Ристо Малчески,
Скопје

И ОВА Е ЛЕСНО – АЛГОРИТАМ ЗА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ СО ПРЕТУРАЊЕ

Пред некој ден ме сретна мојот пријател Текнувало и полн со надеж дека овој пат нашол задача која нема да можам лесно да ја решам, ме се обрати:

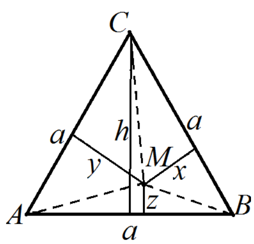
Овчарот Пејо има само 3 *ведра, кои не се градуирани, т.е. нема ознаки за количества помали од целиот волумен. Едното собира* 12 *литри, другото* 7 *литри, а третото* 5 *литри. Најголемото ведро е полно со млеко, а Илија сака да купи* 6 *литри млеко. Како Пејо само со овие ведра ќе му измери на Илија* 6 *литри млеко?*

Веројатно, Текнувало очекуваше поставената задача да ја решавам со комбинирање на различни претурања, начин на кој на празничните седенки нашите претци ги решавале задачите од ваков вид. Но, Текнувало заборавил дека јас знам математика и се вчудоневиде кога само по две до три минути црткање на земја му ја соопштив постапката со која Пејо ќе го измери бараното количество млеко. Сигурно и вие се запрашавте како е тоа можно. Па, драги мои, едноставно со помош на геометрија. Да, токму така логичко-комбинаторните задачи од наведениот вид можеме да ги решиме користејќи едно едноставно својство на рамностраниот триаголник. Но, да одиме по ред. За таа цел прво ќе ја решиме следнава задача.

Задача 1. Ако M е точка во внатрешноста или на некоја од страните на рамностраниот триаголник ABC и x,y,z се растојанијата од M до страните BC,CA,AB на триаголникот, соодветно, тогаш

$$x+y+z=h, \tag{1}$$

каде h е висината на триаголникот.



Цртеж 1

Решение. Од условот на задачата имаме

$$P_{\Delta ABC}=\frac{ah}{2}, P_{\Delta ABM}=\frac{az}{2},$$

$$P_{\Delta BCM}=\frac{ax}{2} \text{ и } P_{\Delta CAM}=\frac{ay}{2}.$$

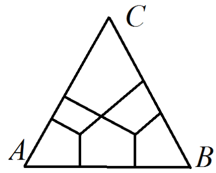
Понатаму, бидејќи

$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ABM}+P_{\Delta BCM}+P_{\Delta CAM}$$

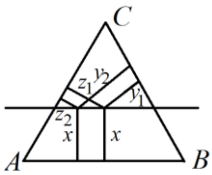
од горните равенства добиваме

$$\frac{ah}{2}=\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}$$

и ако последното равенство го помножиме со $\frac{2}{a}$ го добиваме равенството (1). ♦



Цртеж 2

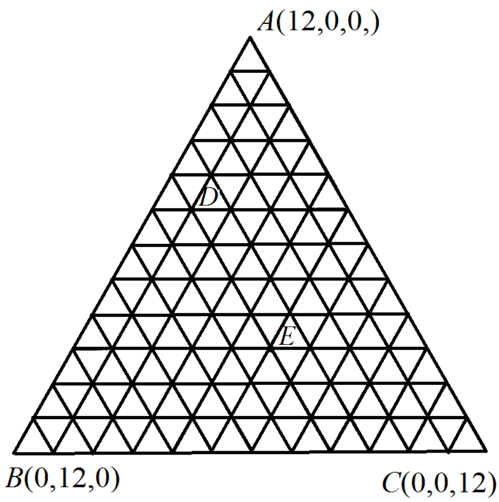


Цртеж 3

Од претходната задача непосредно следува дека кога точката M се движи во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC или по неговите страни, тогаш збирот на растојанијата од точката до страните на триаголникот е константен (цртеж 2). Притоа, ако M лежи на страната BC, тогаш $x=0$ и обратно, ако $x=0$, тогаш M лежи на страната BC. Слично, $y=0$ ако и само ако M лежи на страната AC и $z=0$ ако и само ако M лежи на страната AB. Понатаму, ако точката M се движи по права паралелна на страната BC, тогаш x не се менува, додека y и z зависат од положбата на точката M и притоа важи (1), цртеж 3.

Како претходните разгледувања да ги искористиме за решавање на задачата за претурање, која Текнувало ми ја зададе? Идејата е едноставна:

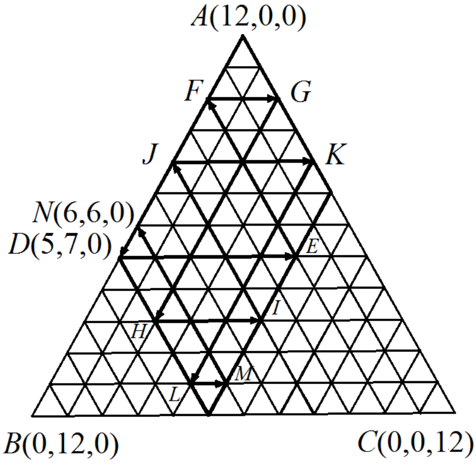
- бидејќи збирот $x+y+z$ е константен, истиот можеме да го разгледуваме како вкупното количество млеко во сите три ведра, и
- движењето на точката по права паралелна на некоја од страните на триаголникот можеме да го сметаме како претурање од едно ведро во друго, со други зборови ако со x го означиме количеството млеко во првото ведро, тогаш движењето на точката M по права паралелна со страната BC го сметаме како претурање од второто во третото ведро и обратно.



Цртеж 4

Нека сега секоја од страните на рамностраниот триаголник ABC со висина 12 ја поделиме на 12 еднакви делови и низ точките на поделби повлечеме прави паралелни со страните на триаголникот. Тогаш добиваме триаголна целобројна решетка, при што на темињата на решетката им соодветствуваат подредени тројки цели броеви, координати, кои всушност се растојанијата на темињата до страните BC, CA, AB, соодветно. Така, на пример, на точката A и соодветствува тројката (12,0,0), на B тројката (0,12,0), на C тројката (0,12,0), на D тројката (7,4,1) и на E тројката (3,4,5).

Да се вратиме на почетната задача. Точката A соодветствува на почетната состојба кога првото ведро е полно, а останатите две се празни, на цртеж 4 точката D соодветствува на состојба кога во првото ведро имаме 7 литри, во второто 4 и во третото 1 литар, а точката E на состојба кога во првото ведро имаме 3 литри, во второто 4 литри и во третото 5 литри млеко. Меѓутоа, точките B и C не соодветствуваат на ниту една реална состојба, бидејќи второто ведро собира најмногу 7 литри, а третото најмногу 5 литри млеко. Затоа треба да се ограничиме на дел од областа на триаголникот ABC. Имено, второто ведро собира најмногу 7 литри, па затоа од страната AC може да се оддалечиме најмногу за 7 мерни единици, а слично од страната AB може да се оддалечиме најмногу 5 мерни единици (цртеж 5).



Цртеж 5

Да се вратиме на претурањето. Како што рековме, на почетокот се наоѓаме во точката $A(12,0,0)$. Млекото можеме да го претуриме во едно од празните ведра и притоа на претурањето во второто ведро му соодвествува движење паралелно со страната AB, а на претурањето во третото ведро му соодветствува движење паралелно со страната AC. Притоа, бидејќи ведрата не се градуирани, т.е. нема ознаки за количество помало од целиот волумен, добиваме дека секое ведро може:

- делумно да се испразни, при што друго ведро целосно се полни,
- целосно да се испразни, при што друго ведро делумно или целосно се полни,

- целосно да се наполни, при што друго ведро целосно или делумно се празни и
- делумно да се наполни, при што друго ведро целосно се празни.

Последното значи дека при движењето во допустливата област секогаш мора да одиме од една нејзина страна, до спротивната страна (цртеж 5). Притоа, бидејќи треба да измериме 6 литри, со опишаното правило тргнувајќи од точката A треба да дојдеме до точка на границата од допустливата област која има барем една координата 6, во случајот точките M и N (цртеж 5). Една таква патека е искршената линија

$$ADEFGHIJKLMN$$

на која и соодветствуваат претурањата

Ведро	Претурање											
12	12	5	5	10	10	3	3	8	8	1	1	6
7	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6	6
5	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5	0

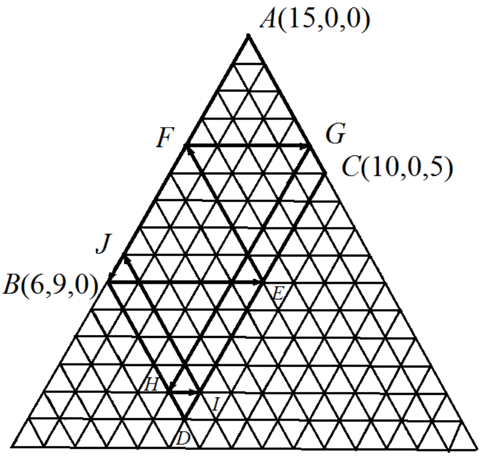
Забелешка. Ако движењето од точката N го продолжиме понатаму, ќе забележиме дека може да се дојде до секое теме на целобројната решетка. Според тоа, со опишаната постапка може со помош на дадените ведра да се измери секој волумен помал од 12.

Оваа постапка е универзална, но тоа не значи дека секоја задача од наведениот вид има решение. На пример, ако имаме наполнет сад од 12 литри и празни садови од 8 и 4 литри, со ниту една низа претурања не може да се измерат 5 литри, ниту пак кој било непарен број литри. Притоа, нашата искршена линија ќе ги заобиколува сите темиња на решетката кои имаат непарни координати. Проверете!

Во претходните разгледувања имавме случај кога збирот на волумените на двата помали сада е еднаков на волуменот на поголемиот сад. Меѓутоа, со опишаната постапка можат да се решаваат задачи и во останатите два случаи и тоа:

- ако волуменот на поголемиот сад е поголем од збирот на волумените на другите два сада, тогаш допустливата област повторно е паралелограм кај кој едното теме е во внатрешноста на рамностраниот триаголник и
- ако волуменот на поголемиот сад е помал од збирот на волумените на другите два сада, тогаш допустливата област е петаголник со две темиња на страната BC.

Задача 2. Винарот Крсте има буре од 15 литри полно со вино. Како на својот пријател Трајко да му измери 7 литри вино, ако на располагање има два празни сада од 5 и 9 литри.



Цртеж 6

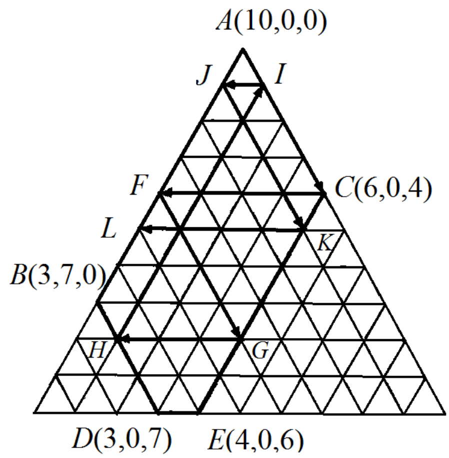
Решение. Цртаме рамностран триаголник со висина 15 и како во претходните разгледувања во триаголникот ја формираме решетката. Ги означуваме точките

$B(6,9,0)$ и $C(10,0,5)$

и низ овие точки повлекуваме прави паралелни на спротивните страни со што ја добиваме допустливата област, чие четврто теме е точката $D(1,9,5)$. Понатаму, ја формираме искршената линија $ABEFGHIJ$ на која и соодветствуваат претурањата

Сад	Претурање							
15	15	6	6	11	11	2	2	7
9	0	9	4	4	0	9	8	8
4	0	0	5	0	4	4	5	0

Задача 3. Располагаме со три садови од 10, 7 и 4 литри соодветно. Првиот сад е полн со вода. Користејќи ги само овие три садови, подели ја водата од првиот сад на два еднакви дела.



Цртеж 7

Решение. Цртаме рамностран триаголник со висина 10 и како во претходните разгледувања во триаголникот ја формираме решетката. Ги означуваме точките $B(3,7,0)$ и $C(6,0,4)$ и низ овие точки повлекуваме прави паралелни на спротивните страни со што ја добиваме допустливата област, чие темиња се и точките $D(3,0,7)$ и $F(4,0,6)$. Понатаму, ја формираме искршената линија $ACFGHIJKL$ на која и соодветствуваат претурањата дадени во долната табела.

Сад	Претурање								
10	10	6	6	2	2	9	9	5	5
7	0	0	4	4	7	0	1	1	5
4	0	4	0	4	1	1	0	4	0

На крајот од оваа статија ви предлагаме, користејќи ги претходните алгоритми самостојно да ги решите следниве задачи.

1. Симон продавал вино. На пазар понел полна канта од 8 литри и две празни канти од по 5 и 3 литри. Првиот купувач побарал 4 литри вино. Помогнете му на Симон да измери 4 литри со помош на кантите кои ги понел на пазар?

2. Богдан и Толе имаат еднаков број овци, кои заедно ги чуваат. Откако ги измолзиле наполниле едно ведро од 10 литри. На бачилото имале уште две ведра од по 3 и 7 литри. Како постапиле Богдан и Толе за да го поделат млекото.

3. Од еден сад во кој се наоѓаат 20 литри вода Марко треба во друг, ист таков сад, да одлие 5 литри вода. Како ќе го направи тоа со помош на два празни сада од 3 и 7 литри.

Статијата прв пат е објавена во списанието Натенатика+ во Софија