Се разбира дека ортогоналните трансформации геометриски можеме да ги толкуваме на два начина: или како замена на една правоагла система со една друга таква система, или како едно пресликување — движење.

2. Првите две инваријанти. Во една правоагла система нека ни е дадена кривата од втор ред:

$$(14)\qquad f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и кругот:

$$\varphi(x, y) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 1 = 0.$$

Извршуваме која да е ортогонална трансформација над променливите x, y, или — интерпретирано геометриски — преминуваме кон една друга координатна система со x'- и y'-оска. Равенката (14) преједува тогаш во една равенка од вид

$$(14')\qquad f'(x', y') \equiv a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0,$$

а равенката на кругот во равенка од вид

$$\varphi'(x', y') = (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 - 1 = 0.$$

Го образуваме снопот

$$(15)\qquad f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) \equiv (a_{11} - \lambda)\, x^2 + 2a_{12}xy + (a_{22} - \lambda)\, y^2 + \ldots = 0.$$

После трансформацијата на координатите неговата равенка гласи

$$(15')\qquad f'(x', y') - \lambda\varphi'(x', y') \equiv (a_{11}' - \lambda)\, x'^2 + 2a_{12}'x'y' + + (a_{22}' - \lambda)\, y'^2 + \ldots = 0.$$

Равенките (15) и (15′) претставтваат, при исти вредности од λ, исти криви, но во однос на различни координатни системи. Значи, за оние вредности за λ, за кои првата равенка претставува криви од параболичен тип, ги претставува и втората. А за кривите од параболичен тип треба да е $\Delta_2 = 0$, т. е.

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{односно} \quad \begin{vmatrix} a_{11}'-\lambda & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}'-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(17)\qquad \begin{aligned} \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \\ \lambda^2 - (a_{11}' + a_{22}')\,\lambda + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Добиените квадратни равенки по λ определуваат такви λ, за кои кривите од снопот се од параболичен тип; значи обете равенки (16), одн. (17), имаат исти корени. Нивните коефициенти се затоа пропорционални, од каде следува

$$a_{11} + a_{22} = a_{11}' + a_{22}' = I_1, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix} = I_2.$$

Изразите I_1 и I_2 си ги запазуваат, значи, вредностите при секоја ортогонална трансформација на променливите во равенката (14). Тоа се затоа *ортогонални инваријанти* на равенката на кривата од втор ред. Изразот I_1 ќе го викаме *прва*, а изразот I_2 — *втора инваријанта*.

3. Трета инваријанта. Равенката (15) одн. (15′) претставува една дегенерирана крива, ако λ ја задоволува равенката

$$(18) \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}+\lambda x_0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}+\lambda y_0 \\ a_{31}+\lambda x_0 & a_{32}+\lambda y_0 & a_{33}-\lambda(x_0^2+y_0^2-1) \end{vmatrix} = A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0,$$

односно

$$(18') \quad \begin{vmatrix} a_{11}'-\lambda & a_{12}' & a_{13}'+\lambda x_0' \\ a_{21}' & a_{22}'-\lambda & a_{23}'+\lambda y_0' \\ a_{31}'+\lambda x_0' & a_{32}'+\lambda y_0' & a_{33}'-\lambda(x_0'^2+y_0'^2-1) \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv A'\lambda^3 + B'\lambda^2 + C'\lambda + D' = 0.$$

Равенките (18) и (18′) имаат исти корени, затоа е $A : B : C : D = A' : B' : C' : D'$. Специјално е на пр.

$$(19) \qquad A : D = A' : D'.$$

Ставувајќи во (18) и (18′) $\lambda = 0$, добиваме $D = \Delta_3$, $D' = \Delta_3'$, а ставувајќи во (18) место a_{ik} насекаде нула, така да останат само членовите со λ, добиваме

$$A\lambda^3 \equiv \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda x_0 \\ 0 & -\lambda & \lambda y_0 \\ \lambda x_0 & \lambda y_0 & -\lambda(x_0^2+y_0^2-1) \end{vmatrix} \equiv \lambda^3,$$

значи, $A = 1$; на ист начин добиваме од (18′) дека $A' = 1$. Затоа следува од (19) дека $D = D'$, или $\Delta_3 = \Delta_3'$. Изразот Δ_3 — дискриминантата на кривата — е, спрема тоа, една *инваријанта* на равенката (14). Ќе ја викаме *трета инваријанта* и ќе ја бележиме со I_3.

4. Пресметување на коефициентите на метричната канонична равенка на кривите од втор ред. Во однос на која да е координатна правоагла картезична система нека ни е дадена кривата (14).

I. Ако кривата е од елиптичен или хиперболичен тип, т. е. ако е $\Delta_2 \neq 0$, тогаш равенката на кривата можеме да ја доведеме на овој канончен облик

$$a_{11}'x + a_{22}'y^2 + a_{33}' = 0.$$

Равенките (16) за двете равенки на зададената крива гласат

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{одн.} \quad \begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & 0 \\ 0 & a_{22}' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корените на втората од нив се $\lambda_1 = a_{11}'$, $\lambda_2 = a_{22}'$. Но бидејќи двете равенки, спрема т. 2, имаат исти корени, тоа добиените корени се и корени на првата од равенките.

Равенката (16) се вика *карактеристична равенка* на кривата (14). Можеме да ја запишеме, со оглед на (17), и во облик

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0. \tag{20}$$

За втората и третата инваријанта на дадената крива имаме

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{vmatrix} = a_{11}' a_{22}', \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{vmatrix} = a_{11}' a_{22}' a_{33}'.$$

Поради претпоставката $I_2 = \Delta_2 \neq 0$ имаме, спрема тоа, $a_{33}' = I_3/I_2$.

По тој начин *коефициентите на каноничната равенка на кривата можеме да ги определиме без претходно трансформирање на координатите*. Покажавме имено дека:

Каноничната равенка на кривата од втор ред, која не е од параболичен тип, гласи

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + I_3/I_2 = 0.$$

каде што λ_1, λ_2 *се корените на каноничната равенка на кривата.*

Пример. Да ги определиме, со помошта на инваријантите, коефициентите на каноничната равенка на кривата $6x^2 + 4xy + 9y^2 + 10y - 2 = 0$.

Решение. Имаме

$$I_1 = 6+9=15, \ I_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 50, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -250, \quad I_3/I_2 = -5.$$

Карактеристичната равенка гласи

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0.$$

Нејзините корени се $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$. Каноничната равенка гласи, спрема тоа,

$$5x'^2 + 10y'^2 - 5 = 0, \quad \text{или} \quad x'^2 + 2y'^2 - 1 = 0.$$

Го добивме истиот резултат како во § 115, т. 2, само со многу помалку труд.

II. Ако кривата е **парабола**, нејзината равенка можеме да ја доведеме на каноничен облик

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{23}'y' = 0, \quad (a_{11}' \neq 0, \ a_{23}' \neq 0).$$

Имаме

$$I_1 = a_{11}', \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}' \\ 0 & a_{32}' & 0 \end{vmatrix} = -a_{11}'a_{23}'^2.$$

Оттука $a_{23}'^2 = -I_3/a_{11}' = -I_3/I_1$.

При тоа е $a_{11}' = I_1 \neq 0$, $-I_3/I_1 > 0$. Затоа имаме

$$a_{23}' = \pm\sqrt{-I_3/I_1}.$$

Спрема тоа:

Каноничната равенка на параболата гласи

$$I_1 x'^2 \pm 2\sqrt{-I_3/I_1}\, y' = 0.$$

Од ориентацијата на y'-оската зависи кој од двата можни знакови треба да се земе во равенката.

Пример. Да се канонизира равенката

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 10x - 5y = 0.$$

Решение. Имаме

$I_1 = 25, I_3 = -756\,{}^1/_4$, $-I_3/I_1 = 3025/100$, $a_{23}' = \pm\sqrt{3025/100} = \pm 11/2$.

Каноничната равенка гласи, спрема тоа,

$$25x'^2 \pm 11y' = 0.$$

ЗАДАЧИ

Да се канонизираат равенките на зададените криви, користејќи ги инваријантите.

1. $36x^2 - 24xy + 29y^2 = 180$. 2. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$.
3. $2x^2 + 4xy - y^2 = 1$. 4. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$.
5. $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 12x + 4y + 6 = 0$.

5. Апсолутни инваријанти на кривите од втор ред. Ако е зададена една **равенка** на една крива од втор ред, можеме да ги пресметаме инваријантите I_1, I_2, I_3. Овие изрази си ја запазуваат својата вредност, ако над променливите во дадената равенка извршиме која да е ортогонална трансформација. Ќе имаме значи

$$a_{11}+a_{22}=a_{11}'+a_{22}', \quad \Delta_2=\Delta_2', \quad \Delta_3=\Delta_3'.$$

Ако по извршената трансформација равенката ја помножиме уште со еден фактор $\rho \neq 0$, тогаш таа претставува иста крива, но за новите коефициенти $a_{ik}^* = \rho a_{ik}'$ на равенката не важат равенства, аналогни на горните, туку

$$a_{12}^* + a_{22}^* = \rho\,(a_{11}+a_{22}), \quad \Delta_2^* = \rho^2\Delta_2, \quad \Delta_3^* = \rho^3\Delta_3.$$

Со Δ_2^*; Δ^*_3 ги обележивме детерминантите што се добиваат, ако во Δ_2 и Δ_3 елементите a_{ik} ги замениме со a_{ik}^*.

Оттука следува дека една крива од втор ред ги определува инваријантите I_1, I_2, I_3 само до една мултипликативна константа. Затоа овие изрази сами за себе не можат да имаат некое геометриско значење за кривата, зашто една и иста крива определува безброј различни вредности за нив. Но релациите $I_1=0$, $I_2=0$, $I_3=0$ имаат геометриска содржина. Така, на пр., $I_2=0$ значи дека кривата е од параболичен тип, а $I_3=0$ дека таа е распадната.

Од инваријантите I_1, I_2, I_3 ќе формираме сега лесно такви изрази чии вредности ќе бидат исти за сите меѓу себе конгруентни *криви* од втор ред без оглед на тоа на која координатна правоагла система се однесуваат нивните равенки. Такви изрази ќе ги викаме *метрични апсолутни инваријанти на кривите од втор ред.*

Апсолутни инваријанти се, на пр., односите $I_1^2 : I_2$, $I_2^3 : I_3^2$, $I_1^3 : I_3$. Навистина, овие изрази не си ја менуватт својата вредност, ако преминеме кон некоја друга правоагла картезична система или ако равенката на кривата ја помножиме со некој фактор. Општо, апсолутни инваријанти се односите на инваријантите

$$I_1, \quad I_2^{1/2}, \quad I_3^{1/3} \tag{21}$$

и, се разбира, какви да е функции од тие односи. Секој од изразите (21) се множи со ист фактор ρ, ако со ρ ги множиме коефициентите на равенката, само $I_2^{1/2}$ се множи со $|\rho|$. Затоа односите, во кои фигурира $I_2^{1/2}$, се апсолутни инваријанти само по својата апсолутна вредност. Од $I_2^{1/2} : I_1$ го добиваме, на пр., после множењето на коефициентите на равенката на кривата со ρ, изразот

$$|\rho| \cdot I_2^{1/2} : \rho\, I_1 = \pm I_2^{1/2} : I_1.$$

Секоја метрична инваријанта изразува некоја геометриска особина на кривата. На пр., површината на елипсата

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

е πab. Но можеме да пишеме $ab = (1/a^2b^2):(1/a^3b^3)$. Бидејќи е $I_2 = I_3 = 1/a^2b^2$, тоа е $ab = I_3 : I_2^{3/2} = (I_3^{1/3} : I_2^{1/2})^3$. Овој израз е апсолутна инваријанта по својата апсолутна вредност. Тој е еднаков на производот ab, без оглед на тоа во која правоагла система е дадена елипсата. Површината на елипсата е, значи,

$$p = \pi . |I_3| . I_2^{-2/3}.$$

На пр., нека равенката

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

претставува елипса. Имаме $I_2 = \Delta_2 > 0$, $I_3 = a_{33}\Delta_2$. Нејзината површина е, значи,

$$p = \pi\, |a_{33}|/\sqrt{\Delta_2}.$$

ПРИМЕРИ

1. Да се определи геометриското значење на апсолутната инваријанта I_2/I_1^2.

Решение. Ја избираме кривата

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 - c = 0, \quad a > b > 0.$$

За неа е

$$I_1 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \quad I_2 = -\frac{1}{a^2b^2}; \qquad I_2 : I_1^2 = -\frac{a^2b^2}{(b^2-a^2)},$$

(22)
$$\sqrt{-\frac{I_2}{I_1}} = \frac{ab}{a^2-b^2}$$

Ако е $c \neq 0$, кривата е *хипербола*, а правите $x/a \pm y/b = 0$ се нејзините *асимптоти*. Ако е $c = 0$, кривата распаднува во правите $x/a \pm y/b = 0$. За аголот φ меѓу нив се добива

$$\mathrm{tg}\varphi = 2\frac{ab}{a^2-b^2}$$

А оттука, на основа (22):

$$\frac{I_2}{I_1^2} = -\frac{1}{4}\mathrm{tg}^2\varphi,$$

со што е добиено геометриското значение на дадената апсолутна инваријанта.

Патем ја добивме за аголот φ помеѓу асимптотите на кривите од хиперболичен тип формулата

$$\mathrm{tg}\varphi = 2\frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}+a_{22}}.$$

Забелешка: Ако е $a_{11} + a_{22} = 0$, следува $\varphi = \frac{\pi}{2}$; кривата е од хиперболичен тип, а асимптотите се нормални. Хиперболата со нормални асимптоти ја викаме *рамнострана*. *Релацијата* $I_1 = 0$ *значи*, спрема тоа, *дека кривата е рамнострана хипербола или пар нормални прави.*

2. Да се определи површината на триаголникот што го образуваат асимптотите на една зададена хипербола и една нејзина подвижна тангента.

Решение. Каноничната равенка на хиперболата нека е $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Површините на вопросните триаголници се еднакви (§ 72, т. 4, зад. 14). Затоа можеме да го избереме триаголникот, заграден со асимптотите и тангентата $x = a$. Таа ги сече асимптотите $x/a \pm y/b = 0$ во точките (a, b) и $(a, -b)$, и, спрема тоа, со нив затвора триаголник со површина $p = a \cdot b$. Од друга страна имаме $I_2 = -1/a^2b^2$, $I_3 = 1/a^2b^2$, и затоа $ab = 1/a^2b^2 : 1/a^3b^3 = I_3 : (-I_2)^{3/2}$

Изразот $| I_3 | : | I_2 |^{3/2}$ е апсолутна инваријанта. Затоа формулата

$$p = | I_3 | . | I_2 |^{-3/2}$$

за површината на триаголникот важи за секоја правоагла система.

ЗАДАЧИ

1. Да се докаже дека квадратот од полупараметарот на параболата е еднаков на $-I_3/I_1^3$.

2. Да се докаже дека површината на квадратот, опишан околу елипсата, е еднаква на $-2I_1I_3/I_2^2$.

3. Докажи дека површината на квадратот, вписан во елипсата, е еднаква на $-4I_3/I_1I_2$.

4. Докажи дека четврта степен од линеарниот ексцентрицитет на елипсата или хиперболата е еднаква на $(I_1^2 - 4I_2)\, I_3^2 I_2^{-4}$.

II. ПОВРШИНИ ОД ВТОР РЕД

§ 117. Комплексен простор

Аналогно како што Аналитичната геометрија во рамнината ја обопштивме за комплексна рамнина, ја обопштуваме Аналитичната геометрија во просторот за таканаречен *комплексен простор*.

Ако во просторот е избрана една афина координатна система, тогаш на секоја подредена тројка реални броеви одговара една точка од просторот, и обратно. Сега воведуваме еден нов начин на изразување со тоа што се договоруваме, дека секоја подредена тројка комплексни броеви определува една точка во просторот, која ќе ја наречеме комплексна точка. Ако барем еден од броевите — *координатите* — не е реален, точката ќе ја наречеме *имагинарна точка*. Се разбира дека за неа немаме геометриска претстава. Ако трите координати на една комплексна точка се реални, за точката имаме нагледна претстава: тоа е точката определена во гл. II; ќе ја викаме сега *реална точка*. При премин кон некоја друга афина координатна система координатите на имагинарни точки нека се трансформираат, по дефиниција, со помошта на истите трансформациони равенки како координатите на реалните точки.

Две точки $X(x_1, x_2, x_3)$ и $Y(y_1, y_2, y_3)$, во оваа распоредба, определуваат еден *комплексен* вектор $\overrightarrow{XY}$ чии координати се

$\{y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3\}$. Ако координатите не се три *реални* броја, векторот ќе го викаме *имаіинарен*, а во спротивен случај ќе го викаме *реален*.

Просторот, во кој се дефинирани комплексни точки, ќе го викаме *комйлексен йросшор*. Комплексниот простор е, значи, целокупноста од подредените тројки комплексни броеви, наречени точки.

Аналогно како во комплексната рамнина, ја дефинираме и во комплексниот простор отсечката и правата.

Целокупноста на точките, реални и имагинарни, чии што координати x_1, x_2, x_3 задоволуваат некоја равенка од вид $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, ја викаме *йоѓршина*, а $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ — нејзина *раѓенка*. На површината, чија што равенка во однос на некоја афина система во комплексниот простор е еднаква на равенката на некоја позната ни површина во однос на некоја афина система во обикновениот простор, ќе ѝ го дадеме името на познатата површина.

Ако сите коефициенти на равенката на некоја површина се реални, или ако равенката може да се сведе на ваков облик, површината ќе ја викаме *реална*. Реалните површини имаат безброј имагинарни точки, а реални точки можат да ги имаат безброј, краен број или ги немаат. Површините $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + x^2{}_3 + 1 = 0$ се примери за трите вида површини: првата има безброј реални точки, втората само точката (0, 0, 0), а третата ниедна.

Формулите, кои аналитички ги изразуваат одделни геометриски факти за реалните точки и вектори, нека ги изразуваат, по дефиниција, аналогните геометриски факти за комплексните точки и вектори. На пр., ако соодветните координати на два комплексни вектора се пропорционални, ќе кажеме дека векторите се колинеарни.

Ако во комплексниот простор ги посматраме само реалните точки, добивме аналитичка геометрија во обикновениот (реален) простор. Комплксниот простор е, значи, апстрактно обопштение — проширение — на обикновениот простор.

ЗАДАЧИ

1. Да се напишат параметарските равенки на правата што врви низ точките $(2 + i,\ 1 - 2i,\ 1)$ и $(1 + 2i,\ i,\ -2 - i)$.

2. Определи ја средината на отсечката, чии крајни точки се $(a + bi,\ c + di,\ e + fi)$ и $(a - bi,\ c - di,\ e - fi)$, а потоа напиши ги параметарските равенки на правата што минува низ зададените точки.

Какви површини претставуваат равенките во зад. 3—5?

3. $x_1^2 + 1 = 0$.   4. $x_1^2 + x_3^2 = 0$.   5. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$.

6. Напиши ја равенката на рамнината, која е паралелна со рамнината $ix_1 + 2x_2 - x_3 + 4i = 0$, а минува низ точката $(i,\ 3,\ -2)$.

Афини особини на површините од втор ред

§ 118. Општа равенка на површината од втор ред

Во главата III изучените површини се од втор ред. Сега ќе ги испитаме сите можни површини од втор ред, и тоа *во комплексен простор.*

Најопшта равенка од втора степен по однос на променливите x_1, x_2, x_3 има вид

$$(1)\qquad f(x_1, x_2, x_3) \equiv$$
$$\equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 +$$
$$+ 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0.$$

И тука се служиме, како при кривите од втор ред, со двојноиндексната ознака: при тоа нека е пак $a_{ik} = a_{ki}$.

Равенката (1) ја викаме *општа равенка* на површината од втор ред. Нашата задача е да ја испитаме подробно таа равенка, т. е. што таа равенка може геометриски да претставува, толкувајќи ги x_1, x_2, x_3 како координати на точки во комплексниот простор, ако за коефициентите a_{ik} избираме севозможни комплексни вредности, и какви најважни особини имаат површините што таа ги претставува.

Равенката (1) содржи десет константи. Ако со една од нив ја поделиме равенката, ќе останат уште девет. Затоа кажуваме дека општата равенка на површината од втор ред зависи од девет параметри. Оттука следува дека *низ девет, во просторот произволно избрани, точки минува барем една површина од втор ред.* Ако, имено, координатите на зададените точки ги замениме наместо x_1, x_2, x_3 во (1), добиваме девет хомогени линеарни равенки за десетте коефициенти a_{ik}. Тие равенки определуваат, општо, една и само една вредност за односите на девет од коефициентите кон десеттиот. Може да се случи точките да имаат и таква посебна меѓусебна положба, што добиените линеарни равенки да не се сите независни. Системата линеарни равенки дава тогаш безброј вредности за бараните односи; низ зададените девет точки минуваат, во овој случај, безброј површини од втор ред.

§ 119. Тангенцијална рамнина. Дијаметрални рамнини. Асимптотски конус

1. Пресек на правата и површината од втор ред. Ќе ги пресметаме сега координатите на заедничките (пресечните) точки на една површина од втор ред со една права.

Правата нека ни биде зададена со параметарските равенки

$$(2)\qquad x_i = x_i^0 + a_i t, \quad (i = 1, 2, 3).$$

За секоја вредност од t, овие изрази за x_1, x_2, x_3 определуваат координати на една точка од правата. Ако една таква точка, при извесна вредност на t, лежи и на површината (1), треба да биде

$$f(x_1^0 + a_1 t,\ x_2^0 + a_2 t,\ x_3^0 + a_3 t) = 0.$$

Добивме една квадратна равенка по t, која можеме да ја доведеме во облик

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{3}$$

каде што е

$$A \equiv a_{11}a_1^2 + a_{22}a_2^2 + a_{33}a_3^2 + 2a_{12}a_1a_2 + 2a_{13}a_1a_3 + 2a_{23}a_2a_3,$$

$$\begin{aligned} 2B \equiv 2a_1(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 + a_{14}) + 2a_2(a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0 + \\ + a_{24}) + 2a_3(a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0 + a_{34}) \equiv \\ \equiv a_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f_0}{\partial x_3}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$C = f(x_1^0, x_2^0, x_3^0).$$

Со ознаката за парцијален извод се служиме само поради пократко пишување.

Равенката (3) е квадратна, ако е $A \neq 0$. За секој нејзин корен t' добиваме по една точка $(x_1^0 + a_1t', x_2^0 + a_2t', x_3^0 + a_3t')$, која е заедничка на правата и површината. Правата ја сече, спрема тоа, површината во две точки, реални или имагинарни, ако е $A \neq 0$, $B^2 - AC \neq 0$; во една точка, ако $A = 0$, $B \neq 0$ или $A \neq 0$, $B^2 - AC = 0$. не ја сече, ако $A = B = 0$, $C \neq 0$; а лежи на површината, ако $A = B = C = 0$.

2. Асимптоти. Поимот за прави со асимптотски правец, дефиниран во § 111, го обопштуваме сега за сите површини од втор ред. Тоа се, значи, правите (2), при кои е $A = 0$, или

$$a_{11}a_1^2 + a_{22}a_2^2 + a_{33}a_3^2 + 2a_{12}a_1a_2 + 2a_{13}a_1a_3 + 2a_{23}a_2a_3 = 0. \tag{5}$$

Од оваа дефиниција следува, како во § 93, т. 2, дека една *права со асимптотски правец ја сече површината само во една точка, или не ја сече, или лежи на неа.* Ниедна права со асимптотски правец не е, спрема тоа, сечица на површината (т. е. права што со површината има две заеднички точки).

Го обопштуваме сега и поимот за *асимптоти* на кривите и за површините од втор ред. Тоа нека се, по дефиниција, *правите кои површината не ја сечат ни во реални ни во имагинарни точки, и правите што лежат на површината.* Правата (2) е, значи, асимптота на површината (1), ако важи $A = 0$ и $B = 0$, т. е. треба да важи (5) и

$$a_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f_0}{\partial x_3} = 0. \tag{6}$$

Координатите x_1^0, x_2^0, x_3^0 од точката M_0 на асимптотата ја задоволуваат, значи, равенката (6). Но бидејќи за M_0 можеме да избереме која да е точка на правата (2), тоа координатите на секоја точка од асимптотата ја задоволуваат равенката (6). Важи и обратно, ако за правата (2) важи (5) и (6), таа е една асимптота на површината (1). Спрема тоа:

Во секој правец, определен со еден вектор $\{a_1, a_2, a_3\}$ *чии што координати ја задоволуваат равенката* (5), *постои една асимптота на површината* (1). *Таа лежи во рамнината,*

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Ако една асимптота што има правец на векторот $\{a_1, a_2, a_3\}$ ја пренесеме паралелно така да по преносот минува низ координатниот почеток, тогаш координатите x_1, x_2, x_3 на секоја точка на пренесената права се пропорционални со a_1, a_2, a_3. Но бидејќи a_i ја задоволуваат (5), имаме

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Оваа равенка ја претставува, спрема тоа, целокупноста од сите прави што се добиваат на тој начин што асимптотите на површината (1) ги пренесеме паралелно така да минуваат низ координатниот почеток.

Задача. — Ако една права зададената реална површина од втор ред не ја сече во ниедна реална точка, а ниедна нејзе паралелна права не ја сече површината во две (и само две) реални точки, правата е асимптота. Доказ!

3. Тангенти и тангенцијални рамнини. Дефиницијата за тангента од § 95 ја обопштуваме за сите површини од втор ред. *Една правата е*, значи, *по дефиниција, тангента на површината* (1), *ако со неа има само една заедничка точка* (*допир*), *а нема асимптотски правец.* Освен тоа и секоја права што лежи на површината ќе ја сметаме како *тангента*, а секоја нејзина точка како *допир*.

За услов да правата (2) биде тангента со допир во M_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) добиваме, како во § 95, дека $B = 0$, или

$$a_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f_0}{\partial x_3} = 0.$$

Ако $M(x_1, x_2, x_3)$ е која да е точка на тангентата, тогаш векторот $\{x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0\}$ е колинеарен со $\{a_1, a_2, a_3\}$. Горниот услов можеме тогаш да го пишеме во вид

$$(x_1 - x_1^0) \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0) \frac{\partial f_0}{\partial x_2} + (x_3 - x_3^0) \frac{\partial f_0}{\partial x_3} = 0. \tag{7}$$

Координатите од секоја точка M, која лежи на која да е тангента на површината со допир во M_0, ја задоволуваат оваа линеарна равенка. Тангентите на површината во една нејзина точка M_0 лежат, спрема тоа, во една рамнина. Ја нареауваме *тангенцијална рамнина* на површината со дипир во M_0. Нејзината равенка е (7).

На аналоген начин како во § 111, т. 3 се покажува дека равенката на тангенцијална рамнина може да се доведе и во облик

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1x_1{}^0+a_{22}x_2x_2{}^0+a_{33}x_3x_3{}^0+ \\
+a_{12}(x_1x_2{}^0+x_1{}^0x_2)+a_{13}(x_1x_3{}^0+x_1{}^0x_3)+a_{23}(x_2x_3{}^0+x_2{}^0x_3)+ \\
+a_{14}(x_1+x_1{}^0)+a_{24}(x_2+x_2{}^0)+a_{34}(x_3+x_3{}^0)+a_{44}=0.
\end{gathered}
\tag{7'}
$$

ЗАДАЧИ

Напиши ја равенката на тангенцијалната рамнина на дадената површина во зададената точка.

1. $x_1x_2 + x_3 = 0$; $(-1, -1, -1)$.
2. $x_1{}^2 - 2x_1x_2 + 3x_2{}^2 - 4x_1 + x_2 - 7 = 0$; $(1, 2, t)$.
3. $2x_1{}^2 - x_1x_2 + x_2{}^2 + 3x_3{}^2 + x_1 - 4x_3 - 17 = 0$; $(-1, 3, 2)$.

4. Тангенти, спуштени на површината од втор ред од една точка. На ист начин како во § 111, т. 4 проверуваме какво значење има равенката (7) одн. (7′), ако M_0 $(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$ не лежи на површината (1). Таа ја претставува рамнината, во која лежат допирните точки на тангентите, спуштени од M_0 на површината. Значи, допирните точки на тангентите, спуштени од една точка M_0 на една површина од втор ред, лежат во една рамнина. Рамината ја викаме *поларна рамнина* на површината во однос на *полот* M_0.

5. Дијаметрални рамнини. Секоја права, која нема асимптотски правец, ја сече површината во две точки (реални или имагинарни), кои евентуално можат и да совпаднат во една сама точка (правата е тогаш *тангента*). Да испитаме што е геометриското место на средините на оние тетиви на површината што лежат на правите кои се паралелни со еден неасимптотски правец.

Правата (2) нека нема асимптотски правец, а M_0 нека биде средината на тетивата што површината ја исекува на правата. Тогаш е, како во § 111, т. 5, $B = 0$. Но важи и обратно, ако е $B = 0$, тогаш M_0 е во средината на тетивата што лежи на правата (2). Геометриското место на средините на тетивите, паралелни со векторот $\{a_1, a_2, a_3,\}$ е, значи, рамнината

$$
a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \tag{8}
$$

Ја нарекуваме *дијаметрална рамнина* на површината (1), *конјугирана* со правецот на векторот $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Поимот за дијаметрална рамнина го обопштуваме сега на следниов начин: Равенката (8) нека претставува, по дефиниција, дијаметрална рамнина на површината (1), конјугирана со правецот на векторот $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, и тогаш кога $\boldsymbol{a}$ има асимптотски правец — во колку равенката (8) изопшто претставува некоја рамнина.

Да испитаме сега дали некоја дијаметрална рамнина може да биде паралелна со правецот со кој е конјугирана. Рамнината (8) е паралелна со векторот $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, ако важи

$$a_1 (a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3) + a_2 (a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + a_{33}a_3) +$$
$$+ a_3 (a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + a_{33}a_3) = \sum_{i, k=1}^{3} a_{ik}a_i a_k = A = 0,$$

т. е. само тогаш кога $\boldsymbol{a}$ има асимптотски правец во однос на површината (1). Важи значи:

Дијаметралната рамнина, конјугирана со некој неасимптотски правец, не е паралелна со него, а дијаметралната рамнина што е паралелна со некој асимптотски правец е паралелна со него.

ЗАДАЧИ

1. Напиши ги равенките на дијаметралните рамнини на површината $f = 0$, конјирани со правецот на x_i-оската.

Определи го геометриското место на средините на оние тетиви на зададената површина што се паралелни со дадената права.

2. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + 1 = 0$; $x_1 = x_2 = x_3$.

3. $x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_1x_3 = 0$; $x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 0$.

4. $x_1^2 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$; $(x_1 - 1)/2 = x_2/3 = x_3$.

5. Со кој правец е конјугирана дијаметралната рамнина на површината $2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 57x_1x_2 + 6x_1 - x_2 = 0$ што минува низ точките $(0, 0, 0)$ и $(1, 0, -1)$.

6. Центар на површина од втор ред. Ако рамнините

$$(9) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4} = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

имаат некоја заедничка точка S, тогаш нејзините координати ја задоволуваат равенката (8), при секакви вредности за a_1, a_2, a_3. Такви површини, при кои постои некаква таква точка S, ја викаме *површина со центар*, а точката S—нејзин *центар*.

Потребно и доволно за тоа, површината (1) да има еден и само еден центар е, спрема теоријата на линеарните равенки, да биде

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ако рамнините (9) се паралелни со еден ист правец, тогаш со тој правец се паралелни и дијаметралните рамнини (8); а ако рамнините (9) се паралелни меѓу себе, се паралелни со нив и сите дијаметрални рамнини на површината.

ЗАДАЧИ

Да се испита дали зададените површини имаат центар. Во случај на позитивен одговор да се определи тој (одн. тие).

1. $x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_2 - 1 = 0.$
2. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2 = 0.$
3. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 1 = 0.$
4. $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 4 = 0.$

7. Асимптотски конус. Нека површината (1) биде површина со центар. Да испитаме што претставуваат оние прави со асимптотски правец што минуваат низ центарот на површината. Нека M_0 е центарот, а правата (2) — која да е права низ M_0 со асимптотски правец. За неа, значи, важи (5), т. е. $A = 0$. Но бидејќи M_0 е центар, важи $\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \frac{\partial f_0}{\partial x_2} = \frac{\partial f_0}{\partial x_3} = 0$, а затоа важи $B = 0$. Значи, таа права е една асимптота на површината. Нека е $M(x_1, x_2, x_3)$ која да е точка на неа. Тогаш е $\{x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0\}$ еден вектор со асимптотски правец; неговите координати ја задоволуваат равенката (5), значи

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) = 0. \tag{10}$$

Координатите на секоја точка од која да е асимптота, која минува низ центарот на површината, ја задоволуваат равенката (10). Обратно, ако координатите на некоја точка M ја задоволуваат (10), тогаш M_0M има асимптотски правец, значи е една асимптота на површината. Бидејќи равенката (10) е хомогена во однос на $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0$, таа претставува еден конус со врв во M_0. Го наречуваме *асимптотски конус* на површината. Равенката (10) е негова равенка.

Асимптотски конус за површината $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44} = 0$ е, на пр., $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$. Тоа покажува дека тука дефинираниот асимптотски конус за површините, изучени во гл. III, совпаднува со поимот за асимптотски конус што беше воведен таму.

ЗАДАЧИ

Определи ја равенката на асимптотскиот конус на зададените површини.

1. $a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + \lambda = 0.$
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 = 0.$
3. $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 5x_1 - 6x_2 - x_3 + 4 = 0.$
4. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3 = 0.$
5. $2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + x_1x_2 - 5x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 + 4x_2 + x_3 - 8 = 0.$

6. Покажи дека секоја асимптота на која да е површина од втор ред минува низ нејзиниот центар.

§ 120. Конјугирани правци во однос на една површина од втор ред

1. Заемно конјугирани правци. Ќе испитаме сега каква зависност постои помеѓу правецот на еден вектор $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и правецот на кој да е вектор $\boldsymbol{a}' = \{a_1', a_2', a_3'\}$ што е паралелен со онаа дијаметрална рамнина на површината (1), која е конјугирана со правецот на $\boldsymbol{a}$. Векторот $\boldsymbol{a}'$ е паралелен со рамнината

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

а затоа и со рамнината што е паралелна со оваа, а минува низ координатниот почеток; нејзината равенка е

$$a_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + a_3 (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0.$$

Координатите од $\boldsymbol{a}'$ ја задоволуваат оваа равенка. Заменувајќи ги во неа a_i' место x_i, добиваме по средувањето

$$a_{11}a_1a_1' + a_{22}a_2a_2' + a_{33}a_3a_3' + a_{12} (a_1a_2' + a_1'a_2) + \\ + a_{13} (a_1a_3' + a_1'a_3) + a_{23} (a_2a_3' + a_2'a_3) = 0,$$

или, запишано во скратен вид,

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}a_ia_k' = 0. \tag{11}$$

Оваа релација е наполно симетрична по однос на a_i и a_i'. Затоа, ако би ја барале релацијата помеѓу правецот на векторот $\boldsymbol{a}'$ и кој да е вектор $\boldsymbol{a}$ што лежи во дијаметралната рамнина, конјугирана со правецот на $\boldsymbol{a}'$ (ако таква постои), би ја добиле оваа иста релација (11). Според тоа, *ако $\boldsymbol{a}'$ лежи во дијаметралната рамнина што е конјугирана со правецот на $\boldsymbol{a}$, тогаш $\boldsymbol{a}$ лежи во дијаметралната рамнина, конјугирана со правецот на $\boldsymbol{a}'$, ако таква рамнина постои.*

За правците на два вектори a и a', за чии што координати a_i и a_i' важи релацијата (11), ќе велиме дека се *заемно конјугирани* во однос на дадената површина (1).

2. Система компланарни асимптотски правци. Да претпоставиме дека правците на сите вектори од една система компланарни вектори се асимптотски во однос на зададената површина. Ќе испитаме каква зависност постои меѓу кои да е два такви правци.

Нека се a и b два кои да е неколинеарни вектори од таа система. На таа система ѝ припаѓа и векторорт $a + b$. За него важи, по претпоставка, ако a_i и b_i се координатите од a и b, релацијата (бидејќи има асимптотски правец):

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(a_i + b_i)(a_k + b_k) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i,k} a_{ik}a_i a_k + \sum_{i,k} a_{ik} b_i b_k + \sum_{i,k} a_{ik} a_i b_k + \sum_{i,k} a_{ik} a_k b_i = 0,$$

или, поради $a_{ik} = a_{ki}$, релацијата

$$(*) \qquad \sum_{i,k} a_{ik} a_i a_k + \sum_{i,k} a_{ik} b_i b_k + 2\sum a_{ik} a_i b_k = 0.$$

Но и a и b имаат асимптотски правци. Затоа е

$$\sum_{i,k} a_{ik} a_i a_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i,k} a_{ik} b_i b_k = 0.$$

Од (*) следува тогаш

$$\sum_{i,k} a_{ik} a_i b_k = 0.$$

Спрема тоа:

Ако правците на една система компланарни вектори се асимптотски, тогаш секој од тие правци е конјугиран со секого.

3. Тројки заемно конјугирани правци. Ќе покажеме сега дека при секоја површина од втор ред постојат такви некомпланарни тројки правци, од кои секој е конјугиран со другите два.

Сите правци во просторот во однос на која да е површина од втор ред не се асимптотски. Нека биде a еден вектор со неасимптотски правец. Дијаметралната рамнина ω, конјугирана со него, не му е паралелна. Ако во неа сите правци не се асимптотски, избираме во неа еден неасимптотски правец; нека е тоа правецот на векторот a'. Дијаметралната рамнина ω' што е конјугирана со неговиот правец не е паралелна со него, а е паралелна со a.

Рамнините ω и ω′ се пресекуваат во една права, чиј правец нека е даден со a''. Бидејќи a'' лежи во ω и ω′, тоа неговиот правец е конјугиран со правците на a и a'. Значи по два и два правца на трите вектори a, a', a'' се конјугирани. Покажавме *дека ностои една некомпланарна тројка заемно конјугирани правци*, ако во ω сите правци не се асимптотски.

А ако во ω сите правци се асимптотски, тогаш сите се меѓу себе конјугирани. Во тој случај е потребно, во ω да избереме кои да е два неколинеарни правци; тогаш тие, заедно со правецот на a, се една барана заемно конјугирана тројка правци.

Со тоа ја докажавме егзистенцијата на тројки некомпланарни заемно конјугирани правци при секоја површина од втор ред.

ЗАДАЧИ

Определи по една тројка заемно конјугирани правци за зададените површини.

1. $x_1^2 - 4x_2^2 + 9x_8^2 - 36 = 0.$
2. $x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1 = 0.$
3. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_8 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 3x_2 - x_8 - 5 = 0.$

§ 121. Упростување на равенката на површината од втор ред при специјален избор на координата система

Ќе покажеме како се упростува равенката на една зададена површина, ако координата система во однос на површината има специјална положба.

I. Координатниот почеток совпаднува со центарот на површината. Тогаш $x_1 = x_2 = x_2 = 0$ е решение на системата (9); оттука следува $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. Очигледно е верно и обратно.

Ако центарот на една површина од втор ред лежи во координатниот почеток, тогаш нејзината равенка нема линеарни членови, и обратно.

II. Координатните оски имаат асимптотски правци. Ако, на пр., координатниот вектор e_1 има асимптотски правец, тогаш, заменувајќи $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_8 = 0$ во (5), добиваме $a_{11} = 0$. Ако е, обратно, $a_{11} = 0$, е задоволена (5) со $a_1 = 1$, $a_2 = a_8 = 0$; e_1 има, значи, асимптотски правец.

Ако x_i-оската има асимптотски правец, тогаш равенката на површината го нема членот со x_i^2, и обратно.

III. Две координатни оски имаат конјугирани правци. Нека, на пр., координатните вектори e_1 и e_2 имаат заемно конјугирани правци. Заменувајќи во (11) $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$ и $a_1' =$

$= a_3' = 0$, $a_2' = 1$, добиваме $a_{12} = 0$. И обратно, ако е $a_{12} = 0$ е задоволена (11) со координатите на e_1 и e_2; e_1 и e_2 имаат, значи, заемно конјугирани правци.

Ако x_i- и x_k-координатните оски имаат заемно конјугирани правци, тогаш во равенката на површината го нема членот со x_ix_k, и обратно.

ПРИМЕРИ

1. Равенката на секоја површина со центар од втор ред може да се доведе на облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44} = 0.$$

Треба, имено, да се земе една таква координатна система, чии оски се заемно конјугирани и да минуваат низ центарот на површината.

2. Равенката на која да е површина од втор ред го добива видот

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0,$$

ако една нејзина некомпланарна тројка заемно конјугирани правци ја избереме за правците на координатните оски. Таква тројка секогаш постои.

3. Ако три некомпланарни асимптотски правци на една површина од втор ред, ако такви постојат, ги избереме за правци на координатните оски, равенката на површината добива облик

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44} = 0.$$

4. Ако за координатни оски избереме три (реални) асимптоти од асимптотскиот конус на зададената површина, ако такви постојат, равенката на површината има вид

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{44} = 0.$$

ЗАДАЧИ

Каква положба имаат координатните оски во однос на зададените површини.

1. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_3^2 - 1 = 0$. 2. $x_1x_2 + x_3 = 0$.
3. $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 - 2x_1 = 0$. 4. $x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 5x_2x_3 - 3 = 0$.

§ 122. Афина класификација на површините од втор ред

Користејќи ја упростената равенка од прим. 2 § 121, на која може да се сведе равенката на секоја површина од втор ред, би можеле да иследиме какви сé видови површини од втор ред постојат. Но тој начин сега нема да го користиме, туку ќе го приложиме подоцна, при метричната класификација на површините (§ 125). А сега ќе го користиме методот, аналоген на оној што го користивме во § 113, при афината класификација на кривите од втор ред. При тоа се ограничуваме само на реалните површини.

1. Класификација на површините за случај $a_{11} \neq 0$. Зададена нека ни е општата равенка (1), во која коефициентите a_{ik} се реални константи. Ќе претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$.

Уредувајќи ја левата страна од (1), што ќе ја бележиме со $f(x_1, x_2, x_3)$ или кратко со f, по степените од x_1, добиваме

$$\begin{aligned} f \equiv\ & a_{11}x_1^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}) + \\ & + (a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}). \end{aligned}$$

Множејќи го тоа со a_{11} и дополнувајќи ги првите два члена до полен квадрат, добиваме

$$\begin{aligned} a_{11}f \equiv\ & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14})^2 + \\ & + (b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{24}x_2 + 2b_{34}x_3 + b_{44}), \end{aligned}$$

каде што е

$$b_{ik} = b_{ki} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{ik} \end{vmatrix}, \quad (i, k = 2, 3, 4).$$

Од x_i-координатната система преjдуваме сега кон x_i'-координатната система, дефинирана со

$$(12) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Трансформационата детерминанта е 1, значи $\neq 0$, како што треба и да биде. Во новите координати имаме

$$a_{11}f \equiv a_{11}^2x_1'^2 + b_{22}x_2'^2 + b_{33}x_3'^2 + 2b_{23}x_2'x_3' + 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44}.$$

Изразот

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv b_{22}x_2'^2 + b_{33}x_3'^2 + 2b_{23}x_2'x_3' + 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44}$$

содржи само две променливи — x_2' и x_3'. Во $x_2'x_3'$ - рамнината равенката $\varphi(x_2', x_3') = 0$ претставува една крива од втор ред. Во таа рамнина можеме да избереме таква $x_2''x_3''$-координатна система, дефинирана со разенките од видот

$$(13) \qquad \begin{aligned} x_2'' &= e_{22}x_2' + e_{23}x_3' + e_{24} \\ x_3'' &= e_{32}x_2' + e_{33}x_3' + e_{34} \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(§ 113), што равенката на кривата $\varphi = 0$ во однос на неа да има канончен облик. Типот на оваа крива го распознаваме според знаковите и вредностите на изразите (§ 113):

$$\bar{\Delta}_1' = b_{22}, \quad \bar{\Delta}_2' = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \bar{\Delta}_3' = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

Во § 113, т. 1 покажавме дека е $a_{11}\Delta_3 = \tilde{\Delta}_2'$. На сосем сличен начин се покажува дека е $a_{11}^2\Delta_4 = \tilde{\Delta}_3'$. При тоа е $a_{11} \neq 0$.

I. Ако е $\tilde{\Delta}_2' \neq 0$, $\tilde{\Delta}_3' \neq 0$, односно $\Delta_3 \neq 0$, $\Delta_4 \neq 0$, тогаш кривата $\varphi = 0$ е елипса или хипербола. Левата страна на нејзината канонична равенка гласи

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv a_{22}''x_2''^2 + a_{33}''x_3''^2 + a_{44}'' \quad (a_{22}''.\, a_{33}''.\, a_{44}'' \neq 0).$$

Сега ја извршуваме во просторот трансформацијата на координатната система, дефинирана со

$$(14) \qquad \begin{aligned} x_1'' &= x_1' \\ x_2'' &= \quad e_{22}x_2' + e_{23}x_3' + e_{24} \\ x_3'' &= \quad e_{32}x_2' + e_{33}x_3' + e_{34}. \end{aligned}$$

Во однос на x_i''-системата равенката на површината гласи

$$(15) \quad a_{11}^2x_1''^2 + a_{22}''x_2''^2 + a_{33}''x_3''^2 + a_{44}'' = 0 \quad (a_{22}''a_{33}''a_{44}'' \neq 0).$$

Со подесно изменување на должините на координатните вектори, со евентуално преименување на оските, равенката (15) може да се доведе на еден од следните видови и претставува:

$$(16) \quad \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 &= 0 && \textit{Имагинарен елипсоид} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 &= 0 && \textit{Реален елипсоид} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 &= 0 && \textit{Еднокрилен хиперболоид} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 &= 0 && \textit{Двокрилен хиперболоид} \end{aligned}$$

При тоа променливите ги означивме пак со x_1, x_2, x_3. Првата од равенките (16) нема реални решенија; површината има само имагинарни точки. Затоа ја нарековме *имагинарен елипсоид*. Познатиот ни веќе елипсоид, даден со втората равенка го нарекквме *реален*, за да го разликуваме од имагинарниот.

Покажавме, значи:

Ако е $\Delta_3 \neq 0$, $\Delta_4 \neq 0$, равенката (1) претставува елипсоид (имагинарен или реален) или хиперболоид (со едно или две крила).

II. Ако е $\tilde{\Delta}_2' \neq 0$, $\tilde{\Delta}_3' = 0$, т. е. $\Delta_3 \neq 0$, $\Delta_4 = 0$, кривата $\varphi(x_2', x_3') = 0$ во $x_2'x_3'$-рамнината е еден пар непаралелни прави. Нејзината канонична равенка гласи

$$\varphi \equiv a_{22}''x_2''^2 + a_{33}''x_3''^2 = 0 \qquad (a_{22}''.\, a_{33}'' \neq 0).$$

Во x_i''-системата равенката на површината, значи, гласи

$$a_{11}^2x_1''^2 + a_{22}''x_2''^2 + a_{33}''x_3''^2 = 0 \qquad (a_{22}''.\, a_{33}'' \neq 0).$$

Оваа равенка може, променувајќи ги должините на координатните вектори, а означувајќи ги новите координати пак со x_1, x_2,x_3, да се сведе на една од следните равенки и претставува:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	*Имагинарен конус*
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	*Реален конус*

Првата од овие површини има само една реална точка — точката (0, 0, 0). Познатиот ни веќе конус го викаме сега *реален*, за да го разликузаме од имагинарниот.

Спрема тоа:

Ако е $\Delta_3 \neq 0$, $\Delta_4 = 0$, *равенката* (1) *претставува конус* (*имагинарен или реален*).

III. Нека е сега $\tilde{\Delta}_2' = 0$, $\tilde{\Delta}_3' \neq 0$, т. е. $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 \neq 0$. Кривата $\varphi = 0$ е парабола; нејзината канонична равенка е значи

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv a_{22}''x_2''^2 + 2a_{34}''x_3'' = 0 \qquad (a_{22}''.\, a_{34}'' \neq 0).$$

Равенката на површината, во x_i''-системата, гласи

$$a_{11}{}^2x_1''^2 + a_{22}''x_2''^2 + 2a_{34}''x_3'' = 0 \qquad (a_{22}''.\, a_{34}'' \neq 0).$$

Како во случајот I и II, оваа равенка може да се упрости; таа може да се сведе на еден од следните два вида и претставува:

$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$	*Елиптичен параболоид*
$x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$	*Хиперболичен параболоид.*

Значи:

Ако е $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 \neq 0$, *равенката* (1) *претставува параболоид* (*елиптичен или хиперболичен*).

IV. Нека е $\tilde{\Delta}_2' = \tilde{\Delta}_3' = 0$, односно $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$. Тогаш $\varphi(x_2', x_3') = 0$ претставува, во $x_2'x_3'$-рамнината, еден пар паралелни прави. Затоа имаме

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv a_{22}''x_2''^2 + a_{44}'' = 0 \qquad (a_{22}'' \neq 0),$$

а за равенката на површината во x_i''-системата

$$a_{11}{}^2x_1''^2 + a_{22}''x_2''^2 + a_{44}'' = 0 \qquad (a_{22}'' \neq 0).$$

Оваа равенка може да се сведе, при подесно изменување на дожините на координатните вектори, означувајќи ги променливите пак со x_1, x_2, x_3, на еден од следните видови и претставува:

	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	*Имаѓинарен цилиндер*
	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	*Елиѓѓичен ѓилиндер*
(19)	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	*Хиѓерболичен цилиндер*
	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	*Пар имаѓинарни неѓаралелни рамнини*
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	*Пар реални неѓаралелни рамнини.*

Првата површина е цилиндер; генератрисите ѝ се паралелни со x_3-оската. Бидејќи нема реални точки, ја викаме *имаѓинарен цилиндер*. Претпоследната од равенките ги претставува непаралелните имагинарни рамнини $x_1 \pm ix_2 = 0$.

V. Останува уште да го разгледаме случајот кога изразот φ не е квадратен, значи кога е $b_{22} = b_{33} = b_{23} = 0$. Во тој случај, како што се проверува, е пак $\bar{\Delta}_2' = \bar{\Delta}_3' = 0$ одн. $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$. Во x_i'-системата, равенката на површината тогаш гласи

$$a_{11}^2 x_1'^2 + 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44} = 0.$$

1. Да претпоставиме прво да барем еден од коефициентите b_{24} и b_{34} не е нула; нека е тоа, на пр., b_{24}. Тогаш преjдуваме кон една нова, x_i-координатна система, определена со *):

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_{11}x_1' \\ x_2'' &= \qquad 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44} \\ x_3'' &= \qquad\qquad\qquad\quad x_3'. \end{aligned}$$

Трансформационата детерминанта е $2a_{11}b_{24} \neq 0$.

Равенката на површината во новата система гласи $x_1''^2 + x_2'' = 0$. Пишувајќи пак x_i место x_i'', имаме, значи:

(20) $x_1^2 + x_2 = 0$ *Параболичен цилиндер.*

2. Ако е $b_{24} = b_{34} = 0$, тогаш равенката на површината гласи

$$a_{11}^2 x_1'^2 + b_{44} = 0 \qquad (a_{11} \neq 0).$$

Оваа равенка може да се сведе, означувајќи ги променливите пак со x_1, x_2, x_3, во еден од следниве видови и претставува:

	$x_1^2 + 1 = 0$	*Пар имаѓинарни ѓаралелни рамнини*
(21)	$x_1^2 - 1 = 0$	*Пар реални ѓаралелни рамнини*
	$x_1^2 = 0$	*Пар собѓаднаѓи реални рамнини.*

Првата равенка ги претставува паралелните имагинарни рамнини $x_1 + i = 0$ и $x_1 - i = 0$. Последната равенка ја претставува

---

*) Ако е $b_{34} \neq 0$, ставуваме место третата трансформациона равенка равенката $x_3'' = x_2'$. Трансформационата детерминанта е $-2a_{11}b_{34} \neq 0$.

рамнината $x_1 = 0$; но се изразуваме дека таа претставува еден пар совпаднати рамнини.

Бидејќи паровите од две рамнини, како и една сама рамнина можеме да ги сметаме како цилиндрични површини, тоа од IV и V го имаме овој резултат:

Ако е $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, *равенката* (1) *претставува цилиндрична површина.*

2. Обопштение за случај $a_{11} = 0$. Целата дедукција во т. 1 беше изведена при претпоставка дека $a_{11} \neq 0$. Ќе покажеме сега дека добиените резултати важат и во случај кога е $a_{11} = 0$.

Ако барем еден од коефициентите a_{11}, a_{22}, a_{33} е различен од нула, тогаш ќе ги преименуваме координатите и коефициентите така што оној што е $\neq 0$ да биде означен со a_{11}. При тоа детерминантите Δ_3 и Δ_4 не се менуваат. Резултатите од т. 1 се, значи, во сила.

А ако ниеден од коефициентите a_{11}, a_{22}, a_{33} не е различен од нула, тогаш барем еден од коефициентите a_{12}, a_{13}, a_{23} е различен од нула, оти во спротивен случај равенката (1) не би била квадратна. Нека е, на пр., $a_{12} \neq 0$.

Од x_i-системата прејдуваме кон x_i'-системата, дефинирана со

$$(22)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1' \\ x_2 &= kx_1' + x_2' \\ x_3 &= \qquad\quad x_3', \end{aligned}$$

каде што k е една произволна константа. Ќе биде од интерес да испитаме во која равенка ќе прејде општата равенка (1) после оваа трансформација. Површината ја има во новата система равенката

$$(23)\qquad \begin{aligned} &(a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2)\, x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + \\ &+ 2(a_{12} + a_{22}k) + 2(a_{13} + a_{23}k)\, x_1'x_3' + 2a_{23}\,'x_2'\, x_3' + \\ &+ 2\,(a_{14} + a_{24}k)\, x_1' + 2a_{24}x_2' + 2a_{34}x_3' + a_{44} = 0, \end{aligned}$$

Детерминантите, во кои прејдуваат при тоа детерминантите Δ_2, Δ_3 и Δ_4, ќе ги означиме со Δ_2', Δ_3' Δ_4'. Така е, на пр.,

$$\Delta_4' = \begin{vmatrix} a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 & a_{12} + a_{22}k & a_{13} + a_{23}k & a_{14} + a_{24}k \\ a_{21} + a_{22}\,k & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + a_{32}\,k & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + a_{42}\,k & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Ако елементите од вториот ред на оваа детерминанта ги помножиме со $-k$ и ги додадеме кон соодветните елементи од првиот ред, а потоа елементите од втората колона ако ги помножиме со $-k$ и ги додадеме кон соодветните елементи од првата колона, добиваме $\Delta_4' = \Delta_4$. На ист начин добиваме $\Delta_3' = \Delta_3$, $\Delta_2' = \Delta_2$.

Ако е, на пр., $a_{11} = 0$, но $a_{12} \neq 0$, можеме k да го избереме така што коефициентот пред $x_1'^2$ во (23), т. е. $2a_{12}k + a_{22}k^2$, да е различен од нула, а дури и со знак каков што сакаме. Спрема тоа:

Ако во равенката (1) *е* $a_{11} = 0$, *но* $a_{12} \neq 0$, *тогаш по трансформацијата на координатите* (22) *коефициентот пред* x_1' , *при подесен избор на* k, *станува од нула различен, и дури со однапред претпишан знак; при тоа детерминантите* Δ_2, Δ_3, Δ_4 *остануваат неизменети.*

Оттука следува дека равенката (1) не мораме да ја трансформираме во нова система, во која коефициентот пред $x_1'^2$ е различен од нула, за да констатираме од каков тип е површината. Можеме да ги пресметаме детерминантите Δ_3 и Δ_4 со коефициентите од првобитната равенка.

Резултатите од т. 1 *се верни,* спрема тоа, *и во случајот кога е* $a_{11} = 0$.

Долната табела ни дава преглед на добиените критерии за распознавање типот на површините од втор ред.

	$\Delta_4 \neq 0$	$\Delta_4 = 0$
$\Delta_3 \neq 0$	Елипсоид (имагинарен и реален) Хиперболоиди (со едно и со две крила)	Конус (имагинарен и реален)
$\Delta_3 = 0$	Параболоид (елиптичен и хиперболичен)	Цилиндрични површини

3. Афини канонични равенки на површините од втор ред. Во т. 1. и 2. покажавме дека равенката на каква да е зададена површина од втор ред може да се сведе, при подесен избор на координатната система, на еден од 17-те видови равенки (16) — (21). Површините кои во однос на какви да е афини координатни системи имаат еднакви равенки се *афино еквивалентни* (§ 49). *Имаме,* спрема тоа, 17 *видови афино различни површини од втор ред.* Равенките (16) — (21) се нивните равенки од најпрост можен облик. Ги наречуваме нивни *афини канонични равенки.*

§ 123. Критерии за распознавање типот на површините од втор ред

1. Подробна класификација на површините за случај $a_{11} \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$. Изразот $\varphi(x_2', x_3')$ од § 122 ќе го разгледаме сега поподробно.

I. Да претпоставиме прво дека $\Delta_1' \neq 0$, $\Delta_2' \neq 0$, т. е. $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$. Трансформацијата (13) можеме да ја избереме, спрема § 113, така да добиеме

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv \frac{\Delta_1'}{\Delta_0'} x_2''^2 + \frac{\Delta_2'}{\Delta_1'} x_3''^2 + \frac{\Delta_3'}{\Delta_2'},$$

каде што ставивме $\Delta_0' = 1$; одавде следува

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv \Delta_2 x_2''^2 + a_{11} \frac{\Delta_3}{\Delta_2} x_3''^2 + a_{11} \frac{\Delta_4}{\Delta_3}.$$

Затоа после трансформацијата (14) равенката на површината (1) гласи

$$f \equiv a_{11} x_1''^2 + \frac{\Delta_2}{a_{11}} x_2''^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} x_3''^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0$$

или, ставувајќи пак $a_{11} = \Delta_1$, $\Delta_0 = 1$,

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1''^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2''^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} x_3''^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.$$

Овој облик на равенката лесно се помни. Спрема знаковите на Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 и вредноста на Δ_4 можеме да заклучиме кој тип површина претставува равенката. Со оглед на тоа имаме:

[1] *Ако е* $\Delta_4 = 0$, *равенката* (1) *претставува конус, и тоа имагинарен или реален — според тоа дали броевите*

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \tag{24}$$

имаат еднакви или нееднакви знаци.

Ако е $\Delta_4 \neq 0$, *а броевите* (24) *имаат еднакви знаци, равенката* (1) *претставува елипсоид, и тоа имагинарен или реален според тоа, дали тие знакови се еднакви или спротивни на знакот од* $\frac{\Delta_3}{\Delta_4}$.

Ако е $\Delta_4 \neq 0$, *а броевите* (24) *немаат еднакви знаци, површината* (1) *е хиперболоид, и тоа едно- или двокрилен, според тоа дали меѓу четирите броеви*

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \frac{\Delta_3}{\Delta_4}$$

парен или непарен број од нив се негативни.

II. Сега ќе претпоставиме дека е $\Delta_2' = 0$, односно $\Delta_3 = 0$. Тогаш, на основа § 113, т. 3, имаме

$$b_{22} \varphi(x_2', x_3') \equiv (b_{22} x_2' + b_{23} x_3' + b_{24})^2 + 2c_{34} x_3' + c_{44},$$

каде што е

$$c_{ik} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{2l} \\ b_{2k} & b_{ik} \end{vmatrix}.$$

Тогаш е

$$(25)\quad \begin{aligned} a_{11} f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}^2 x_1'^2 + \varphi(x_2', x_3') \equiv \\ \equiv a_{11}^2 x_1'^2 + b_{22}^{-1}(b_{22}x_2' + b_{23}x_3' + b_{24})^2 + 2\, c_{34} b_{22}^{-1} x_3' + c_{44} b_{22}^{-1}. \end{aligned}$$

Од идентитетот

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \Delta_3$$

следува, ставувајќи го во него место a_{ik} насекаде изразот $b_{i+1,\, k+1}$, идентитетот

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = b_{22} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & q_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}.$$

Бидејќи детерминантата од десната страна е еднаква на $a_{11}^2 \Delta_4$, тоа е

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = a_{11}^2 b_{22} \Delta_4.$$

Но од (26) добиваме, поради $\Delta_3 = 0$, дека е

$$c_{33} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Заменувајќи во (28) $c_{33} = 0$, добиваме

$$(29)\qquad c_{34}^2 = -a_{11}^2 b_{22} \Delta_4.$$

Аналогно како што се докажува точноста на идентитетот (26) се проверува и верноста на идентотетот

$$(30)\qquad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{24} \\ b_{42} & b_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

А детерминантата од левата страна е c_{44}. Затоа е

$$(31)\qquad c_{44} = a_{11} \cdot D_{124},$$

каде што со D_{124} ја означивме детерминантата од десната страна на (30). Општо ќе ставиме, при $i \neq k$,

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad D_{ik4} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{i4} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{k4} \\ a_{4i} & a_{4k} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{32}$$

1. Да претпоставиме прво дека $c_{34} \neq 0$. Од (29) следува дека $\Delta_4 \neq 0$.

Преминуваме кон нова, x_i''-координатната система, дефинирана со

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_{11}x_1' \\ x_2'' &= b_{22}x_2' + b_{23}x_3' + b_{24} \\ x_3'' &= 2\, c_{34}b_{22}^{-1}x_3' + c_{44}b_{22}^{-1}. \end{aligned} \tag{33}$$

Трансформационата детерминанта е $2a_{11}c_{34} \neq 0$. Равенката на површината гласи сега

$$x_1''^2 + \Delta_2^{-1}\, x_2''^2 + x_3'' = 0,$$

и претставува параболоид, и тоа при $\Delta_2 > 0$ — елиптичен, а при $\Delta_2 < 0$ — хиперболичен. Имаме значи:

[2] *Ако е* $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 \neq 0$, *површината* (1) *е параболоид, и тоа елиптичен или хиперболичен според тоа дали* Δ_2 *е позитивен или негативен.*

2. Останува можноста $c_{34} = 0$, односно, со оглед на (29) и $a_{11}b_{22} \neq 0$, $\Delta_4 = 0$. Во тој случај трансформационите равенки (33) ги променуваме така што третата равенка ја заменуваме со равенката $x_3'' = x_3'$. Равенката на површината тогаш гласи

$$x_1''^2 + b_{22}^{-1}\, x_2''^2 + c_{44}b_{22}^{-1} = 0,$$

или, со оглед на (31),

$$\Delta_2 x_1''^2 + x_2''^2 + a_{11} \cdot D_{124} = 0.$$

Таа претставува една цилиндрична површина. Важи значи:

[3] *Ако е* $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, *површината* (1) *е цилиндер, и тоа*

1. *при* $\Delta_2 < 0$ — *хиперболичен, ако* $D_{124} \neq 0$; *а ако* $D_{124} = 0$, *тој распаднува во еден пар непаралелни реални рамнини;*

2. *при* $\Delta_2 > 0$ — *елиптичен, и тоа реален, распаднат во еден пар непаралелни имагинарни рамнини или имагинарен — според тоа дали е* $a_{11}D_{124} < 0$, $D_{124} = 0$ *или* $a_{11}\, D_{124} > 0$.

2. Обопштение на критериите. Во општата равенка (1) променливите имаат наполно рамноправна улога. Затоа е јасно дека *во критериите* [1], [2], [3] *можеме место* Δ_2, D_{124}, $a_{11}\tilde{D}_{124}$ да ги *избереме по ред и изразите* D_{ik}, D_{ik4}, $a_{ii}D_{ik4}$, *ако е* $a_{ii} \neq 0$, $D_{ik} \neq 0$, а i и k се кои да е два различна броја од броевите 1, 2, 3.

Критериите [1], [2], [3] *можеме*, спрема тоа, *да ги примениме, ако постојат изразите* a_{ii} и D_{ik} $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$, *двата различни од нула, за барем една вредност за* i *и* k.

Да ги разгледаме уште случаите кога не постојат такви изрази, различни од нула.

I. Да претпоставиме прво дека е $a_{ii} = 0$, но $D_{ik} \neq 0$. Нека е, на пр., $a_{11} = 0$, $D_{12} \neq 0$. Оттука следува $a_{12} \neq 0$. Равенката на површината можеме да ја трансформираме, со помошта на трансформацијата (22), на таква равенка што коефициентот пред $x_1'^2$ во новата равенка да биде различен од нула, и дури со произволен знак, а да при тоа детерминантите Δ_2, Δ_3, Δ_4, па и D_{124}, не се изменат. Аналогно важи, ако е $a_{ii} = 0$, $D_{ik} \neq 0$ при $i \neq k$. Со тоа покажавме:

Критериите [1], [2], [3], *во кои за* Δ_1, Δ_2, D_{124} *ставаме* a_{ii}, D_{ik}, D_{ik4}, *важат и тогаш кога е* $a_{ii} = 0$, $D_{ik} \neq 0$ $(i \neq k = 1,\ 2,\ 3)$. *Во тој случај место* a_{ii} *треба да се стави кој да е број различен од нула, на пр.* 1.

За критериите [1], [2] е тоа јасно. А дека важи и за [3], следува оттаму што при $a_{ii} = 0$ е $D_{ik} < 0$; видот на површината во овој случај, спрема тоа, не зависи од a_{ii}.

II. Да претпоставиме сега дека $a_{ii} \neq 0$, $D_{ik} = 0$.

1. Ќе ги разгледаме прво критериите [1] и ќе претпоставиме дека е $a_{11} \neq 0$, $b_{22} = D_{12} = 0$. Тогаш, поради $b_{22}b_{33} - b_{23}{}^2 = a_{11}\Delta_3$ и $\Delta_3 \neq 0$, следува $b_{23} \neq 0$. Ја извршуваме трансформацијата (12). Равенката (1) се трансформира при тоа во една нова равенка (§ 122, т. 1), а при тоа се запазуваат изразите Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, т. е. $\Delta_i = \Delta_i'$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$*). Тоа се проверува лесно директно, ако се земе предвид дека е $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_2$, $\tilde{\Delta}_2 = a_{11}\,\Delta_3$, $\tilde{\Delta}_3 = a_{11}{}^2\,\Delta_4$. По претпоставка е $\Delta_2 = b_{22} = 0$. Ја извршуваме, потоа, трансформацијата

$$\begin{aligned} x_1{}^* &= x_1' \\ x_2{}^* &= \quad x_2' \\ x_3{}^* &= \quad kx_2' + x_3'. \end{aligned}$$

---

*) Δ_i' е детерминанта што се добива ако во детерминантата Δ_i елементот a_{mn} го замениме со соодветниот коефициент во трансформираната равенка на површината.

Аналогно значење имаат симболите $\Delta_i{}^*$.

Како и при трансформацијата (22), така и при оваа трансформација, се запазуваат изразите Δ_3', Δ_4', т. е. важи $\Delta_3 = \Delta_3' = \Delta_3^*$, $\Delta_4 = \Delta_4' = \Delta_4^*$; освен тоа, се запазува и коефициентот пред x_1^{*2}, т. е. a_{11}. А коефициентот a_{22}^* пред x_2^{*2}, т. е. $a_{11}^{-1}(2b_{23}k + b_{33}k^2)$, може да стане — при подесен избор на константата k, и поради $b_{23} \neq 0$ — различен од нула и со произволен знак. Тогаш може да биде различен од нула и со произволен знак и $a_{11}a_{22}^*$. А бидејќи бројот $a_{11}a_{22}^*$ во критериjумот [1] за трансформираната равенка (во координатите x_i^*) ја игра улогата на Δ_2, тоа заклучуваме:

Критериите [1] *се верни и тогаш кога е* $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 = 0$. *Во тој случај во овие критерии треба место* Δ_2 *да се земе кој да е број различен од нула, на пр.* 1.

Тоа го докажавме за $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = D_{12}$. Но јасно е дека важи и за $\Delta_1 = a_{ii}$, $\Delta_2 = D_{ik}$ $(i \neq k = 1, 2, 3)$.

2. Да го разгледаме сега критериумот [2]. Ќе претпоставиме $a_{11} \neq 0$, $D_{12} = b_{22} = 0$. По условот на тој критериј е $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 \neq 0$. Но од $a_{11}\,\Delta_3 = \Delta_2' = b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0$ следува $b_{23} = 0$. Ако, освен $b_{22} = b_{23} = 0$, би било и $b_{33} = 0$, детерминантата од десната страна на (27), еднаква на $a_{11}^2\Delta_4$, би била еднаква на нула, или $\Delta_4 = 0$; а тоа е противно на претпоставката дека $\Delta_4 \neq 0$. Спрема тоа е $b_{33} = D_{13} \neq 0$. Затоа, ако е $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 \neq 0$, постои, при претпоставка $a_{ii} \neq 0$, секогаш еден таков D_{ik} кој е различен од нула.

Но ако сите a_{ii} се нула, пак постои барем еден таков D_{ik} што е различен од нула. Зашто инаку би било $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, и равенката (1) не би била квадратна. Значи:

При условите на критериумот [2] *постои секогаш барем еден* D_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ *што е различен од нула.*

3. Останува да го разгледаме случајот кога $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, а сите D_{ik} се нула. Тогаш еден од коефициентите a_{11}, a_{22}, a_{33} е секако различен од нула. Оти во спротивен случај, ако беше $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, ќе беше поради $D_{ik} = 0$, и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$; равенката (1) не би била тогаш квадратна. Тоа го докажува тврдењето.

Нека е, на пр., $a_{11} \neq 0$. Од $D_{12} = b_{22} = 0$, $D_{13} = b_{33} = 0$, следува тогаш, поради $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, дека $b_{23} = 0$. За изразот $\varphi(x_2', x_3')$ добиваме

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44},$$

а следствено за површината $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ равенката

$$a_{11}f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}^2x_1'^2 + 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44} = 0.$$

Ако барем еден од коефициентите b_{24}, b_{34} не е нула, површината е параболичен цилиндер. А ако е $b_{24} = b_{34} = 0$, тогаш таа распаднува во еден пар паралелни рамнини, имагинарни, реални или совпаднати — според тоа дали $b_{44} = D_{14}$ е позитивно, негативно или нула.

Аналогно важи ако е $a_{ii} \neq 0$.

Спрема тоа го добиваме овој нов критериј:

[4] *Ако е* $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, *а сите* D_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ *се нула, тогаш постои еден* $a_{ii} \neq 0$. *Површината* (1) *е параболичен цилиндер, ако — при* $a_{ii} \neq 0$ *— барем една од двете детерминанти*

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{4i} & a_{4k} \end{vmatrix} \quad (i \neq k = 1, 2, 3) \tag{34}$$

е различна од нула.

А ако двете детерминанти (34) *се нула, тогаш равенката* (1) *претставува еден пар паралелни рамнини, и тоа имагинарни, реални или совпаднати — според тоа дали* D_{i4} *е позитивно, негативно или нула.*

По тој начин можеме да ја распознаеме секоја површина од втор ред, ако за нејзината равенка постои барем една двојка броеви a_{ii}, D_{ik} $(i \neq k = 1, 2, 3)$, од кои барем еден не е нула. Но тоа постои при секоја површина од втор ред. Оти инаку, ако би било $a_{ii} = D_{ik} = 0$ за сите $i, k = 1, 2, 3$, површината не би била од втор ред.

Спрема тоа, *со изучените критерии* [1], [2], [3], [4] *можеме да ја распознаеме која да е површина од втор ред, зададена со каква да е нејзина равенка.*

3. Преглед на критериите за распознавање типот на површините од втор ред. Добиените резултати ги распределуваме во следните табели (табела I — за случај $\Delta_3 \neq 0$, стр. 473, табела II — за случај $\Delta_3 = 0$, стр. 474):

Табела I ($\Delta_3 \neq 0$)

$\Delta_3 \neq 0$					Вид на површината	
$\Delta_4 \neq 0$	Знаците на $\frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3}$ се:	еднакви	исти како знакот на $\frac{\Delta_3}{\Delta_4}$		Елипсоид	имагинарен
			спротивен на знакот од $\frac{\Delta_3}{\Delta_4}$			реален
		нееднакви	Бројот на негативни броеви во низата $\frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \frac{\Delta_3}{\Delta_4}$ е	парен	Хиперболоид	со едно крило
				непарен		со две крила
$\Delta_4 = 0$		еднакви			Конус	имагинарен
		нееднакви				реален

Забелешка. Важат ознаките (види (32)):

$$\Delta_1 \equiv a_{ii}, \quad \Delta_2 \equiv D_{ik} \quad (i \neq k = 1,\ 2,\ 3)$$

Ако еден (на двата) од броевите Δ_1, Δ_2 е нула, го заменуваме со кој да е друг број, на пр. со 1. Секогаш постојат такви два броја Δ_1 и Δ_2 да барем еден од нив не е нула.

Табела II ($\Delta_3 = 0$)

$\Delta_3 = 0$				Тип на површината			Забелешка
$\Delta_4 \neq 0$	$D_{ik} > 0$			Параболоид		елиптичен	Постои секогаш еден $D_{ik} \neq 0$
	$D_{ik} < 0$					хиперболичен	
$\Delta_4 = 0$	Барем еден од од трите D_{ik} $(i \neq k = 1, 2, 3)$ не е нула	$D_{ik} > 0$	$a_{ii} D_{ik4} > 0$	Цилиндер	од елиптичен тип	имагинарен	Во овој случај е $a_{ii} \neq 0$
			$D_{ik4} = 0$			дегенериран во еден пар имагинарни непаралелни рамнини	
			$a_{ii} D_{ik4} < 0$			елиптичен	
		$D_{ik} < 0$	$D_{ik4} \neq 0$		од хипербол. тип	хиперболичен	
			$D_{ik4} = 0$			дегенериран во еден пар реални непаралелни рамнини	
	Сите три D_{ik} $(i \neq k = 1, 2, 3)$ се нула $a_{ii} \neq 0$	$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{4i} & a_4 \end{vmatrix} \neq 0$ за барем еден $k = 1, 2, 3$ различен од i			од параболичен тип	параболичен	Постои барем еден $a_{ii} \neq 0$
		$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{4i} & a_{4k} \end{vmatrix} = 0$ за сите $k = 1, 2, 3$	$D_{i4} > 0$			дегенериран во еден пар имагинарни паралелни рамнини	
			$D_{i4} = 0$			дегенериран во еден пар совпаднати реални рамнини	
			$D_{i4} < 0$			дегенериран во еден пар реални паралелни рамнини	

ПРИМЕРИ

Да се определи каков тип површина претставуваат зададените равенки.

1. $x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0.$
2. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + 1 = 0.$
3. $x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 5 = 0.$
4. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0.$
5. $x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 2x_2 = 0.$
6. $3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$
7. $6x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 2x_3 = 0.$
8. $5x_1^2 + 10x_2^2 + x_3^2 - 14x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0.$
9. $2x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 - 3x_1 - 6x_2 = 0.$
10. $2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 1 = 0.$
11. $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 + 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0.$
12. $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0.$
13. $x_1^2 + 4x_2^2 + 25x_3^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 20x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 1 = 0.$

Решение.

1. $\Delta_1 = a_{22} = 1,\ \Delta_2 = D_{12} = 0,\ \Delta_3 = -1,\ \Delta_4 = -1$. Ставајќи го место Δ_2 бројот 1, ги добиваме за количниците $\Delta_0/\Delta_1,\ \Delta_1/\Delta_2,\ \Delta_2/\Delta_3,\ \Delta_3/\Delta_4$ знаковите $+\ +\ -\ +$. Првите три знака не се еднакви, а има непарен број негативни знаци. Површината е, спрема [1], двокрилен хиперболоид.

Ако би зеле, на пр., $\Delta_1 = a_{33} = -1,\ \Delta_2 = D_{32} = -2$, ги добиваме за горните количници знаковите $-\ +\ +\ +$. Од нив пак следува дека површината е двокрилен хиперболоид, како што треба и да биде.

2. Добиваме $\Delta_1 = a_{11} = 0,\ \Delta_2 = D_{12} = -1/4,\ \Delta_3 = \Delta_4 = 1\ 4$. Ставаме $\Delta_1 = 1$. Знаковите на броевите $\Delta_0/\Delta_1,\ \Delta_1/\Delta_2,\ \Delta_2/\Delta_3,\ \Delta_3/\Delta_4$ се $+\ -\ -\ +$. Првите три знака не се еднакви, а бројот на негативните знаци е парен. Површината е, спрема [1], еднокрилен хиперболоид.

3. $\Delta_1 = a_{11} = 1,\ \Delta_2 = D_{12} = 2,\ \Delta_3 = 2,\ \Delta_4 = -10$. Знаковите на $\Delta_0/\Delta_1,\ \Delta_1/\Delta_2,\ \Delta_2/\Delta_3,\ \Delta_3/\Delta_4$ се $+\ +\ +\ -$. Површината е, спрема [1], реален елипсоид.

4. $\Delta_1 = a_{11} = 2,\ \ \Delta_2 = D_{12} = 3,\ \ \Delta_3 = 1,\ \ \Delta_4 = 0$. Знаковите на $\Delta_0/\Delta_1,\ \Delta_1/\Delta_2,\ \Delta_2/\Delta_3$ се еднакви, а $\Delta_4 = 0$. Површината е, спрема [1], имагинарен конус.

5. $\Delta_1 = a_{11} = 1,\ \ \Delta_2 = D_{12} = 4,\ \ \Delta_3 = -9,\ \ \Delta_4 = 0$. Знаковите на односите $\Delta_0/\Delta_1,\ \Delta_1/\Delta_2,\ \Delta_2\ \Delta_3$ се $+\ +\ -$. Површината е, спрема [1], реален конус.

6. $D_{12} = 3,\ \ \Delta_3 = 0,\ \ \Delta_4 = -75 \neq 0$. Површината е, спрема [2], елиптичен параболоид.

7. $D_{12} = -9,\ \Delta_3 = 0,\ \Delta_4 = 9 \neq 0$. Површината е, спрема [2], хиперболичен параболоид.

8. $D_{12} = 1 > 0,\ \ \Delta_3 = \Delta_4 = 0,\ \ D_{124} = 0$. Равенката претставува, спрема [3], еден пар имагинарни непаралелни рамнини.

9. $D_{12} = -1/4 < 0,\ \ \Delta_3 = \Delta_4 = D_{124} = 0$. Равенката претставува еден пар непаралелни реални рамнини.

10. $D_{12} = 4 > 0$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, $D_{124} = -4$, $a_{11} . D_{124} = 2 . (-4) = -8 < 0$. Површината е, спрема [3], **елиптичен цилиндер.**

11. $a_{11} = 1 \neq 0$, $D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3/2 \end{vmatrix} = 1 . 2 \neq 0$. Површината е, спрема [4], **параболичен цилиндер.**

12. $a_{21} = 1 \neq 0$, $D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = 0, \quad D_{14} = a_{11} a_{44} - a_{14}^2 = -1 < 0.$$

Равенката претставува, спрема [4], **еден пар паралелни реални рамнини.**

13. $a_{11} = 1 \neq 0$, $D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = 0, \quad D_{14} = 0.$$

Равенката претставува, спрема [4], **еден пар совпаднати рамнини.**

14. Да се определи од каков тип е површината

$$2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{44} = 0 \quad (a_{12}a_{13}a_{23}a_{44} \neq 0).$$

Решение. Добиваме $\Delta_2 = D_{12} = -a_{12}^2$, $\Delta_3 = 2a_{12}a_{13}a_{23}$, $\Delta_4 = 2a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}$. Ставајќи $\Delta_1 = 1$, имаме

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = 1, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\frac{1}{a_{12}^2} < 0, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = -\frac{1}{2}\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{1}{a_{44}}.$$

Помеѓу овие четири броеви непарен број од нив се со негативен знак, ако последните два се со ист знак, т. е. ако $(\Delta_2/\Delta_3) \cdot (\Delta_3/\Delta_4) > 0$, или

$$a_{12}a_{13}a_{23}a_{44} < 0.$$

Површината е, спрема тоа, *хиперболоид, и тоа дво- или еднокрилен — според тоа дали производот* $a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}$ *е негативен или позитивен.*

ЗАДАЧИ

Да се испита каков вид површина претставуваат зададените равенки во зад. 1—12.

1. $x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 8x_2 = 0$.
2. $7x_2^2 + 8x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 5x_3 - 3 = 0$.
3. $x_1^2 - 9x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0$.
4. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 5x_2 = 0$.
5. $16x_1^2 + 25x_2^2 + 22x_3^2 - 4x_1x_2 + 16x_1x_3 - 20x_2x_3 - 26x_2 - 40x_3 - 44x_1 + 44 = 0$.
6. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$.
7. $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$.
8. $-2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 16x_1 - 10x_2 + 10x_3 - 18 = 0$.

9. $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 12x_2x_3 + 11x_1 + 21x_2 - 31x_3 + 25 = 0.$
10. $a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}/2 = 0.$
11. $x_1^2 + \lambda x_2^2 + a_3^2 - \lambda x_1x_3 = 0.$
12. $x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 + (1+\lambda)\, x_1x_2 + (1+\mu)\, x_1x_3 + (1+\lambda\mu)\, x_2x_3 = 0.$

Метрични особини на површините од втор ред

Во следните §§ ќе ги разгледаме некои метрични особини на површините од втор ред. Метричните релации се изразуваат аналитички наједноставно во правоагли координати. Затоа во наредните иследувања ќе ги користиме насекаде само правоаглите картезични координати.

§ 124. Главни правци

1. Карактеристична равенка. Во § 120 покажавме дека за секоја површина од втор ред постои една тројка заемно конјугирани правци. Сега ќе испитаме дали постојат и такви тројки заемно конјугирани правци кои се и заемно нормални. Секој правец, конјугиран со нему нормалниот правец, ќе го викаме главен правец.

Во однос на една правоагла картезична система нека ни биде зададена равенката (1) со реални коефициенти. Дијаметралната рамнина, конјугирана со правецот на векторот $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, е

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3)\, x_1 + (a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3)\, x_2 + \\ &+(a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + a_{33}a_3)\, x_3 + a_{41}a_1 + a_{42}a_2 + a_{43}a_3 = 0;\end{aligned}$$

Коефициентите пред x_1, x_2, x_3 се координати на еден вектор $\mathbf{n}$ што е нормален на рамнината. Ако $\mathbf{a}$ има главен правец, треба $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ да се колинеарни, и обратно. Спрема тоа, $\mathbf{a}$ има главен правец тогаш и само тогаш кога неговите координати се пропорционални со координатите на $\mathbf{n}$, т. е. кога важи

$$\begin{aligned}a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 &= \lambda a_1\\ a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3 &= \lambda a_2\\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + a_{33}a_3 &= \lambda a_3\end{aligned} \tag{1}$$

или

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\, a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 &= 0\\ a_{21}a_1 + (a_{22}-\lambda)\, a_2 + a_{23}a_3 &= 0\\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + (a_{33}-\lambda)\, a_3 &= 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Потребно и доволно за тоа, оваа система да има нетривијални решенија по a_1, a_2, a_3, е да важи.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Тоа е една равенка по λ од трета степен. Ја наречуваме *карактеристична равенка* на површината.

Нека λ_1 биде еден корен на равенката (3). Ако замениме во (1) $\lambda = \lambda_1$, системата (1) ќе има нетривијални решенија за $a_1 : a_2 : a_3$. Ако е a_1', a_2', a_3' едно такво решение, тогаш векторот $\boldsymbol{a}' = \{a_1', a_2', a_3'\}$ има главен правец. Кажуваме дека на коренот λ_1 од карактеристичната равенка *му припаѓа* главниот правец $\boldsymbol{a}'$.

2. Егзистенција и определување на главна тројка. Равенката (3) е кубна, а има реални коефициенти. Затоа таа има, како што не учи алгебрата, барем еден реален корен. Нека биде тоа λ_1. Равенките (1), во кои λ е заменет со λ_1, ни определуваат (барем) еден главен правец $\boldsymbol{a}' = \{a_1', a_2', a_3'\}$. Овој правец го избираме за правец на x_3'-оската, а два кои било правци што се нормални на него, а и меѓу себе, за правци на x_1'- и x_2'-оската на една нова координатна система $O'x_1'x_2'x_3'$. Бидејќи правците на x_1'- и x_3'-оската како и правците на x_2'- и x_3'-оската се конјугирани, тоа во новата система равенката на површината гласи

$$(4)\quad f \equiv a_{11}'x_1'^2 + a_{22}'x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{12}'x_1'x_2' + 2a_{14}'x_1' + 2a_{24}'x_2' + \\ + 2a_{34}x_3' + a_{44}' = 0.$$

Равенката

$$\varphi(x_1', x_2') \equiv a_{11}'x_1'^2 + a_{22}'x_2'^2 + 2a_{12}'x_1'x_2' + 2a_{14}x_1' + 2a_{24}x_2' + a_{44}' = 0$$

претставува во $O'x_1'x_2'$-рамнината една крива од втор ред. За неа постои (§ 114) еден пар главни правци. Нив ги избираме за правци на оските во една нова система $O'x_1''x_2''$. Од системата $O'x_1'x_2'$ преминуваме во системата $O'x_1''x_2''$, бидејќи двете се правоагли и со ист координатен почеток, со една трансформација на координатите од вид

$$x_1' = x_1''\cos\alpha - x_2''\sin\alpha$$
$$x_2' = x_1''\sin\alpha + x_2''\cos\alpha.$$

Во системата $O'x_1''x_2''$ равенката на кривата $\varphi = 0$ има облик

$$\varphi \equiv a_{11}''x_1''^2 + a_{22}''x_2''^2 + 2a_{14}''x_1'' + 2a_{24}''x_2'' + a_{44}'' = 0.$$

Во просторот ја избираме сега координатната система $O'x_1''x_2''x_3''$, дефинирана со

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1''\cos\alpha - x_2''\sin\alpha \\ x_2' &= x_1''\sin\alpha + x_2''\cos\alpha \\ x_3' &= x_3''. \end{aligned}$$

Равенката (4), која може да се запише во вид $\varphi(x_1', x_3') + a_{33}'x_3^{2\prime} + 2a_{34}'x_3' = 0$, во новата система гласи

$$a_{11}''x_1''^2 + a_{22}''x_2''^2 + a_{33}'x_3''^2 + 2a_{14}''x_1'' + 2a_{24}''x_2'' + \\ 2a_{34}'x_3'' + a_{44}'' = 0.$$

Коефициентите пред $x_1''x_2''$, $x_1''x_3''$ и $x_2''x_3''$ се нула. Затоа координатните оски имаат (§ 121) заемно конјугирани правци. Но системата е правоагла. Правците на нејзините оски се, спрема тоа, главни правци на површината. Равенката на зададената површина беше произволна; затоа *при секоја површина од втор ред постои барем една тројка главни правци.*

3. Колку главни тројки постојат. Покажавме дека за секоја површина од втор ред постои барем една главна тројка. Затоа равенката на секоја површина од втор ред може да се доведе во облик

$$(5) \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0,$$

каде што x_1, x_2, x_3 се правоагли картезични координати. Треба само правците на главната тројка да се изберат за правци на оските на координатната система. Сега се прашуваме, колку главни тројки постојат при одделни површини.

Карактеристичната равенка за површината (5) гласи

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) = 0.$$

Нејзините корени се

$$(6) \qquad \lambda_1 = a_{11}, \qquad \lambda_2 = a_{22}, \qquad \lambda_3 = a_{33}.$$

Сите главни правци се определени со овие корени! Да видиме кои се. Системата (2) добива, во овој случај, облик

$$(a_{11}-\lambda)\,a_1 = 0, \quad (a_{22}-\lambda)\,a_2 = 0, \quad (a_{33}-\lambda)\,a_3 = 0.$$

Првата од овие равенки може да се запише во вид

$$\{a_{11}-\lambda, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3\} = 0.$$

Оваа равенка покажува дека векторот $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, кој има главен правец, треба да биде нормален на векторот $(a_{11}-\lambda) \cdot \boldsymbol{e}_1$. Аналогно следува од втората и третата равенка дека $\boldsymbol{a}$ треба да е нормален на $(a_{22}-\lambda)\,\boldsymbol{e}_2$ и $(a_{33}-\lambda)\,\boldsymbol{e}_3$.

Спрема тоа, секој главен правец на површината (1), што му одговара на коренот λ_1 од карактеристичната равенка, треба истовремено да биде нормален на векторите

$$(7) \qquad (a_{11}-\lambda_1)\,\boldsymbol{e}_1, \quad (a_{22}-\lambda_1)\,\boldsymbol{e}_2, \quad (a_{33}-\lambda_1)\,\boldsymbol{e}_3;$$

а и секој правец, нормален на овие три вектори е еден главен правец на површината.

1. Да претпоставиме прво дека сите корени (6) се различни. Тогаш главниот правец кој му одговара на коренот $\lambda_1 = a_{11}$ треба да биде нормален на $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$; тој има, значи, правец на $\boldsymbol{e}_1$. Аналогно следува за другите два корени.

Ако корените на карактеристичната равенка се различни, постои за површината една и само една главна тројка правци.

2. Нека е сега $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$. тогаш е $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$. Главниот правец што му припаѓа на коренот λ_1, треба — бидејќи $a_{11} - \lambda_1 = a_{22} - \lambda_1 = 0$ — да биде нормален само на $\boldsymbol{e}_3$. Значи, сите правци од x_1x_2-рамнината се главни. Главниот правец што му одговара на λ_3 е правец на $\boldsymbol{e}_3$. Во овој случај има безброј главни тројки. Која да е главна тројка се добива, ако во x_1x_2-рамнината се земат кои да е два нормални правци и правецот на x_3-оската.

Ако два корена на карактеристичната равенка се еднакви, тогаш на простиот корен му одговара еден главен правец $\boldsymbol{p}$*, а на двојниот корен безброј главни правци — сите правци што се нормални на* $\boldsymbol{p}$*.*

3. Најпосле нека е $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Тогаш е $a_{11} = a_{22} = a_{33}$. Бидејќи е $a_{11} - \lambda_1 = a_{22} - \lambda_1 = a_{33} - \lambda_1 = 0$, тоа сите вектори (7) се вектори нула. Со нив е нормален секој вектор. Затоа, во овој случај, секој правец е главен правец, а секоја заемно нормална тројка правци е една главна тројка правци. Површината е топка, бидејќи е $a_{11} = a_{22} = a_{32}$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$.

Ако карактеристичната равенка има троен корен, тогаш сите правци во просторот се главни правци за површината.

Од горното следува и оваа теорема:

Главните правци што им припаѓаат на два различни корени на карактеристичната равенка се нормални.

ЗАДАЧИ

Определи ги главните правци на површините чиј што равенки се зададени во зад. 1—4 (координатите x, y се правоагли Декартови).

1. $9x^2 + 29y^2 + 21z^2 - 18xy + 16xz - 32yz - 45 = 0.$
2. $x^2 + y^2 - z^2 - 6xy - 2xz - 2yz + x + y - 2z + 3 = 0.$
3. $26x^2 + 18y^2 - 2z^2 - 37xy - 12xz + 7yz = 0.$
4. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 3xy - 2xz - yz + 5x - 4y - z = 0.$

§ 125. Метрична класификација на површините од втор ред

Сега ќе испитаме со какви најпрости равенки во однос на правоагли картезични системи можат да бидат претставени површините од втор ред.

Во § 124 покажавме дека постои барем една таква правоагла картезична координатна система да равенката на која да е површина од втор ред го добива видот (5).

I. Да претпоставиме прво да е $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$.

Равенката (5) ја пишуваме во облик

$$a_{11}(x_1 + a_{14}/a_{11})^2 + a_{22}(x_2 + a_{24}/a_{11})^2 + a_{33}(x_3 + a_{34}/a_{11})^2 + a_{44}' = 0,$$

каде што е $a_{44}' = a_{44} - a_{11}^{-1}(a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)$. Потоа извршуваме паралелно поместување на координатната система, дефинирано со

$$x = x_1 + a_{14}/a_{11}, \qquad y = x_2 + a_{24}/a_{11}, \qquad z = x_3 + a_{34}/a_{11}.$$

Равенката на површината гласи сега

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}' = 0.$$

Оваа равенка може да се сведе, ако евентуално уште ги преименуваме оските, во една од следните равенки и претставува:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + 1 = 0.$ *Имагинарен елипсоид*
$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$ *Реален елипсоид*
(8) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 - 1 = 0$ *Еднокрилен хиперболоид*
$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 + 1 = 0$ *Двокрилен хиперболоид*
$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$ *Имагинарен конус*
$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ *Реален конус.*

II. Нека е сега $a_{11}a_{22} \neq 0$, $a_{33} = 0$.

Равенката на површината ја пишуваме во облик

$$a_{11}(x_1 + a_{14}/a_{11})^2 + a_{22}(x_2 + a_{24}/a_{11})^2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}' = 0,$$

каде што е $a_{44}' = a_{44} - (a_{14}^2 + a_{24}^2)/a_{11}$.

1. Ако е $a_{34} \neq 0$, ставуваме

$$x = x_1 + a_{14}/a_{11}, \qquad y = x_2 + a_{24}/a_{11}, \qquad z = x_3 + a_{44}'/2a_{34}.$$

Во xyz-системата равенката на површината гласи

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0.$$

Според знаковите на коефициентите, оваа равенка може да се доведе, ако евентуално уште ги преименуваме оските, на еден од следните два вида и претставува:

(9)	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$	*Елиптичен параболоид*
	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$	*Хиперболичен параболоид,*

2. А ако е $a_{34} = 0$, ја извршуваме трансформацијата

$$x = x_1 + a_{14}/a_{11}, \quad y = x_2 + a_{24}/a_{11}, \quad z = x_3.$$

Равенката на површината гласи сега

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44}' = 0.$$

А оваа равенка може да се доведе, преименувајќи ги евентуално оските, на еден од долните видови и претставува:

	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1 = 0$	*Имагинарен цилиндер*
	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$	*Елиптичен цилиндер*
(10)	$x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$	*Хиперболичен цилиндер*
	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$	*Пар непаралелни имагинарни рамнини*
	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$	*Пар непаралелни реални рамнини.*

III. Да претпоставиме, на крај, дека $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = a_{33} = 0$.

Равенката на површината ја запишуваме во вид

$$a_{11}(x_1 + a_{14}/a_{11})^2 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}' = 0,$$

каде што е $a_{44}' = a_{44} - a_{14}^2/a_{11}$.

1. Ако барем еден од коефициентите a_{24}, a_{34} не е нула, ја извршуваме трансформацијата на координатите

$$x = 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}', \; y = x_1 + a_{14}/a_{11}, \; z = -a_{34}x_2 + a_{24}x_3.$$

Детерминантата на трансформацијата е $2(a_{24}^2 + a_{34}^2)$, значи различна од нула. За равенката на површината добиваме

$$a_{11}y^2 + x = 0,$$

која може да се запише и во следниот облик и претставува:

(11) $y^2 = 2px$ *Параболичен цилиндер.*

2. А, ако е $a_{24} = a_{34} = 0$, ја извршуваме трансформацијата

$$x = x_1 + a_{14}/a_{11}, \quad y = x_2, \quad z = x_3.$$

Равенката на површината е сега

$$a_{11}x^2 + a_{44}' = 0.$$

Таа може да се запише во еден од следните видови и претставува:

	$x^2 + a^2 = 0 \quad (a \neq 0)$	*Пар йаралелни имаїинарни рамнини*
(12)	$x^2 - a^2 = 0 \quad (a \neq 0)$	*Пар йаралелни реални рамнини*
	$x^2 = 0$	*Пар реални соѓйаднаѓи рамнини.*

Метричната равенка, т. е. равенката во метричните (правоаглите) координати, на која да е површина ов втор ред може да се доведе на еден од 17-те видови (8) — (12). Тоа се *мейрични канонични раѓенки* на површините од втор ред.

Сите канонични равенки освен последната равенка од (12) зависат од еден, два или три расположиви параметри a, b, c одн. p. За секоја вредност на овие параметри добиваме по една површина од втор ред. *Секоја од йрѓийе* 16 *канонични раѓенки* (8) — (12) *йреийсйаѓуѓа, йри разни ѓредносйи на йарамейрийе, безброј мноїу мейрично различни йоѓршини од ѓйор ред.*

Но, сите бескрајно многу површини, определени со една иста од горните канонични равенки, се афино еквивалентни, бидејќи нивните равенки можат да се сведат на една сама афина равенка. На пр. секој елипсоид може да се претстави со равенката $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, ако x_1, x_2, x_3 се подесно избрани афини координати.

Ако некои од коефициентите во каноничните метрични равенки се еднакви, добиваме некои специјални типови површини. Ако, на пр., во каноничната равенка на елипсоидот е $a = b$, добиваме

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

А тоа е *ройационен* елипсоид. Истотака, ако во равенката на хиперболоидите е $a = b$, добиваме

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

Тоа е *ройационен* хиперболоид со едно одн. со две крила. Ако во горната равенка на конусот ставиме $a = b$, добиваме

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Тоа е *кружен* или *ротационен* конус. А ако во равенката на елиптичниот цилиндер ставиме $a=b$, добиваме

$$x^2+y^2=a^2.$$

Тоа е *кружен* цилиндер.

Во идниот § ќе покажеме дека карактеристичната равенка за една иста површина има исти корени, без оглед на тоа во која правоагла система е зададена нејзината равенка. Затоа следува од горното, земајќи предвид дека корените на карактеристичната равенка се коефициенти пред квадратните членови во каноничната равенка на површината (Види на пр. § 124, т. 3), дека:

Ако карактеристичната равенка на една површина од втор ред има два еднакви корени, тогаш површината е ротациона.

Сите три коефициенти пред x^2, y^2, z^2 во каноничните равенки можат да бидат еднакви само при елипсоидите и имагинарниот конус. Добиваме *имагинарна топка*, *реална топка* и еден специјален имагинарен конус, наречен *апсолутен конус.*

Ако карактеристичната равенка на една површина има троен корен, тогаш површината е топка (имагинарна или реална) или апсолутен конус.

§ 126. Ортогонални инваријанти

1. Три ортогонални инваријанти на равенката на површината од втор ред. Како при кривите од втор ред успешно ги користевме инваријантите, можеме да го сториме тоа и при површините од втор ред.

Ортогоналната инваријанта на равенката на површината од втор ред ја дефинираме на аналоген начин како инваријантите на равенките од кривите од втор ред, имено како таква функција од коефициентите на равенката што си ја запазува својата вредност при секоја ортогонална трансформација на променливите на равенката.

Да најдеме некои инваријанти за равенката на реалната површина

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0,$$

дадена во однос на некоја правоагла картезична система.

Ја избираме топката

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3)^2 - 1 = 0.$$

Потоа извршуваме една произволна ортогонална трансформација над x_1, x_2, x_3, толкувајќи ја геометриски како промена на координатната система. По извршената трансформација површините $f = 0$ и $\varphi = 0$ добиваат равенки

$$f'(x_1', x_2', x_3') \equiv a_{11}'x_1'^2 + a_{22}'x_2'^2 + a_{33}'x_3'^2 + 2a_{12}'x_1'x_2' + 2a_{13}'x_1'x_3' +$$
$$+ 2a_{23}'x_2'x_3' + 2a_{14}'x_1' + 2a_{24}'x_2' + 2a_{34}'x_3' + a_{44}' = 0,$$

$$\varphi'(x_1', x_2', x_3') \equiv (x_1' - x_1^{0\prime})^2 + (x_2' - x_2^{0\prime})^2 + (x_3' - x_3^{0\prime})^2 - 1 = 0.$$

Освен тоа ја посматраме и равенката

$$f(x_1, x_2, x_3) - \lambda\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{13}$$

во која λ е произволен реален параметар. За секоја вредност од λ равенката претставува по една површина од втор ред. Целокупноста на сите овие површини, ако λ варира од $-\infty$ до $+\infty$, ја наречуваме *снoп* површини од втор ред. Во новата система снопот има равенка

$$f'(x_1', x_2', x_3') - \lambda\varphi'(x_1', x_2', x_3') = 0. \tag{14}$$

За една иста вредност од λ равенките (13) и (14) претставуваат иста површина, но во разни координатни системи. Равенките претставуваат параболоид или цилиндер, ако е (§ 123)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' - \lambda & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Бидејќи равенките (13) и (14) за исти вредности од λ претставуваат исти површини, тоа равенките (15) имаат исти корени по λ. Равенките (15) можеме да ги запишеме во вид

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(D_{12} + D_{13} + D_{23}) + \Delta_3 = 0$$
$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11}' + a_{22}' + a_{33}') - \lambda(D_{12}' + D_{13}' + D_{23}') + \Delta_3' = 0.$$

Бидејќи корените им се еднакви, коефициентите им се пропорционални, од каде следува

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{11}' + a_{22}' + a_{33}'$$
$$D_{12} + D_{13} + D_{23} = D_{12}' + D_{13}' + D_{23}'$$
$$\Delta_3 = \Delta_3'.$$

Овие коефициенти се, значи, инваријантни наспрам ортогоналните трансформации. Тоа се три инваријанти. Ќе ги означуваме со

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \Delta_3,$$

и ќе ги наречуваме *прва, втора* и *трета инваријанта.*

2. Четврта инваријанта. За да добиеме уште една инваријанта, го запишуваме условот за тоа, равенките (13) и (14) да претставуваат конус или цилиндер. На наполно аналоген начин како што во § 116, т. 3 ја определивме третата инваријанта за равенката на кривите од втор ред, добиваме за равенката (1) на површините од втор ред дека изразот Δ_4 е една ортогонална инваријанта. Ќе ја бележиме со $I_4 = \Delta_4$ и ќе ја викаме *четврта инваријанта* на равенката на површините од втор ред.

3. Инваријантност на корените на карактеристичната равенка. Равенката (15) ја сретнавме веќе во § 124. Тоа е карактеристичната равенката на површината (1). За нејзините коефициенти утврдивме, во т. 1, дека ќе инваријанти во однос на ортогоналните трансформации. Ако, спрема тоа, ги пресметаме корените на карактеристичната равенка за површината, дадена во една координатна система, тогаш ги имаме со тоа и корените на карактеристичната равенка за истата површина, зададена во која да е друга правоагла координатна система.

4. Пресметување на коефициентите во каноничните равенки на површините со помошта на инваријантите. Површината нека е зададена со равенката (1).

I. Ако равенката претставува елипсоид, хиперболоид или конус, можеме да ја доведеме до каноничниот облик

$$a_{11}'x^2 + a_{22}'y^2 + a_{33}'z^2 + a_{44}' = 0 \qquad (a_{11}' \cdot a_{22}' \cdot a_{33}' \neq 0).$$

Корените на карактеристичната равенка за оваа равенка се $\lambda_1 = a_{11}'$, $\lambda_2 = a_{22}'$, $\lambda_3 = a_{33}'$, што проверуваме наеднаш. Тогаш имаме

$$I_3 = a_{11}'a_{22}'a_{33}' \neq 0, \quad I_4 = a_{11}'a_{22}'a_{33}'a_{44}' = I_3 a_{44}',$$

од каде

$$a_{44}' = I_4/I_3.$$

Каноничната равенка можеме, значи, да ја запишеме во вид

$$(16)\qquad \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+I_4/I_3=0.$$

Бидејќи λ_1, λ_2, λ_3, I_3, I_4 се инваријанти, можеме да ги пресметаме и од равенката (1).

Бидејќи една површина од втор ред е елипсоид, хиперболоид или конус тогаш и само тогаш кога е $I_3\neq0$, тоа важи:

Ако при равенката на една површина од втор ред е $I_3\neq0$, тогаш нејзината канонична равенка има вид (16), каде што λ_1, λ_2, λ_3 се корени на нејзината карактеристична равенка.

II. Ако равенката (1) претставува параболоид, тогаш таа може да се сведе на каноничниот облик

$$(17)\qquad a_{11}'x^2+a_{22}'y^2+2a_{34}'z=0\quad (a_{11}'\cdot a_{22}'\cdot a_{34}'\neq0).$$

За оваа равенка имаме

$$I_2=a_{11}'a_{22}'\neq0,\quad I_4=-a_{11}'a_{22}'a_{34}'^2=-I_2a_{34}'^2\neq0,$$

од каде

$$a_{34}'=\pm\sqrt{-I_4/I_2}$$

За корените на карактеристичната равенка за (17) добиваме $\lambda_1=a_{11}'$, $\lambda_2=a_{22}'$, $\lambda_3=0$. Каноничната равенка на површината гласи, значи,

$$(18)\qquad \lambda_1x^2+\lambda_2y^2\pm2\sqrt{-I_4/I_2}\,z=0.$$

Бидејќи една површина од втор ред е параболоид, ако е $I_3=0$, $I_4\neq0$, тоа имаме:

Ако при една равенка на површината од втор ред е $I_3=0$, $I_4\neq0$, тогаш каноничната равенка на површината има вид (18), каде што λ_1, λ_2 се оние корени на нејзината карактеристична равенка што се различни од нула.

5. Уште еден критериј за распознавање на површините од втор ред. Од претходната точка следува:

I. Ако е $I_3\neq0$, $I_4\neq0$, равенката на површината претставува елипсоид или хиперболоид.

II. Ако е $I_3\neq0$, $I_4=0$, површината е конус.

III. Ако е $I_3=0$, $I_4\neq0$, површината е параболоид.

Да видиме сега каква површина претставува една равенка, ако за неа е $I_2 \neq 0$, $I_3 = I_4 = 0$. Земајќи ги за правци на координатните оски правците на главната тројка, равенката добива вид

$$(19) \quad a_{11}'x^2 + a_{22}'y^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{14}'x + 2a_{24}'y + 2a_{34}'z + a_{34}' = 0.$$

За неа добиваме $I_3 = a_{11}'a_{22}'a_{33}' = 0$. Барем еден од коефициентите a_{11}', a_{22}', a_{33}' е нула. Нека е тоа, на пр., a_{33}' Тогаш е $I_2 = a_{11}'a_{22}' \neq 0$. Значи $a_{11}' \neq 0$, $a_{22}' \neq 0$. Од $I_4 = -a_{11}'a_{22}'a_{34}'^2 = -I_2a_{34}'^2$ следува, поради $I_4 = 0$, $I_2 \neq 0$, дека $a_{34}' = 0$. Затоа (§ 125, II, 2) каноничната равенка гласи

$$a_{11}'x^2 + a_{22}'y^2 + a_{44}'' = 0.$$

Затоа:

IV. *Ако е* $I_2 \neq 0$, $I_3 = I_4 = 0$, *равенката претставува цилиндер (имагинарен, елиптичен или хиперболичен) или цилиндер дегенериран во еден пар непаралелни реални или имагинарни рамнини.*

Нека е сега $I_1 \neq 0$, $I_2 = I_3 = 0$. Равенката на површината си ја мислиме сведена на облик (19). Имаме $I_3 = a_{11}'a_{22}'a_{33}' = 0$. Барем еден од коефициентите a_{11}', a_{22}', a_{33}' треба да е нула. Нека е, на пр., $a_{33}' = 0$. Тогаш имаме $I_2 = a_{11}'a_{22}' = 0$. Барем еден од коефициентите a_{11}', a_{22}' е нула. Нека е $a_{22}' = 0$. Сега имаме $I_1 = a_{11}'$. Поради претпоставката $I_1 \neq 0$ е $a_{11}' \neq 0$. Равенката претставува, значи, (§ 125, III) еден цилиндер од параболичен тип. Значи важи:

V. *Ако е* $I_1 \neq 0$, $I_2 = I_3 = 0$, *површината е параболичен цилиндер, пар паралелни реални или имагинарни рамнини или пар совпаднати реални рамнини.*

Ако би било $I_1 = I_2 = I_3 = 0$, равенката (1) не би била квадратна.

Ја имаме, спрема тоа, следната табела:

I_1	I_2	I_3	I_4	Вид на површината
		$\neq 0$	$\neq 0$	Елипсоид или хиперболоид
		$\neq 0$	0	Конус
		0	$\neq 0$	Параболоид.
	$\neq 0$	0	0	Цилиндер од елиптичен или хиперболичен тип
$\neq 0$	0	0		Цилиндер од параболичен тип

6. Метрични инваријанти на површините од втор ред. Инваријантите I_1, I_2, I_3, I_4 на равенката (1) не се инваријанти и на површините од втор ред. Овие изрази остануваат, навистина, неизменети при секоја ортогонална трансформација над променливите на равенката, но тие се изменуваат ако избираме разни равенки на истата површина во истата координатна система. Ако, имено, сите коефициенти на равенката ги помножиме со еден фактор $\rho \neq 0$, тогаш равенката претставува иста површина, но изразите I_i прејдуваат во изразите $\rho^i I_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Но ако ги посматраме изразите

$$I_1, \quad I_2^{1/2}, \quad I_3^{1/3}, \quad I_4^{1/4},$$

констатираме дека апсолутните вредности од нивните односи не зависат од множителот ρ. Една зададена површина ги определува, значи, наполно апсолутните вредности на тие односи. Тоа се *метрични инваријанти* на површините од втор ред. Секоја од нив окарактерисува една метрична особина од зададената површина, бидејќи таа инваријанта е заедничка на сите површини што со зададената се метрично еквивалентни, т. е. конгруентни со неа.

Да го илустрираме тоа со еден пример! Ќе ја определиме метричната инваријанта, чија вредност е еднаква на запремината на елипсоидот. Равенката на елипсоидот нека е

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Тогаш имаме

$$I_3 = 1/a^2b^2c^2, \quad I_4 = -\ 1/a^2b^2c^2.$$

Оттука е $I_4^3 : I_3^4 = -a^2b^2c^2$. Бидејќи е $I_4^3 : I_3^4 = (I_4^{1/4} : I_3^{1/3})^{12}$, тоа $I_4^3 : I_3^4$ е една метрична инваријанта на површините од втор ред. Волуменот на елипсоидот е $V = 4\pi abc/3$. Затоа, ако елипсоидот е зададен во каква да е правоагла система, имаме

$$V = \frac{4\pi}{3}\sqrt{-\frac{I_4^3}{I_3^4}}\,.$$

ЗАДАЧИ

Да се напишат каноничните равенки на зададените површини во зад. 1—5; (координатите x, y, z се правоагли Декартови).

1. $(x + 2y + 2z)^2 + (y - 2x)^2 + (2x + 2y - 5z)^2 = 10.$
2. $3x^2 + 3y^2 - z^2 - 2xy - 8 = 0.$
3. $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$
4. $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 4z^2 - 12x + 12y = 0.$
5. $2x^2 + 26y^2 + 11z^2 + 20xy + 10xz + 38yz - 21x - 21y + 3 = 0.$

6. Ако равенката од втора степен претставува еден пар рамнини, тогаш тие зафаќаат агол φ, определен со $\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{-I_2/I_1^2}$. Доказ! Услов за нормалност!

7. Да се покаже дека за кружниот цилиндер важи $I_1^2/I_2 = 4$.

8. Да се докаже дека за аголот φ помеѓу оската и генератрисите на кружниот конус важи $\operatorname{tg}2\varphi = 2\sqrt{2I_3/(I_3 - I_1I_2)}$. Услов да осниот пресек биде еден пар нормални прави!

9. Покажи дека формулата од зад. 9 важи и за асимптотскиот конус на ротационите хиперболоиди.

10. При кои кружни конуси важи $I_1^2/I_2 = -1$, а при кои $I_2^3/I_3^2 = -1$?

ЛИТЕРАТУРА

I

1. Бюшгенс, С. С., *Аналитическая геометрия. Часть* I, II. Москва—Ленинград, 1946.

2. Гюнтер, Н. М., и Кузьмин, Р. О., *Сборник задач по высшей математике*, Том I. Москва—Ленинград, 1945.

3. Делоне, Б. Н., и Райков, Д. А., *Аналитическая геометрия* Т. I. Москва—Ленинград, 1948.

4. Лопшиц, А. М., *Аналитическая геометрия*. Москва, 1948.

5. Мусхелишвили, Н. И., *Курс Аналитической геометрии*. Москва—Ленинград, 1947.

6. Салтиков, Н., *Аналитичка геометрија*, I, II. Београд, 1949.

7. Фиников, С. П., *Аналитическая геометрия*, Москва, 1949.

8. Цубербилер, О. Н., *Задачи и упражнения по Аналитической геометрии*. Москва—Ленинград, 1945.

II

9. Bieberbach, Ludwig, *Analytische Geometrie*. Leipzig und Berlin, 1944.

10. Bol, Gerrit, *Elemente der Analytischen Geometrie*. 1.—2. Teil. Göttingen, 1948.

11. Caronnet, Th., *Exercices de Géométrie*. 6-éme éd. Paris, 1949.

12. Comessatti, Annibale, *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva*, p. I. Padova, 1947.

13. F. G. M., *Exercices de Géométrie*, 7-éme éd. Tours et Paris.

14. Godeaux, Lucien, *Leçons de Géométrie analytique à trois dimensions*. 4-éme éd. Liège.

15. Hefter L. und Koehler C., *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Bd. I. Karlsruhe, 1927.

16. Hefter, Lothar, *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Bd. II. Leipzig—Berlin, 1923.

17. Hodgson, T., *Applied Mathematics for Engineers*. Vol. I. London, 1930.

18. Kommerell, Karl, *Vorlesungen über Analytische Geometrie der Ebene*. Leipzig, 1941.

19. Kommerell, Karl, *Vorlesungen über Analitische Geometrie des Raumes*. Leipzig, 1940.

20. Kowalewski, Gerhard, *Lehrbuch der höheren Mathematik*, Erster Band. Berlin—Leipzig, 1933.

21. Papelier, G., *Précis* de *Géométrie analytique*. Paris.

22. Rochat, Octave, *Cours de Géométrie analytique*. Lausanne, 1945.

23. Rutherford, D. E., *Vector Metods*. New York, 1951.

24. Salmon George—Fiedler Wilhelm, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*. Leipzig—Berlin, 1922.

25. Schoenflies, A.—Dehn, M., *Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes*. Berlin, 1931.

26. Sommerville, D. M. Y., *Analytical Conics*. London, 1949.

27. Sperner, Emanuel, *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*, 1.—2. Teil. Göttingen, 1951.

28. Robson, A., *An Introduction to Analytical Geometry*, Vol. I, II. Cambridge, 1949.

СОДРЖИНА

ПРВ ДЕЛ

ВЕКТОРИ И НИВНАТА ПРИМЕНА ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

Глава I

Увод во векторска алгебра

Глава II

Афини координати на вектори и точки

II. *Векторски производ*

Глава V.

Поларни координати

Глава VI.

Трансформација на афини координати. Афини пресликувања

I. *Трансформација на афини координати*

II. *Афини проблеми за рамнината во просторот*

III. *Афини особини на правите во просторот*

Б. Метрични односи

Глава II.

Круг и топка

Глава III.

Коники и кварики

I. Коники

Афини особини на кониките

Метрични особини на кониките

II. *Кbадрики*

Афини особини на кbадриките

Некои метрични особини на кbадриките

Глава IV

Некои иоbажни шииоbи иоbршини

Метрични особини на површините од втор ред