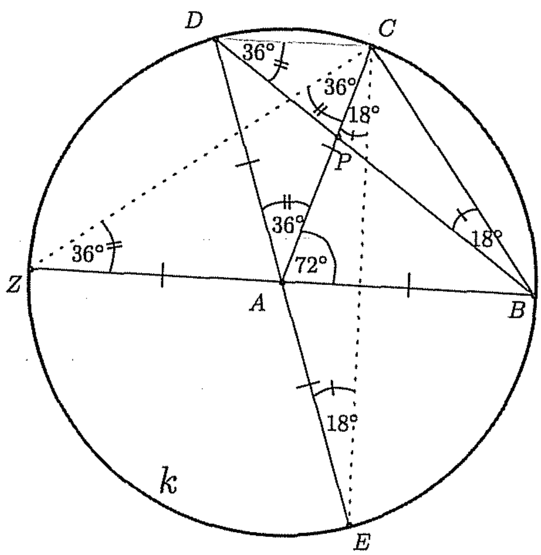
ЈБМО 2007

1. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи, дека равенката $x^2+ax+a^2-6=0$ нема решенија во множеството реални броеви.

   Решение. Нека претпоставиме дека дадената равенка има решенија во множеството реални броеви. Равенката е еквивалентна со равенката
$$(x+\tfrac{a}{2})^2=6-\tfrac{3a^2}{4}.$$
   Оттука следува $6-\frac{3a^2}{4}\geq 0$, односно $a^2\leq 8$. Но, a е позитивен реален број, па затоа $a^3\leq 8a$, т.е $6(a+1)\leq 8a$, од каде добиваме $a\geq 3$. Според тоа, $a^2\geq 9>8\geq a^2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решенија во множеството реални броеви.

2. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што
$$\measuredangle DAC=\measuredangle BDC=36^\circ,\ \measuredangle CBD=18^\circ \text{ и } \measuredangle BAC=72^\circ.$$
   Ако P е пресечната точка на дијагоналите AC и BD, определи го $\measuredangle APD$.

   Решение. *Прв начин*. На правите AD и BA, преку точката A, да земеме точки E и Z соодветно, такви што $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{AZ}$.



Од

$$\measuredangle DEC = \frac{\measuredangle DAC}{2} = 18^\circ = \measuredangle CBD$$

следува дека четириаголникот $DEBC$ е тетивен. Аналогно,

$$\measuredangle AZC = \frac{\measuredangle BAC}{2} = 36^\circ = \measuredangle BDC,$$

па затоа четириаголникот $CBZD$ е тетивен. Значи, петаголникот $BCDZE$ е впишан во кружницата $k(A,\overline{AC})$. Оттука следува

$$\overline{AC} = \overline{AD} \text{ и } \measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Сега, од $\triangle CPD$ имаме

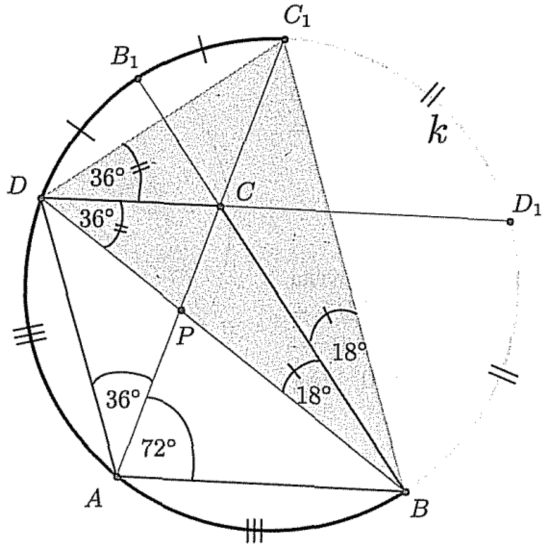
$$\measuredangle CPD = 180^\circ - \measuredangle PCD - \measuredangle PDC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

Оттука $\measuredangle APD = 108^\circ$.

Втор начин. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ADB$ и B_1, C_1, D_1 се пресечните точки на k со правите BC, AC, CD, соодветно. Од

$$\measuredangle DBB_1 = 18^\circ \text{ и } \measuredangle DBC_1 = 36^\circ$$

следува дека $\measuredangle B_1BC_1 = 18^\circ$, од каде следува дека B_1 е средина на лакот DC_1. Аналогно D_1 е средина на лакот BC_1.



Значи, BB_1 и DD_1 се симетрали на $\measuredangle DBC_1$ и $\measuredangle BDC_1$ соодветно. Според тоа, точката C е центар на впишаната кружница во $\triangle BDC_1$ и

$$\measuredangle DC_1A = \measuredangle AC_1B = 36^\circ,$$

бидејќи AC_1 е симетрала на

$$\measuredangle BC_1D = 180^\circ - \measuredangle BAD.$$

Сега

$$\measuredangle APD = \measuredangle C_1DB + \measuredangle AC_1D = 2\cdot 36^\circ + 36^\circ = 108^\circ.$$

3. Дадени се 50 точки во рамнината такви што меѓу нив нема три колинеарни. Секоја од овие точки е обоена во една од четири бои. Докажи дека постојат најмалку 130 разнострани триаголници чии темиња се обоени со иста боја.

Решение. Бидејќи $50 = 4\cdot 12 + 2$ од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 13 истобојни точки. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека се дадени $n > 8$ точки во рамнината такви што меѓу нив нема три колинеарни. Тогаш постојат најмалку $\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ разнострани триаголници чии темиња се дадените точки.

Доказ. Имаме $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ отсечки и $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ триаголници со темиња во дадените точки. Над секоја отсечка постојат најмногу два рамнокраки триаголници за кои таа отсечка е основа. Навистина, ако над некоја отсечка AB постојат 3 рамнокраки $\triangle ABC, \triangle ABD$ и $\triangle ABE$, тогаш точките C, D и E се наоѓаат на симетралата на отсечката AB, па затоа ќе бидат колинеарни, што е противречност. Според тоа, имаме најмногу $2\cdot\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$ рамнокраки триаголници. Конечно, од принципот на исклучување следува дека имаме најмалку

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$

разнострани триаголници. ■

Сега, ако во претходната лема земеме дека имаме $n = 13$ истобројни точки, добиваме дека бројот на разностраните триаголници е поголем или еднаков на $\frac{13\cdot 12\cdot 5}{6} = 130$.

4. Нека p е прост број. Докажи, дека $7p + 3^p - 4$ не е точен квадрат.

Решение. За $p = 2$ имаме $7\cdot 2 + 3^2 - 4 = 19$ и тоа не е точен квадрат. За $p = 3$ имаме $7\cdot 3 + 3^3 - 4 = 44$ и тоа не е точен квадрат.

Нека претпоставиме дека за некој прост број $p>3$ бројот $7p+3^p-4$ е точен квадрат, т.е. $7p+3^p-4=n^2$.

Ако p е прост број од видот $4k+1$, тогаш

$$n^2=7p+3^p-4=7(4k+1)+3^{4k+1}-4\equiv 3\cdot 1+3-4\equiv 2 \pmod 4,$$

што не е можно, бидејќи за секој природен број x важи $x^2\equiv 0$ или $1 \pmod 4$.

Ако p е прост број од видот $4k+3$ и $p>3$, тогаш $(p,3)=1$ и од малата теорема на Ферма следува $3^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. Затоа

$$n^2=7p+3^p-4\equiv 0+3\cdot 3^{p-1}-4\equiv 3-4\equiv -1 \pmod p.$$

Ако ја степенуваме оваа конгруенција на $2k+1$ добиваме

$$(n^2)^{2k+1}=n^{4k+2}\equiv -1 \pmod p.$$

Јасно, $p\nmid n$, бидејќи во спротивно ќе важи $p\,|\,3^p-4$, т.е. $p\,|\,(3-4)=-1$, што не е можно. Значи, $(p,n)=1$, па од малата теорема на Ферма следува дека

$$n^{p-1}=n^{4k+2}\equiv 1 \pmod p.$$

Сега од последните две конгруенции следува $2\equiv 0 \pmod p$, што е противречност.

Конечно, бидејќи сите прости броеви поголеми од 3 се или од видот $4k+1$ или од видот $4k+3$, од претходните разгледувања следува тврдењето на задачата.