Ристо Малчески

ЕЛЕМЕНТАРНИ АЛГЕБАРСКИ И АНАЛИТИЧКИ НЕРАВЕНСТВА

Скопје, 2019

Рецензенти
д-р Алекса Малчески
редовен професор на Машински факултет, Скопје
д-р Слаѓана Брсакоска
вон. проф. на Природно-математички факултет, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

512.13(075.3)(076)
517.16(075.3)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Елементарни алгебарски и аналитички неравенства / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 336 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 335-336

ISBN 978-608-4904-97-7

а) Неравенства - Елементарна алгебра - Математичка анализа - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111695882

С О Д Р Ж И Н А

VI ГЛАВА
КЛАСИЧНИ НЕРАВЕНСТВА

VII ГЛАВА
СИМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА

VIII ГЛАВА
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Оваа книга е наменета за учениците од средното образование кои сакаат да ги прошират своите знаења за елементарните алгебарски и аналитички неравенства, но истата може да ја користат и студентите на математика. Намената на книгата всушност и го детерминираше нејзиниот наслов, материјалот кој во истата се разработува, како и начинот на изложување на истиот. Имено, често пати книгите за ваква намена се пласираат под стандардниот наслов *Неравенства,* без притоа авторите да водат сметка дека неравенствата се тема која опфаќа далеку посериозни резултати од оние кои во споменатите книги се презентираат.

Во книгава е направен обид да се собере и презентира оној материјал за кој сметав дека може да им користи на учениците надарени за математика, но и на други читатели кои се интересираат за оваа област. Притоа, одбегнато е заедно со алгебарските и аналитичките неравенства да се разработуваат и геометриските неравенства. Ова е направено од причина што при докажување на геометриските неравенства се користат алгебарските и аналитичките неравенства, но самите геометриски неравенства се темелат на резултатите од елементарната геометрија, за чии разгледување е потребно повеќе време и поголем простор.

Покрај стандардните резултати и примери, книгава содржи голем број задачи од националните олимпијади на Австрија, Белорусија, Бугарија, Иран, Ирска, Јапонија, Јужна Кореја, Казахстан, Кина, Молдавија, Полска, Романија, Русија, САД, Сингапур, Словачка, Србија, Тајван, Турција, Украина, Унгарија, Хрватска и Чешка, од Балканските, Азиско-пацифистичките, Медитеранските и Меѓународните математички олимпијади, како и задачи кои се предлагани на Меѓународните математички олимпијади.

Теоремите кои се однесуваат на познатите неравенства скоро без исклучок се докажани, но притоа во делот на елементарните функции тврдењата од математичката анализа кои се користат во разгледувањата се презентирани без доказ. Книгава содржи 106 решени примери кои ги илустрираат теориските разгледувања, а после секоја глава се дадени вкупно 421 задачи за самостојна работа, чии решенија се поместени во посебна глава.

Стандардно, книгава содржи индекс на поими, како и користената литература, при што покрај книгите кои се користени при пишувањето на оваа книга, во литературата се наведени и стручните статии на авторот, кои пред сè се резултат од неговата долгогодишна работа со надарените ученици за математика.

За крај, и покрај вложениот напор, свесен сум дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сум благодарун на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

7 ноември 2015 Авторот
Скопје

I ГЛАВА
ЕЛЕМЕНТАРНИ НЕРАВЕНСТВА

1. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА РЕЛАЦИИТЕ ЗА НЕЕДНАКВОСТ

Постоењето на подредување е едно од најважните својства на множеството реални броеви. Имено, заедно со релацијата за еднаквост и основните операции, релациите $<, >, \leq$ и $\geq$ ја формираат основната структура на множеството $\mathbf{R}$. Во овој дел ќе наведеме некои од наједноставните својства на овие релации, при што својствата нема да ги докажуваме и нема да одделиме минимално множество својства (аксиоми) од кои останатите може да се изведат, што е вообичаено при аксиоматското воведување на множеството $\mathbf{R}$, кое може да се види, на пример, во [44]. Притоа ќе се ограничиме само на некои практични забелешки во врска со некои својства.

Својство 1. За секои два реални броја x и y точна е една од релациите $x < y, x = y, x > y$, т.е. за секои реални броеви x и y важи $x \leq y$ или $y \leq x$. ■

Својство 2. Точни се следниве еквиваленции:
$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -y \leq -x\ . ■$$

Својство 3. Релацијата е релација за подредување, т.е.
1) $x \leq x$, за секој $x \in \mathbf{R}$,
2) ако $x \leq y$ и $y \leq x$, тогаш $x = y$, и
3) ако $x \leq y$ и $y \leq z$, тогаш $x \leq z$. ■

Забелешка 1. Релацијата $<$ не е релација за подредување, бидејќи за секој $x \in \mathbf{R}$ не важи $x < x$. ■

Својство 4. а) Ако $x \leq y$, тогаш за секој $z \in \mathbf{R}$ важи $x + z \leq y + z$ и $x - z \leq y - z$.

б) Ако $x \leq y$ и $u \leq v$, тогаш $x + u \leq y + v$ и воопшто, ако $x_i \leq y_i$, за $x_i, y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, тогаш $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$. ■

Забелешка 2. Од $x \le y$ и $u \le v$ не следува $x-u \le y-v$. Навистина, $1 \le 2$ и $2 \le 6$, но $1-2=-1 \not\le -4=2-6$. ■

Својство 5. а) Ако $x \le y$ и $z>0$, тогаш $xz \le yz$.

б) Ако $x \le y$ и $z<0$, тогаш $xz \ge yz$.

в) Ако $0 \le x \le y$ и $0 \le u \le v$, тогаш $xu \le yv$ и воопшто, ако $0 \le x_i \le y_i$, за $x_i, y_i \in \mathbf{R}$, $i=1,2,...,n$, тогаш $\prod_{i=1}^{n} x_i \le \prod_{i=1}^{n} y_i$. ■

Пример 1. Ако $x \ge y, a \ge b$, тогаш $ax+by \ge ay+bx$. Докажи!

Решение. Имаме $ax+by-(ay+bx)=(a-b)(x-y) \ge 0$, што значи $ax+by \ge ay+bx$. ■

Својство 6. Ако $x \in \mathbf{R}$, тогаш $x^2 \ge 0$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=0$ и воопшто, ако $a_i \in \mathbf{R}^+, x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,...,n$, тогаш $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \ge 0$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x_i=0$, за $i=1,2,...,n$. ■

Пример 2. Нека a,b,c,d се реални броеви такви да $a+d=b+c$. Докажи дека

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \ge 0.$$

Решение. Имаме $a-b=c-d$, па затоа

$$\begin{aligned}
&(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)= \\
&\quad=(a-b)(c-d)+[(a-b)+(b-c)][(b-c)+(c-d)]-(a-d)(b-c) \\
&\quad=(a-b)(c-d)+(a-b)(c-d)+(a-b)(b-c)+(b-c)(b-c)+ \\
&\quad\quad+(b-c)(c-d)-[(a-c)+(c-d](b-c) \\
&\quad=2(a-b)(c-d)+(b-c)[(a-b)+(b-c)] \\
&\quad\quad+(b-c)(c-d)-(a-c)(b-c)-(c-d)(b-c) \\
&\quad=2(a-b)(c-d)+(b-c)(a-c)-(b-c)(c-d) \\
&\quad=2(a-b)^2 \ge 0
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Својство 7. а) За *апсолутната вредност* на реалниот број a, определена со

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ако } a \ge 0 \\ -a, & \text{ако } a<0. \end{cases}$$

важи $|a|=|-a|$, $a \le |a|$ и $-a \le |a|$.

б) Ако $a,b \in \mathbf{R}$, тогаш

$|a+b| \le |a|+|b|$, $||a|-|b|| \le |a-b|$, $|ab|=|a|\cdot|b|$ и $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$, $b \ne 0$.

в) Ако $a_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,...,n$, тогаш

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \text{ и } |\prod_{i=1}^{n} a_i| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|.$$

г) За секој $a \in \mathbf{R}$ важи $\sqrt{a^2} = |a|$, а ако $a > 0$, тогаш $\sqrt{a^2} = a$. ■

Својство 8. а) Ако $n \in \mathbf{N}$ и $0 \leq x \leq y$, тогаш $x^n \leq y^n$.

б) Ако $n \in \mathbf{N}$ и $0 \leq x \leq y$, тогаш $x^{-n} \geq y^{-n}$. ■

Забелешка 3. Во општ случај, од $x \leq y$ не следува $x^n \leq y^n$. На пример, $-4 < -3$, но $(-4)^2 = 16 \not< 9 = (-3)^2$. Меѓутоа, за непарни степени, т.е. ако $n = 2k+1$ од $x \leq y$ следува $x^n \leq y^n$. ■

Својство 9. а) Ако $n \in \mathbf{N}$ и $0 \leq x \leq y$, тогаш $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$.

б) Ако $n = 2k+1$ и $x \leq y$, тогаш $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$. ■

Својство 10. а) Ако $0 \leq x \leq y$ и $\alpha > 0, \alpha \in \mathbf{R}$, тогаш $x^{\alpha} \leq y^{\alpha}$.

б) Ако $0 \leq x \leq y$ и $\alpha < 0, \alpha \in \mathbf{R}$, тогаш $x^{\alpha} \geq y^{\alpha}$. ■

Својство 11. а) Ако $a > 1$ и $x < y$, тогаш $a^x < a^y$.

б) Ако $a < 1$ и $x < y$, тогаш $a^x > a^y$. ■

Забелешка 4. Во својствата 8, 9 и 10 всушност се искажани својстваа за монотоност на степенската функција $f(x) = x^{\alpha}$, за различни експоненти α, а во својството 11 се искажани својствата за монотоност на експоненцијалната функција, соодветно, чии докази може да се видат, на пример, во [45]. ■

2. ДОКАЖУВАЊЕ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ НЕРАВЕНСТВА

Докажувањето на секое неравенство, а со самото тоа и на елементарните неравенства, најчесто се состои во решавање на задача која гласи:

Докажи дека за сите вредности на променливите $x_1, x_2, ..., x_n$ кои задоволуваат определени услови важи неравенството

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq g(x_1, x_2, ..., x_n).$$

При решавање на поставената задача најчесто се користат бројни теориски резултати, кои ќе бидат предмет на нашите натамошни разгледувања. Во овој дел ќе се ограничиме на докажување неравенства со помош на својствата наведени во точка 1.

Пример 3. Докажи ги неравенствата

а) $a^2-ab+b^2\geq 0$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$,

б) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, за секои $a,b,c\in\mathbf{R}$.

в) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$, за секои a, b и c са реални ненулти броеви.

г) $ab+bc+ca\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$, за секои $a,b,c\geq 0$.

д) $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$, за секои $a,b,c>0$.

ѓ) $x^2+y^2+z^2\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, за секои $x,y,z>0$ такви што $xyz=1$.

е) $\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, за секои реални броеви a,b,c такви што $abc>0$.

Решение. а) Имаме

$$a^2-ab+b^2=(a-\tfrac{b}{2})^2+\tfrac{3}{4}b^2\geq 0.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=0$.

б) Имаме

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,$$

па затоа

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geq 0$$

и ако во последното неравенство поделиме со 2, го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

в) Од б) следува, дека $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\frac{a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$.

г) От б) следва, дека

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{bc})^2+(\sqrt{ca})^2\geq\sqrt{ab}\sqrt{bc}+\sqrt{bc}\sqrt{ca}+\sqrt{ca}\sqrt{ab}\\&=a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

д) Ако двапати последователно го примениме неравенството под б) добиваме

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab=abc(a+b+c).$$

ѓ) Од б) за $a=\frac{1}{\sqrt{x}},b=\frac{1}{\sqrt{y}},c=\frac{1}{\sqrt{z}}$ следува

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$$

и како $xyz=1$ добиваме

$$\frac{xyz}{x}+\frac{xyz}{y}+\frac{xyz}{z}\geq\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{zx}},$$

од каде $xy+yz+zx\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$. Сега повторно од б) имаме

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

е) Со повеќекратна примена на неравенството под б) добиваме

$$\begin{aligned}a^8+b^8+c^8&\geq a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\geq a^2b^4c^2+b^2c^4a^2+c^2a^4b^2\\&=(a^2bc)^2+(ab^2c)^2+(abc^2)^2\geq a^3b^3c^2+a^3b^2c^3+a^2b^3c^3.\end{aligned}$$

Сега бараното неравенство се добива ако последното неравенство го поделиме со $a^3b^3c^3$. ■

Забелешка 5. а) Неравенството кое го докажавме во пример 3 б) понекогаш се користи во следнава еквивалентна форма

$$3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2\text{, т.е. } x^2+y^2+z^2\geq\tfrac{1}{3}(x+y+z)^2 .$$

Последното неравенство всушност е неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за 3 променливи, кое покасно ќе го докажеме. Јасно, еквивалентна форма на неравенството од пример 3 б) е и следната:

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx) . \qquad (1)$$

в) Ако во неравенството (1) ставиме $x=ab, y=bc, z=ca$ добиваме

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3(abbc+bcca+caab)=3abc(a+b+c) .$$

Последното неравенство може да се запише во следнава еквивалентна форма

$$ab+bc+ca\geq\sqrt{3abc(a+b+c)} ,$$

и ова неравенство е познато како неравенство на *Хадвигер-Финслер*.

Пример 4. а) Ако е $a+b+c=6$, тогаш $a^2+b^2+c^2\geq 12$. Докажи!

б) Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{2} .$$

Решение. а) Според пример 3, за секои $a,b,c\in\mathbf{R}$ точно е неравенството

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca .$$

Значи,

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2=6^2=36 ,$$

од каде добиваме $a^2+b^2+c^2\geq 12$.

б) За секој $x\in\mathbf{R}$ важи $x^2+1\geq 2x$, т.е. $\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$. Понатаму, од пример 3 б) следува

$$\begin{aligned} a+b+c-\frac{a}{b^2+1}-\frac{b}{c^2+1}-\frac{c}{a^2+1} &= \frac{b}{b^2+1}ab+\frac{c}{c^2+1}bc+\frac{a}{a^2+1}ca \\ &\leq\frac{ab+bc+ca}{2}\leq\frac{(a+b+c)^2}{6}. \end{aligned}$$

Сега доволно е во последното неравенство да замениме $a+b+c=3$. ■

Пример 5. а) Нека се a,b,c реални броеви поголеми од 1. Докажи го неравенството

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c+\frac{1}{abc} .$$

б) Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $abc=1$. Докажи дека ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c$, тогаш $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\geq a^n+b^n+c^n$.

Решение. а) Од $a,b,c>1$ следува

$$a>\frac{1}{b}\ ,\ b>\frac{1}{c}\ \text{ и }\ c>\frac{1}{a}$$

па затоа

$$(a-\tfrac{1}{b})(b-\tfrac{1}{c})(c-\tfrac{1}{a})>0\ ,$$

т.е.

$$abc-a-b-c+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}-\tfrac{1}{abc}>0$$
$$abc+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}>a+b+c+\tfrac{1}{abc}\ .$$

б) Бидејќи $abc=1$ имаме

$(a-1)(b-1)(c-1)=a+b+c-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ и

$(a^n-1)(b^n-1)(c^n-1)=a^n+b^n+c^n-(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n})$.

Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека левите страни во последните две равенства се со ист знак. ■

Пример 6. Позитивните реални броеви a,b,c,A,B,C ги задоволуваат условите $a+A=b+B=c+C=k$. Докажи дека $aB+bC+cA\le k^2$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}k^3&=(a+A)(b+B)(c+C)=abc+ABC+k(aB+bC+cA)\\&\ge k(aB+bC+cA)\end{aligned},$$

што значи дека $aB+bC+cA\le k^2$. ■

Пример 7. Докажи, дека секој реален број a важи

$$3(1+a^2+a^4)\ge(1+a+a^2)^2\ .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2&=3+3a^2+3a^4-1-a^2-a^4-2a-2a^2-2a^3\\&=(a^4-2a^3+a^2)+(a^4-2a^2+1)+(a^2-2a+1)\\&=a^2(a-1)^2+(a^2-1)^2+(a-1)^2\ge 0.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=1$. ■

Пример 8. Нека

$$S=3(x^2+y^2+z^2+t^2)+2(xz+yt)-4(x+y+z+t)\ .$$

Докажи дека, ако $x,y,z,t\in[0,1]$, тогаш

$$-4\le S\le 0\ .$$

Решение. S го запишуваме во обликот

$$S=\tfrac{1}{2}[(2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z-1)^2+(2t-1)^2]+(x+z-1)^2+(y+t-1)^2-4\ .$$

Лесно се гледа дека при дадените ограничувања за x,y,zt секој од првите шест собироци на десната страна е во интервалот $[0,1]$, од што следуваат двете неравенства. За $x=y=z=t=\frac{1}{2}$ е $S=-4$, а за $x=z=t=y=1$ или за $x=y=z=t=0$ е $S=0$. ■

Пример 9. Ако n е природен број, тогаш $(n!)^2 \geq n^n$. Докажи!

Решение. За секој природен n важи

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)\\ &= (1\cdot n)[2(n-1)][3(n-2)]\ldots[(n-2)3][(n-1)2](n\cdot 1).\end{aligned} \tag{2}$$

Но,

$$(k+1)(n-k) = k(n-k)+(n-k) \geq k\cdot 1+(n-k) = n \,, \tag{3}$$

па од (2) и (3) следува

$$(n!)^2 \geq \underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{n-\text{пати}} = n^n \,. \ ■$$

Пример 10. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$ точно е неравенството

$$(1-\tfrac{1}{2^3})(1-\tfrac{1}{3^3})\ldots(1-\tfrac{1}{n^3}) > \tfrac{1}{2} \,.$$

Решение. За секој природен број $k \geq 2$ точно е неравенството

$$1-\tfrac{1}{k^3} > 1-\tfrac{1}{k^2} \,.$$

Значи,

$$\begin{aligned}(1-\tfrac{1}{2^3})(1-\tfrac{1}{3^3})\ldots(1-\tfrac{1}{n^3}) &> (1-\tfrac{1}{2^2})(1-\tfrac{1}{3^2})\ldots(1-\tfrac{1}{n^2})\\ &= \tfrac{2^2-1}{2^2}\cdot\tfrac{3^2-1}{3^2}\cdot\tfrac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n^2-1}{n^2}\\ &= \tfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\tfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\tfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\\ &= \tfrac{n+1}{2n} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2n} > \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 11. Реалните броеви a, b и c го исполнуваат неравенството

$$|\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}| < c \,.$$

Докажи дека $|a| < c$ и $|b| < c$.

Решение.Од особините на апсолутни вредности, имаме

$$|a| = |2\tfrac{a}{2}| = |\tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{2}| = |\tfrac{a}{2}+\tfrac{b}{2}+(\tfrac{a}{2}-\tfrac{b}{2})| \leq |\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}| < c \,.$$

Значи, $|a| < c$. Потполно аналогно се добива $|b| < c$. ■

Пример 12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} < 5$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} &< \sqrt{4a^2+4a+1}+\sqrt{4b^2+4b+1}+\sqrt{4c^2+4c+1}\\ &= (2a+1)+(2b+1)+(2c+1) = 2(a+b+c)+3 = 5,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 13. Докажете дека за произволни позитивни реални броеви x и y и природни броеви m и n $(n \geq m)$ важи неравенството

$$\sqrt[m]{x^m + y^m} \geq \sqrt[n]{x^n + y^n}$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \geq y$. Тогаш $\frac{y}{x} = \alpha \leq 1$, па дадената неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\sqrt[m]{1+\alpha^m} \geq \sqrt[n]{1+\alpha^n}$$

односно на неравенството

$$(1+\alpha^m)^n \geq (1+\alpha^n)^m .$$

Јасно,

$$(1+\alpha^m)^n \geq (1+\alpha^m)^m \geq (1+\alpha^n)^m$$

бидејќи $0 \leq \alpha \leq 1$ и $n \geq m$. ■

Пример 14. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b \geq c$. Понатаму, ако ги искористиме неравенствата

$$a-b \geq 0\,,\; a-c \geq 0 \text{ и } b-c \geq 0$$

добиваме

$$a^{a-b} \geq b^{a-b}\,,\; a^{a-c} \geq c^{a-c} \text{ и } b^{b-c} \geq c^{b-c}$$

Ги множиме последните неравенства и добиваме

$$a^{a-b}a^{a-c}b^{b-c} \geq b^{a-b}c^{a-c}c^{b-c}$$

$$a^{3a-(a+b+c)}b^{3b-(a+b+c)}c^{3c-(a+b+c)} \geq 1$$

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq (abc)^{a+b+c}$$

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

што и требаше да се докаже. ■

3. ЗАДАЧИ

1. Докажи дека за секои реални броеви a и b важи

$$8(a^4 + b^4) \geq (a+b)^4 .$$

2. Нека a, b, c, d се реални броеви такви што $a+b+c+d = 0$. Да означиме $P = ab+bc+cd$ и $Q = ac+ad+bd$. Докажи дека

$$19P + 93Q \leq 0 \text{ или } 19Q + 93P \leq 0 .$$

3. Нека a, b и c се ненегативни броеви.

а) Докажи, дека од неравенството

$$a^4+b^4+c^4 \le 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (1)$$

следува неравенството

$$a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca) \qquad (2)$$

б) Дали е точно обратното тврдење, т.е. дали од неравенството (2) следува неравенството (1).

4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c точно е неравенството

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}.$$

5. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c,d,e,f важи неравенството

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f} \le \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

6. Најди ја најголемата вредност на реалниот број k ако

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-k\right) \ge k,$$

за секои ненегативни реални броеви a,b,c такви да $a+b+c=ab+bc+ca$.

7. Нека $x>y$ и $xy=1$. Докажи дека $\frac{x^2+y^2}{x-y} \ge 2\sqrt{2}$.

8. Нека x,y,z се реални броеви такви да $xyz=-1$. Докажи дека

$$x^4+y^4+z^4+3(x+y+z) \ge \frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}.$$

9. Нека a,b,c се по парви различни позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right| > 1.$$

10. Нека се x и y ненегативни реални броеви такви да $x+y=2$. Докажи дека $x^2y^2(x^2+y^2) \le 2$. Кога важи знак за равенство?

11. Ако $a,b,c>0$ и $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$, докажи дека важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

12. Нека се a и b реални броеви за кои важи $0<a<b$ и нека $r=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$. Докажи дека важи $0<r<\frac{(b-a)^2}{8}$.

13. Докажи го неравенството

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} \le \frac{1}{3}$$

каде $0 \le x,y,z \le 1$.

14. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b и c важи неравенството

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

15. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1.$$

16. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што

$$a+b\leq c+1,\ b+c\leq a+1,\ c+a\leq b+1.$$

Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2\leq 2abc+1.$$

17. Докажи дека за секои три ненегативни броеви a,b и c важи неравенството

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq\tfrac{1}{4}(a+b+c)^3$$

при што знак за равенство се достигнува ако и само ако два од броевите се еднакви, а третиот е нула.

18. Нека a,b,c се броеви за кои $a^2+b^2+ab+bc+ca<0$. Докажи дека $a^2+b^2<c^2$.

19. Нека a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 се реални броеви за кои важи

$$b_1b_2b_3\neq 0,\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \text{ и } a_1a_3-a_2^2>0.$$

Докажи дека $b_1b_3-b_2^2<0$.

20. Докажи дека за произволни реални броеви a и b и произволен природен број k важи неравенството

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)...(a^{4k-1}+b^{4k-1})\leq 2^{4k-2}(a^{8k^2-2k}+b^{8k^2-2k}).$$

21. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се произволни реалните броеви. Докажи дека за $n=3$ или $n=5$ точно е неравенството

$$\begin{gathered}(a_1-a_2)(a_1-a_3)....(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)....(a_2-a_n)+\\+...+(a_n-a_2)(a_n-a_3)....(a_n-a_{n-1})\geq 0\end{gathered},$$

но тоа не е точно за било кој друг природен број $n, n>2$.

22. Докажи, дека за позитивни броеви a,b и c точно е неравенството

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

23. Докажете дека за секој реални броеви x, таков што $0<x<1$ и за секој природен број n точно е неравенството $\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}$.

24. Нека a и b се реални броеви такви што $|a+b|+|a-b|\leq 2$. Докажи дека $a^2+b^2\leq 2$.

25. Ако x, y, z се произволни реални броеви, тогаш

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} .$$

Докажи!

26. Реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ ги задоволуваат условите

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, |a_3| = |a_2 + 1|, ..., |a_n| = |a_{n-1} + 1|, |a_{n+1}| = |a_n + 1| .$$

Докажи дека

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2} .$$

27. Нека $n > 2$ е природен број и $a_1, a_2, ..., a_n$ се произволни позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{2^n}(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)...(a_n + a_1) \leq (a_1 + a_2 + a_3)(a_2 + a_3 + a_4)...(a_n + a_1 + a_2) .$$

28. Позитивните броеви x, y, z се такви што апсолутната вредност на разликата на било кои два од нив е помала од 2. Докажи дека

$$x + y + z < \sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} .$$

29. Нека $a, b > 0$. Докажи дека $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

30. Нека a, b, c се позитивни броеви такви да $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажи дека

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} .$$

31. Докажи дека за секои реални броеви x и y е исполнето неравенство-то

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} .$$

32. Нека a и b се природни броеви и $c = \frac{a^{a+1} + b^{b+1}}{a^a + b^b}$. Докажи дека

$$c^a + c^b \geq a^a + b^b .$$

33. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека $a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} \leq 1$.

34. Нека α е произволен позитивен број. Докажи го неравенството

$$\sqrt[3]{27 + 8\alpha} \leq \sqrt[3]{1 + \alpha} + \sqrt[3]{8 + \alpha} .$$

35. Ако е $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, докажи дека

$$\sqrt{a - 1} + \sqrt{b - 1} + \sqrt{c - 1} \leq \sqrt{c(ab + 1)} .$$

36. Нека $x_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$. Докажи дека

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$$

37. Докажи дека $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

38. Докажи дека за секои природни броеви M и N важи $\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{i^2n^2}\leq 4$.

39. Докажи дека за секои природни броеви p и N важи

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{in}\min\{\frac{1}{i^2},\frac{1}{n^2}\}<4$$

40. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+...+\frac{n}{4^n}<\frac{4}{9}$.

41. Нека n е природен број, x и y се позитивни реални броеви такви што $x^n+y^n=1$. Докажи дека

$$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}})<\frac{1}{(1-x)(1-y)} .$$

42. Докажи дека за секој природен број n важи:

а) $\sum_{i=2}^{4^n}\frac{1}{i}>n$, б) $\sum_{i=2}^{2^n}\frac{1}{i}<n$

43. Докажи дека за секои природни броеви $n\geq 1$ и $m\geq 1$ точно е неравенството

$$\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+...+\frac{1}{(n+m)^3}<\frac{1}{2n(n+1)}$$

44. Докажи дека за секој природен број $n\in\mathbf{N}$ е точно неравенството

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+...+\frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!}+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}<\frac{1}{2} .$$

45. Нека $a_i=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{i}$. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+....+\frac{1}{na_n^2}<2$$

46. Нека $a_k, k=1,2,...,n,...$ е низа од различни природни броеви. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ точно е неравенството $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

47. Нека за природниот број n и реалните броеви α и x се исполнети неравенствата $\alpha^{n+1}\leq x\leq 1$ и $0<\alpha<1$. Докажи $\prod_{k=1}^{n}|\frac{x-\alpha^k}{x+\alpha^k}|\leq\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha^k}{1+\alpha^k}$.

48. Докажи дека за секој природен број C, важи

$$\sqrt{n}<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n-2}<\sqrt{2n} .$$

49. Нека a и b се различни реални броеви. Докажи дека за произволни реални броеви $c_1,c_2,...,c_n$ постои низа $x_1,x_2,...,x_n$ за која секој член е еднаков на еден од броевите a или $a_{ij}=0$ и таква што

$$|x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_nc_n| \geq \frac{|b-a|}{2}(|c_1| + |c_2| + ... + |c_n|).$$

50. Сто позитивни броеви $x_1, x_2, ..., x_{100}$ ги задоволуваат неравенствата

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{100}^2 > 10000$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{100} > 300$$

Докажи, дека збирот на некои три од овие броеви е поголем од 100.

51. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се произволни броеви од интервалот $[0, 2]$. Докажи го неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| \leq n^2.$$

Кога важи знак за равенство?

52. Нека $n > 1$, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n$ се реални броеви и $S = \sqrt{\frac{A}{n-1}}$, каде

$$A = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + ... + (a_1 - a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2 + ... + (a_2 - a_n)^2 + ... + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

Докажи го неравенството

$$na_1 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i - S \leq \sum_{i=1}^{n} a_i + S \leq na_n$$

53. Најголемиот од ненегативните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ е еднаков на a. Докажи, дека

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Кога важи знак за равенство?

54. Дадена е строго растечка неограничена низа позитивни реални броеви $a_1, a_2, ...$. Докажи дека за секој доволно голем k важи

а) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$

б) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1985$

55. За кои природни броеви n неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geq 6\prod_{i=1}^{n} a_i, \qquad (1)$$

е исполнето за произволни ненегативни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$?

56. а) Најди ги сите реални броеви p, за кои неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3)$$

важи за произволни реални броеви x_1, x_2, x_3.

б) Најди ги сите реални броеви q, за кои неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq q(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)$$

важи за произволни реални броеви x_1, x_2, x_3, x_4.

57. Разгледуваме квадратна таблица

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

што се состои од ненегативни цели броеви за кои важи следното својство: ако $a_{ij} = 0$, тогаш важи неравенството

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} \geq n .$$

Докажи дека $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq \frac{1}{2} n^2$.

58. Нека $m, n \in \mathbf{N}$, а $a_1, a_2, ..., a_m$ се меѓусебно различни елементи од множеството $\{1, ..., n\}$ такви што $a_i + a_j \leq n$ за некои i, j, $1 \leq i < j \leq m$, тогаш постои k, $1 \leq k \leq m$, таков што $a_i + a_j = a_k$. Докажи дека

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2} .$$

59. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се реални броеви кои ги задоволуваат условите

$$| x_1 + x_2 + \ldots + x_n | = 1, \quad | x_i | \leq \frac{n+1}{2} \text{ за } i = 1, 2, \ldots, n .$$

Докажи дека постои пермутација $y_1, y_2, \ldots, y_n$ на $x_1, x_2, \ldots, x_n$ така што

$$\left| y_1 + 2y_2 + \ldots + n y_n \right| \leq \frac{n+1}{2} .$$

60. Нека $n \geq 2$ е цел број.

а) Да се најде најмалата константа C таква што неравенството

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \Big(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \Big)^4 \qquad (1)$$

важи за секои ненегативни реални броеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

б) За константата C, да се најде кога се добива еднаквост.

61. Нека $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ се позитивни реални броеви такви што

а) $0 < x_1 y_1 < x_2 y_2 < .... < x_n y_n$

б) $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq y_1 + y_2 + ... + y_k$, за секој $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Докажи дека

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} < \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n} .$$

62. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ се пермутации на броевите $1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}$ такви да $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq ... \geq a_n + b_n$. Докажи дека $a_m + b_m \leq \frac{4}{m}$, за некој $m \in \{1, 2, ..., n\}$.

63. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви. Докажи дека следниве тврдења се еквивалентни:

(а) $a_i + a_j \geq 0$, за секои i и j, $i \neq j$,

(б) $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ... + a_nx_n^2$, за секои ненегативни реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ такви што $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$.

64. Нека $n \in \mathbf{N}, n > 2$ и $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни цели броеви такви да

1) $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ и

2) $x_1 + 2x_2 + ... + (n-1)x_{n-1} = 2n - 2$.

Најди

$$\min \sum_{k=1}^{n-1} kx_k(2n-k).$$

65. Нека $n > 2$ и $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви за кои $2 \leq a_i \leq 3$, $i = 1, 2, ..., n$. Ако $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$, докажи

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3} + \frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4} + ... + \frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2} \leq 2S - 2n.$$

66. Нека $n \geq 2$ и $0 \leq x_i \leq 1$, за $i = 1, 2, ..., n$. Докажи го неравенството

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_1x_n) \leq [\tfrac{n}{2}].$$

67. Нека $Ax^2 + Bx + c = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$ и

$H = \max\{|A|, |B|, |C|\}$, $h_1 = \max\{|a_1|, |b_1|\}$, $h_2 = \max\{|a_2|, |b_2|\}$.

Докажи дека $\frac{h_1h_2}{2} < H \leq 2h_1h_2$.

68. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви да $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. Ако $m = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $M = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq -nmM.$$

69. Дадени се реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ за кои важи

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 0 \text{ и } |a_i| < M, i = 1, 2, ..., n.$$

Докажи дека

$$a_1 + 2a_2 + ... + na_n \leq \tfrac{n^2}{4}M.$$

70. Нека x, y, z се различни позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+yz+zx}.$$

71. Ако $n > 3$ и $x_i, i = 1, 2, ..., n$ се позитивни реални броеви такви да $x_1x_2...x_n = 1$, докажи дека

$$\frac{1}{1+x_1+x_2x_3} + \frac{1}{1+x_2+x_3x_4} + ... + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

72. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ реални броеви. За секој $i \in \{1,2,...,n\}$ нека

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \le i \le j\} - \min\{a_j \mid 1 \le i \le j\}$$

и нека $d = \max\{d_i \mid 1 \le i \le n\}$.

а) Докажи дека за произволни реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ важи

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \ge \tfrac{d}{2}. \qquad (1)$$

б) Докажи дека постојат реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ такви да во (1) важи знак за равенство.

73. а) Докажи дека за секои реални броеви $x, y, z \ne 1$ такви што $xyz = 1$ важи

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \ge 1. \qquad (1)$$

б) Докажи дека во (1) равенство се достигнува за бесконечно многу тројки рационални броеви.

74. Позитивните реални броеви $a_1, ..., a_n$ и k се такви да

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 3k,\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 3k^2 \text{ и } a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 > 3k^3 + k.$$

Докажи, дека разликата на некои два броја од броевите $a_1, ..., a_n$ е поголема од 1.

75. За се реалните броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 важи $|a_i - a_j| \ge 1$, за $i \ne j$. За некој реален број k се исполнети равенствата

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Докажи дека $k^2 \ge \frac{25}{3}$.

76. Нека a и b се реални броеви поголеми од -1. Докажи дека

$$\frac{1+a^6}{1+a} \cdot \frac{1+b^6}{1+b} \ge \frac{1+ab}{2} \cdot \frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

77. Нека $a, b, c, d > 0$ и нека $a + b + c + d = 1$. Докажи дека

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2} + \frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2} + \frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2} + \frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2} \ge \frac{1}{8}.$$

78. Нека $a, b, c, d > 0$. Докажи дека

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} + \frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3} + \frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3} + \frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3} \ge \frac{a+b+c+d}{4}. \qquad (1)$$

79. Нека $x, y, z > 0$ и нека $xy + yz + zx = 3xyz$. Докажи дека

$$x^2y + y^2z + z^2x \ge 2(x + y + z) - 3.$$

Кога важи знак за равенство?

II ГЛАВА
МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА
И НЕРАВЕНСТВА

1. ПРИНЦИП НА МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Во овој дел нема да го разгледуваме воведувањето на множеството природни броеви $\mathbf{N}=\{1,2,...,n,...\}$ и операциите во него, но ќе забележиме, дека всушност *Пеановите аксиоми* се тие кои го дефинираат множеството $\mathbf{N}$. Притоа имаме: множеството $\mathbf{N}$ е непразно и важи:

1. $1\in\mathbf{N}$.
2. За секој природен број k, постои единствен природен број k^+, кој го нарекуваме следбеник на k.
3. Ако $k^+=n^+$, тогаш $k=n$.
4. $1\neq k^+$, за секој $k\in\mathbf{N}$.
5. Ако $S\subseteq\mathbf{N}, 1\in S$ и од $k\in S$ следува дека $k^+\in S$, тогаш $S=\mathbf{N}$.

На значењето на Пеановите аксиоми нема посебно да се задржуваме, меѓутоа да забележиме дека со првата и четвртата аксиома се обезбедува бројот 1 да припаѓа на множеството природни броеви и тој да е "првиот" природен број. Понатаму, со втората аксиома се задаваат броевите $2=1^+$, $3=2^+$ итн., а нивната единственост ја овозможуваат третата и четвртата аксиома. За нашите разгледувања, од посебно значење е петтата аксиома, која уште е позната како *аксиома за индукција* и која всушност обезбедува единственост на множеството природни броеви. Всушност, единственоста на множеството природни броеви лежи во основата на *првиот принцип на математичка индукција,* кој е еден од основните методи за докажување на математички тврдења и кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T, кое зависи од природниот број n, и ако за T знаеме дека:

i) T е точно за природниот број 1;

ii) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k\geq 1$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење T е точно за секој природен број n.

Со помош на аксиомата за индукција може да се докаже и *вториот принцип на математичка индукција*, кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T , кое зависи од природниот број n , и ако за T знаеме дека:

i) T е точно за некој конкретен природен број m;

ii) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq m$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n \geq m$.

Пример 1. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \ldots + \tfrac{1}{2n} \geq \tfrac{1}{2} .$$

Решение. За $n=1$ имаме $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n=k$, т.е. дека

$$\tfrac{1}{k+1} + \tfrac{1}{k+2} + \ldots + \tfrac{1}{2k} \geq \tfrac{1}{2} .$$

За $n=k+1$, од индуктивната претпоставка и од неравенството $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ следува

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{k+2} + \ldots + \tfrac{1}{2k} + \tfrac{1}{2k+1} + \tfrac{1}{2k+2} &= (\tfrac{1}{k+1} + \tfrac{1}{k+2} + \ldots + \tfrac{1}{2k}) + (\tfrac{1}{2k+1} + \tfrac{1}{2(k+2)} - \tfrac{1}{k+1}) \\ &\geq \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2k+2}) > \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Конечно, од принципот на математичка индукција заклучуваме дека

$$\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \ldots + \tfrac{1}{2n} \geq \tfrac{1}{2} \text{, за секој } n \in \mathbf{N} . \blacksquare$$

Пример 2. За секој природен број m означуваме $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ и по дефиниција ставаме $0! = 1$. Докажи дека

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2 \text{, за } n > 1 .$$

Решение. Задачата ќе ја решиме со индукција по n. За $n=2$ имаме $(2 \cdot 2)! = 4! = 24 < 64 = 2^{2 \cdot 2}(2!)^2$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 2$ важи

$$(2k)! < 2^2 (k!)^2 .$$

Од индуктивната претпоставка за $k+1$ имаме

$$\begin{aligned}[2(k+1)]! = (2k)!(2k+1)(2k+2) &< 2^{2k}(k!)^2(2k+1)2(k+1) \\ &< 2^{2k+1} k!(k+1)k!2(k+1) = 2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2,\end{aligned}$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, што значи важи за секој $n > 1$. ■

Пример 3. Докажете дека за $n \geq 3$ е точно неравенството

$$n^{n+1} > (n+1)^n .$$

Решение. Задачата ќе ја решиме со индукција по n. За $n=3$ имаме $3^4 > 4^3$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека за некој природен број $n=k\geq 3$ е точно неравенството $k^{k+1} > (k+1)^k$

Од индуктивната претпоставка за $n=k+1$ имаме:

$$(k+1)^{k+2} > \frac{(k+1)^{k+2}(k+1)^k}{k^{k+1}} = \frac{(k+1)^{2(k+1)}}{k^{k+1}} = [\frac{(k+1)^2}{k}]^{k+1} = (k+2+\frac{1}{k})^{k+1} > (k+2)^{k+1},$$

т.е. неравенството важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

Пример 4. Нека x_1 е позитивен реален број и нека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи

$$x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k .$$

Докажи дека $x_{n+1} > \sum\limits_{k=1}^{n} kx_k$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=1$ имаме $x_2 \geq 3x_1 > x_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} kx_k$. т.е. тврдењето е точно за $n=1$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=m$, т.е. дека

$$x_{m+1} > \sum_{k=1}^{m} kx_k .$$

За $n=m+1$ имаме

$$\begin{aligned} x_{m+2} &\geq (m+3)x_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} kx_k = (m+1)x_{m+1} + 2x_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} kx_k \\ &> (m+1)x_{m+1} + 2\sum_{k=1}^{m} kx_k - \sum_{k=1}^{m} kx_k = (m+1)x_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} kx_k = \sum_{k=1}^{m+1} kx_k, \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека

$$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k \text{ за секој } n\in\mathbf{N}. \ ■$$

Пример 5. Докажи дека $\frac{n}{2^1(n-1)} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \frac{n}{2^3(n-3)} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}\cdot 1} < 4$ за секој природен број n таков што $n\geq 2$.

Решение. *Прв начин.* Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n=2$ имаме $\frac{2}{2^{2-1}1}=2<4$, па тврдењето е точно. Ако $n=3$ добиваме $\frac{3}{2^1\cdot 2}+\frac{3}{2^2\cdot 1}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}<4$, па неравенството важи и за $n=3$. Сега да претпоставиме дека неравенството е точно за природниот број n, $n\geq 3$. За $n+1$ имаме:

$$\frac{n+1}{2^1 n}+\frac{n+1}{2^2(n-1)}+...+\frac{n+1}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n+1}{2^n\cdot 1}=\frac{n+1}{n}(\frac{n}{2^1 n}+\frac{n}{2^2(n-1)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n}{2^n\cdot 1})$$

$$=\frac{n+1}{n}[\frac{n}{2^1 n}+\frac{1}{2}(\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+...+\frac{n}{2^{n-2}\cdot 2}+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1})]$$

$$\leq\frac{n+1}{n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4)=\frac{5}{2}(1+\frac{1}{n})\leq\frac{5}{2}(1+\frac{1}{3})=\frac{20}{6}<4.$$

Според тоа тврдењето важи за секој $n\geq 2$.

Втор начин. Неравенството ќе го докажеме со помош на математичка индукција. Воведуваме ознака

$$\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}.$$

За $n=2$ и $n=3$ неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека

$$\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}<4.$$

Тогаш

$$\sigma_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1}{2^i(n+1-i)}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n+1}{2^{i+1}(n-i)}=\frac{n+1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{2^i(n-i)}$$

$$=(1+\frac{1}{n})\frac{1+\sigma_n}{2}<(1+\frac{1}{n})\frac{1+4}{2}<4$$

Последното неравенство е исполнето за секој природен број $n>3$. Според принципот на математичка индукција $\sigma_n<4$, за секое n. ■

2. РЕГРЕСИВНА ИНДУКЦИЈА

При докажвање на голем број матеатички тврдења се користи таканаречениот принцип на регресивна индукција, кој го предложил францускиот математичар Коши. Овој метод на докажување, кој во литературата е познат како докажување од n кон $n-1$, се состои во докажување на импликацијата $T(n)\Rightarrow T(n-1)$, каде со $T(n)$ е означено тврдењето кое се докажува. Јасно, самата импликација не е доволна за да се докаже дека тврдењето $T(n)$ важи за секој природен број n, туку потребно е да се знае дека тврдењето важи за бесконечно многу природни броеви, што во некои случаи едноставно се докажува. Попрецизно, *принципот на регресивна индукција* гласи:

Нека $T(n)$ е тврдење кое зависи од природниот број n. Ако

i) $T(n)$ е точен исказ за бесконечно многу природни броеви и *ii)* за секој природен број $n>1$ исказот $T(n)\Rightarrow T(n-1)$ е вистинит, тогаш тврдењето $T(n)$ важи за секој природен број n.

Принципот на регресивна индукција прецизно може да се изведе од првиот принцип на математичка индукција. Меѓутоа, во нашите разгледувања ќе дадеме само интуитивно објаснување зошто овој принцип на заклучување е исправен. Имено, ако n_1 е произволен природен број, тогаш бидејќи $T(n)$ е точен исказ за бесконечно многу природни броеви, заклучуваме дека постои природен број n_2 таков да $n_2>n_1$ и $T(n_2)$ е точен исказ. Но, тогаш од *ii*) следува дека $T(n_1)$ е точен исказ. Сега тврдењето следува од произволноста на бројот n_1.

Пример 6. Докажи дека за позитивни броеви $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,\ b_n$ важи неравенството

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}\ .$$

Решение. Воведуваме смена $\frac{a_i}{b_i}=x_i,\ i=1,2,...,n$ и даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)}\geq 1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\ , \qquad (1)$$

кое ќе го докажеме со помош на регресивна индукција.

За $n=2$ даденото неравенство е еквивалентно со неравенството $\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}\geq 1+\sqrt{x_1x_2}$, т.е. со неравенството $x_1+x_2\geq 2\sqrt{x_1x_2}$, кое пак е еквивалентно со очигледното неравенство $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geq 0$.

Нека претпоставиме дека (1) важи за некој природен број n. Ќе докажеме дека важи за бројот $2n$. Навистина

$$\begin{aligned}\sqrt[2n]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{2n-1})(1+x_{2n})}&=\sqrt[n]{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}...\sqrt{(1+x_{2n-1})(1+x_{2n})}}\\&\geq\sqrt[n]{(1+\sqrt{x_1x_2})...(1+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}})}\\&\geq 1+\sqrt[n]{\sqrt{x_1x_2}...\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}}\\&=1+\sqrt[2n]{x_1x_2...x_{2n-1}x_{2n}}.\end{aligned}$$

Според тоа, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (1) важи за сите броеви од облик 2^n.

Нека претпоставиме дека (1) важи за некој природен број n и да докажеме дека важи $n-1$. За таа цел во (1) да земеме

$$1+x_n=\sqrt[n-1]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{n-1})}\ .$$

Добиваме

$$\sqrt[n]{[(1+x_1)...(1+x_{n-1})]^{1+\frac{1}{n-1}}} \geq 1+\sqrt[n]{x_1...x_{n-1}[\sqrt[n-1]{(1+x_1)...(1+x_{n-1})}-1]},$$

односно

$$\sqrt[n-1]{(1+x_1)...(1+x_{n-1})} \geq 1+\sqrt[n]{(x_1...x_{n-1})^{1+\frac{1}{n-1}}} = 1+\sqrt[n-1]{x_1...x_{n-1}},$$

па од принципот на регресивна индукција следува дека неравенството (1) важи за секој природен број n. ■

3. ЗАДАЧИ

1. Докажи дека за секој природен број $n>4$ важи $2^n > n^2$.

2. Докажи дека за секој природен број $n>3$ важи $n!>2^n$.

3. Докажи дека за секој природен број $n\geq 2$ важи

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2}>1.$$

4. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи $\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot ...\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot ...\cdot(4n+1)}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}$.

5. Да означиме

$$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n-2)\cdot(2n) \text{ и } (2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)\cdot(2n-1).$$

Докажи дека $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

6. Докажи дека $2!\cdot 4!\cdot ...\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n$, за $n>1$.

7. Докажи дека за секои природни броеви n и p такви што $p\leq n$ важи неравенството $(1+\frac{1}{n})^p<1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}$.

8. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ и за секои $a,b\in\mathbf{R}$ важи неравенството $a^{2^n}+b^{2^n}+n\geq(ab)^{2^{n-1}}+(ab)^{2^{n-2}}+...+ab+a+b$.

9. Докажи дека $(\frac{a+b}{2})^n\leq\frac{a^n+b^n}{2}$, $a>0, b>0$ и $n\in\mathbf{N}$.

10. Докажи дека, ако $x_1,x_2,...,x_n$ е растечка низа позитивни броеви, тогаш

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+...+\frac{x_n}{x_1}\geq\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+...+\frac{x_1}{x_n}$$

11. Нека $b_1\geq b_2\geq ...\geq b_{2n}$ се ненегативни броеви и $(a_1,a_2,...,a_{2n})$ е произволна пермутација на тие броеви. Докажи дека за секој $t\geq 0$ е точно неравенството

$$(a_1a_2+t)(a_3a_4+t)...(a_{2n-1}a_{2n}+t) \le (b_1b_2+t)(b_3b_4+t)...(b_{2n-1}b_{2n}+t)$$

12. Нека $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ се произволни позитивни реални броеви. Докажи го неравенството $\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4} + ... + \frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2} \le n-1$

13. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се различни природни броеви. Докажи дека

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2 \le a_1^3+a_2^3+...+a_n^3.$$

14. Нека $a_1 = 1, b_1 = 2$ и нека за секој $n \ge 1$ важи

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n+a_nb_n}{b_n} \text{ и } b_{n+1} = \frac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}.$$

Докажи дека $a_n < 5$, за $n \ge 1$.

15. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви и нека a е најмалиот меѓу нив. Докажи дека

$$\frac{1+x_1}{1+x_2} + \frac{1+x_2}{1+x_3} + ... + \frac{1+x_{n-1}}{1+x_n} + \frac{1+x_n}{1+x_1} \le n + \frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+...+(x_n-a)^2}{(1+a)^2}. \quad (1)$$

16. Докажи дека за секој $n \ge 2$ и за секои $x_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{1\le i<k\le n} x_ix_k \le 1.$$

17. Реалната функција $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ е позитивна и ограничена. Докажи дека постојат $x_1, x_2 \in [a,b]$ такви да

$$\frac{(x_2-x_1)[f(x_1)]^2}{f(x_2)} > \frac{1}{4}(b-a)f(a). \quad (1)$$

18. Дадени се реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n, (n>1)$ за кои важи

$$0 \le a_1 \le a_2 \le 2a_1, \quad a_2 \le a_3 \le 2a_2, \; ..., \; a_{n-1} \le a_n \le 2a_{n-1}. \quad (1)$$

Докажи дека постојат природни броеви $p_1, p_2, ..., p_n$ такви да

$$0 \le (-1)^{p_1}a_1 + (-1)^{p_2}a_2 + ... + (-1)^{p_n}a_n \le a_1.$$

19. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{3\cdot 5\cdot 7} + ... + \frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2n+1)} < \frac{1}{2}.$$

20. Нека $a > 2$ и нека $a_0 = 1, a \quad = a$ и $a_{n+1} = (\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2)a_n$. Докажи дека за секој $k \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_k} < \frac{1}{2}(2+a-\sqrt{a^2-4}).$$

21. Нека $0\le x_i\le 1,\ x_i+y_i=1,\ i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$(1-x_1x_2...x_n)^m+(1-y_1^m)(1-y_2^m)...(1-y_n^m)\ge 1,$$

за секои $m,n\in\mathbf{N}$.

22. Нека $x_i>0,\ i=1,2,...,n$. Докажи го неравенството

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}<\sqrt{n}\ .$$

23. Нека $n\ge 2$ е природен број и нека за позитивните реални броеви $a_0,a_1,...,a_n$ важи $(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1})=a_{k-1}-a_{k+1}$, за секој $k=1,2,...,n-1$. Докажи дека $a_n<\frac{1}{n-1}$.

24. Нека $n\ge 2$ е природен број и $0<a_1<a_2<...<a_{2n+1}$ се реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+...-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}}<\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}\ .$$

25. Нека $0\le x_0\le x_1\le...\le x_n\le...$ е растечка низа ненегативни цели броеви таква што за секој $k\ge 0$ бројот на членовите на низата кои се помали или еднакви на k е конечен. Тој број да го означиме со y_k. Докажи дека за секои природни броеви m и n е точно неравенството

$$\sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{j=0}^{m}y_j\ge(n+1)(m+1)\ .$$

III ГЛАВА
НЕРАВЕНСТВА НА КОШИ

1. НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ АРИТМЕТИЧКАТА, ГЕОМЕТРИСКАТА И ХАРМОНИСКАТА СРЕДИНА

Во оваа точка ќе ги разгледаме неравенствата меѓу аритметичката, геометриската и хармониската средина и нивната примена. За таа цел прво ќе го докажеме следново помошно тврдење кое е неопходно за натамошните разгледувања.

Лема 1. Ако $x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$ и $x_1 x_2 ... x_n = 1$ тогаш

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n,$$

при што $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Доказ. Даденото неравенство ќе го докажеме со математичка индукција по n.

i) За $n = 1$ неравенството е точно и притоа важи знак на равенство.

Ако $n = 2$ и $x_1 x_2 = 1$, тогаш едниот број е поголем или еднаков на 1, а другиот е помал или еднаков на 1, на пример $x_1 \leq 1$ и $x_2 \geq 1$. Според тоа,

$$x_1 + x_2 = 1 + x_1 x_2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) = 2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq 2$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_2 - 1 = 0$ или $1 - x_1 = 0$, што заедно со $x_1 x_2 = 1$ дава $x_1 = x_2 = 1$.

ii) Нека претпоставиме дека за $n = k$ и произволни реални броеви x_i, $i = 1,2,...,k$, чиј производ е единица, точно е неравенството

$$x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_i = 1, \; i = 1,2,...,k$.

Нека $n = k+1$ и $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ се позитивни реални броеви за кои $x_1 x_2 ... x_k x_{k+1} = 1$. Ако сите x_i не се еднакви на 1, тогаш имаме броеви поголеми од 1, но и помали од 1. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_1 < 1$ и $x_2 > 1$. Тогаш имаме k позитивни броеви $x_1 x_2, x_3, ..., x_{k+1}$ чиј производ е еднаков на 1, па според индуктивната претпоставка добиваме

$$x_1 x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1.$$

Но, тогаш

$$x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}=1+x_1x_2+x_3+x_4+...+x_k+x_{k+1}+(x_2-1)(1-x_1)$$
$$\geq k+1+(x_2-1)(1-x_1)\geq k+1,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1x_2=x_3=...=x_k=x_{k+1}=1$$

и при тоа $(x_2-1)(1-x_1)=0$, т.е. $x_1=x_2=x_3=...=x_k=x_{k+1}=1$. ■

Пример 1. Нека $a_i>0, i=1,2,...,n$ и $\varphi(a_i), i=1,2,...,n$ е произволна пермутација на множеството $\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{\varphi(a_1)}+\frac{a_2}{\varphi(a_2)}+...+\frac{a_n}{\varphi(a_n)}\geq n\,. \tag{1}$$

Решение. Ако φ е пермутација на множеството $\{a_1,a_2,...,a_n\}$, тогаш $a_1a_2...a_n=\varphi(a_1)\varphi(a_2)...\varphi(a_n)$, т.е.

$$\frac{a_1}{\varphi(a_1)}\cdot\frac{a_2}{\varphi(a_2)}\cdot...\cdot\frac{a_n}{\varphi(a_n)}=1\,.$$

Сега неравенството (1) непосредно следува од лема 1 и притоа знак за равенство важи ако и само и ако $\frac{a_i}{\varphi(a_i)}=1, i=1,2,...,n$. ■

Дефиниција 1. Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1,a_2, ...,a_n$. Броевите

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\;,\;\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\;,\;\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска и хармониска средина* на броевите $a_1,a_2,...,a_n$, соодветно.

Теорема 1 (неравенство на Коши). За аритметичката и геометриската средина на позитивните реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ важи

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\;,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n$.

Доказ. *Прв начин.* Означуваме $x_n=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$. Да ги разгледаме следниве n позитивни реални броеви $y_i=\frac{a_i}{x_n}$, $i=1,2,...,n$. За броевите y_i, $i=1,2,...,n$ важи $\prod_{i=1}^{n}y_i=1$, што според лема 1 значи $y_1+y_2+...+y_n\geq n$, т.е.

$$\frac{a_1}{x_n}+\frac{a_2}{x_n}+...+\frac{a_n}{x_n}\geq n\;,$$

односно

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}.$$

Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $y_1 = y_2 = ... = y_n$, т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Втор начин. а) Прво со математичка индукција k ќе докажеме дека тврдењето важи за сите природни броеви од облик $n = 2^k, k \in \mathbf{N}$.

За $k=1$, т.е. $n=2$ неравенството $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$ е еквивалентно со точното неравенство $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$. Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n = 2^k, k \geq 1$. Тогаш од претходно докажаното и од индуктивната претпоставка следува дека

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i = \frac{1}{2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i) \geq \sqrt{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i)}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}} = \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=n+1}^{2n} a_i} = \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи природните броеви од облик $n = 2^k, k \in \mathbf{N}$, т.е. за бесконечно многу природни броеви.

б) Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој природен број n и да земеме

$$a_n = \frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}.$$

Тогаш

$$\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}+\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2..a_{n-1}\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}},$$

од каде добиваме

$$\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1a_2..a_{n-1}}\sqrt[n]{\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}},$$

т.е.

$$(\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1})^{1-\frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{a_1a_2..a_{n-1}},$$

па затоа

$$\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2..a_{n-1}}.$$

конечно од принципот на регресивна индукција следува дека даденото неравенство е точно за секој природен број n. ■

Последица 1 (неравенство на Коши). За геометриската и хармониската средина на позитивни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доказ. Од теорема 1 следува

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}} = (\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n})^{1/n} \le \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{-1}}}$$

односно $\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} \ge \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_2}=\ldots=\frac{1}{a_n}$, т.е. ако и само ако $a_1=a_2=\ldots=a_n$. ■

Пример 2. а) Докажи дека за секој $x>0$ и за секој $n\in\mathbf{N}$ важи неравенството

$$1+\frac{x}{n} \ge \sqrt[n]{1+x}$$

б) Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c точно е неравенството

$$(a+b)(a+c) \ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}\ .$$

Решение. а) Од неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина, при $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=1$ и $x_n=1+x$ добиваме

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot(1+x)}$$

односно

$$1+\frac{x}{n} \ge \sqrt[n]{1+x}\ .$$

б) Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc \ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}\ .\ ■$$

Пример 3. а) Нека $a_1,a_2,\ldots,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1a_2\ldots a_n=1$. Докажи дека

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \ge 2^n\ .$$

б) Нека $x_0>x_1>\ldots>x_n$ се реални броеви. Докажи дека

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \ge 2n+x_n\ .$$

Решение. а) Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1+a_i}{2} \ge \sqrt{a_i}\ \text{, т.е. } 1+a_i \ge 2\sqrt{a_i}>0\text{, за } i=1,2,\ldots,n\ .$$

Ако ги помножиме овие n неравенства добиваме

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \ge 2^n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=2^n\ ,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i=1$, за $i=1,2,\ldots,n$.

б) Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$x_0-x_1+\frac{1}{x_0-x_1}+x_1-x_2+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+x_{n-1}-x_n+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \ge 2n\ ,$$

кое непосредно следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето n пати на броевите

$$x_{i-1}-x_i, \frac{1}{x_{i-1}-x_i}, i=1,2,...,n. \ \blacksquare$$

Пример 4. Докажи дека за позитивни реални броеви x, y, z точно е неравенството

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq x+y+z. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{1}{2}(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}) \geq \sqrt{\frac{xzy^2}{xz}}=y,$$

и аналогно добиваме

$$\frac{1}{2}(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}) \geq y \text{ и } \frac{1}{2}(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}) \geq x.$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. ■

Пример 5. Ненегативните реални броеви a,b,x и y се такви што $a^5+b^5 \leq 1$ и $x^5+y^5 \leq 1$. Докажи дека

$$a^2x^3+b^2y^3 \leq 1.$$

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$a^2x^3=\sqrt[5]{a^5a^5x^5x^5x^5} \leq \frac{1}{5}(a^5+a^5+x^5+x^5+x^5)=\frac{2}{5}a^5+\frac{3}{5}x^5,$$

$$b^2y^3=\sqrt[5]{b^5b^5y^5y^5y^5} \leq \frac{1}{5}(b^5+b^5+y^5+y^5+y^5)=\frac{2}{5}b^5+\frac{3}{5}y^5.$$

Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме

$$a^2x^3+b^2y^3 \leq \frac{2}{5}a^5+\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{5}b^5+\frac{3}{5}y^5=\frac{2}{5}(a^5+b^5)+\frac{3}{5}(x^5+y^5) \leq \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1. \ \blacksquare$$

Пример 6. Нека $p>1$ е реален број. Најди $\min(x+y)$, каде броевите x и y се решенија на равенката

$$(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=p. \qquad (1)$$

Решение. Да означиме $t=x+\sqrt{1+x^2}$. Тогаш $t>0$ и $x=\frac{t^2-1}{2t}$. Равенката (1) е еквивалентна на равенката $y+\sqrt{1+y^2}=\frac{p}{t}$, од каде наоѓаме $y=\frac{p^2-t^2}{2pt}$. Од претходно изнесеното и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$x+y=\frac{t^2-1}{2t}+\frac{p^2-t^2}{2pt}=\frac{p-1}{2p}(t+\frac{p}{t}) \geq \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

Знак за равенство се достигнува ако и само ако $t=\frac{p}{t}$, т.е. ако и само ако $x=y=\frac{p-1}{2\sqrt{p}}$. Според тоа, $\min(x+y)=\frac{p-1}{\sqrt{p}}$, за $x=y=\frac{p-1}{2\sqrt{p}}$. ■

Пример 7. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1+a_2+...+a_n=1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \geq n^2 .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и од условот непосредно следува дека

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}} \text{, т.е. } \sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = n^2 .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$. ■

Пример 8. Нека $k\in\mathbf{N}$ и $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1+a_2+...+a_n=1$. Докажи го неравенството

$$a_1^{-k}+a_2^{-k}+...+a_n^{-k} \geq n^{k+1} .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \frac{1}{n} ,$$

па затоа

$$n \leq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot ... \cdot\frac{1}{a_n}} ,$$

од што следува

$$n^k \leq \sqrt[n]{a_1^{-k}a_2^{-k}...a_n^{-k}} \leq \frac{a_1^{-k}+a_2^{-k}+...+a_n^{-k}}{n} ,$$

па затоа

$$a_1^{-k}+a_2^{-k}+...+a_n^{-k} \geq n^{k+1} .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$. ■

Пример 9. Докажи дека ако

$$x_1>0,\ x_2>0,\ x_1y_1-z_1^2>0,\ x_2y_2-z_2^2>0 ,$$

тогаш

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2} . \qquad (2)$$

Најди потребните и доволни услови при кои важи знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува $y_1>0$, $y_2>0$. Нека

$$u_1=\sqrt{x_1y_1}+z_1 ,\ u_2=\sqrt{x_2y_2}+z_2 ,\ v_1=\sqrt{x_1y_1}-z_1 \text{ и } v_2=\sqrt{x_2y_2}-z_2 .$$

Јасно, u_1, u_2, v_1 и v_2 се позитивни реални броеви. Понатаму, од

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 &= (\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2})^2+(\sqrt{x_2y_1}-\sqrt{x_1y_2})^2-(z_1+z_2)^2\\ &= (\sqrt{x_1y_1}+z_1+\sqrt{x_2y_2}+z_2)(\sqrt{x_1y_1}-z_1+\sqrt{x_2y_2}-z_2)+(\sqrt{x_2y_1}-\sqrt{x_1y_2})^2\\ &= (u_1+u_2)(v_1+v_2)+(\sqrt{x_2y_1}-\sqrt{x_1y_2})^2\end{aligned}$$

следува

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 \ge (u_1+u_2)(v_1+v_2),$$

односно

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)},$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_1y_2 = x_2y_1$. Понатаму, од

$$x_1y_1 - z_1^2 = u_1v_1,\ x_2y_2 - z_2^2 = u_2v_2,$$

па за да го докажеме неравенството (1) доволно е да докажеме дека

$$\frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)} \le \frac{1}{u_1v_1} + \frac{1}{u_2v_2},$$

односно

$$8u_1u_2v_1v_2 \le (u_1+u_2)(v_1+v_2)(u_1v_1+u_2v_2). \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$2\sqrt{u_1u_2} \le u_1+u_2,\ 2\sqrt{v_1v_2} \le v_1+v_2,\ 2\sqrt{u_1v_1u_2v_2} \le u_1v_1+u_2v_2,$$

и ако ги помножиме овие неравенства го добиваме неравенството (2).

Јасно, во (2) знак за равенство важи ако и само ако $u_1 = u_2, v_1 = v_2$, што значи дека во (1) знак за равенство важи ако и само ако $x_1y_2 = x_2y_1$, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, т.е. ако и само ако $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. Провери! ■

2. НЕРАВЕНСТВО МЕЃУ АРИТМЕТИЧКАТА И КВАДРАТНАТА СРЕДИНА

Дефиниција 2. Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Бројот

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}$$

го нарекуваме *квадратна средина* на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$.

Теорема 2 (неравенство на Коши). За аритметичката и квадратната средина на позитивните реални $a_1, a_2, ..., a_n$ броеви важи

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доказ. За произволен пар индекси (i, j) такви што $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ и $i < j$ важи $2a_ia_j \le a_i^2 + a_j^2$. Ако сите овие $\frac{n(n-1)}{2}$ неравенства ги собереме, добиваме

$$2\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j \le (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad \text{или} \quad (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 .$$

Конечно,

$$(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} \ge \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

со што неравенството е докажано. При тоа знак равенство важи ако и само ако за секој пар индекси (i, j) важи $2a_i a_j = a_i^2 + a_j^2$, т.е. $a_i = a_j$, за секои i, j, што значи дека $a_1 = a_2 = ... = a_n$. ■

Пример 10. Нека k е природен број и $a_1, a_2, ..., a_{2k}$ се позитивни броеви помали од 1. Докажи го неравенството

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + ... + \sqrt{a_{2k-1}^2 + (1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} \ge k\sqrt{2}$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина непосредно следува

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + ... + \sqrt{a_{2k-1}^2 + (1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} \ge$$

$$\ge \sqrt{2}(\tfrac{a_1+1-a_2}{2} + \tfrac{a_2+1-a_3}{2} + ... + \tfrac{a_{2k}+1-a_1}{2}) = \sqrt{2}\,\tfrac{2k}{2} = k\sqrt{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$a_1 = a_3 = ... = x,\ a_2 = a_4 = ... = y \ \text{ и } \ x + y = 1 . \ ■$$

Пример 11. Нека a, b, c, d, e и f се реални броеви за кои важи

$a + b + c + d + e + f = 10$ и

$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 + (e-1)^2 + (f-1)^2 = 6$.

Да се најде најголемата можна вредност за бројот f .

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$a + b + c + d + e = 10 - f \ \text{ и } \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 20 - f^2 .$$

Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$\tfrac{a+b+c+d+e}{5} \le \sqrt{\tfrac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}} ,$$

т.е. $\frac{(10-f)^2}{5} \le 20 - f^2$. Значи, $2f(3f - 10) \le 0$, од каде следува $f_{\max} = \frac{10}{3}$ и оваа вредност се достигнува за $a = b = c = d = e = \frac{4}{3}$. ■

3. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ – БУЊАКОВСКИ – ШВАРЦ

Во овој дел ќе го разгледаме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, кое има забележителна примена во бројните математички дисциплини. Ова неравенство прв го докажал францускиот математичар Коши во 1821 година, а интегралната аналогија на истото ја докажал рускиот математичар Буњаковски во 1859 година. Да забележиме дека ова неравенство во своите работи го користел и германскиот математичар Шварц, но дури во 1884 година.

Теорема 3 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако a_i, $b_i \in \mathbf{R}$, за $i = 1, 2, ..., n$, тогаш

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \,, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} \,. \tag{2}$$

Доказ. *Прв начин*. Да го разгледаме квадратниот трином

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \,.$$

Полиномот $P(t)$ е ненегативен за секој $t \in \mathbf{R}$, па затоа неговата дискриминанта е непозитивна, т.е. точно е неравенството

$$4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0 \,,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Понатаму, во (1) важи знак за равенство ако и само ако дискриминатата на полиномот $P(t)$ е еднаква на нула, што значи ако и само ако $a_i t - b_i = 0$, за $i = 1, 2, ..., n$, т.е. ако и само ако се исполнети равенствата (2).

Втор начин. Со помош на математичка индукција ќе го докажеме следниов идентитет на Лагранж

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \,, \tag{3}$$

од кој непосредно следува неравенството (1).

За $n = 2$ со непосредна проверка можеме да докажеме дека важи

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \,,$$

т.е. Лагранжовиот идентитет е точен.

Нека претпоставиме дека идентитетот (3) важи за некој природен број n и со L_n и D_n да ги означиме неговата лева и десна страна, соодветно.Од

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= (\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2) - (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1})^2 \\ &= L_n + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2a_{n+1} b_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &= D_n + (a_1 b_{n+1} - a_{n+1} b_1)^2 + (a_2 b_{n+1} - a_{n+1} b_2)^2 + ... + (a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n)^2 \,, \end{aligned}$$

$$a_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2+b_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2a_{n+1}b_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}(a_ib_{n+1}-a_{n+1}b_i)^2$$

и идуктивната претпоставка следува $L_{n+1}=D_{n+1}$, што значи дека идентитетот (3) важи и за $n+1$, па значи важи за секој природен број. ■

Во следните две последици ќе покажеме како со помош на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц може да се докажат неравенствата меѓу аритметичката и квадратната и меѓу аритметичката и хармониската средина.

Последица 2. Ако $a_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\le\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\ ,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n$.

Доказ. Нека $a_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и да земеме $b_i=1, i=1,2,...,n$. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot 1)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}1^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2\le n\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\le\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\ .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$a_1=a_2=...=a_n\ .\ ■$$

Последица 3. Ако $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=...=x_n$.

Доказ. Земаме $a_i=\sqrt{x_i},\ b_i=\frac{1}{\sqrt{x_i}},\ i=1,2,...,n$. Со замена во неравенството (1) добиваме

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_i}})^2\le\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}^2}\ \Leftrightarrow\ n^2\le\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\ \Leftrightarrow\ \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\frac{1}{\sqrt{x_1}}}=\frac{\sqrt{x_2}}{\frac{1}{\sqrt{x_2}}}=...=\frac{\sqrt{x_n}}{\frac{1}{\sqrt{x_n}}}\ ,$$

т.е. ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$. ■

Пример 12. Нека е $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажи дека важи неравенството $|am + bn + cp| \le 1$

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата и од неравенството на Коши-Буњаковски Шварц имаме

$$|am + bn + cp| \le 1\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \cdot 1 = 1 .$$

Втор начин. Од $(a \pm m)^2 \ge 0$, $(b \pm n)^2 \ge 0$, $(c \pm p)^2 \ge 0$ добиваме

$$a^2 \pm 2am + m^2 \ge 0$$

$$b^2 \pm 2bn + n^2 \ge 0$$

$$c^2 \pm 2cp + p^2 \ge 0$$

Ако ги собереме овие неравенства и го искористиме условот на задачата добиваме последователно добиваме

$$2 \pm 2(am + bn + cp) \ge 0 ,$$

$$-1 \le am + bn + cp \le 1 ,$$

$$|am + bn + cp| \le 1 .$$ ■

Пример 13. Нека се x, y, z позитивни броеви такви да $x + y + z = 1$. Докажи дека

$$\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} \le \sqrt{\tfrac{2}{3}} .$$

Решение. Најпрво да се потсетиме дека од очигледното неравенство

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0$$

следува неравенството

$$3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2 \qquad (4)$$

Понатаму, применувајќи го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и неравенството (4) добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} &= \sqrt{xy}\sqrt{1-z} + \sqrt{yz}\sqrt{1-x} + \sqrt{zx}\sqrt{1-y} \\ &\le \sqrt{xy + yz + zx}\sqrt{(1-z) + (1-x) + (1-y)} \\ &= \sqrt{xy + yz + zx}\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sqrt{\tfrac{(x+y+z)^2}{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 14. Нека $a_1 a_2 ... a_n = 1, a_i > 0, i = 1, 2, ..., n$. Докажи дека

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n} \le a_1 + a_2 + ... + a_n . \qquad (5)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n}}{n} \ge \sqrt[n]{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}...\sqrt{a_n}} = 1 ,$$

т.е.

$$n \le \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n} \ . \qquad (6)$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и од неравенството (6) следува

$$\begin{aligned}(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n})^2 &\le (1^2 + 1^2 + ... + 1^2)(a_1 + a_2 + ... + a_n)\\ &= n(a_1 + a_2 + ... + a_n)\\ &\le (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n})(a_1 + a_2 + ... + a_n).\end{aligned}$$

Конечно, ако последното неравенство го поделиме со $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n}$ го добиваме неравенството (5). ■

Пример 15. Нека $x_i \ge 0$, $i = 1,2,...,25$ се реални броеви такви што $x_1 + x_2 + ... + x_{25} = 1$. Одреди ја најголемата можна вредност на изразот

$$P = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{24}x_{25}$$

Решение. Имаме $x_i \ge 0$, $i = 1,2,...,25$. Ако прво го примениме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, а потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}P = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{24}x_{25} &\le (x_1 + x_3 + ... + x_{25})(x_2 + x_4 + ... + x_{24})\\ &\le (\tfrac{x_1+x_2+...+x_{25}}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само

$$x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}, x_3 = x_4 = ... = x_{25} = 0$$

и притоа добиваме $P = \frac{1}{4}$. Значи, најголемата можна вредност на изразот P е $\frac{1}{4}$. ■

Пример 16. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$. Да се докаже неравенството

$$\frac{a}{a^2-bc+1} + \frac{b}{b^2-ca+1} + \frac{c}{c^2-ab+1} \ge \frac{1}{a+b+c} \ .$$

Решение. Лесно се докажува дека имените во левиот израз се позитивни. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2-bc+1} + \frac{b}{b^2-ca+1} + \frac{c}{c^2-ab+1} &= \frac{a^2}{a^3-abc+a} + \frac{b^2}{b^3-cab+b} + \frac{c^2}{c^3-abc+c}\\ &\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a+b+c-3abc}\end{aligned}$$

Понатаму бидејќи

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - \tfrac{1}{3})\end{aligned}$$

следува дека

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a+b+c-3abc} &= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+1-\frac{1}{3})} = \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+\frac{2}{3}}\\ &= \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{a+b+c},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

4. АНГЕЛСКИ ПРИНЦИП НА МИНИМУМ

Во овој дел ќе го разгледаме таканаречениот Ангелски принцип на минимум, кој всушност е само запис на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц во друга форма.

Теорема 4 (Ангелски принцип на минимум). Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви и $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви. Тогаш

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = ... = \frac{a_n}{x_n}. \tag{2}$$

Доказ. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц непосредно следува неравенството

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 &= \left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}\sqrt{x_1} + \frac{a_2}{\sqrt{x_2}}\sqrt{x_2} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\sqrt{x_n}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n}\right)(x_1 + x_2 + ... + x_n),\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

Јасно знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{\sqrt{x_1}} : \sqrt{x_1} = \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} : \sqrt{x_2} = ... = \frac{a_n}{\sqrt{x_n}} : \sqrt{x_n},$$

т.е. ако и само ако важи (2).

Втор начин. За $n = 2$ неравенството (1) има облик

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} \geq \frac{(a_1+a_2)^2}{x_1+x_2},$$

и тоа е еквивалентно со неравенството

$$(a_1^2 x_2 + a_2^2 x_1)(x_1 + x_2) \geq (a_1 + a_2)^2 x_1 x_2,$$

т.е. со неравенството $(a_1 x_2 - a_2 x_1)^2 \geq 0$, кое очигледно е точно и притоа знак за равество важи ако и само ако $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2}$.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n = k$. Тогаш, за $n = k + 1$, од индуктивната претпоставка и претходно докажаното следува

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_k^2}{x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1})^2}{x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n \in \mathbf{N}$. ■

Пример 17. Нека a, b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4.$$

Решение. За $n = 2$, од неравенството (1) следува

$$a^4+b^4=\frac{a^4}{1}+\frac{b^4}{1}\ge\frac{(a^2+b^2)^2}{2}\ge\frac{[\frac{(a+b)^2}{2}]^2}{2}=\frac{(a+b)^4}{8}.\ ■$$

Пример 18. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c,d важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{64}{1+b+c+d}.$$

Решение. Користејќи го Ангелскиот принцип на минимум, неравенството (1), добиваме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\ge\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{1+b+c+d}.\ ■$$

Пример 19. Ако $a_i, b_i>0$, за $i=1,2,...,n$ се такви да $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$, докажи дека

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+...+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\ge\frac{1}{2}(a_1+a_2+...+a_n).$$

Решение. Од Ангелскиот принцип на минимум и условот на задачата следува

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+...+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{a_1+b_1+a_2+b_2+...+a_n+b_n}=\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{2(a_1+a_2+...+a_n)}$$
$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+...+a_n),$$

што и требаше да се докаже. ■

Забелешка 1. а) Непосредна последица од теорема 4 е неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. Имено, ако $a_i, b_i\in\mathbf{R}$, за $i=1,2,...,n$, тогаш од неравенството (1) следува неравенството

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+...+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2}=\frac{(a_1b_1)^2}{b_1^2}+\frac{(a_2b_2)^2}{b_2^2}+...+\frac{(a_nb_n)^2}{b_n^2}$$
$$\ge\frac{(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2},$$

кое е еквивалентно со неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

б) Непосредна последица од теорема 4 е неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина. Навистина, ако $a_i,>0$, за $i=1,2,...,n$, тогаш од (1) следува неравенството

$$\frac{a_1^2}{n}+\frac{a_2^2}{n}+...+\frac{a_n^2}{n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{n+n+...+n}=(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n})^2,$$

кое е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина.

Последица 4 (неравенство на Несбит). Ако $a,b,c>0$, тогаш

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Доказ. Од Ангелскиот принцип на минимум и познатото неравенство

$$(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$$

непосредно следува

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}\,.\ \blacksquare$$

Пример 20. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви да $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{ab+b}+\frac{1}{bc+c}+\frac{1}{ca+a}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Решение. Земаме $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ и притоа даденото неравенство е еквивалентно на неравенството на Несбит

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}\,.\ \blacksquare$$

5. ЗАДАЧИ

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1a_2...a_n=1$. Докажи дека $(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n$.

2. Докажи го неравенството

$$(x^2+y^2+2)^{x^4+y^4}>(x^4+y^4+2)^{x^2y^2}.$$

3. Докажи дека при $x\geq 2$, $y\geq 2$, $z\geq 2$ важи неравенството

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z)\geq 125xyz\,.$$

4. Ако $0<a,b<1$, тогаш $\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2}<\frac{1}{4}$. Докажи!

5. Докажи дека $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$, за произволни позитивни реални броеви a,b,c,d.

6. Докажи дека за ненегативни реални броеви a и b важи

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

7. Ако a, x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+z}{a+x}x+\frac{a+x}{a+y}y+\frac{a+y}{a+z}z\leq x+y+z\leq\frac{a+y}{a+z}x+\frac{a+z}{a+x}y+\frac{a+x}{a+y}z\,.$$

8. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z})\geq 64$$

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\geq\frac{9}{a+b+c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\,.$$

10. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=3$. Докажи дека

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca\ .$$

11. Нека се a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 позитивни реални броеви такви да

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1.$$

Докажи дека

$$(\tfrac{1}{a_1}-1)(\tfrac{1}{a_2}-1)(\tfrac{1}{a_3}-1)(\tfrac{1}{a_4}-1)(\tfrac{1}{a_5}-1)\geq 1024\ .$$

12. Докажи дека за ненегативни реални броеви a,b,c,x,y,z важи неравенството

$$\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}\geq \sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}\ .$$

13. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви и m,n се природни броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[m+n]{a^m c^n}+\sqrt[m+n]{b^m d^n}\leq \sqrt[m+n]{(a+b)^m (c+d)^n}.$$

14. Ако $x>y\geq 0$, докажи дека

$$x+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}\geq 3\ .$$

15. Нека x, y и z се ненегативни реални броеви за кои е исполнето равенството $x+y+z=1$. Докажи ги неравенствата

$$0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq \tfrac{7}{27}\ .$$

16. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што, $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Докажи го неравенството

$$\frac{a+b+c}{3}\geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\ .$$

17. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $abcd=1$. Докажи дека

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq 4\ .$$

18. Нека $P(x)=ax^2+bx+c$ е квадратен трином со ненегативни реални коефициенти. Докажи дека за било кој позитивен реален број x важи

$$P(x)P(\tfrac{1}{x})\geq [P(1)]^2\ .$$

19. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\tfrac{a}{b+c}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{b}{c+a}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{c}{a+b}+\tfrac{1}{2})\geq 1.$$

20. Збирот на природните броеви x,y и z е еднаков на 100. Определи ја најголемата вредност на изразот $xy+yz+zx$.

21. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq \frac{1}{2}\ .$$

22. За позитивните броеви x и y е исполнето неравенството $x^2+y^3 \geq x^3+y^4$. Докажи дека $x^3+y^3 \leq 2$.

23. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви a,b,c е исполнето неравенството

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq a+b+c.$$

24. Ако x и y се позитивни реални броеви, тогаш

$$x^3+y^3 \geq xy(x+y).$$

25. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви a,b,c е исполнето неравенството

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

26. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

27. Докажи дека

$$(1+\tfrac{a}{b})(1+\tfrac{b}{c})(1+\tfrac{c}{a}) \geq 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}},$$

за било кои позитивни реални броеви a,b,c.

28. Докажи дека

$$(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})^2 \geq \tfrac{3}{2}(\tfrac{a+b}{c}+\tfrac{b+c}{a}+\tfrac{c+a}{b}),$$

за било кои позитивни реални броеви a,b,c.

29. Нека $c \geq b \geq a \geq 0$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc.$$

30. Нека a,b се позитивни реални броеви. Докажи

$$\sqrt[3]{\tfrac{a}{b}}+\sqrt[3]{\tfrac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b})}.$$

31. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

33. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}+\frac{2}{1+a}.$$

34. Ако $x,y,z\in[1,\frac{3}{2}]$, тогаш

$$xy\sqrt{3-2z}+yz\sqrt{3-2x}+zx\sqrt{3-2y}\le x^3+y^3+z^3 .$$

35. Нека a,b,c се реални броеви и нека постојат $x,y,z\in\{-1,1\}$ такви да $xa+yb+zc=0$. Најди ја најмалата можна вредност на изразот

$$(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})^2 .$$

36. Најди го најголемиот број A така што неравенството

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ge A$$

е исполнето за за секои позитивни реални броеви x,y,z.

37. Докажи дека за секој природен број n и за секои ненегативни реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ важи

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\le\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^k}{k!} .$$

38. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви такви што $x_1x_2...x_n=a$. Докажи дека

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\ge(1+\sqrt[n]{a})^n .$$

39. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}\ge\frac{n}{n-1} .$$

40. Докажи го неравенството

$$n!<(\frac{n+1}{2})^n,\ n>1 .$$

41. Докажи го неравенството

$$(n!)^2<[\frac{(n+1)(n+2)}{6}]^n,\quad n>1 .$$

42. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важи

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}<n-n^{\frac{n-1}{n}} .$$

43. Докажи дека за секој природен број n важи

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+n\ge n\sqrt[n]{n+1} .$$

44. Докажи го неравенството

$$1+\frac{1}{1!\sqrt{2!}}+\frac{1}{2\sqrt{2!}\sqrt[3]{3!}}+...+\frac{1}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)!}\sqrt[n]{n!}}>\frac{2(n^2+n-1)}{n(n+1)} . \qquad (1)$$

45. Докажи дека $\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2$, за секој $n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$.

46. Нека се $x_1, x_2, ..., x_n$ ненегативни реални броеви и $r_1, r_2, ..., r_n$ позитивни рационални броеви такви што $r_1 + r_2 + ... + r_n = 1$. Докажи дека

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} ... x_n^{r_n} \le r_1^{r_1} r_2^{r_2} ... r_n^{r_n} (x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

47. Нека

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}}.$$

Дали постои позитивна константа C таква што $n \le S_n \le Cn$, за секој природен број $n \ge 3$.

48. Реалните броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни и такви што $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Докажи дека

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + ... + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \ge \frac{n^2}{3}.$$

49. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви такви што $x_1 x_2 ... x_n = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + ... + \frac{1}{n-1+x_n} \le 1.$$

50. Нека $n \ge 2$ е природен број и $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \ge x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n. \tag{1}$$

Докажи дека

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \le \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n}. \tag{2}$$

51. Најди го најмалиот природен број M таков да неравенството

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \le M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за секои реални броеви a, b, c.

52. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни броеви такви што

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1.$$

Докажи дека

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+...+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+...+a_n} + ... + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+...+a_{n-1}} \ge \frac{n}{2n-1}.$$

53. Нека $n \ge 2$ е цел број.

а) Да се најде најмалата константа C таква што неравенството

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C\Big(\sum_{1 \le i \le n} x_i\Big)^4 \tag{1}$$

важи за секои ненегативни реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$.

б) За константата C, да се најде кога важи знак за равенство.

54. Дадени се реални броеви $a_i, b_i, i = 1, 2, ..., n$ такви да

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0,\ b_1 \geq a_1,\ b_1 b_2 \geq a_1 a_2,\ ...,\ b_1 b_2 ... b_n \geq a_1 a_2 ... a_n.$$

Докажи дека

$$b_1 + b_2 + ... + b_n \geq a_1 + a_2 + ... + a_n .$$

55. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви и $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Докажи го неравенството

$$(a_1 + \frac{1}{a_1})^2 + (a_2 + \frac{1}{a_2})^2 + ... + (a_n + \frac{1}{a_n})^2 \geq n(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n})^2$$

56. Ако $a \geq 1,\ b \geq 1$, тогаш $3(\frac{a^2-b^2}{8})^2 + \frac{ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{8}}$. Докажи!

57. Нека $n \geq 2$ и $c_1, c_2, ..., c_n$ се реални броеви такви што

$$(n-1)(c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2) = (c_1 + c_2 + ... + c_n)^2$$

Докажи, дека или $c_k \geq 0$, за секој k или $c_k \leq 0$ за секој k .

58. Нека се $x_1, x_2, ..., x_n$ позитивни броеви и

$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ ,\ K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} .$$

Докажи дека барем еден од броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ го задоволува неравенството

$$A - \sqrt{K^2 - A^2} \leq x_j \leq A + \sqrt{K^2 - A^2}$$

59. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1 .$$

Докажи дека за секој природен број $k \geq 2$ постојат цели броеви $a_1, a_2, ...,\ a_n$, не сите еднакви на нула такви што $|a_i| \leq k-1$ за $i = 1, 2, ..., n$ и

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1} .$$

60. Нека a, b, c се позитивни броеви такви да $abc \leq a + b + c$. Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3} abc$.

61. За реалните броеви $x_1, x_2, ..., x_6$ се исполнети равенствата

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 .$$

Докажи дека

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \leq \frac{1}{2} .$$

62. Нека $n > 1$ и $a_i > 0, i = 1, 2, ..., n$. Докажи дека

$$(a_1 + 2a_2 + ... + na_n) \max\{a_i \mid i = 1, 2, ..., n\} \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \ .$$

63. Нека $n \geq 2$ е природен број и нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви такви да $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} = 1$. Докажи дека

$$x_1 x_2 ... x_n \geq (n-1)^n .$$

64. Докажи дека за секои позитивни броеви a и b важи

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} .$$

65. Докажи дека за секои позитивни броеви a, b, c важи

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc} .$$

66. Ако за позитивните релани броеви a, b, c, d важи

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

докажи дека

$$a^2b^2cd + ab^2c^2d + abc^2d^2 + a^2bcd^2 + a^2bc^2d + ab^2cd^2 \leq \frac{3}{32} .$$

67. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви да

$$ab + bc + ca = 3 .$$

Докажи дека

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc} .$$

68. За позитивните реални броеви x, y, z важи $xyz = 32$. Најди го минимумот на изразот $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$.

69. Нека $a, b, c \in \mathbf{N}$. Најди ја најмалата вредност на изразот

$$S = \frac{1+a^2}{15+b^2+c^2} + \frac{15+b^2+c^2}{1+a^2} + \frac{6+b^2}{10+a^2+c^2} + \frac{10+a^2+c^2}{6+b^2} + \frac{9+c^2}{7+a^2+b^2} + \frac{7+a^2+b^2}{9+c^2} .$$

70. Ако за реалните броеви x, y, z, w се реални броеви такви да $x + y + z + w = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, докажи дека

$$-1 \leq wx + xy + yz + zw \leq 0 . \qquad (1)$$

71. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви да

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1 .$$

Докажи дека

$$a + b + c \geq ab + bc + ca . \qquad (1)$$

72. Нека a, b, c се реални броеви такви што

$$a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2a - 12b + 6c + 2 = 0 .$$

Определи ја најголемата вредност на збирот $a + b + c$.

73. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})^2 \geq (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) .$$

74. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $ab+bc+ca=1$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)} \le \frac{\sqrt[3]{3}}{3abc} .$$

75. Нека a,b,c се по парови различни позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1.$$

76. Реалните броеви a,b,c го задоволуваат условот

$$a^2+b^2+c^2=3.$$

Докажи дека

$$|a|+|b|+|c|-abc\le 4 .$$

77. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=2.$$

Докажи дека

$$ab+bc+ca\le \frac{3}{2} .$$

78. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што

$$a^2+b^2+c^2<2(a+b+c).$$

Докажи дека

$$3abc<4(a+b+c).$$

79. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3(a^2+b^2+c^2) .$$

80. Ако a,b,c се ненегативни цели броеви такви, што

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge \frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2 .$$

81. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c такви што $a+b+c=3$, важи

$$\frac{a^2+3b^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{b^2+3c^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{c^2+3a^2}{ca^2(4-ca)}\ge 4 .$$

82. Нека x,y,z се реални броеви поголеми од 1 такви да $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Докажи дека

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} .$$

83. Ако $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$ и $a+b+c+d=1$, докажи дека

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geq\frac{1}{2}.$$

84. Ако $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ и $ab+bc+ca\leq 3abc$, докажи дека

$$a+b+c\leq a^3+b^3+c^3.$$

85. Нека x,y,z се позитивни броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека

а) $\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y}\geq 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$,

б) $\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y}\leq 2$.

86. Нека x,y,z се позитивни броеви такви да $xyz\geq 1$. Докажи дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0.$$

87. Најди најмал реален број K таков да за секои позитивни реални броеви x,y,z важи

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\leq K\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

88. Нека $x_i, i=1,2,...,n,n+1$ се позитивни реални броеви такви што $x_1+x_2+...+x_n=x_{n+1}$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)}.$$

89. Нека $n\geq 2$ и $a_i\in\mathbf{R}^+, i=1,2,...,n$ се такви да $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$. Докажи дека за секои $x_i\in\mathbf{R}^+, i=1,2,...,n$ такви да $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ важи

$$2\sum_{i<j}x_ix_j\leq\frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i^2}{1-a_i}.$$

90. Докажи дека за секои реални броеви $a_i, i=1,2,...,n$ важи

$$\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)}\leq\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

91. Нека $a_i, i=1,2,...,n$ се ненегативни броеви. Докажи, дека неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2)^2\leq\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^4$$

е точно за произволни реални броеви $x_i, i=1,2,...,n$ ако и само ако $\sum_{i=1}^{n}a_i\leq 1$.

92. Нека c е произволен позитивен реален број. Најди ја онаа пермутација $k_0,k_1,k_2,...,k_n$ на броевите $0,1,2,...,n$ за која изразот

$$c^{k_0}+c\cdot c^{k_1}+c^2\cdot c^{k_2}+...+c^n\cdot c^{k_n}$$

достигнува максимална вредност.

93. Нека $a_1,a_2,...,a_{2008}$ се реални броеви такви што

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2008}=0 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2008}^2=502. \end{cases}$$

Одреди ја максималната вредност за a_{2008}. Најди барем една низа од вредности $a_1,a_2,...,a_{2007}$ во која таа се достигнува.

94. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни броеви, за кои што важи $x_1+x_2+...+x_n\geq\sqrt{n}$, $n\geq1$. Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{2}+...+\tfrac{1}{n}),\ n\geq1.$$

95. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се дадени реални броеви, не сите еднакви на нула. Реалните броеви $r_1,r_2,...,r_n$ се такви да за секои реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i-a_i)\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ .$$

Најди ги броевите $r_1,r_2,...,r_n$.

96. Позитивните реални броеви $x_1,x_2,...,x_{1997}$ го задоволуваат условот $x_{n+1}^2\geq\frac{x_1^2}{1^3}+\frac{x_2^2}{2^3}+...+\frac{x_n^2}{n^3}$, за $n=1,2,...,1996$. Докажи дека постои природен број N таков што $\sum_{n=1}^{N}\frac{x_{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}>1,997$.

97. Збирот на m различни позитивни парни броеви и n различни непарни броеви е 1987. Определи ја максималната вредност на изразот $3m+4n$.

98. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$; $y_1,y_2,...,y_n$ важи неравенството

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_ky_k}\geq4n^2\ .$$

99. Докажи дека за произволни реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ важи

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2}<\sqrt{n}\ . \qquad (1)$$

100. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се реални броеви такви да $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=A$. Докажи дека

$$\sum_{i\neq k}\frac{a_i}{a_k}\geq\frac{(n-1)^2A}{A-1}\ .$$

101. Нека $a,b,c,d \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ и нека

$$\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=1,\ \cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d \geq \frac{10}{3}.$$

Докажи дека $a,b,c,d \in [0,\frac{\pi}{6}]$.

102. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

103. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x} \geq x+y+z.$$

104. Нека $a\,,b\,,c \in \mathbf{R}^+$ се такви што такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

105. Нека a,b,x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}.$$

106. Нека $x,y,z \in \mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{x^3}{x^3+2y^3}+\frac{y^3}{y^3+2z^3}+\frac{z^3}{z^3+2x^3} \geq 1.$$

107. Нека $x,y,z \in \mathbf{R}^+$ се такви да $xyz=8$. Докажи дека

$$\frac{x-2}{x+1}+\frac{y-2}{y+1}+\frac{z-2}{z+1} \leq 0.$$

108. Нека $a,b,c \in \mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \geq a+b+c+3.$$

109. Дали постои низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ позитивни реални броеви која ги задоволува условите

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$, за секој $n \in \mathbf{N}$,

2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2008$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

110. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

111. Нека x,y,z се реални броеви такви да $x+y+z=0$. Докажи дека

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geq 0\,.$$

Кога важи знак за равенство?

112. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да

$$xy+yz+zx=x+y+z\,.$$

Докажи дека

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq 1\,.$$

Кога важи знак за равенство?

113. Нека $a,b,c>0$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}\,.$$

114. Ако $x+y+z=3$ и $x,y,z\geq 0$ докажи дека

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx\,.$$

115. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1\,.$$

116. Нека $x,y,z\in\mathbf{R}^+$ и $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\geq\frac{9}{4}\,.$$

117. Докажи дека ако $a,b,c>0$, тогаш

$$\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b}\leq\frac{a+b+c}{12}\,.$$

118. Најди го најголемиот реален број k, за кој неравенството

$$(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\leq(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})(\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c})$$

важи за произволни релани броеви a,b и c.

119. Дадени се позитивни броеви a,b,c и d такви да

$$2(a+b+c+d)\geq abcd\,.$$

Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq abcd\,.$$

120. Нека x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1\,.$$

121. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека $A\geq B^2$, каде

$$A=\frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)}\ \text{ и }\ B=\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}}+\frac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}}+\frac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}\,.$$

122. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+1)(b+1)(c+1) \leq 8abc .$$

Докажи дека $a+b+c \geq 9$.

123. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c точно е неравенството

$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17) \geq 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1) . \quad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

124. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=3$. Најди ја најмалата вредност на изразот

$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c} .$$

125. Нека n е природен број и $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви, за кои $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$.

а) Докажи го неравенството

$$(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 .$$

б) Докажи дека знак за равенство важи ако и само ако $x_1,x_2,...,x_n$ формираат аритметичка прогресија.

126. Докажи, дека ако $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ се ненегативни реални броеви и $c_k=\prod_{i=1}^{k} b_i^{\frac{1}{k}}$, $k=1,2,...,n$, тогаш

$$nc_n+\sum_{k=1}^{n} k(a_k-1)c_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^k b_k .$$

127. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$(\frac{a}{a+b})^5+(\frac{b}{b+c})^5+(\frac{c}{c+d})^5+(\frac{d}{d+a})^5 \geq \frac{1}{8} .$$

128. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c} .$$

129. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2} \geq 1 .$$

130. Нека a, b и c се позитивни броеви такви да $a+b+c \leq 3$. Докажидека

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{2} .$$

131. За позитивните броеви x и y да се докаже неравенството:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}.$$

132. Ако a, b и c са ненегативни броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.$$

133. Ако $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, докажи дека

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}\geq 4(xy+yz+zx).$$

134. Нека $n\geq 3$ е природен број и $a_2,a_3,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_2a_3...a_n=1$. Докажи дека

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n\geq n^n.$$

135. Нека $\alpha>\beta>0$ се рационални броеви и $a_1,a_2,a_3,...,a_k$ се позитивни реални броеви такви што $a_1a_2a_3...a_k=1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^{\alpha}\geq\sum_{i=1}^{k}a_i^{\beta}.$$

136. Докажи дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2+3n+1)^n\geq 6^n(n!)^2.$$

137. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c\geq abc$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2\geq abc\sqrt{3}$.

IV ГЛАВА
НЕРАВЕНСТВА СО ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Во оваа глава глава ќе разгледаме неравенства во кои учествуваат таканаречените неалгебарски (трансцедентни) елементарни функции, претежно логаритамските и тригонометриските. Исто така ќе се задржиме и на примената на апаратот диференцијалното сметање во докажување на некои неравенства.

1. ЕЛЕМЕНТАРНИ ЛОГАРИТАМСКИ НЕРАВЕНСТВА

Во овој дел ќе разгледаме логаритамски неравенства, при чие докажување ќе ги користиме претходно докажаните неравенства меѓу средините и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. За таа цел прво ќе наведеме неколку својства на логаритмите, кои нема да ги докажуваме.

Својство 1. За секои $a,b,c>0$ важи

а) $\log_c ab=\log_c a+\log_c b$,

б) $\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$,

в) $\log_c a^b=b\log_c a$,

г) $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$,

д) $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$. □

Својство 2. а) Ако $a>1$ и $0<x<y$, тогаш $\log_a x<\log_a y$.

б) Ако $0<a<1$ и $0<x<y$, тогаш $\log_a x>\log_a y$.

в) Ако $a>1$, $x,y>0$ и $\log_a x<\log_a y$, тогаш $x<y$.

г) Ако $0<a<1$, $x,y>0$ и $\log_a x>\log_a y$, тогаш $x<y$. □

Забелешка 1. Во својството 2 се искажани својствата за монотоност на логаритамската функција чии докази може да се видат, на пример, во [45]. ■

Пример 1. Докажи дека за логаритам со основа $a>1$ важи

$$\frac{\log_a 1+\log_a 2+...+\log_a (k+1)}{k+1} > \frac{\log_a 1+\log_a 2+...+\log_a k}{k}.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{1}{k+1}\log_a (k+1)! > \frac{1}{k}\log_a k!$$
$$\log_a [(k+1)!]^{\frac{1}{k+1}} > \log_a (k!)^{\frac{1}{k}}$$
$$[(k+1)!]^{\frac{1}{k+1}} > (k!)^{\frac{1}{k}}$$
$$[(k+1)!]^{k} > (k!)^{k+1}$$
$$(k+1)^k > k!,$$

бидејќи за секој $i \in \{1,2,...,k\}$ важи $k+1 > i$. ■

Пример 2. Докажи дека за секој $a > 0$ важи неравенството

$$\log_3^2 a + 2\log_3 a \cdot \log_3 \frac{3}{a} \le 1.$$

Решение. Даденото неравенство е точно за $a > 0$, бидејќи последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\log_3^2 a + 2\log_3 a(1-\log_3 a) \le 1,$$
$$2\log_3 a - \log_3^2 a \le 1,$$
$$\log_3^2 a - 2\log_3 a + 1 \ge 0,$$
$$(\log_3 a - 1)^2 \ge 0,$$

при што последното неравенство очигледно е точно. ■

Пример 3. Докажи дека

$$\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4,4.$$

Решение. Преминувајќи на заедничка основа, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина последователно добиваме

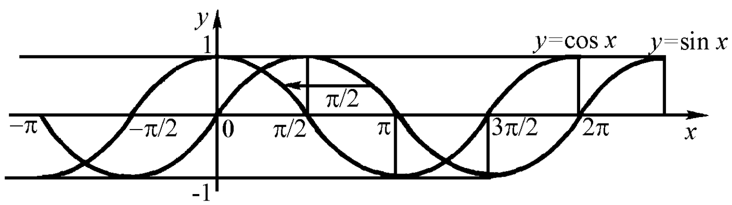
$$\begin{aligned}\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 &= \frac{\log 5}{\log 4} + \frac{\log 6}{\log 5} + \frac{\log 7}{\log 6} + \frac{\log 8}{\log 7}\\ &> 4\sqrt[4]{\frac{\log 5}{\log 4}\cdot\frac{\log 6}{\log 5}\cdot\frac{\log 7}{\log 6}\cdot\frac{\log 8}{\log 7}}\\ &= 4\sqrt[4]{\log_4 8} = 4\sqrt[4]{\log_4 4^{3/2}}\\ &= 4(\tfrac{3}{2})^{1/4} > 4\cdot 1,1 = 4,4\end{aligned}$$

бидејќи $(\frac{3}{2})^{1/4} > 1,1$. ■

2. ЕЛЕМЕНТАРНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

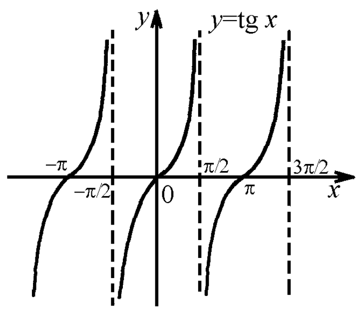
Во овој дел ќе разгледаме неравенства кои се однесуваат исклучиво на тригонометриските функции. Притоа методите на докажување се елементарни, иако некои од разгледуваните неравенства полесно може да се докажат со помош на апаратот на диференцијалното сметање, за што подоцна ќе стане збор. За таа цел прво ќе ги наведеме својствата на тригометриските фунции, кои нема да ги докажуваме. Притоа, искажаните тврдења за функциите $\mathrm{tg}\, x$ и $\mathrm{ctg}\, x$ се однесуваат на вредностите за кои овие функции се дефинирани.

За функцијата $y=\sin x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[-1,1]$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T=2\pi$, монотоно расте на интервалите $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi],\, k\in\mathbf{Z}$ и монотоно опаѓа на интервалите $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*синусоидата*) е даден на цртеж 1.

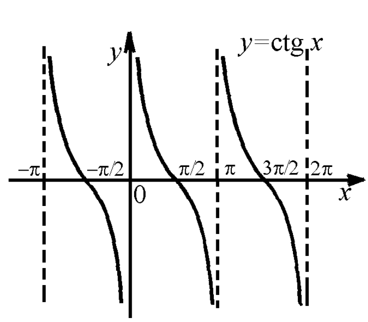


Цртеж 1

За функцијата $y=\cos x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[-1,1]$. Понатаму, таа е парна, е периодична со основна периода $T=2\pi$, монотоно расте на интервалите $[(2k-1)\pi, 2k\pi],\, k\in\mathbf{Z}$ и монотоно опаѓа на интервалите $[2k\pi,(2k+1)\pi],\, k\in\mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*косинусоидата*) е даден на цртеж 1.



Цртеж 2



Цртеж 3

За функцијата $y=\mathrm{tg}\, x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$ и $E(f)=\mathbf{R}$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T=\pi$ и монотоно расте на интервалите $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi),\, k\in\mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*тангенсоида*) е даден на цртеж 2.

За функцијата $y=\operatorname{ctg} x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$ и $E(f)=\mathbf{R}$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T=\pi$ и монотоно опаѓа на интервалите $(k\pi,(k+1)\pi),\, k\in\mathbf{Z}$. Графикот на оваа функција (*котангенсоида*) е даден на цртеж 3.

Својство 3. За секој $x\in\mathbf{R}$ важи

а) $|\sin x|\leq 1,\ |\cos x|\leq 1$,

б) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,

в) $\operatorname{tg} x \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$, $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$,

г) $\operatorname{tg} x=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$,

д) $\sin x=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$, $\cos x=\frac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$. □

Својство 4. Ако $x\in\mathbf{R}$ и $k\in\mathbf{Z}$, тогаш

а) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$,

б) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$,

в) $\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg} x,\ x\neq 0$.

г) $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg} x,\ x\neq\frac{\pi}{2}$. □

Својство 5. За секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$\sin(-x)=-\sin x,\ \cos(-x)=\cos x,$

$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$. □

Својство 6 (адициони формули). За секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

а) $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$,

б) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$,

в) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$,

г) $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$,

д) $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$,

ѓ) $\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$,

е) $\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y-1}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}$,

ж) $\operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y+1}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} y}$. □

Ако во адиционите формули б) в) д) и е) од својството 6 земеме $x=y$ ги добиваме равенствата за тригонометриските функции од удвоен агол, т.е. ја добиваме следнава последица.

Последица 1. За секој $x\in\mathbf{R}$ важи

а) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$,

б) $\sin 2x=2\sin x\cos x$,

в) $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ и г) $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$. □

Понатаму, непосредна последица на адиционите формули се и формулите искажани во следнава последица.

Последица 2. За секои $x, y \in \mathbf{R}$ важи

а) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$,

б) $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$,

в) $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$,

г) $\cos(x+y) - \cos(x-y) = 2\sin x \sin y$.

д) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$,

ѓ) $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y}$. □

Исто така, при докажување на тригонометриските неравенства се користат и релациите меѓу тригонометриските функции од половина од даден агол, кои се наведени во следното својство.

Својство 7. За секој $x \in \mathbf{R}$ важи

а) $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$,

б) $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$,

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$,

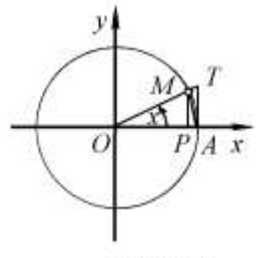
г) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$. □

Пример 4. а) За секој $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$.

б) За секој $x \in \mathbf{R}$ важи $|\sin x| \leq x$.

Решение. а) Нека AM е лак на единичната кружница, кој соодветствува на агол со големина $x > 0$ радијани (цртеж 4). Тогаш,

$$\overline{OA} = 1, \overline{MP} = \sin x, \overline{OP} = \cos x.$$



Цртеж 4

Јасно плоштината на кружниот исечок OAM е поголема од плоштината на ΔOAM и е помала од плоштината на ΔOAT, т.е.

$$\tfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{MP} < \tfrac{1}{2}\overline{OA}^2 x < \tfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AT}$$

т.е.

$$\overline{MP} < x < \overline{AT} \qquad (1)$$

Но,

$$\overline{AT} : \overline{OA} = \overline{MP} : \overline{OP}, \text{ т.е. } \overline{AT} = \frac{\overline{MP}\cdot\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

ако замениме во (1) добиваме $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$, односно $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

б) Неравенството $\sin x < x$, за $x \ge \frac{\pi}{2}$ е тривијално, па од а) следува дека за $\sin x < x$, за секој $x > 0$. Сега тврдењето следува од непарноста на функцијата $\sin x$, т.е. од својството 5. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = 0$. ■

Пример 5. Докажи дека за $x > 0, y > 0, x + y < \pi$ важи

$$\frac{\sin(x+y)}{2\sin x \sin y} \ge \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2}. \tag{1}$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \ge y$. Имаме

$$\frac{\sin(x+y)}{2\sin x \sin y} - \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \sin y} - 2\operatorname{ctg}\frac{x+y}{2}\right]$$

$$\frac{\sin(x+y)}{2\sin x \sin y} - \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} + \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2}\right]$$

$$\frac{\sin(x+y)}{2\sin x \sin y} - \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{y-x}{2}}{\sin x \sin\frac{x+y}{2}} + \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\sin y \sin\frac{x+y}{2}}\right)$$

$$\frac{\sin(x+y)}{2\sin x \sin y} - \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} = \frac{\sin\frac{x-y}{2}(\sin x - \sin y)}{2\sin x \sin y \sin\frac{x+y}{2}}. \tag{2}$$

Ако $x = y$, тогаш очигледно важи знак за равенство. Нека $x > y$. Ќе разгледаме два случаја:

1) $0 < y < x \le \frac{\pi}{2}$ и притоа важи $\sin x > \sin y$, па затоа од (2) заклучуваме дека важи (1).
2) $x > \frac{\pi}{2}$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ и $x + y < \pi$ добиваме $y < \frac{\pi}{2} - t$. Но, тогаш $\sin x = \cos t, \sin y < \cos t$, па повторно е $\sin x > \sin y$, т.е. важи (1). ■

Пример 6. Докажи го неравенството

$$(1+\sin^2\alpha)^n + (1+\cos^2\alpha)^n \ge 2(\tfrac{3}{2})^n, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Решение. Ставаме $1+\sin^2\alpha = x$, $1+\cos^2\alpha = y$ и неравенството го добива обликот $x^n + y^n \ge 2(\frac{3}{2})^n$, при услов $x + y = 2 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 3$. Но, од задача II 9 имаме $\frac{x^n+y^n}{2} \ge (\frac{x+y}{2})^n$ и како $x + y = 3$, добиваме

$$\frac{x^n+y^n}{2} \ge (\tfrac{3}{2})^n, \text{ т.е. } x^n + y^n \ge 2(\tfrac{3}{2})^n. \ ■$$

Пример 7. Нека $n \ge 2$. Најди ја најголемата можна вредност на изразот

$$v_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + ... + \sin x_{n-1} \cos x_n + \sin x_n \cos x_1,$$

каде $x_i \in \mathbf{R}$, за $i = 1, 2, ..., n$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од основниот тригонометриски идентитет $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, за секој $t \in \mathbf{R}$ добиваме

$$v_n \leq \frac{\sin^2 x_1+\cos^2 x_2}{2}+\frac{\sin^2 x_2+\cos^2 x_3}{2}+...+\frac{\sin^2 x_{n-1}+\cos^2 x_n}{2}+\frac{\sin^2 x_n+\cos^2 x_1}{2}=\frac{n}{2}.$$

Знак за равенство се достигнува за $x_i=\frac{\pi}{4}$, за $i=1,2,...,n$. ■

3. МОНОТОНОСТ И НЕРАВЕНСТВА

Апаратот со кој располага диференцијалното сметање е погоден за докажување на неравенства поврзани со елементарните функции. Во нашите разгледувања ќе претпоставиме дека покрај својствата на непрекинатите функции и дефиницијата за извод на реална функција f во точка x, определена со

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

ако границата на десната страна на (1) постои, читателот е запознаен со таблицата за изводите на елементарните функции и правилата за наоѓање на извод од збир, производ и количник на функции, како и правилата за наоѓање извод од сложена и инверзна функција. Покрај тоа, ќе ги користиме теоремите на Лагранж и Коши чии докази може да се видат, на пример, во [44].

Теорема 1 (Лагранж). Нека за функцијата $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ важи

а) f е непрекината на $[a,b]$ и

б) за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$.

Тогаш, постои точка $c\in(a,b)$ таков што

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \ ■ \qquad (1)$$

Пример 8. Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $e^x\geq 1+x$, при што равенство важи ако и само ако $x=0$.

Решение. Нека $x>0$. Функцијата $f(u)=e^u$, $u\in[0,x]$ е непрекината на интервалот $[0,x]$ и за секој $u\in(0,x)$ постои $f'(u)=e^u$, па од теоремата на Лагранж следува дека постои $c\in(0,x)$ таков да

$$e^x-e^0=e^c(x-0)>x,$$

бидејќи $e^c>1$. Значи, за $x>0$ важи $e^x>1+x$.

Нека $x<0$. Аналогно заклучуваме дека постои $c\in(x,0)$ таков да

$$e^0-e^x=e^c(x-0)<-x,$$

бидејќи $e^c<1$ и $-x>0$. Значи, за $x<0$ важи $e^x>1+x$.

Според тоа, при $x\neq 0$ важи $e^x>1+x$, а за $x=0$ имаме $e^0=1=1+0$, т.е. важи знак за равенство. ■

Теорема 2 (Коши). Нека за функциите f и g важи:

а) f и g се непрекинати на $[a,b]$,

б) f и g се диференцијабилни во (a,b) и

в) $g'(x)\neq 0$, за секој $x\in(a,b)$.

Тогаш, постои точка $c\in(a,b)$ таква што

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \blacksquare \tag{2}$$

Пример 9. Докажи дека за секој $x>-1$ важи

$$\frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x. \tag{3}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=0$.

Решение. Ако $x=0$, тогаш во (3) важи знак за равенство.

Нека $x>0$ и на интервалот $[0,x]$ да ги разгледаме функциите $f(u)=\ln(1+u)$ и $g(u)=u$ кои се непрекинати на $[0,x]$ и диференцијабилни на $(0,x)$ притоа важи $g'(u)=1\neq 0$, за секој $u\in(0,x)$. Од теоремата на Коши следува дека постои $c\in(0,x)$ таков да

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}=\frac{\frac{1}{1+c}}{1},$$

и како $\frac{1}{1+c}<1$ од последното равенство добиваме $\ln(1+x)<x$. Ако $-1<x<0$, тогаш функциите

$$f(u)=\ln(1+u) \text{ и } g(u)=u$$

ги разгледуваме на интервалот $[x,0]$ и повторно ја применуваме теоремата на Коши. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Нека $x>0$ и на интервалот $[0,x]$ да ги разгледаме функциите

$$f(u)=\ln(1+u) \text{ и } g(u)=\frac{u}{1+u}$$

кои се непрекинати на $[0,x]$ и диференцијабилни на $(0,x)$ притоа важи

$$g'(u)=\frac{1}{(1+u)^2}\neq 0,$$

за секој $u\in(0,x)$. Од теоремата на Коши следува дека постои $c\in(0,x)$ таков да

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{\frac{x}{1+x}-0}=\frac{\frac{1}{1+c}}{\frac{1}{(1+c)^2}}=c+1$$

и како $c+1>1$ од последното равенство добиваме $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$. Ако $-1<x<0$, тогаш функциите $f(u)=\ln(1+u)$ и $g(u)=u$ ги разгледуваме на интервалот $[x,0]$ и повторно ја применуваме теоремата на Коши. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Во следната теорема, со помош на теоремата на Лагранж, ќе го докажеме основното правило кое натаму ќе го користиме.

Теорема 3. Нека $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f монотоно расте на (a,b) ако и само ако

$$f'(x)\geq 0, \text{ за секој } x\in(a,b). \tag{1}$$

Доказ. Нека претпоставиме дека условот (1) е исполнет и нека $a < x' < x'' < b$. Ако ја примениме теоремата на Лагранж за функцијата f на интервалот $[x', x'']$ добиваме дека постои $c \in (x', x'')$ таков што

$$f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x') \geq 0$$

од што следува $f(x'') \geq f(x')$. Сега тврдењето следува од произволноста на точките x' и x''.

Нека претпоставиме дека функцијата f монотоно расте на (a,b). Тогаш,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

бидејќи

- ако $\Delta x > 0$, тогаш $f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$, и
- ако $\Delta x < 0$, тогаш $f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$. ■

Да забележиме дека ако функцијата f строго монотоно расте, не можеме да тврдиме дека $f'(x) > 0$. На пример, функцијата $f(x) = x^3$ строго монотоно расте, но $f'(0) = 0$. Сепак, следнава теорема дава критериум за строга монотоност.

Теорема 4. Нека $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ и за секој $x \in (a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f строго монотоно расте на (a,b) ако и само ако се исполнети условите

1) $f'(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$ и
2) не постои интервал $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ таков што $f'(x) = 0$ за секој $x \in (\alpha, \beta)$.

Доказ. Нека f строго монотоно расте на (a,b). Тогаш f монотоно расте на (a,b) и од теорема 3 следува дека условот 1) е исполнет. Условот 2) исто така е исполнет, бидејќи ако постои интервал (α, β) таков што $f'(x) = 0$, за секој $x \in (\alpha, \beta)$, тогаш f е константа на (α, β). Последното противречи на фактот дека f е строго монотоно расте на (a,b).

Ако се исполнети условите 1) и 2), тогаш од теорема 3 следува дека функцијата f монотоно расте на (a,b). Нека $x' < x''$ и $f(x') = f(x'')$. Тогаш, од монотоноста на функцијата f следува дека за секој $x \in [x', x'']$ важи $f(x) = f(x')$ и затоа $f'(x) = 0$, за секој $x \in (x', x'')$, што противречи на условот 2). Затоа $f(x') < f(x'')$. ■

Последица 3. Нека за функциите $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ и $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ се исполнети условите:

1) f и g се непрекинати на $[a,b]$ и $f(a) = g(a)$,
2) $f'(x)$ и $g'(x)$ постојат за секој $x \in (a,b)$ и
3) $f'(x) > g'(x)$, за секој $x \in (a,b)$.

Тогаш, $f(x) > g(x)$, за секој $x \in (a,b)$.

Доказ. Функцијата $h(x) = f(x) - g(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Од

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0,$$

за секој $x \in (a,b)$ и од теорема 4 следува дека функцијата h строго монотоно расте на (a,b). Но,

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0$$

и бидејќи функцијата h е непрекината на $[a,b]$ добиваме $h(x) > 0,$ за секој $x \in (a,b)$, т.е. $f(x) > g(x)$, за секој $x \in (a,b)$. ■

Пример 10. Докажи дека

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}, \text{ за } n > 1 \text{ и } x > a > 0. \tag{4}$$

Решение. Нека $n > 1$. Да ги разгледаме функциите

$$f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \text{ и } g(x) = \sqrt[n]{x-a},$$

на интервалот $[a,b]$, каде $b \in \mathbf{R}$ е произволно избран. Бидејќи

$$f(a) = g(a) = 0 \text{ и } f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} < \frac{1}{n\sqrt[n]{(x-a)^{n-1}}} = g'(x),$$

за секој $x \in (a,b)$, од последица 1 следува дека $f(x) < g(x)$, за секој $x \in (a,b)$. Но, $b \in \mathbf{R}$ е произволно избран, па затоа $f(x) < g(x)$, т.е. важи (4). ■

4. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ И НЕРАВЕНСТВА

При докажување на неравенства често пати се користи алгоритам кој е поврзан со локалните екстреми функција на затворен интервал. Пред да го наведеме споменатиот алгоритам ќе го дадеме поимот за локални екстреми, како и една теорема со чија помош во случај на диференцијабилни функции истите можеме да ги определиме.

Дефиниција 1. Нека функцијата f е определена на некој отворен интервал кој ја содржи точката x_0. Тогаш x_0 ја нарекуваме *точка на локален максимум (локален минимум)* ако постои $\delta > 0$ таков да

$$f(x) \le f(x_0), \ (f(x) \ge f(x_0)) \text{ за секој } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ако постои $\delta > 0$ таков да

$$f(x) < f(x_0), \ (f(x) > f(x_0)), \text{ за секој } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ x \ne x_0,$$

тогаш за точката x_0 ќе велиме дека е *точка на строг локален максимум, (строг локален минимум).* Точката на локален максимум или локален минимум ја нарекуваме *точка на локален екстрем*.

Теорема 5. Нека $f:[a,b] \to \mathbf{R},$ $m \in \mathbf{N},$ $m \ge 2,$ $x_0 \in (a,b)$ и нека се исполнети условите:

1) постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ постои $f^{(m-1)}(x)$,

2) постои $f^{(m)}(x_0)$ и

3) $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(m-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.

Тогаш, ако $m = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, точката x_0 е точка на локален екстрем и притоа е точка на строг локален максимум ако $f^{(m)}(x_0) < 0$, а точка на строг локален минимум ако $f^{(m)}(x_0) > 0$. За $m = 2k+1,\ k \in \mathbf{N}$ точката x_0 не е точка на локален екстрем. ■

Претходно споменатиот алгоритам, кој се користи за докажување на неравенства е следниов:

- ако функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и ако на овој интервал во точките $x_1, x_2, ..., x_k$ има k локални максимуми, тогаш најголемата вредност на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ се достигнува во една од точките $a, t_1, ..., t_k, b$, т.е. таа е еднаква на
$$\max\{f(a), f(t_1), f(t_2), ..., f(t_k), f(b)\},$$
- ако функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и ако на овој интервал во точките $t_1, t_2, ..., t_k$ има k локални минимуми, тогаш најмалата вредност на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ се достигнува во една од точките $a, t_1, t_2, ..., t_k, b$, т.е. таа е еднаква на
$$\min\{f(a), f(t_1), f(t_2), ..., f(t_k), f(b)\}.$$

Пример 11. Докажи дека
$$\tfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, \text{ ако } x \in [0,1] \text{ и } p > 1.$$

Решение. Функцијата $f(x) = x^p + (1-x)^p$, $p > 1$ е диференцијабилна на интервалот $(0,1)$ и
$$f'(x) = p(x^{p-1} - (1-x)^{p-1}).$$
Од $f'(x) = 0$ следува $x_0 = \frac{1}{2}$ и оваа точка е точка на локален минимум, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$. Бидејќи
$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2^{p-1}},\ f(0) = 1,\ f(1) = 1,$$
од претходно изнесеното добиваме
$$\max_{0 \le x \le 1} f(x) = 1 \text{ и } \min_{0 \le x \le 1} f(x) = \tfrac{1}{2^{p-1}},$$
што значи
$$\tfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, \text{ ако } x \in [0,1] \text{ и } p > 1. ■$$

5. ЗАДАЧИ

1. Ако $a>1, b\ge 1, x>0$, тогаш

$$(1+\log_a b)(1+\log_{ab}^2 x)\ge 2\log_a x\ .$$

Докажи!

2. Докажи дека за $a>1, c>1$ важи неравенството

$$2\log_c a+\log_a c+\log_{a^2} c>4\,.$$

3. Докажи дека за секој $n\ge 2$ важи

$$\log_n 2\cdot\log_n 4\cdot\ldots\cdot\log_n(2n-2)\le 1\,.$$

4. Докажи дека за $a>0, b>0$ и $a\ne b$ важи неравенството

$$\log_2(a+b)>1+\tfrac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)\ .$$

5. Дадени се реални броеви a,b,c кои се поголеми од 1. Докажи дека

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\ge 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)\ .$$

6. Нека $a>1, b>1, c>1$. Докажи дека важи

$$\log_{abc}^3 a\cdot\log_a b\cdot\log_a c\le \tfrac{1}{27}\ .$$

7. Докажи дека за секои $a,b\in(0,1)$ важи неравенството

$$\log_a \tfrac{2ab}{a+b}\log_b \tfrac{2ab}{a+b}\ge 1\,.$$

8. Ако е $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$, докажи дека

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\ge\frac{9}{a+b+c}\ .$$

9. Ако $a>1, b>1, c>1$, докажи го неравенството

$$(1+\frac{1}{\log_a b\log_a c})\log_a bc\ge 4\ .$$

10. Дадени се броевите $a_1,a_2,...,a_n,\ n\ge 3$ такви да

1) $a_i>1, i=1,2,...,n$ и

2) производот на произволни $n-2$ броја не е помал од $n-1$.

Докажи дека

$$\log_{a_2+a_3+...+a_n} a_1+\log_{a_1+a_3+...+a_n} a_2+...+\log_{a_1+a_2+...+a_{n-1}} a_n\ge\frac{n}{n-1}\ .$$

11. Докажи го неравенството

$$\frac{\log(k+1)!}{k+1}>\frac{\log k!}{k},\ k\in\mathbf{N}\ . \qquad (1)$$

12. Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи неравенството

а) $\sin^3 x-\sin^6 x\le\frac{1}{4}$

б) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\sin 2x(2\sin x+1)<3$.

13. Докажи дека:

а) ако $a,b\in(0,\frac{\pi}{2})$, тогаш $\sin(a+b)<\sin a+\sin b$,

б) ако за $a,b\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи $\sin(a+b)=2\sin a$, тогаш $a<b$.

14. Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ точно е неравенството

$$-\sqrt{3}\le\frac{3\sin x}{2+\cos x}\le\sqrt{3}.$$

15. Ако $a,b\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$, докажи дека

$$\frac{2}{\cos a+\cos b}-1\le\sqrt{(\frac{1}{\cos a}-1)(\frac{1}{\cos b}-1)}.$$

16. Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ е точно неравенството

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\le\frac{6-\cos^2 x-4\sin x}{3-2\sin x}\le 2.$$

17. Докажи дека $\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\ge 8$, за секој $x\ne k\pi,\ (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

18. Нека $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Докажи дека

$$(1+\frac{1}{\sin x})(1+\frac{1}{\cos x})\ge 3+2\sqrt{2}.$$

19. Ако $0<x_1<x_2<...<x_n<\frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\operatorname{tg} x_1<\frac{\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}<\operatorname{tg} x_n.$$

20. Нека $n\in\mathbf{N}$ и $x_i\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$, за $i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$(\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n+\tfrac{1}{4})^2\ge\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n.$$

21. Нека $n\ge1$ и $x_i\in[0,2\pi]$, $i=1,2,...,2n+1$. Докажи дека важи неравенството

$$(\sum_{k=1}^{2n+1}\cos x_k)^2+(\sum_{k=1}^{2n+1}\sin x_k)^2\ge 1.$$

22. Докажи дека, ако n е произволен природен број и α е реален број таков што $0<\alpha<\frac{\pi}{n}$, тогаш

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot...\cdot\sin n\alpha<\frac{1}{n^n}\frac{1}{\sin^n\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

23. Докажи дека за $x\ne k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ и за секој природен број n важи

$$|\cos x-\cos 2x+\cos 3x-...+(-1)^{n-1}\cos nx|\le\frac{1}{|\cos\frac{x}{2}|}.$$

24. Ако $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ и $n\in\mathbf{N}$ докажи дека

$$\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}\ge 1.$$

25. Ако $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})$ и $\mathrm{tg}\,y=3\,\mathrm{tg}\,x$, тогаш $y\le x+\frac{\pi}{6}$. Докажи!

26. Ако $a,b>0$ и $a+b<\frac{\pi}{2}$, тогаш $\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b<1$. Докажи!

27. Докажи дека од четири броја секогаш може да се изберат два броја x и y такви што $0\le\frac{x-y}{1+xy}\le 1$.

28. Докажи дека за произволни реални броеви a,b и ω и за секој $x\in\mathbf{R}$ важи неравенството

$$|a\sin\omega x+b\cos\omega x|\le\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

29. Ако $x+y=\frac{\pi}{3}$, $x,y>0$, докажи дека $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\le\frac{1}{3}$.

30. Ако $\mathrm{tg}\,y=n\,\mathrm{tg}\,x$, $n\in\mathbf{N}$, докажи дека

$$\mathrm{tg}^2(y-x)\le\frac{(n-1)^2}{4n}\ .$$

31. Докажи дека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ е исполнето неравенството

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|\,.$$

32. Ако $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})$ и $x<y$, докажи дека

$$\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}<\frac{\mathrm{tg}\,y}{y}\ .$$

33. Докажи дека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ е исполнето неравенството

$$|\mathrm{arctg}\,y-\mathrm{arctg}\,x|\le|y-x|\ .$$

34. (неравенство на Жордан). Докажи дека ако $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, тогаш

$$\frac{\sin x}{x}\ge\frac{2}{\pi}\ .$$

35. Докажи дека за секој $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ важи

$$1-\frac{2x}{\pi}\le\cos x\le\frac{\pi}{2}-x\ .$$

36. Докажи дека за секој $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи $\sin x>x-\frac{x^3}{4}$.

37. Нека $x,y,z\in[0,\frac{\pi}{2})$ се такви да $\sin x+\sin y+\sin z=1$. Докажи дека

$$\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}^2\,y+\mathrm{tg}^2\,z\ge\frac{3}{8}\ .$$

38. За броевите a и b е исполнето равенството $a^2+b^2=1$. Определи ја најголемата вредност за a^3b-b^3a.

39. Нека $x_0=0,\ x\quad>0,\ i=1,2,...,n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$. Докажи дека

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+...+x_{i-1}}\sqrt{x_i+...+x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

40. Ако $a,b,c \in (0,1)$, докажи дека

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

41. Докажи, дека единствен пар реални броеви (p,q) за кој неравенството

$$|\sqrt{1-x^2} - px - q| \le \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

е исполнето за секој $x \in [0,1]$ е паротот $p=-1$, $q = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$

42. Нека $p>1$ и $0<y<x$. Докажи дека

$$py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y).$$

43. Докажи дека $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$, за $0<y<x$.

44. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ и за секој $x>0$ важи

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

45. Докажи го неравенството:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x), \text{ за секој } x>0.$$

46. Докажи го неравенството:

$$\ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}, \text{ за секој } x>0.$$

47. Докажи дека

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}, \text{ за секои } x,y>0 \text{ и } 0<\alpha<\beta \text{ и}$$

48. Докажи дека за $a,b>0$ и $p \in [0,1]$ важи $(a+b)^p \le a^p + b^p$.

49. Нека $p \ge 2$. Докажи дека $x^p - 1 > p(x-1)$, за секој $x>1$.

50. Нека $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека за секој $x \in (0,1)$ важи

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1} < \frac{1-x^n}{n}.$$

51. Докажи го неравенството

$$1 + \alpha \ln x \le x^\alpha, \ x>0, \alpha>2.$$

52. Нека $k>1, a,b>0$ и $x \ge 0$. Докажи дека важи

$$\frac{(ax+b)^k}{ax^k+b} \le (a+b)^{k-1}.$$

53. Нека $0<a<b$ и $x_i \in [a,b]$, $i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \le \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2 .$$

54. Докажи дека за позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\min_{1\le i\le n} a_i \le \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + (\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n+1})^{n+1} .$$

Кога важи знак за равенство?

55. Нека $m_i, a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ се такви што $m_i > 0$, за $i = 1, 2, ..., n$ и $a_1 \le ... \le a_n < b_1 \le ... \le b_n < c_1 \le ... \le c_n$. Докажи дека

$$[\sum_{i=1}^{n} m_i (a_i + b_i + c_i)]^2 > 3\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i (a_i b_i + b_i c_i + c_i a_i) .$$

56. Докажи дека ако $x, y \in (0,1)$ и $r \in \mathbf{Q} \cap (0,1)$, тогаш

$$\frac{|x-y|}{1-xy} \le \frac{|x^r - y^r|}{1-x^r y^r} .$$

57. Докажи дека, ако $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2})$ и $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \le 3$, тогаш

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \ge 0 .$$

V ГЛАВА
КОНВЕКСНОСТ И НЕРАВЕНСТВА

1. КОНВЕКСНИ ФУНКЦИИ

Во оваа глава ќе ги разгледаме конвексните функции и нивната примена при докажување на неравенства, во што централна улога има неравенството на Јенсен.

Дефиниција 1. За функцијата f ќе велиме дека е *конвексна* на интервалот (a,b) ако за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$ и за секој $\alpha \in [0,1]$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

За функцијата f ќе велиме дека е *конкавна* на (a,b) ако функцијата $-f$ е конвексна на (a,b).

Дефиниција 2. Функцијата f ја нарекуваме *строго конвексна* на (a,b) ако за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$ и за секој $\alpha \in (0,1)$ важи

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функцијата f ја нарекуваме *строго конкавна* на (a,b) ако функцијата $-f$ е строго конвексна на (a,b).

Пример 1. Ќе докажеме дека функцијата $f(x) = x^2$ е строго конвексна на $(-\infty, +\infty)$. Навистина, ако $x_1 \neq x_2$ и $\alpha \in (0,1)$, тогаш

$$\begin{aligned}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 &= \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1 x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 \\ &< \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) + (1-\alpha)^2 x_2^2 = \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2\end{aligned}$$

што значи дека функцијата $f(x) = x^2$ е строго конвексна на $(-\infty, +\infty)$. ■

Забелешка 1. Претходниот пример покажува дека постапката на непосредна проверка на конвексноста е доста сложена дури и кај наједноставните функции. Се поставува прашање, дали постои поедноставен начин да се провери конвексноста на една функција, користејќи ги на пример непрекинатоста, диференцијабилноста и слично. Во оваа точка подетално ќе се задржиме на претходните прашања, но прво ќе разгледаме неколку основни својства на конвексните функции.

Лема 1. Конвексната функција $f:(a,b)\to \mathbf{R}$, $f\not\equiv \mathrm{const}$ не достигнува максимумот во точка $x_0\in(a,b)$.

Доказ. Нека претпоставиме дека функцијата f го достигнува својот максимум во точката $x_0\in(a,b)$. Бидејќи $f\not\equiv \mathrm{const}$, постои интервал $(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$ таков што $x_0\in(x_1,x_2)$ и на еден од неговите краеви вредноста на функцијата f е строго помала од нејзината вредност во точката x_0. Нека, на пример, $f(x_1)<f(x_0)$, $f(x_2)\le f(x_0)$. Понатаму, бидејќи $x_0\in(x_1,x_2)$ добиваме дека постои $\alpha\in(0,1)$ таков што

$$x_0=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2 .$$

Ако последните две неравенства ги помножиме со α и $1-\alpha$, соодветно и ги собереме, добиваме

$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)<f(x_0)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2),$$

што противречи на конвексноста на функцијата f. ♦

Последица 2. Конкавната функција $f:(a,b)\to \mathbf{R}$, $f\not\equiv \mathrm{const}$ не достигнува минимумот во точка $x_0\in(a,b)$.

Доказ. Непосредно следува од лема 1 и дефиниција 1. ■

Теорема 1. Ако функцијата $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ е конвексна (конкавна) и ограничена, тогаш таа е непрекината на (a,b).

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога функцијата е конвексна. Бидејќи f е ограничена, постои $M>0$ таков што $|f(x)|\le M$, за секој $x\in(a,b)$. Нека $x_0\in(a,b)$ и нека $h>0$ е таков што $x_0\pm h\in(a,b)$. Од конвексноста на f следува неравенството

$$2f(x_0)\le f(x_0-h)+f(x_0+h)$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$f(x_0)-f(x_0-h)\le f(x_0+h)-f(x_0). \tag{1}$$

Ако $x_0\pm(k+1)h\in(a,b)$, за $k=1,2,...,n-1$, тогаш од неравенството (1) го добиваме системот неравенства

$$\begin{aligned} f(x_0-kh)-f(x_0-(k+1)h) &\le f(x_0+h)-f(x_0) \\ &\le f(x_0+(k+1)h)-f(x_0+kh) \end{aligned} \tag{2}$$

за $k=0,1,2,...,n-1$. Со собирање на неравенствата (2) го добиваме неравенството

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-nh)}{n} \le f(x_0+h)-f(x_0) \le \frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{n},$$

од кое, ако се има предвид ограниченоста на функцијата f, добиваме

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \le \frac{2M}{n}. \tag{3}$$

Сега, ако $\varepsilon>0$ е дадено. Земаме

$$n=[\tfrac{2M}{\varepsilon}]+1 \text{ и } \delta=\min\{\tfrac{b-x_0}{n},\tfrac{x_0-a}{n}\}.$$

Конечно, од (3) следува дека за вака најденото $\delta>0$ важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, кога $|x-x_0|<\delta$, т.е. функцијата f е непрекината во произволната точка $x_0\in(a,b)$. ■

Теорема 2. Функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е конвексна (строго конвексна) ако и само ако за секоја точка $x_0\in(a,b)$ функцијата

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$$

монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b).

Доказ. Ќе го разгледаме само случајот на строга конвексност. Нека $a<x_0<x_1<x_2<b$. Ставаме

$$\alpha=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}, \quad 1-\alpha=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}.$$

Тогаш $\alpha\in(0,1)$ и $x_1=\alpha x_0+(1-\alpha)x_2$. Сега тврдењето во овој случај следува од еквивалентноста на следнава низа равенства:

$$\begin{aligned} &f(\alpha x_0+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_0)+(1-\alpha)f(x_2) \\ &f(x_1)<\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2) \\ &(x_2-x_0)f(x_1)<(x_2-x_1)f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_2) \\ &(x_2-x_0)[f(x_1)-f(x_0)]<(x_1-x_0)[f(x_2)-f(x_0)] \\ &g(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=g(x_2). \end{aligned}$$

Доказите кога $a<x_1<x_0<x_2<b$ и $a<x_1<x_2<x_0<b$ се аналогни.

За конвексна функција во еквивалентните неравенства знакот "$<$" го заменуваме со знакот "$\le$". ■

2. КОНВЕКСНОСТ И ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ

Теорема 3. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f е конвексна (строго конвексна) на (a,b) ако и само ако функцијата f' монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b).

Доказ. Нека f е конвексна на (a,b) и $a<x_1<x_2<b$. Според теорема 2 за точките $a<u<x_1<x_2<v<b$, имаме

$$\frac{f(u)-f(x_1)}{u-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2},$$

од што следува

$$f'_-(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'_+(x_2),$$

односно

$$f'(x_1)=f'_-(x_1)\le f'_+(x_2)=f'(x_2).$$

Нека f' монотоно расте на (a,b) и нека за $x_0\in(a,b)$ ја разгледаме функцијата

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ x\in(a,b)\setminus\{x_0\}.$$

Од теоремата на Лагранж следува дека постои точка c меѓу x и x_0 таков што

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0).$$

Сега имаме

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2}=\frac{f'(x)-f'(c)}{x-x_0}\ge 0,\ x\in(a,b)\setminus\{x_0\},$$

т.е. функцијата $g(x)$ монотоно расте на интервалите (a,x_0) и (x_0,b). Освен тоа,

$$g(x_0^-)=f'_-(x_0)=f'(x_0)=f'_+(x_0)=g(x_0^+).$$

Од досега изнесеното и од теорема 2 следува дека функцијата f е конвексна на (a,b). ■

Теорема 4. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f''(x)$. Функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако за секој $x\in(a,b)$ важи $f''(x)\ge 0$. Функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако $f''(x)\ge 0$, за секој $x\in(a,b)$ и не постои интервал $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ таков што за секој $x\in(\alpha,\beta)$ важи $f''(x)=0$.

Доказ. Според теорема 3 функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако f' монотоно расте на (a,b). Но, според теорема IV 3, f' монотоно расте на (a,b) ако и само ако $f''(x)\ge 0$, за секој $x\in(a,b)$.

Според теорема 3, функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако f' строго монотоно расте на (a,b). Но, според теорема IV 4 функцијата f' строго монотоно расте на (a,b) ако и само ако $f''(x)\geq 0$, за секој $x\in(a,b)$ и не постои интервал $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ таков што за секој $x\in(\alpha,\beta)$ важи $f''(x)=0$. ■

Забелешка 1. Ако f е строго конвексна на (a,b), тогаш не мора да важи $f''(x)>0$, за $x\in(a,b)$. Навистина, функцијата $f(x)=x^4$ е строго конвексна на $\mathbf{R}$, но $f''(x)=12x^2$ и $f''(0)=0$.

Пример 2. Нека $a,b>0$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\leq\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{a+b}\ .$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ определена со $f(x)=-\sqrt[3]{x}$. Имаме

$$f'(x)=-\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f''(x)=\tfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}>0\ ,$$

што значи дека оваа функција е конвексна. Земаме $\alpha=\frac{1}{2}$ и од дефиниција 1 добиваме

$$f(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b)\leq\tfrac{1}{2}f(a)+\tfrac{1}{2}f(b),$$

па затоа

$$-\sqrt[3]{\tfrac{a+b}{2}}\leq-\tfrac{\sqrt[3]{a}}{2}-\tfrac{\sqrt[3]{b}}{2}\ ,$$

т.е.

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\leq\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{a+b}\ .\ ■$$

3. НЕРАВЕНСТВО НА ПОПОВИЦИУ

Теорема 5 (неравенство на Поповициу). Нека f е конвексна функција на (a,b). Тогаш за секои $x,y,z\in(a,b)$ важи

$$f(\tfrac{x+y+z}{3})+\tfrac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\geq\tfrac{2}{3}[f(\tfrac{x+y}{2})+f(\tfrac{y+z}{2})+f(\tfrac{z+x}{2})]\ . \qquad (3)$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\leq y\leq z$. Ако $y\leq\frac{x+y+z}{3}$, тогаш $\frac{x+y+z}{3}\leq\frac{x+z}{2}\leq z$ и $\frac{x+y+z}{3}\leq\frac{y+z}{2}\leq z$, па затоа постојат $s,t\in[0,1]$ такви што

$$\tfrac{x+z}{2}=\tfrac{x+y+z}{3}s+z(1-s)\ \text{ и }\ \tfrac{y+z}{2}=\tfrac{x+y+z}{3}t+z(1-t)\ ,$$

и ако ги собереме последните равенства добиваме

$$\frac{x+y-2z}{2}=\frac{x+y-2z}{3}(s+t),$$

што значи дека $s+t=\frac{3}{2}$. Но, функцијата f е конвексна и затоа

$$f(\frac{x+z}{2})\le sf(\frac{x+y+z}{3})+(1-s)f(z),$$

$$f(\frac{y+z}{2})\le tf(\frac{x+y+z}{3})+(1-t)f(z) \text{ и}$$

$$f(\frac{x+y}{2})\le \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y).$$

Конечно, од последните три неравенства следува неравенството (3).

Случајот $\frac{x+y+z}{3}\le y$ се разгледува аналогно и притоа важи

$$x\le \frac{x+z}{2}\le \frac{x+y+z}{3} \text{ и } x\le \frac{y+z}{2}\le \frac{x+y+z}{3}. \blacksquare$$

Пример 3. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\ge 4(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}).$$

Решение. За функцијата $f(x)=x+\frac{1}{x},\ \ x>0$ имаме $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ и $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$, што значи дека таа е конвексна. Сега од неравенството на Поповициу последователно ги добиваме еквивалентните неравенства

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{3}{x+y+z}+\frac{1}{3}(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z})\ge \frac{2}{3}(\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}+\frac{y+z}{2}+\frac{2}{y+z}+\frac{z+x}{2}+\frac{2}{z+x})$$

$$\frac{3}{x+y+z}+\frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\ge \frac{2}{3}(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x})$$

$$3+\frac{1}{3}(\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z})\ge \frac{4}{3}(\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x})$$

$$3+\frac{1}{3}(\frac{y+z}{x}+1+\frac{z+x}{y}+1+\frac{x+y}{z}+1)\ge \frac{4}{3}(\frac{z}{x+y}+1+\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1)$$

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\ge 4(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}). \blacksquare$$

На крајот од оваа точка да забележиме дека е точна и следнава теорема, која ќе ја прифатиме без доказ.

Теорема 6 (генерализирано неравенство на Поповициу). Нека f е конвексна функција на (a,b) и $a_i\in(a,b)$, $i=1,2,...,n$. Тогаш

$$f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)+n(n-2)f(a)\ge(n-1)(f(b_1)+f(b_2)+...+f(b_n)),$$

каде $a=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ и $b_i=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k\ne i}a_k$. $\blacksquare$

4. НЕРАВЕНСТВО НА ЈЕНСЕН

Теорема 7 (неравенство на Јенсен). Ако f е конвексна функција на (a,b), тогаш за секој $n \geq 2$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ и за секои $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ такви да $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n) . \qquad (1)$$

Ако функцијата f е строго конвексна, тогаш во (1) важи знак за строго неравенство при што броевите $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ не се сите меѓусебно еднакви, а броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ се позитивни.

Доказ. За $n = 2$ неравенството (1) се совпаѓа со неравенството од дефиницијата на конвексна функција.

Нека претпоставиме дека неравенството (1) е точно за произволен избор на $n-1$ точка од интервалот (a,b) и за $n-1$ ненегативни броеви чиј збир е еднаков на еден. Нека $n \geq 3$ и нека се дадени $x_1, ..., x_n \in (a,b)$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1]$, $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Од броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, најмалку еден е различен од 1. Без ограничување на општоста, можеме да земеме дека $\alpha_1 < 1$. Тогаш, од индуктивната претпоставка, имаме

$$f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k) \leq \alpha_1 f\left(x_1\right) + (1-\alpha_1) f(\sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k)$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) \sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

Според тоа, неравенството (1) важи и за n точки, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n. ■

Пример 4. а) Ако $x_i \in (0,\pi),$ за $i = 1,2,...,n,$ докажи дека

$$\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n} \leq \sin \tfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} . \qquad (2)$$

б) Ако за α, β, γ важи $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, докажи дека

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \tfrac{3\sqrt{3}}{8} .$$

Решение. а) За функцијата $f(x) = -\ln \sin x$, дефинирана на интервалот $(0, \frac{\pi}{2}),$ важи

$$f'(x) = -\operatorname{ctg} x \;\text{ и }\; f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} > 0 ,$$

за секој $x \in (0,\pi)$. Значи, функцијата f е строго конвексна на $(0,\pi)$.

Земаме, $x_i \in (0,\pi),$ за $i = 1,2,...,n$ и $\alpha_i = \frac{1}{n},$ $i = 1,2,...,n$. Тогаш, од неравенството на Јенсен, имаме:

$$
\begin{aligned}
-\ln\sin\tfrac{x_1+...+x_n}{n} &= f(\tfrac{x_1+...+x_n}{n}) \le \tfrac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}\\
&= -\tfrac{\ln\sin x_1+...+\ln\sin x_n}{n}\\
&= -\ln\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n}\,.
\end{aligned}
$$

Според тоа,

$$\ln\sin\tfrac{x_1+...+x_n}{n} \ge \ln\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n}$$

и бидејќи функцијата $\ln$ е монотоно растечка, добиваме дека важи неравенството (2).

б) Бидејќи $\alpha,\beta,\gamma>0$ и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, од (2) следува

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \sin^3\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin^3\tfrac{\pi}{3} = (\tfrac{\sqrt{3}}{3})^3 = \tfrac{3\sqrt{3}}{8}\,. \blacksquare$$

Пример 5. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1} \ge \sqrt{6(x+y+z)}\,.$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\ge 0$. Имаме

$$f'(x)=\tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ и } f''(x)=\tfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}>0,$$

што значи дека функцијата f е конвексна. Од неравенството на Јенсен следува

$$\tfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}}{3} \ge \sqrt{(\tfrac{x+y+z}{3})^2+1}\,,$$

и како $(x+y+z)^2+9 \ge 6(x+y+z)$ добиваме

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1} \ge \sqrt{(x+y+z)^2+9} \ge \sqrt{6(x+y+z)}\,. \blacksquare$$

5. ТЕЖИНСКИ НЕРАВЕНСТВА

Последица 3 (тежинско неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина). Нека $a_i>0, i=1,2,...,n$ и $\alpha_i\in[0,1], i=1,2,...,n$ се такви, да $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. Тогаш

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\,.$$

Доказ. За функцијата $f(x)=-\ln x$, на интервалот $(0,+\infty)$ имаме $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$, што значи дека таа е строго конвексна на интервалот $(0,+\infty)$. Затоа, согласно со неравенството на Јенсен, имаме

$$-\ln(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i) = f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i) \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(a_i) = -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln a_i = -\ln(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}),$$

односно

$$\ln(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i) \ge \ln(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i})$$

и бидејќи функцијата $\ln$ е монотоно растечка последното неравенство е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Пример 6. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \ge a^{\frac{a}{a+b+c}} b^{\frac{b}{a+b+c}} c^{\frac{c}{a+b+c}}.$$

Решение. Даденото неравенство се добива од тежинското неравенство за

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c,\ \alpha_1 = \frac{a}{a+b+c},\ \alpha_2 = \frac{b}{a+b+c},\ \alpha_3 = \frac{c}{a+b+c}.$$ ■

Пример 7. Нека $\alpha_i \in (0,1), i = 1,2,...,n$ се такви, што $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$. Докажи дека

$$\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}...\alpha_n^{\alpha_n} \ge \frac{1}{n}.$$

Решение. Ако во тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина земеме $a_i = \frac{1}{\alpha_i}$, $i = 1,2,...,n$, го добиваме неравенството

$$(\frac{1}{\alpha_1})^{\alpha_1}(\frac{1}{\alpha_2})^{\alpha_2}...(\frac{1}{\alpha_n})^{\alpha_n} \le \frac{1}{\alpha_1}\cdot\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}\cdot\alpha_2 + ... + \frac{1}{\alpha_n}\cdot\alpha_n = n$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Пример 8. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a и b и за секои природни броеви p и q, $p \ne q$ важи

$$ap^{a+b} - (a+b)p^a q^b + bq^{a+b} > 0. \qquad (1)$$

Решение. Неравенството (3) е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a}{a+b}(\frac{p}{q})^{a+b} + \frac{b}{a+b} > (\frac{p}{q})^a. \qquad (2)$$

За да го докажеме неравенството (2) доволно е во тежинското неравенство за земеме $\alpha_1 = \frac{a}{a+b}, \alpha_2 = \frac{b}{a+b}, a_1 = (\frac{p}{q})^{a+b}, a_2 = 1$, при што важи $a_1 \ne a_2$. Навистина имаме

$$\frac{a}{a+b}(\frac{p}{q})^{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot 1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 > a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} = (\frac{p}{q})^{(a+b)\frac{a}{a+b}} \cdot 1^{\frac{b}{a+b}} = (\frac{p}{q})^a,$$

бидејќи знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2$, што не е случај. ■

Забелешка 2. а) Ако во тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина ставиме $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$, добиваме

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \text{, т.е. } (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ ,}$$

и ова е уште еден доказ на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина.

б) Нека $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ се ненегативни реални броеви не сите еднакви на нула. Ако во тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина ставиме $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}$, $i = 1, 2, ..., n$ го добиваме неравенството

$$(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} ... a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}} \leq \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n} . \tag{3}$$

Забелешка 3. а) Ако тежинското равенство меѓу аритметичката и геометриската средина го примениме на броевите $\frac{1}{a_i}$, $i = 1, ..., n$ и $\alpha_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$, после средувањето го добиваме неравенството

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i}} \leq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} , \tag{4}$$

кое во литературата е познато како *тежинско неравенство меѓу геометриската и хармониската средина.* Понатаму, ако во (4)земеме $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$, добиваме

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} ,$$

и ова е уште еден доказ на неравенството меѓу геометриската и хармониската средина.

б) Нека $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ се ненегативни реални броеви не сите еднакви на нула. Ако во тежинското неравенство меѓу хармониската и геометриската средина ставиме

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}, i = 1, 2, ..., n$$

го добиваме неравенството

$$\frac{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}{\frac{\lambda_1}{a_1}+\frac{\lambda_2}{a_2}+...+\frac{\lambda_n}{a_n}} \leq (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} ... a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}} . \tag{5}$$

Пример 9. Докажи дека за секој природен број n важи неравенствата

$$(\tfrac{n+1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot n^n \leq (\tfrac{2n+1}{3})^{\frac{n(n+1)}{2}} . \tag{6}$$

Решение. Ако го примениме тежинското неравенство (3) меѓу аритметичката и геометриската средина на броевите $a_i = \lambda_i = i$, $i = 1,2,..,n$ го добиваме неравенството

$$(1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}} \le \frac{1^2+2^2+...+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3},$$

кое е еквивалентно со десното неравенство во (6). Ако го примениме тежинското неравенство (5) меѓу хармониската и геометриската средина на броевите $a_i = \lambda_i = i$, $i = 1,2,..,n$ го добиваме неравенството

$$(1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}} \ge \frac{1+2+...+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2},$$

кое е еквивалентно на левото неравенство во (6). ■

Последица 4. За секој $p > 1$, за секои $\alpha_i \in [0,1], i = 1,2,...,n$ такви, што $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и за секои $x_i > 0, i = 1,2,...,n$ е исполнето неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p . \tag{7}$$

Доказ. За функцијата $f(x) = x^p$, $p > 1$ на интервалот $(0,+\infty)$ важи $f'(x) = px^{p-1}$. Јасно, f' е строго монотоно растечка функција на $(0,+\infty)$, па затоа функцијата $f(x) = x^p$, $p > 1$ е строго конвексна на интервалот $(0,+\infty)$.

Нека $\alpha_i \in [0,1], i = 1,2,...,n$ се такви, што $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и $x_i > 0, i = 1,2,...,n$. Тогаш, од неравенството на Јенсен применето на функцијата $f(x) = x^p$ следува

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p . \ ■$$

Дефиниција 3. Нека $x_i > 0, i = 1,2,...,n$ и $p > 1$. Бројот

$$M_p(x_1, x_2,..., x_n) = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

го нарекуваме *средина од ред* p на броевите $x_i, i = 1,2,...,n$.

Пример 10. Ако $x \in (0,1)$, тогаш дека $x^5 + (1-x)^5 \ge \frac{1}{16}$. Докажи!

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката средина и средината со ред 5 го добиваме неравенството

$$\frac{x+(1-x)}{2} \le \sqrt[5]{\frac{x^5+(1-x)^5}{2}} ,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Забелешка 4. а) Ако во неравенството (7) ставиме $p=2$, го добиваме неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 , \tag{9}$$

кое во литературата е познато како *тежинско неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина*. Понатаму, ако во неравенството (7) земеме $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i=1,2,...,n$ го добиваме неравенството

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 ,$$

и ова е уште еден доказ на неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина. Всушност неравенството (8) покажува дека аритметичката средина на броевите $x_i > 0, i=1,2,...,n$ е помала или еднаква од секоја средина од ред $p,\ p>1$ на овие броеви.

б) Нека $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ се ненегативни реални броеви не сите еднакви на нула. Ако во тежинското неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина ставиме

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}, i=1,2,...,n ,$$

го добиваме неравенството

$$(\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n})^2 \le \frac{\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+...+\lambda_n x_n^2}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n} ,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)^2 \le (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n) .$$

Во последното неравенство ставаме $\lambda_i = b_i^2,\ x_i = \frac{a_i}{b_i},\ i=1,2,...,n$ и добиваме

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) ,$$

и ова е уште еден доказ на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

6. ЗАДАЧИ

1. Нека f е конвексна и ограничена функција на $(-\infty,+\infty)$. Докажи дека $f = \text{const}$.

2. Докажи дека, ако f е конвексна и периодична функција, тогаш $f = \text{const}$.

3 (неравенство на Петровиќ). Нека $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ е конвексна функција и $x_i > 0,\, i=1,2,...,n$. Тогаш важи неравенството

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\le f(x_1+x_2+...+x_n)+(n-1)f(0)\,. \qquad (1)$$

Докажи!

4. а) Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $0\le a<b$ е конвексна функција и нека $x_i>0$, $i=1,2,...,n$ се такви да

$$x_1+x_2+...+x_n\le b-a\,.$$

Докажи го неравенството

$$f(a+x_1)+...+f(a+x_n)\le f(a+x_1+x_2+...+x_n)+(n-1)f(a)\,.$$

б) Нека $f:[0,b_1]\to\mathbf{R}$ е конвексна функција и нека $b_1\ge b_2\ge b_3\ge 0$. Докажи го неравенството

$$f(b_1-b_2+b_3)\le f(b_1)-f(b_2)+f(b_3)\,.$$

5. Нека $a,b,c>0$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}\,.$$

6. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

7. Ако $|x|\le 1, |y|\le 1$, докажи дека важи неравенството

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\le 2\sqrt{1-(\tfrac{x+y}{2})^2}\,.$$

8. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви и $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. Докажи го неравенството

$$(a_1+\tfrac{1}{a_1})^2+(a_2+\tfrac{1}{a_2})^2+...+(a_n+\tfrac{1}{a_n})^2\ge n(\tfrac{S_n}{n}+\tfrac{n}{S_n})^2$$

9. Нека $x\ge y\ge 1$. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\ge\frac{y}{\sqrt{x+y}}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y+1}}\,.$$

10. Нека $x,y\in[0,1]$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\leq\frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

11. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

12. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви да $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

13. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

14. Докажи дека за секои $x,y,z\in(0,1)$ важи

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}.$$

15. Докажи дека за секои позитивни броеви $a_1,a_2,...,a_n$ точно е неравенството

$$\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\leq\frac{a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n}{a_1+a_2+...+a_n}.$$

16. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in(\frac{1}{2},1]$. Докажи дека

$$\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+a_2+...+a_n)^n}\geq\frac{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}{(n-a_1+a_2+...+a_n)^n}.$$

17. Нека $a_i,\ i=1,2,...,n$ се реални броеви поголеми од 1. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}.$$

18. Нека $n>1$ и $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви такви да

$$x_1+x_2+...+x_n=1.$$

Докажи дека

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+...+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

19. Докажи дека

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg}1^0\cdot\operatorname{tg}2^0\cdot...\cdot\operatorname{tg}44^0}<\sqrt{2}-1<\frac{\operatorname{tg}1^0+\operatorname{tg}2^0+...+\operatorname{tg}44^0}{44}. \quad (1)$$

20. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се ненегативни реални броеви не сите еднакви на нула.

а) Докажи дека равенката

$$x^n - a_1x^{n-1} - ... - a_{n-1}x - a_n = 0, \qquad (1)$$

има точно еден позитивен реален корен.

б) Нека $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B = \sum_{i=1}^{n} ia_i$ и нека R е позитивниот реален корен на равенката (1). Докажи дека $A^A \le R^B$.

21. Нека $a_i > 0, i = 1,2,...,n$. Докажи дека

$$(a_1a_2...a_n)^{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}} \le a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}.$$

22. Ако a,b и c се позитивни броеви, докажи дека

$$\frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}} \le (\tfrac{a+b+c}{3})^{a+b+c} \le a^ab^bc^c. \qquad (1)$$

23. Нека a,b,c,n и k се позитивни броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \ge a^k + b^k + c^k.$$

24. Докажи дека за секој $p > 1$ и за секои $x_i > 0, i = 1,...,n$ е исполнето неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^p \le n^{p-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^p.$$

25. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви да $x + y + z \ge 1$. Докажи дека

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

26. Нека $a,b,c, p,q,r \in [0,\frac{1}{2}]$ се такви да $a+b+c = p+q = r = 1$. Докажи го неравенството

$$abc \le \tfrac{1}{8}(ap + bq + cr).$$

27. Нека $n \ge 1$ е природен број и $x_i, i = 1,2,...,n$ се позитивни реални броеви такви да $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n$. Докажи дека $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^i}{i} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

28 (неравенство меѓу тежишни средини со ред r и s). Нека $x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$ и $t_i > 0, i = 1,2,...,n$ се такви да $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Нека r и s се два ненулти реални броеви такви што $r > s$. Докажи дека

$$(t_1x_1^r + t_2x_2^r + ... + t_nx_n^r)^{\frac{1}{r}} \geq (t_1x_1^s + t_2x_2^s + ... + t_nx_n^s)^{\frac{1}{s}} . \qquad (1)$$

29. Нека a, b, c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

а) $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ca)$, и

б) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

VI ГЛАВА
КЛАСИЧНИ НЕРАВЕНСТВА

1. НЕРАВЕНСТВО НА БЕРНУЛИ

Теорема 1 (неравенство на Бернули). Ако $x_i, i=1,2,...,n$ се реални броеви со ист знак, поголеми од -1, тогаш

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+...+x_n \qquad (1)$$

Решение. Неравенството (1) ќе го докажеме со математичка индукција по n.

За $n=1$ имаме $1+x_1 \geq 1+x_1$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека за $n=k$ и произволни рерални броеви $x_1, x_2,..., x_k$, со ист знак и поголеми од -1 важи

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+...+x_k$$

Нека $n=k+1$ и $x_i, i=1,2,...,k,k+1$ се произволни реални броеви со ист знак, поголеми од -1. Тогаш имаме

$$(x_1+x_2+...+x_k)x_{k+1} \geq 0 .$$

Од индуктивната претпоставка и последното неравенство добиваме:

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k)(1+x_{k+1}) &\geq (1+x_1+x_2+...+x_k)(1+x_{k+1})\\ &= 1+x_1+...+x_k+x_{k+1}+(x_1+...+x_k)x_{k+1}\\ &\geq 1+x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1},\end{aligned}$$

т.е. неравенството (1) важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n \in \mathbf{N}$ и секои реални броеви $x_i > -1$, $i=1,2,...,n$ со ист знак. ■

Пример 1. Нека $x_i, i=1,2,...,n$ се ненегативни броеви такви што $x_1+x_2+...+x_n \leq \frac{1}{2}$. Докажи дека

$$(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) \geq \frac{1}{2} .$$

Решение. Од $0 \leq x_i < 1, i=1,2,...,n$ имаме $x_i > -1, i=1,2,...,n$, па од неравенството на Бернули и неравенството $x_1+x_2+...+x_n \leq \frac{1}{2}$ следува

$$\begin{aligned}(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) &\geq (1+(-x_1))(1+(-x_2))...(1+(-x_n))\\ &= 1+(-x_1-x_2-...-x_n)\\ &= 1-(x_1+x_2+...+x_n) < \frac{1}{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Последица 1 (неравенство на Бернули). Ако $x > -1$, тогаш за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \tag{2}$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 1, ако во (1) ставиме $x_i = x$, $i = 1, 2, ..., n$. ■

Пример 2. Докажи дека за секој $x > 0$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ важи неравенството

$$1+\tfrac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}$$

Решение. За $x > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ имаме $\frac{x}{n} > -1$. Од неравенството на Бернули добиваме

$$(1+\tfrac{x}{n})^n \geq 1+n\cdot\tfrac{x}{n} = 1+x$$

т.е.

$$1+\tfrac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}\ .\ ■$$

Пример 3. Докажи дека

$$1+\sqrt{\tfrac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\tfrac{4+1}{4}}+...+\sqrt[n]{\tfrac{n+1}{n}} < n+1,\ n \in \mathbf{N}.$$

Решение. Од неравенството на Бернули следува дека за секој $k = 2, 3, ..., n$ важи

$$(1+\tfrac{1}{k^2})^k \geq 1+k\tfrac{1}{k^2} = \tfrac{k+1}{k},\ \text{т.е. } \sqrt[k]{\tfrac{k+1}{k}} \leq 1+\tfrac{1}{k^2}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}
1+\sqrt{\tfrac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\tfrac{4+1}{4}}+...+\sqrt[n]{\tfrac{n+1}{n}} &\leq 1+(1+\tfrac{1}{2^2})+(1+\tfrac{1}{3^2})+...+(1+\tfrac{1}{n^2})\\
&= n+(\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+...+\tfrac{1}{n^2})\\
&< n+\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+...+\tfrac{1}{(n-1)n}\\
&= n+(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+...+(\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n})\\
&= n+1-\tfrac{1}{n} \leq n+1,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Во теорема 1, т.е. во нејзината последица го докажавме наједноставниот облик на неравенството на Бернули. Во следната последица ќе презентираме поопшт облик на споменатото неравенство.

Последица 2 (неравенство на Коши меѓу аритметичката и геометриската средина). За аритметичката и геометриската средина на позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \ . \tag{3}$$

Доказ. Нека $A_i = \frac{a_1+a_2+...+a_i}{i}$, $i = 1,2,...,n$. За секој $i = 2,3,...,n$ важи

$$\frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}} = \frac{A_i}{A_{i-1}} - 1 = \frac{(i-1)(a_1+a_2+...+a_i)}{i(a_1+a_2+...+a_{i-1})} - 1 > -1,$$

па затоа од неравенството (2) следува дека за секој $i = 2,3,...,n$ важи

$$\left(\frac{A_i}{A_{i-1}}\right)^i = \left(1+\frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}}\right)^i \geq 1 + i\frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}} = i\frac{A_i}{A_{i-1}} - (i-1),$$

од што добиваме

$$A_i^i \geq A_{i-1}^i\left[i\frac{A_i}{A_{i-1}} - (i-1)\right] = A_{i-1}^{i-1}[iA_i - (i-1)A_{i-1}] = a_i A_{i-1}^{i-1} .$$

Конечно, од претходно неравенство следува неравенството

$$A_n^n \geq a_n A_{n-1}^{n-1} \geq a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq ... \geq a_n a_{n-1}...a_2 A_1^1 = a_n a_{n-1}...a_2 a_1 ,$$

кое е еквивалентно со неравенството (3). ■

Последица 3 (неравенство на Бернули). Ако $x > -1$ и $r \in \mathbf{Q}$, $r \geq 1$, тогаш

$$(1+x)^r \geq 1 + rx \ .$$

Доказ. Нека $r = \frac{p}{q}$, $p \geq q$ и $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$. Ставаме

$$a_1 = a_2 = ... = a_q = 1 + rx \ \text{ и } \ a_{q+1} = a_{q+2} = ... = a_p = 1 .$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\begin{aligned} 1 + x &= \frac{px+p}{p} = \frac{q+qrx+p-q}{p} \\ &= \frac{q(1+rx)+(p-q)}{p} \\ &= \frac{a_1+a_2+...+a_q+a_{q+1}+...+a_p}{p} \\ &\geq (a_1 a_2 ... a_q a_{q+1} ... a_p)^{1/p} \\ &= ((1+rx)^q)^{1/p} = (1+rx)^{1/r}, \end{aligned}$$

т.е. $(1+x)^r \geq 1 + rx$. ■

Во последица 3 презентиравме едно обопштување на неравенството на Бернули, меѓутоа истото е познато и во следниот облик.

Теорема 2 (неравенство на Бернули). Ако $x > -1$ и $\alpha \in [1, +\infty)$, тогаш

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x , \tag{4}$$

при што знак за равенство важи само за $x = 0$.

Доказ. Јасно, за $\alpha = 1$ имаме $1 + x \geq 1 + x$, т.е. неравенството важи. Нека $\alpha > 1$. На интервалот $[0, x]$, $x > 0$ да ги разгледаме функциите

$$f(u) = (1+u)^\alpha \ \text{ и } \ g(u) = \alpha u .$$

Тие се непрекинати на $[0,x]$, диференцијабилни на $(0,x)$ и $g'(u)=\alpha\neq 0$, за секој $u\in[0,x]$. Од теоремата на Коши следува дека постои $c\in(0,x)$ таков да

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

т.е.

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x-0}=\frac{\alpha(1+c)^{\alpha-1}}{\alpha}=(1+c)^{\alpha-1}\geq 1,$$

што значи дека точно е неравенството (4).

Ако $-1<x<0$, тогаш функциите

$$f(u)=(1+u)^{\alpha} \text{ и } g(u)=\alpha u$$

ги разгледуваме на интервалот $[x,0]$. ■

Пример 4. Докажи дека за позитивни реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ помали од 1, важи неравенството

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_2}}(1+x_2)^{\frac{1}{x_3}}...(1+x_{n-1})^{\frac{1}{x_n}}(1+x_n)^{\frac{1}{x_1}}\geq 2^n$$

Решение. Од неравенството на Бернули и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина последователно добиваме

$$\begin{aligned}(1+x_1)^{\frac{1}{x_2}}(1+x_2)^{\frac{1}{x_3}}...(1+x_{n-1})^{\frac{1}{x_n}}(1+x_n)^{\frac{1}{x_1}} &\geq (1+\tfrac{x_1}{x_2})(1+\tfrac{x_2}{x_3})...(1+\tfrac{x_{n-1}}{x_n})(1+\tfrac{x_n}{x_1})\\ &\geq 2\sqrt{\tfrac{x_1}{x_2}}2\sqrt{\tfrac{x_2}{x_3}}...2\sqrt{\tfrac{x_{n-1}}{x_n}}2\sqrt{\tfrac{x_n}{x_1}}=2^n,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

2. РАВЕНСТВА НА АБЕЛ

Во овој дел ќе ги разгледаме равенствата на Абел и нивната примена при докажување на неравенства. Притоа, да напоменеме дека неравенствата кои се докажуваат со помош на Абеловите равенства најчесто исполнуваат специфични услови и многу тешко може да се докажат со други методи.

Лема 1 (равенства на Абел). Нека се $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ две низи реални броеви и нека

$$s_n=a_1+a_2+...+a_n.$$

Тогаш, за секој $n\geq 1$ важи

$$a_1b_1+...+a_nb_n=s_1b_1+(s_2-s_1)b_2+...+(s_n-s_{n-1})b_n \tag{1}$$

и

$$a_1b_1+...+a_nb_n=s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)+...+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+s_nb_n \tag{2}$$

Доказ. Равенството (1) непосредно следува од равенствата $s_1=a_1$ и $a_i=s_i-s_{i-1}$, за $i=1,2,...,n$, а равенството (2) се добива со прегрупирање на членовите во конечниот збир на десната страна на равенството (1). ■

Лема 2 (неравенство на Абел). Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n \geq 0$ се реални броеви. За секој $k = 1, 2, ..., n$ нека $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ и нека

$$M = \max\{s_1, s_2, ..., s_n\} \text{ и } m = \min\{s_1, s_2, ..., s_n\}.$$

Тогаш

$$my_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \leq My_1.$$

Доказ. Ќе го докажеме левото неравенство. Нека $y_{n+1} = 0$. Ако го искористиме равенството на Абел (2) добиваме

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n &= s_1(y_1 - y_2) + ... + s_{n-1}(y_{n-1} - y_n) + s_n(y_n - y_{n+1}) \\ &\geq m[(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + ... + (y_{n-1} - y_n) + (y_n - y_{n+1})] \\ &= my_1. \end{aligned}$$

Десното неравенство се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Пример 5. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што $x_1 \geq x_2 \geq \geq ... \geq x_n \geq 0 = x_{n+1}$. Докажи дека

$$\sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}}).$$

Решение. Јасно, ако $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, тогаш неравенството важи. Затоа нека постои i таков што $x_i > 0$. Да означиме $c_i = \sqrt{i} - \sqrt{i-1}$ и $a_i = \sqrt{x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш неравенството го добива обликот

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n)^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2.$$

Земаме

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \text{ и } b_i = \tfrac{a_i}{A},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Тогаш $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$ и како $A = \frac{a_i}{b_i}$, за $i = 1, 2, ..., n$, во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$$

Понатаму, од претходно изнесеното и неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува дека за секој $k = 1, 2, ..., n$ важи

$$\sum_{i=1}^{k} c_i - \sum_{i=1}^{k} b_i \geq \sqrt{k} - \sqrt{k \sum_{i=1}^{k} b_i^2} \geq \sqrt{k} - \sqrt{k \sum_{i=1}^{n} b_i^2} = 0,$$

па затоа од равенството на Абел следува

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(c_i - b_i) = (a_1 - a_2)(c_1 - b_1) + (a_2 - a_3)(c_1 + c_2 - b_1 - b_2) + ...$$

$$+(a_{n-1}-a_n)(\sum_{i=1}^{n-1} c_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i)+a_n(\sum_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} b_i) \geq 0. \ \blacksquare$$

Пример 6. Нека $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n > 0$ и $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви такви да $x_1 x_2 ... x_k \geq y_1 y_2 ... y_k$, за секој $k = 1, 2, ..., n$. Докажи дека

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq y_1 + y_2 + ... + y_n .$$

Решение. Од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_k}{y_k} \geq k \sqrt[k]{\frac{x_1 x_2 ... x_k}{y_1 y_2 ... y_k}} \geq k \ , \tag{1}$$

за секој $k = 1, 2, ..., n$. Сега од неравенствата (1) и од равенството на Абел добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i (\frac{x_i}{y_i} - 1)$$

$$= (y_1 - y_2)(\frac{x_1}{y_1} - 1) + (y_2 - y_3)(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} - 2) + ...$$

$$+(y_{n-1} - y_n)(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{y_i} - n + 1) + y_n (\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} - n) \geq 0 . \ \blacksquare$$

Пример 7. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се произволни реални броеви и $b_1, b_2, ..., b_n$ се реални броеви такви да $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq 0$. Докажи дека постои природен број $k \leq n$ таков да

$$| a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n | < | a_1 + a_2 + ... + a_k | .$$

Решение. Нека $S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$. Имаме

$$S = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_2)(b_3 - b_4) + ...$$

$$+(a_1 + ... + a_{n-1})(b_{n-1} - b_n) + (a_1 + ... + a_n) b_n .$$

Нека $A_i = | a_1 + a_2 + ... + a_i |$ и нека $A_k = \max_{i=1,2,..,n} A_i$. Тогаш

$$| S | \leq \sum_{i=1}^{n} A_i (b_i - b_{i+1}) \leq A_k \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1}) = A_k b_1 \leq A_k = | a_1 + a_2 + ... + a_k | ,$$

што и требаше да се докаже. ■

3. НЕРАВЕНСТВА ЗА ПРЕУРЕДУВАЊЕ

Теорема 3 (прво неравенство за преуредување). Нека $x_i, y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ се такви што

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \ , \ y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$$

и π е произволна пермутација на множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Тогаш важи неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\pi(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ . \tag{1}$$

Ако притоа низата $x_1, x_2, ..., x_n$ строго опаѓа, тогаш левата страна преминува во равенство ако и само ако $y_{n+1-\pi(i)} = y_i, i = 1, 2, ..., n$, а десната страна преминува во равенство ако и само ако $y_{\pi(i)} = y_i, i = 1, 2, ..., n$.

Доказ. За дадената пермутација π на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ да означиме $z_i = y_{\pi(i)}, i = 1, 2, ..., n$. Ќе го докажеме само десното неравенство и тоа на два начина.

Прв начин. Ќе користиме индукција по n.

За $n = 1$ неравенството очигледно е точно.

Нека претпоставиме дека тоа е точно за некој природен број n. Ќе докажеме дека тоа е точно и за $n+1$. Разгледуваме две можности.

1) $z_{n+1} = y_{n+1}$. Во овој случај $z_1, z_2, ..., z_n$ е пермутација на броевите $y_1, y_2, ..., y_n$, па според индуктивната претпоставка следува дека важи неравенството (1). Ако на левата и десната страна додадеме $x_{n+1}y_{n+1}$ добиваме дека неравенството (1) е точно и за $n+1$ броеви.

2) $z_k = y_{n+1}$, $k \neq n+1$. Нека $z_1', z_2', ..., z_n', z_{n+1}'$ е пермутација на броевите $z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1}$ која што се добива со замена на $k-$тиот и $n+1-$ от член. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' - \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i = x_k z_{n+1} + x_{n+1} y_{n+1} - x_k y_{n+1} - x_{n+1} z_{n+1}$$
$$= (x_k - x_{n+1})(z_{n+1} - y_{n+1}) \geq 0,$$

каде што $y_l = z_{n+1}$. Значи, $\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i'$, па затоа доволно е да се докаже дека $\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$, а тоа е докажано во 1).

Втор начин. Точни се неравенствата

$$x_1 - x_2 \geq 0,\ x_2 - x_3 \geq 0,\ ...,\ x_{n-1} - x_n \geq 0;$$
$$z_1 \leq y_1,\ z_1 + z_2 \leq y_1 + y_2,\ ...,\ z_1 + z_2 + ... + z_n \leq y_1 + y_2 + ... + y_n.$$

Од равенството на Абел следува

$$\begin{aligned} x_1 z_1 + x_2 z_2 + ... + x_n z_n &= (x_1 - x_2) z_1 + (x_2 - x_3)(z_1 + z_2) + ... + \\ &\quad + (x_{n-1} - x_n)(z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}) + x_n (z_1 + z_2 + ... + z_n) \\ &\leq (x_1 - x_2) y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + ... + \\ &\quad + (x_{n-1} - x_n)(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + x_n (y_1 + y_2 + ... + y_n) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Јасно, ако низата $x_1, x_2, ..., x_n$ строго монотоно опаѓа, тогаш за секој $i = 1, 2, ..., n-1$ важи $x_i - x_{i+1} > 0$, па затоа знак за равенство важи ако и само ако $y_1 = z_1$, $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$, ..., $y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} = z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}$, од каде добиваме $y_i = z_i y_{\pi(i)}, i = 1, 2, ..., n$. ■

Пример 8. а) Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^2b+b^2c+c^2a\le a^3+b^3+c^3.$$

б) Нека $x_i,y_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,...,n$ и нека

$$x_1\ge x_2\ge ...\ge x_n,\ y_1\ge y_2\ge ...\ge y_n.$$

Докажи дека за секоја пермутација $z_1,z_2,...,z_n$ на броевите $y_1,y_2,...,y_n$ важи:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\le\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\ . \qquad (2)$$

Решение. а) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\le b\le c$. Тогаш $a^2\le b^2\le c^2$, па бараното неравенство следува од десното неравенство во (1).

б) Бидејќи $z_1,z_2,...,z_n$ е пермутација на $y_1,y_2,...,y_n$ добиваме дека важи

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2\ ,$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\sum_{i=1}^{n}z_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$=2(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_iz_i),$$

па затоа неравенството (2) следува од десното неравенство во теорема 3. ■

Пример 9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\tfrac{a^2+c^2}{b}+\tfrac{b^2+a^2}{c}+\tfrac{c^2+b^2}{a}\ge 2(a+b+c)\ .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\ge b\ge c$. Тогаш

$$a^2\ge b^2\ge c^2 \text{ и } \tfrac{1}{c}\ge\tfrac{1}{b}\ge\tfrac{1}{a}\ .$$

Од левото неравенство во (1) следува

$$\tfrac{a^2}{b}+\tfrac{b^2}{c}+\tfrac{c^2}{a}=a^2\tfrac{1}{b}+b^2\tfrac{1}{c}+c^2\tfrac{1}{a}\ge a^2\tfrac{1}{a}+b^2\tfrac{1}{b}+c^2\tfrac{1}{c}=a+b+c \qquad (3)$$

и

$$\tfrac{c^2}{b}+\tfrac{a^2}{c}+\tfrac{b^2}{a}=a^2\tfrac{1}{c}+b^2\tfrac{1}{a}+c^2\tfrac{1}{b}\ge a^2\tfrac{1}{a}+b^2\tfrac{1}{b}+c^2\tfrac{1}{c}=a+b+c\ . \qquad (4)$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (3) и (4) го добиваме бараното неравенство. ■

Последица 4 (неравенство на Несбит). За секои $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ важи

$$\tfrac{a}{b+c}+\tfrac{b}{c+a}+\tfrac{c}{a+b}\ge\tfrac{3}{2}\,.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\le b\le c$, при што $a+b\le c+a\le b+c$, па затоа

$$\tfrac{1}{b+c}\le\tfrac{1}{c+a}\le\tfrac{1}{a+b}\ .$$

Сега од десното неравенство во (1) добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b},$$

и ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Последица 5. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се произволни реални броеви и π е произволна пермутација на множеството $\{1,2,...,n\}$. Тогаш важи неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}x_i x_{\pi(i)}\leq\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_{\pi(i)}=x_i$, $i=1,2,...,n$.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1\geq x_2\geq ...\geq x_n$. Сега тврдењето непосредно следува од теорема 3. ■

Последица 6 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако a_i, $b_i\in\mathbf{R}$, за $i=1,2,...,n$, тогаш

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2\leq\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2, \tag{5}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}. \tag{6}$$

Доказ. Ако $a_1=a_2=...=a_n=0$ или $b_1=b_2=...=b_n=0$, тогаш неравенството е очигледно. Нека

$$A=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2},\ B=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2},\ A,B\neq 0$$

и да земеме

$$x_i=\frac{a_i}{A}\ \text{и}\ x_{n+i}=\frac{b_i}{B},\ \text{за}\ i=1,2,...,n.$$

Од последица 4 следува неравенството

$$\begin{aligned}2&=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{A}+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{B}=\sum_{i=1}^{2n}x_i^2\\&\geq x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+...+x_nx_{2n}+x_{n+1}x_1+x_{n+2}x_2+...+x_{2n}x_n\\&=2(x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+...+x_nx_{2n})\\&=2\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{AB},\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (5). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако важи (6). ■

Последица 7. Нека $a_1\geq a_2\geq ...\geq a_n>0$ и π е произволна пермутација на множеството $\{1,2,...,n\}$. Тогаш важи неравенството

$$n \le \frac{a_1}{a_{\pi(1)}} + \frac{a_2}{a_{\pi(2)}} + \dots + \frac{a_n}{a_{\pi(n)}} .$$

Доказ. Земаме

$$b_i = \frac{1}{a_{n+1-i}}, \ i = 1, 2, \dots, n .$$

Тогаш $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n > 0$ и $b_{n+1-i} = \frac{1}{a_i}, \ i = 1, 2, \dots, n$ и од левото неравенство во (1) следува бараното неравенство. ■

Теорема 4 (второ неравенство за преуредување). Нека

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \text{ и } y_1 < y_2 < \dots < y_n$$

се реални броеви и нека

$$\alpha = \min_{1 \le i < n} (x_{i+1} - x_i) \text{ и } \beta = \min_{1 \le i < n} (y_{i+1} - y_i) .$$

Тогаш за секоја неидентична пермутација π важи

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_{\pi(i)} \le \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \alpha\beta . \tag{3}$$

Доказ. Нека $A_\pi = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{\pi(i)}$ и σ е неидентична пермутација таква што $A_\sigma = \max A_\pi$. Тогаш, постојат индекси i и k такви што $i < k$ и $\sigma(i) > \sigma(k)$. Со (i, k) да ја означиме пермутацијата во која само индексите i и k ги менуваат местата (транспозиција на i и k). Сега, ако ставиме $\sigma' \circ (i, k)$, тогаш

$$\begin{aligned} A_{\sigma'} &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_{\sigma'(i)} = y_1 x_{\sigma'(1)} + .. + y_i x_{\sigma'(i)} + \dots + y_k x_{\sigma'(k)} + \dots + y_n x_{\sigma'(n)} \\ &= y_1 x_{\sigma(1)} + .. + y_i x_{\sigma(k)} + \dots + y_k x_{\sigma(i)} + \dots + y_n x_{\sigma(n)} \\ &= y_1 x_{\sigma(1)} + .. + y_i x_{\sigma(i)} + \dots + y_k x_{\sigma(k)} + \dots + y_n x_{\sigma(n)} \\ &\quad + y_i x_{\sigma(k)} + y_k x_{\sigma(i)} - y_i x_{\sigma(i)} - y_k x_{\sigma(k)} \\ &= A_\sigma + (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(k)})(y_k - y_i) \ge A_\sigma + \alpha\beta, \end{aligned}$$

и како σ е неидентична пермутација таква што $A_\sigma = \max A_\pi$, од последното неравенство следува дека σ' е идентична пермутација, па затоа важи неравенството (3). ■

Пример 10. Нека $x_1, x_2, \dots, x_k$ се различни реални броеви такви да $\sum_{i=1}^{k} x_i \ne 0$. Докажи дека постојат цели броеви $n_1, n_2, \dots, n_k$ такви да

$$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i > 0$$

и за секоја неидентична пермутација π на $\{1, 2, \dots, k\}$ важи

$$\sum_{i=1}^{k} n_i x_{\pi(i)} < 0 .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 < x_2 < ... < x_k$. Дефинираме $\alpha = \min\limits_{1\le i<k}(x_{i+1}-x_i)$ и $s = |\sum\limits_{i=1}^{k} x_i| > 0$. Избираме природен број $N > \frac{s}{\alpha}$ и цели броеви $n_i = iN + p$, $i = 1,2,...,k$, каде p е единствен цел број таков што $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i \in (0,s]$. Сега имаме

$$N = \min_{1\le i<k}(n_{i+1}-n_i) \text{ и } \alpha = \min_{1\le i<k}(x_{i+1}-x_i),$$

па од теорема 3, за неидентична пермутација π следува

$$\sum_{i=1}^{k} n_i x_{\pi(i)} \le \sum_{i=1}^{k} n_i x_i - N\alpha \le s - N\alpha < 0. \blacksquare$$

4. НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Теорема 5 (неравенство на Чебишев). Нека $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2,...,n$ се такви што $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \le n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1,2,...,n$ или $b_i = b$, за $i = 1,2,...,n$.

Доказ. *Прв начин.* Од условот следува дека за секои $i,k \in \{1,2,...,n\}$ е исполнето неравенството

$$(a_i - a_k)(b_i - b_k) \ge 0, \tag{2}$$

од што последователно ги добиваме следниве еквивалентни неравенства

$$\sum_{i\ne k}(a_i - a_k)(b_i - b_k) \ge 0$$
$$2\sum_{i\ne k} a_i(b_i - b_k) \ge 0$$
$$\sum_{i\ne k} a_i(b_i - b_k) \ge 0$$
$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i\ne k} a_i b_k \ge 0$$
$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

т.е. точно е равенството (1). Јасно, во (1) знак за равенство важи ако и само ако за секои $i \ne k$ во (2) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1,2,...,n$ или $b_i = b$, за $i = 1,2,...,n$.

Втор начин. Равенството (1) ќе го докажеме со помош на математичка индукција. За $n = 1$ имаме $a_1 \cdot b_1 \le 1 \cdot a_1 b_1$, т.е. важи (1). Нека претпоставиме дека неравенството (1) е точно за $n = k \ge 1$, т.е. дека за

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i \le k\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \ . \tag{3}$$

Нека се дадени реалните броеви a_i, b_i, $i = 1,2,...,k+1$ такви што

$$a_1 \le ... \le a_k \le a_{k+1} \text{ и } b_1 \le ... \le b_k \le b_{k+1}.$$

Да ставиме $A = \sum_{i=1}^{k} a_i$ и $B = \sum_{i=1}^{k} b_i$. Тогаш

$$A = \sum_{i=1}^{k} a_i \le ka_{k+1} \text{ и } B = \sum_{i=1}^{k} b_i \le kb_{k+1},$$

па затоа последователно ги добиваме следниве еквивалентни неравенства

$$(A - ka_{k+1})(B - kb_{k+1}) \ge 0 \tag{4}$$

$$AB + k^2 a_{k+1}b_{k+1} \ge kBa_{k+1} + kAb_{k+1}$$

$$(k+1)AB + k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} \ge k(AB + Ab_{k+1} + Ba_{k+1} + a_{k+1}b_{k+1})$$

$$(k+1)AB + k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} \ge k(AB + Ab_{k+1} + Ba_{k+1} + a_{k+1}b_{k+1})$$

$$(k+1)AB + k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} \ge k(A + a_{k+1})(B + b_{k+1})$$

$$\tfrac{1}{k} AB + a_{k+1}b_{k+1} \ge \tfrac{1}{k+1}(A + a_{k+1})(B + b_{k+1}) \tag{5}$$

Понатаму, од индуктивната претпоставка и од неравенството (5) добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1} \ge \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i + a_{k+1}b_{k+1}\\ &= \tfrac{1}{k} AB + a_{k+1}b_{k+1} \ge \tfrac{1}{k+1}(A + a_{k+1})(B + b_{k+1})\\ &= \tfrac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k+1} b_i,\end{aligned}$$

т.е. неравенството (1) важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

Конечно, од (4) следува дека во (1) знак за равенство важи ако и само ако $A - na_{n+1} = 0$ или $B - nb_{n+1} = 0$, односно ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1,2,...,n+1$ или $b_i = b$, за $i = 1,2,...,n+1$.

Трет начин. Од првото неравенство за преуредување (теорема 3) следува

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1b_2 + a_2b_3 + ... + a_{n-1}b_n + a_nb_1,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1b_3 + a_2b_4 + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_2,$$

....

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1b_n + a_2b_1 + ... + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1}.$$

Ако го собереме равенството и добиените $n-1$ неравенства, по средувањето неравенства го добиваме неравенството (1). ■

Последица 8 (неравенство на Чебишев). Нека $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2, \ ...,n$ се такви да $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, тогаш

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \ , \tag{6}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1, 2, ..., n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, ..., n$.

Доказ. Од $-b_1 \ge -b_2 \ge ... \ge -b_n$ следува, па ако ја примениме теорема 2 на броевите $a_i, -b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} (-b_{n+1-i}) \le n\sum_{i=1}^{n} a_i (-b_{n+1-i}) \ ,$$

кое е еквивалентно со неравенството (6). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1, 2, ..., n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, ..., n$. ■

Последица 9. Ако $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ се такви што $a_1 \ge a_2 \ge ... \ \ge a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$, тогаш точни се неравенствата (1) и (6), при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1, 2, ..., n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, ..., n$.

Доказ. Непосредна следува од теорема 5, последица 7 и фактот дека

$$-a_1 \ge -a_2 \ge ... \ge -a_n \text{ и } -b_1 \ge -b_2 \ge ... \ge -b_n \ .$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Последица 10. Ако $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ се такви што $a_1 \ge a_2 \ge ... \ \ge a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ или пак важи $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$, тогаш точни се неравенствата

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \ge n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 5 и последица 7. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Последица 11 (неравенство на Коши меѓу аритметичката и квадратната средина). Нека $a_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш

$$\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \ge \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. Земаме $b_i = a_i, i = 1, 2, ..., n$ и од неравенството на Чебишев го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ ,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Пример 11. Докажи дека за секои позитивни реални броеви x_i, $i = 1, 2, ..., n$ е исполнето равенството

$$\frac{1}{\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}}-\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}\geq\frac{1}{n}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1\geq x_2\geq...\geq x_n$. Нека,

$$a_i=\frac{1}{x_i},\ b_i=\frac{1}{1+x_i},.$$

за $i=1,2,...,n$. Ако го искористиме неравенството на Чебишев и землеме предвид дека

$$a_i-b_i=\frac{1}{x_i}-\frac{1}{1+x_i}=\frac{1+x_i-x_i}{x_i(1+x_i)}=\frac{1}{x_i(1+x_i)}=a_ib_i,$$

за $i=1,2,...,n$, го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\leq n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i(1+x_i)}=n[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}].$$

Конечно, во последното неравенство поделиме со $n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$ и добиваме

$$\frac{1}{n}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_i=c$, $i=1,2,...,n$. ■

Пример 12. Најди n реални броеви $x_1\leq x_2\leq...\leq x_n$ за кои е исполнето неравеството

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\leq n\sum_{i=1}^{n}x_ix_{n-i+1}. \tag{7}$$

Решение. Нека $a_i=x_i$, $b_i=x_i$, $i=1,2,...,n$. Тогаш од последица 3 следува

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\geq n\sum_{i=1}^{n}x_ix_{n-i+1}. \tag{8}$$

Од (7) и (8) следува дека во (6) важи знак за равенство, а тоа е можно ако и само ако $a_i=a$, за $i=1,2,...,n$ или $b_i=b$, за $i=1,2,...,n$, што значи ако и само ако $x_i=x$, за $i=1,2,...,n$. ■

Пример 13. Докажи дека

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)},$$

каде a,b,c,x,y и z се позитивни реални броеви такви што $a\geq b\geq c$ и $x\leq y\leq z$.

Решение. Бидејќи

$$a\geq b\geq c \text{ и } \frac{a^2}{x}\geq\frac{b^2}{y}\geq\frac{c^2}{z}$$

од неравенството на Чебишев имаме

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right)=\frac{1}{3}\left(a\frac{a^2}{x}+b\frac{b^2}{y}+c\frac{c^2}{z}\right)\geq\frac{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}}{3}\,\frac{a+b+c}{3}\,. \tag{9}$$

Понатаму, од Енгеловиот принцип на мунимум, или од неравенстовото на Коши–Буњаковски–Шварц применето на броевите

$$\frac{a}{\sqrt{x}},\frac{b}{\sqrt{y}},\frac{c}{\sqrt{z}} \text{ и } \sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$$

имаме

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\,,$$

па затоа

$$\frac{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}}{3}\,\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{1}{3}\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\,\frac{a+b+c}{3}=\frac{(a+b+c)^3}{9(x+y+z)}\,. \tag{10}$$

Конечно, од (9) и (10) следува бараното неравенство. ■

Пример 14. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни релани броеви такви да $a_1+a_2+...+a_n=n$. Докажи дека

$$a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+...+a_n^{n+1}\geq a_1^n+a_2^n+...+a_n^n\,. \tag{11}$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a_1\leq a_2\leq...\leq a_n$. Тогаш $a_1^n\leq a_2^n\leq...\leq a_n^n$, па од неравенството на Чебишев и од условот $a_1+a_2+...+a_n=n$ следува неравенството

$$\begin{aligned} n(a_1^n a_1+a_2^n a_2+...+a_n^n a_n) &= n(a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+...+a_n^{n+1}) \\ &\geq (a_1+a_2+...+a_n)(a_1^n+a_2^n+...+a_n^n) \\ &= n(a_1^n+a_2^n+...+a_n^n), \end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (11). ■

Пример 15. Нека $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{9}{10}\leq\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}<1.$$

Решение. За да го докажеме десното неравенство, доволно е да забележиме дека именителите се поголеми од 1. Затоа

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}<a+b+c=1\,.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\leq b\leq c$. Тогаш

$$\frac{1}{1+bc}\leq\frac{1}{1+ca}\leq\frac{1}{1+ab}\,.$$

Ако последователно неравенството на Чебишев, неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, неравенството

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\,,$$

кое непосредно следува од пример I 3 б), добиваме

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\right) &\geq (a+b+c)\left(\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab}\right)=\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab} \\ &\geq\frac{9}{3+ab+bc+ca}\geq\frac{9}{3+\frac{(a+b+c)^2}{3}}=\frac{27}{10}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

5. НЕРАВЕНСТВО НА ХЕЛДЕР

Во овој дел ќе го докажеме таканареченото неравенство на Хелдер и ќе се осврнеме на неговата примена. За таа цел прво ќе го докажеме неравенството на Јанг, кое е основа за доказот на неравенството на Хелдер.

Теорема 6 (неравенство на Јанг). За секои $a,b,\ \lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви да $\lambda+\mu=1$, е исполнето неравенството

$$ab\le\lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+\mu b^{\frac{1}{\mu}},\tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a^{\frac{1}{\lambda}}=b^{\frac{1}{\mu}}$.

Доказ. *Прв начин.* Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^x$, $x\in\mathbf{R}$. Имаме $f'(x)=e^x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и $f'(x)=e^x$ строго монотоно расте на целата реална права, па затоа f е строго конвексна на целата реална права. Ставаме $x_1=\frac{\ln a}{\lambda}$, $x_2=\frac{\ln b}{\mu}$ и добиваме

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)\le\lambda f(x_1)+\mu f(x_2),$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви да $\lambda+\mu=1$, односно

$$e^{\lambda\frac{\ln a}{\lambda}+\mu\frac{\ln b}{\mu}}\le\lambda e^{\frac{\ln a}{\lambda}}+\mu e^{\frac{\ln b}{\mu}},$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви да $\lambda+\mu=1$. Според тоа,

$$e^{\ln ab}\le\lambda e^{\ln a^{1/\lambda}}+\mu e^{\ln b^{1/\mu}},$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви да $\lambda+\mu=1$, од што добиваме

$$ab\le\lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+\mu b^{\frac{1}{\mu}},$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви да $\lambda+\mu=1$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\ln a}{\lambda}=x_1=x_2=\frac{\ln b}{\mu}$, т.е. ако и само ако $a^{\frac{1}{\lambda}}=b^{\frac{1}{\mu}}$.

Втор начин. Нека $\alpha\in(0,1)$ и функцијата $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ е определена со $f(x)=x^\alpha-\alpha x$. Имаме $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$, па затоа $f'(x)>0$ за $0<x<1$, $f'(1)=0$ и $f'(x)<0$ за $x>1$. Затоа функцијата f строго монотоно расте на интервалот $(0,1)$ и строго монотоно опаѓа на интервалот $(1,\infty)$, што значи дека има строг локален, но и глобален максимум во точката $x=1$ и вредноста на тој максимум е $f(1)=1-\alpha$. Според тоа, $x^\alpha-\alpha x\le1-\alpha$, за секој $x\ge0$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=1$.

Ако во добиеното неравенство ставиме $x=a^{\frac{1}{\lambda}}b^{-\frac{1}{\mu}}$ и $\alpha=\lambda$, го добиваме неравенството $ab^{-\frac{\lambda}{\mu}}-\lambda a^{\frac{1}{\lambda}}b^{-\frac{1}{\mu}}\le1-\lambda=\mu$, од каде со множење со $b^{\frac{1}{\mu}}$ го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=1$, т.е. ако и само ако $a^{\frac{1}{\lambda}}=b^{\frac{1}{\mu}}$.

Трет начин. Од тежинското неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина при $n=2$, $\alpha_1=\lambda, \alpha_2=\mu$, $a_1=a^{\frac{1}{\lambda}}, a_2=b^{\frac{1}{\mu}}$ следува

$$ab=(a^{\frac{1}{\lambda}})^{\lambda}(b^{\frac{1}{\mu}})^{\mu}\le \lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+\mu b^{\frac{1}{\mu}},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a^{\frac{1}{\lambda}}=b^{\frac{1}{\mu}}$. ■

Теорема 7 (неравенство на Хелдер). Ако $a_i,b_i>0$, за $i=1,...,n$ и $p,q>1$ се такви да $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1^p}{b_1^q}=\frac{a_2^p}{b_2^q}=...=\frac{a_n^p}{b_n^q}$.

Доказ. *Прв начин*. Во неравенството на Јанг ставаме $\lambda=\frac{1}{p}, \mu=\frac{1}{q}$ и добиваме дека за $a,b>0$ важи $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. Ако во последното неравенство последователно ставиме

$$a=\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}},\; b=\frac{b_i}{(\sum_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}},\text{ за } i=1,2,...,n,$$

ги добиваме неравенствата

$$\frac{a_ib_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n}b_i^q},\text{ за } i=1,2,...,n. \tag{3}$$

Со собирање на неравенствата (3) го добиваме неравенството

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^q}{\sum_{i=1}^{n}b_i^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

кое е еквивалентно на неравенството на Хелдер. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство при секое користење на неравенството на Јанг, што значи ако и само ако

$$\frac{a_1^p}{b_1^q}=\frac{a_2^p}{b_2^q}=...=\frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

Втор начин. Нека $p>1$. Фукцијата $f(x)=x^p$ е конвексна за $x>0$. Од неравенството на Јенсен, за $x_i>0, y_i>0$, $i=1,2,...,n$ при ознаки $Y=\sum_{i=1}^{n}y_i$ и $\lambda_i=\frac{y_i}{Y}$, $i=1,2,...,n$ следува

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)^p \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^p ,$$

односно

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i)^p \le (\sum_{i=1}^{n}y_i)^{p-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^p y_i) .$$

Ако земеме $x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}}$, $y_i = b_i^{\frac{p}{p-1}}$, $i = 1,2,...,n$ го добиваме неравенството (3). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$, т.е. ако и само ако

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \frac{a_n^p}{b_n^q} . \blacksquare$$

Забелешка 1. а) Ако броевите $a_i, b_i, i = 1,2,...,n$ не се позитивни, тогаш од својствата на апсолутната вредност и од теорема 4 следува

$$|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i| \le \sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|b_i| \le (\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q)^{\frac{1}{q}} ,$$

и ова е обликот на неравенството на Хелдер за произволни броеви a_i, b_i, $i = 1,2,...,n$.

б) Ако во неравенството на Хелдер ставиме $p = q = 2$, добиваме

$$\sum_{i=1}^{n}a_i b_i \le (\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

и тоа е уште еден доказ на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

Пример 16. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \le 1 . \qquad (4)$$

Решение. Од неравенството на Хелдер за $n = 2$ и $p = q = 2$, односно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+y)(x+z)} &= [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2]^{\frac{1}{2}}[(\sqrt{z})^2 + (\sqrt{x})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\ge \sqrt{x}\sqrt{z} + \sqrt{y}\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z}),\end{aligned}$$

па затоа

$$x + \sqrt{(x+y)(x+z)} \ge x + \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z}),$$

т.е.

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{x}{x+\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} .$$

Аналогно добиваме

$$\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} \le \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}, \quad \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \le \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} .$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (4). ■

Пример 17. Нека $a_i > 0, i = 1,2,...,k$ и $n > 1$. Докажи дека

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i)^n \le k^{n-1} \sum_{i=1}^{k} a_i^n .$$

Решение. Од неравенството на Хелдер, применето на броевите $a_i > 0$, $i = 1,2,...,k$ и $b_i = 1, i = 1,2,...,k$, при $p = n$ и $q = \frac{n}{n-1}$ следува

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i)^n = (\sum_{i=1}^{k} 1 \cdot a_i)^n \le [(\sum_{i=1}^{k} a_i^n)^{\frac{1}{n}} (\sum_{i=1}^{k} 1^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}}]^n = k^{n-1} \sum_{i=1}^{k} a_i^n . \blacksquare$$

Пример 18. Докажи дека за секои позитивни реални броеви $a,b,c,\ \ x,y,z$ важи

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \ge \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} . \qquad (5)$$

Решение. *Прв начин.* При ознаки

$$m = \frac{a}{\sqrt[3]{x}}, n = \frac{b}{\sqrt[3]{y}}, k = \frac{k}{\sqrt[3]{z}},\ u = \sqrt[3]{x}, v = \sqrt[3]{y}, w = \sqrt[3]{z} ,$$

неравенството (5) го добива обликот

$$3(m^3 + n^3 + k^3)(u^3 + v^3 + w^3) \ge (mu + nv + kw)^3 . \qquad (6)$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$3(m^3 + n^3 + k^3) = (1^2 + 1^2 + 1^2)(m^3 + n^3 + k^3) \ge (m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}})^2 . \qquad (7)$$

Од друга страна, од неравенството на Хелдер, применето на броевите $m^3,\ n^3, k^3$ и u^3, v^3, w^3, при $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ добиваме

$$(m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}})^2 (u^3 + v^3 + w^3) \ge (mu + nv + kw)^3 . \qquad (8)$$

Конечно, ако ги помножиме неравенствата (7) и (8) го добиваме неравенството (6), со што е докажано неравенството (5).

Втор начин. Од второто обопштено неравенство на Хелдер, за $p = q = r = 3$ следува неравенството

$$(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z})^{\frac{1}{3}} (1+1+1)^{\frac{1}{3}} (x + y + z)^{\frac{1}{3}} \ge a + b + c ,$$

кое е еквивалентно со неравенството (5). $\blacksquare$

6. НЕРАВЕНСТВО НА МИНКОВСКИ

Во оваа точка, користејќи го неравенството на Хелдер ќе го докажеме добро познатото неравенство на Минковски и ќе се осврнеме на неговата примена.

Теорема 8 (неравенство на Минковски). Ако $a_i, b_i > 0$, за $i = 1,...,n$ и $p > 1$ важи неравенството

$$[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p]^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}} , \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Доказ. За $p>1$, наоѓаме $q=\frac{p}{p-1}>1$ таков што $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. За вака најденото q со примена на неравенството на Хелдер го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}\\ &\leq (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}\\ &= (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p]^{1-\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p]^{1-\frac{1}{p}}\\ &= [(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}][\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p][\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p]^{-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Ако последното неравенство го поделиме со $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p>0$, а потоа го помножиме со $[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p]^{\frac{1}{p}}>0$ го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1^p}{b_1^p}=\frac{a_2^p}{b_2^p}=...=\frac{a_n^p}{b_n^p}$, што значи ако и само ако $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$. ■

Забелешка 2. Аналогно како и кај неравенството на Хелдер и во случај на неравенството на Минковски, ако броевите $a_i,b_i>0$, за $i=1,...,n$ се произволни по знак, тогаш точно е неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Пример 19. Докажи дека за секој реален број $p\geq1$ и за секој $n\in\mathbf{N}$ точно е неравенството

$$1^p+2^p+...+n^p\geq n(\tfrac{n+1}{2})^p. \tag{3}$$

Решение. За $p=1$ имаме

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\geq\frac{n(n+1)}{2},$$

што е точно. Нека $p>1$ и да земеме $a_i=i, b_i=n+1-i$, за $i=1,2,...,n$. Од неравенството на Минковски последователно добиваме

$$[\sum_{i=1}^{n}(i+n+1-i)^p]^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^{n}i^p)^{\frac{1}{p}}+[\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)]^{\frac{1}{p}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$[n(n+1)^p]^{\frac{1}{p}}\leq2(\sum_{i=1}^{n}i^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad \Leftrightarrow$$

$$n(\tfrac{n+1}{2})^p \le \sum_{i=1}^{n} i^p \ . \ \blacksquare$$

Пример 20. Нека $a,b,c>0$. Најди минимум на функцијата

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}\ .$$

Решение. Од неравенството на Минковски за $n=2$ и $p=2$ следува

$$\begin{aligned} f(x) &= (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+[c^2+(b-x)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\ge [(a+c)^2+(x+b-x)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(a+c)^2+b^2}, \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a}{c}=\frac{x}{b-x}$, т.е. ако и само ако $x=\frac{ab}{a+c}$. Според тоа, $\min f(x)=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$ и тој се достигнува за $x=\frac{ab}{a+c}$. ■

7. НЕРАВЕНСТВО НА КАРАМАТА

Во овој дел ќе го докажеме неравенството на Карамата, кое во литературата често пати се поврзува со имиња на повеќе познати математичари, меѓу кои Шур, Харди, Литлвуд, Полиа и Вејл, а може да се сретне и како неравенство за мајоризација. За таа цел прво ќе го воведеме поимот мајоризација на конечни низи.

Дефиниција 1. Нека се $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ две низи реални броеви. Ќе велиме дека низата a ја мајорира низата b и ќе пишуваме $a \succ b$ или $b \prec a$ ако, после евентуално пермутирање на низите, се исполнети условите

1) $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$,
2) $a_1+a_2+...+a_k \ge b_1+b_2+...+b_k$, за секој $k \in \{1,2,...,n-1\}$ и
3) $a_1+a_2+...+a_n = b_1+b_2+...+b_n$.

Притоа, за низата ќе a велиме дека е *мајорирачка*, а за низата b дека е *мајорирана*.

Забелешка 3. а) Јасно, првиот услов од дефиниција 1 не е никакво ограничување, бидејќи секогаш можеме да ги преуредиме низите. Клучни се вториот и третиот услов.

б) За секоја низа $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ важи $a \succ a$.

Пример 21. а) Ако $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ е произволна низа ненегативни реални броеви, чиј збир е еднаков на n, тогаш важи

$$(n,0,...,0) \succ (a_1,a_2,...,a_n) \succ (1,1,1,...,1)\ .$$

б) Низите (4,4,1) и (5,2,2) не се споредливи во смисла на дефиниција 1, т.е. ниту една од низите не ја мајорира другата. ■

Теорема 9 (неравенство на Карамата). Нека низите $a=(a_i)_{i=1}^n$ и $b=(b_i)_{i=1}^n$ припаѓаат на интервалот (x,y). Ако $a \succ b$ и ако $f:(x,y)\to \mathbf{R}$ е конвексна функција, тогаш важи неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(b_i)\,. \tag{1}$$

Доказ. Да означиме $c_i = \frac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}$, $i=1,2,...,n$. Функцијата f е конвексна, па според теорема V 2 функцијата

$$g(t)=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},\quad t\in(x,y)\setminus\{t_0\}\,,$$

монотоно расте на (x,y), па од условот 1) следува дека низата $c=(c_i)_{i=1}^n$ монотоно опаѓа. Понатаму, нека

$$A_k=\sum_{i=1}^{k} a_i,\quad B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i,\ k=1,2,...,n,\ A_0=B_0\,.$$

Од условите 2) и 3) на дефиниција 1 следува

$$A_k \geq B_k \text{, за } k=1,2,...,n-1 \text{ и } A_n=B_n\,.$$

Затоа

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)-\sum_{i=1}^{n} f(b_i)&=\sum_{i=1}^{n}[f(a_i)-f(b_i)]=\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i-b_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n} c_i(A_i-A_{i-1}-B_i+B_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} c_i(A_i-B_i)-\sum_{i=1}^{n} c_i(A_{i-1}-B_{i-1})\\ &=\sum_{i=1}^{n-1} c_i(A_i-B_i)-\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(A_i-B_i)=\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i).\end{aligned}$$

Но, $c_i \geq c_{i+1}$ и $A_i \geq B_i$, за $i=1,2,...,n-1$, па затоа

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)-\sum_{i=1}^{n} f(b_i)=\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i)\geq 0\,,$$

т.е. точно е неравенството (1).

Од претходно изнесено следува дека во неравенството на Карамата знак за равенство важи ако и само ако за секои $i\in\{1,2,...,n-1\}$ важи $c_i=c_{i+1}$ или $A_i=B_i$. ■

Пример 22. Докажи дека за произволни позитивни броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\,.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\geq b\geq c$. Тогаш е јасно дека $(2a,2b,2c)\succ(a+b,b+c,c+a)$. Но, функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$, па од неравенството на Карамата следува неравенството

$$f(2a)+f(2b)+f(2c)\geq f(a+b)+f(b+c)+f(c+a)\,,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Пример 23. Докажи дека за позитивни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи неравенството

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^3}{a_n} + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 . \tag{2}$$

Решение. Нека $x_i = \ln a_i, i = 1, 2, ..., n$ и да ги разгледаме низите

$$3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, ..., 3x_n - x_1 \text{ и } 2x_1, 2x_2, ..., 2x_n .$$

Ќе докажеме дека низите $3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, ..., 3x_n - x_1$ и $2x_1, 2x_2, ..., 2x_n$, кога се подредат да се опаѓачки, ги задоволуваат условите на теорема 9. Нека индексите $m_1, m_2, ..., m_n$ и $k_1, k_2, ..., k_n$ се такви да

$$\{m_1, m_2, ..., m_n\} = \{k_1, k_2, ..., k_n\} = \{1, 2, ..., n\} , \tag{3}$$

$$3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq ... \geq 3x_{m_n} - x_{m_n+1} , \tag{4}$$

$$2x_{k_1} \geq 2x_{k_2} \geq ... \geq 2x_{k_n} . \tag{5}$$

Тогаш, прво од (4), а потоа од (5) следуваат неравенствата:

$$3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq 2x_{k_1}$$

$$(3x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (3x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (3x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (3x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq 2x_{k_1} + 2x_{k_2} ,$$

и воопшто, за $p = 1, 2, ..., n-1$ збирот на првите p членови во (4) не е помал од збирот на првите p членови на (5). Јасно, за $p = n$ важи знак за равенство, што значи дека сите услови од теорема 9 се исполнети. Но, функцијата $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ е конвексна, па затоа

$$e^{3x_1 - x_2} + e^{3x_2 - x_3} + ... + e^{3x_n - x_1} \geq e^{2x_1} + e^{2x_2} + ... + e^{2x_n}$$

и ако во последното неравенство замениме $x_i = \ln a_i, i = 1, 2, ..., n$ и искористиме дека $e^{\ln t} = t$, за секој $t > 0$ го добиваме неравенството (2).

Коментар. На потполно аналоген начин, за позитивни реални броеви може да се докаже неравенството

$$\frac{a_1^{n+k}}{a_2^n} + \frac{a_2^{n+k}}{a_3^n} + ... + \frac{a_{t-1}^{n+k}}{a_t^n} + \frac{a_t^{n+k}}{a_1^n} \geq a_1^k + a_2^k + ... + a_t^k . \tag{2'}$$

Притоа се воведува смената $x_i = \ln a_i, i = 1, 2, ..., t$ и се разгледуваат низите

$$(n+k)x_i - nx_{i+1}, i = 1, 2, ..., t \text{ и } kx_i, i = 1, 2, ..., t \text{ (каде } x_{t+1} = x_1).$$

Сега, за $t = 3$ од неравенството (2') следува тврдењето на задача 12 од глава V. ■

Дефиниција 2. Ако за низите $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ се исполнети условите

1) $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ и
2) $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k$, за секој $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

тогаш ќе велиме дека низата a *слабо ја мајорира низата* b.

Јасно, ако низата a ја мајорира низата b, тогаш таа слабо ја мајорира низата b.

Теорема 10 (неравенство на Карамата). Нека низата $a=(a_i)_{i=1}^n$ слабо ја мајорира низата $b=(b_i)_{i=1}^n$. Ако $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е монотоно растечка конвексна функција, тогаш важи неравенството (1).

Доказ. Ги користиме истите ознаки како во доказот на теорема 9. На потполно ист начин заклучуваме дека

$$\sum_{i=1}^n f(a_i)-\sum_{i=1}^n f(b_i)=\sum_{i=1}^n c_i(A_i-B_i)-\sum_{i=1}^n c_i(A_{i-1}-B_{i-1})$$
$$=c_n(A_n-B_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i).$$

Но, $c_i\ge c_{i+1}$, за $i=1,2,...,n-1$ и $A_i\ge B_i$, за $i=1,2,...,n$ како f монотоно расте имаме $c_n\ge 0$, па затоа десната страна на последното неравенство е ненегативна, што значи дека е точно неравенството (1). ■

Пример 24. Дадени се реални броеви $a_i,b_i,i=1,2,...,n$ такви да

$$a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n>0,$$
$$b_1\ge a_1,\; b_1b_2\ge a_1a_2,...,\; b_1b_2...b_n\ge a_1a_2...a_n.$$

Докажи дека

$$b_1+b_2+...+b_n\ge a_1+a_2+...+a_n.$$

Решение. Нека

$$a_i=e^{x_i},b_i=e^{y_i},i=1,2,...,n.$$

Јасно, низата $(y_i)_{i=1}^n$ слабо ја мајорира низата $(x_i)_{i=1}^n$ и како $f(t)=e^t$, $t\in\mathbf{R}$ е монотоно растечка и конвексна функција од теорема 10 следува неравенството

$$\sum_{i=1}^n e^{y_i}\ge\sum_{i=1}^n e^{x_i},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Забелешка 4. Во претходната глава ги разгледавме конвексните функции и го докажавме неравенството на Јенсен. Овде ќе спомениме дека покрај конвексните функции, постојат и таканаречени Јенсен-конвексни функции. Имено, за функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ ќе велиме дека е *Јенсен-конвексна* ако за секои $x,y\in(a,b)$ важи

$$f(\tfrac{x+y}{2})\le\tfrac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{2}$$

Функцијата f е *строго Јенсен-конвексна* ако во (2) важи строго неравенство.

За Јенсен-конвексните функции точна е следнава теорема.

Теорема 11. Ако $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е Јенсен-конвексна функција, тогаш за секои $x_i\in(a,b)$, $i=1,2,...,n$ важи

$$f(\tfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n})\le\tfrac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}. \tag{3}$$

Ако притоа f е строго Јенсен-конвексна, тогаш знак за равенство важи ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Доказ. *Прв начин.* Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$. За низата

$$y_1 = y_2 = ... = y_n = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

важи $x \succ y$, па од неравенството на Карамата следува дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f(y_i),$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}),$$

од каде следува неравенството (3). Јасно, во случај кога f е строго Јенсен-конвексна, тогаш во (3) знак за равенство важи ако во (1) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Втор начин. За $n = 2$, неравенството (3) всушност е неравенството од дефиницијата на Јенсен-конвексните функции. Нека претпоставиме дека (3) важи за некој $n \ge 2$ и нека $x_i \in (a,b)$, $i = 1,2,...,n,n+1$. Да означиме $x = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i$. Тогаш, од индуктивната претпоставка и од фактот дека меравенството важи за $n = 2$ следува неравенството

$$f(x) = f(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{x_{n+1}+(n-1)x}{n}}{2}) \le \frac{f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) + f(\frac{x_{n+1}+(n-1)x}{n})}{2} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(x_{n+1}) + (n-1)f(x)}{2n},$$

од каде после средувањето добиваме

$$f(x) = f(\frac{x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}}{n+1}) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)+f(x_{n+1})}{n+1},$$

т.е. неравенството (3) важи за $n+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (3) важи за секој природен број. ■

Забелешка 5. Од (3) може да се изведе и општото неравенство на Јенсен, но само во случај кога броевите $\alpha_i, i = 1,2,...,n$ се рационални. Имено, во општ случај кога $\alpha_i, i = 1,2,...,n$ се реални броеви неравенството (3) не мора да важи. Меѓутоа, доколку Јенсен-конвексната функција f е непрекината, тогаш важи општото неравенство на Јенсен, т.е. точна е следнава теорема, чиј доказ заради тежината нема да го презентираме.

Теорема 12. Ако функцијата $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ е Јенсен-конвексна (строго) и непрекината, тогаш таа е конвексна (строго). □.

8. НЕРАВЕНСТВО НА ШУР

Дефиниција 3. Нека $F(x_1,x_2,...,x_n)$ е функција од променливи $x_i \geq 0$, $i=1,2,...,n$. Дефинираме $\sum^! F(x_1,x_2,...,x_n)$ како збир од $n!$ собирци добиени од функцијата $F(x_1,x_2,...,x_n)$ по сите можни пермутации на низата $x=(x_i)_{i=1}^n$.

Специјално, ако $F(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}$, за некоја низа ненегативни степени $a=(a_i)_{i=1}^n$, тогаш наместо $\sum^! F(x_1,x_2,...,x_n)$ ќе пишуваме $T[a_1,a_2,...,a_n]$, ако од контекстот е познато за која низа станува збор.

Пример 25. Имаме:

$T[1,0,...,0]=(n-1)!(x_1+x_2+...+x_n)$, $T[a,a,...,a]=n!x_1^a x_2^a ...x_n^a$,

$T[1,2]=x^2y+xy^2$, $T[1,2,1]=2x^2yz+2y^2xz+2z^2yx$,

$T[2,1,0]=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$,

$T[3,0,0]=2(x^3+y^3+z^3)$.

Според тоа, во вака усвоената терминологија неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина може да се запише во облик

$$T[1,0,...,0] \geq T[\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n},...,\tfrac{1}{n}].\ \blacksquare$$

Теорема 13 (неравенство на Шур). Ако $a,b>0$, тогаш важи

$$T[a+2b,0,0]+T[a,b,b] \geq 2T[a+b,b,0].$$

Доказ. Нека $x,y,z>0$. Со помош на елементарни трансформации имаме:

$$\tfrac{1}{2}T[a+2b,0,0]+\tfrac{1}{2}T[a,b,b]-T[a+b,b,0]=$$
$$=x^a(x^b-y^b)(x^b-z^b)+y^a(y^b-x^b)(y^b-z^b)+z^a(z^b-x^b)(z^b-y^b)$$

Според тоа, почетното неравенство е еквивалентно со неравенството:

$$x^a(x^b-y^b)(x^b-z^b)+y^a(y^b-x^b)(y^b-z^b)+z^a(z^b-x^b)(z^b-y^b) \geq 0. \quad (1)$$

Без губење на општоста можеме да земеме дека $x \geq y \geq z$. Тогаш:

$$\begin{aligned} x^a(x^b-y^b)(x^b-z^b) &\geq x^a(x^b-y^b)(y^b-z^b) \\ &\geq y^a(x^b-y^b)(y^b-z^b) \\ &= -y^a(y^b-x^b)(y^b-z^b), \end{aligned}$$

т.е.

$$x^a(x^b-y^b)(x^b-z^b)+y^a(y^b-x^b)(y^b-z^b) \geq 0.$$

Но,

$$z^a(z^b-x^b)(z^b-y^b) \geq 0,$$

и ако ги собереме последните неравенства го добиваме неравенството (1). Аналогно се разгледува случајот кога $a<0$. ■

Последица 12. Ако $x,y,z>0$ и $r \geq 0$, тогаш точно е неравенството

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0\,. \qquad (2)$$

Доказ. Ако во неравенството на Шур, односно во еквивалентното неравенство (1), ставиме $a=r, b=1$, го добиваме неравенството

$$T[r+2,0,0]+T[r,1,1]\geq 2T[r+1,1,0],$$

т.е. неравенството (2), кое согласно теорема 13 е точно. ■

Пример 26. Нека $a,b,c>0$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\,. \qquad (3)$$

Решение. *Прв начин.* Ако во последица 12 ставиме $r=1$ го добиваме неравенството

$$T[3,0,0]+T[1,1,1]\geq 2T[2,1,0],$$

т.е . неравенството

$$2(a^3+b^3+c^3)+6abc\geq 2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството (3).

Втор начин. Нека $x\geq y\geq z$. Тогаш низата

$$(3x,3y,3z,x+y+z,x+y+z,x+y+z)$$

ја мајоризира низата

$$(2x+y,2x+z,2y+x,2y+z,2z+x,2z+y)\,,$$

(провери!). Но, функцијата $f(t)=e^t$ е конвексна на $\mathbf{R}$, па затоа од неравенството на Карамата следува

$$e^{3x}+e^{3y}+e^{3z}+3e^{x+y+z}\geq e^{2x+y}+e^{2x+z}+e^{2y+x}+e^{2y+z}+e^{2z+x}+e^{2z+y}\,.$$

Конечно, ако $a,b,c>0$, тогаш постојат x,y,z такви да $a=e^x, b=e^y$ и $c=e^z$ и ако замениме во претходното неравенсвто го добиваме неравенството (3).

Трет начин. Без ограничување наопштоста можеме да претпоставиме дека $a\geq b\geq c$. Да земеме $x=a-b,\ y=b-c$. Тогаш, даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенството

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$c(x+y)y-(c+y)xy+(c+x+y)x(x+y)\geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$c(x^2+xy+y^2)+x^2(x+2y)\geq 0\,,$$

и последното неравенство очигледно е исполнето. Притоа знак за равенство важи ако и само ако $x=y=0$, т.е. $a=b=c$. ■

Пример 27. Дадени се реалните броеви $u,v,w\geq 1$. Докажи дека

$$u^3+v^3+w^3+3uvw+uv+vw+wu\geq u^2v+u^2w+v^2u+v^2w+w^2u+w^2v\,.$$

Решение. Бидејќи $u,v,w\geq 1$, постојат $x,y,z\geq 0$ такви да

$$u=1+x,\ \ v=1+y,\ \ w=1+z$$

и ако замениме во даденото неравенство, го добиваме еквивалентното неравенството (3), за кое докажавме дека е точно. ■

Пример 28. Ако $x,y,z\geq 0$, докажи дека

$$3xyz+x^3+y^3+z^3\geq 2[(xy)^{3/2}+(yz)^{3/2}+(zx)^{3/2}]\,.$$

Доказ. Од неравенството (3) и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \ge (x^2y+y^2x)+(z^2y+y^2z)+(x^2z+z^2x)$$
$$\ge 2[(xy)^{3/2}+(yz)^{3/2}+(zx)^{3/2}]. \blacksquare$$

Пример 29. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a}) \le 1.$$

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $abc=1$, постојат $x,y,z>0$ такви да

$$a=\tfrac{x}{y},\ \ b=\tfrac{y}{z},\ \ c=\tfrac{z}{x},$$

при што даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \le xyz, \tag{4}$$

т.е. со неравенството

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y) \ge 0,$$

кое непосредно следува од последица 11, за $r=1$.

Втор начин. Ќе го докажеме неравенството (4). Ако меѓу броевите $x+y-z,\ y+z-x,\ z+x-y$ има два непозитивни, на пример првиот и вториот, тогаш ако ги собереме добиваме дека $y\le 0$, што е противречност. Значи, меѓу овие броеви има најмногу еден непозитивен. Ако точно еден од нив е непозитивен, тогаш неравенството (4) е очигледно. Нека претпоставиме дека разгледуваните три броја се позитивни. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\ge y\ge z$ и тогаш лесно се гледа дека

$$(x+y-z, z+x-y, y+z-x) \succ (x,y,z).$$

Сега, од неравенството на Карамата, применето на функцијата $f(t)=-\ln t, t>0$ следува неравенството

$$-\ln(x+y-z)-\ln(y+z-x)-\ln(z+x-y) \ge -\ln x-\ln y-\ln z,$$

кое е еквивалентно со неравенството (4). ■

9. НЕРАВЕНСТВО НА МЈУРХЕД

За две произволни низи $a=(a_i)_{i=1}^n$ и $b=(b_i)_{i=1}^n$, не мора $T[a]$ да е споредливо со $T[b]$, во смисол да за променлива низа $x=(x_i)_{i=1}^n$ или секогаш да важи $T[a](x)\le T[b](x)$ или секогаш да важи $T[a](x)\ge T[b](x)$. Меѓутоа, се покажува дека потребен и доволен услов за споредливост на овие два изрази е точно една од низите $a=(a_i)_{i=1}^n$ и $b=(b_i)_{i=1}^n$ да ја мајорира другата.

Теорема 14 (неравенство на Мјурхед). Потребен и доволен услов $T[a]$ да биде споредливо со $T[b]$, за сите позитивни низи $x=(x_i)_{i=1}^n$ е да една од низите a и b ја мајорира другата, во смисол на релацијата $\prec$. Притоа, ако $a\prec b$, тогаш

$T[a] \le T[b]$. Знак за равенство важи ако и само ако низите $a = (a_i)_{i=1}^n$ и $b = (b_i)_{i=1}^n$ се идентични или ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Доказ. Прво ќе докажеме дека условот е потребен. Ако за сите членови на низата $x = (x_i)_{i=1}^n$ ставиме дека се еднакви на c добиваме дека

$$c^{\sum a_i} \le c^{\sum b_i}.$$

Ова може да биде исполнето за произволно мали и произволно големи вредности на c само ако е исполнет условот 1) од дефиниција 1. Сега да ставиме $x_1 = x_2 = ... = x_k = c$ и $x_{k+1} = x_{k+2} = ... = x_n = 1$. Споредувајќи ги најголемите степени на c во изразите $T[a]$ и $T[b]$, и имајќи предвид дека за произволно големо c треба да важи $T[a] \le T[b]$, го добиваме неравенството

$$a_1 + a_2 + ... + a_k \le b_1 + b_2 + ... + b_k,\ 1 \le k \le n.$$

Ќе докажеме дека условот е доволен. Дефинираме линеарна операција L над низите експоненти b. Нека претпоставиме дека b_k и b_l се два различни члена на низата b, такви да $b_k > b_l$. Тогаш постојат r и $0 < t \le r$ такви да $b_k = r + t,\ b_l = r - t$. Ако сега $0 \le s < t \le r$, дефинираме низа $a = L(b)$ на следниов начин:

$$a_k = r + s = \tfrac{t+s}{2t} b_k + \tfrac{t-s}{2t} b_l,$$

$$a_l = r - s = \tfrac{t-s}{2t} b_k + \tfrac{t+s}{2t} b_l,$$

$$a_i = b_i,\ i \ne k, i \ne l.$$

Ќе докажеме дека

i) Ако $a = L(b)$, тогаш $T[a] \le T[b]$, при што знак за равенство важи ако и само ако сите членови на низата $x = (x_i)_{i=1}^n$ се меѓусебно еднакви.

Навистина, без ограничување на општоста можеме да земеме дека членовите на низата се такви да $k = 1, l = 2$ и тогаш

$$\begin{aligned} T[b] - T[a] &= \sum{}^! x_3^{b_3} ... x_n^{b_n} (x_1^{r+t} x_2^{r-t} + x_1^{r-t} x_2^{r+t} - x_1^{r+s} x_2^{r-s} - x_1^{r-s} x_2^{r+s}) \\ &= \sum{}^! (x_1 x_2)^{r-t} x_3^{b_3} ... x_n^{b_n} (x_1^{t+s} - x_2^{t+s})(x_1^{t-s} - x_2^{t-s}) \ge 0. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако сите членови на низата $x = (x_i)_{i=1}^n$ се меѓусебно еднакви.

Сега ќе докажеме дека,

ii) ако $a \prec b$, но a се разликува од b, тогаш a може да се добие од b со последователна примена на конечен број трансформации L.

Со m да го означиме бројот на разликите $b_i - a_i$ кои се разликуваат од нула. Бројот m е природен и ќе докажеме дека можеме да ја применуваме операцијата L така да после секоја нејзина примена бројот m опаѓа, што значи дека постапката ќе заврши после конечен број чекори. Бидејќи $\sum(b_i - a_i) = 0$, но не се сите разлики еднакви на нула, добиваме дека постојат позитивни и негативни разлики, при што првата меѓу нив е позитивна. Можеме да најдеме такви k и l да важи

$$a_k < b_k,\ a_{k+1} = b_{k+1}, ...,\ a_{l-1} = b_{l-1},\ a_l > b_l,$$

каде $b_l - a_l$ е првата негативна разлика, а $b_k - a_k$ е последната позитивна разлика која и претходи. Нека $b_k = r+t,\ b_l = r-t$ и дефинираме s со
$$s = \max\{|a_k - r|, |a_l - r|\}.$$
Тогаш, бидејќи $a_k > a_l$, точно е барем едно од следниве две равенства
$$a_l - r = -s,\quad a_k - r = s.$$
Исто така, $s < t$, бидејќи $a_k < b_k$ и $a_l > b_l$. Нека е
$$c_k = r+s,\quad c_l = r-s,\quad c_i = b_i,\ i \neq k, i \neq l.$$
Сега, наместо низата b ќе ја разгледуваме низата $c = (c_i)_{i=1}^n$. Бројот m се намалил барем за 1. Лесно се гледа дека низата c опаѓа и дека ја мајорира низата a. Повторувајќи ја оваа постапка, ќе ја добиеме низата a, со што е докажано *ii*), а со тоа е завршен и доказот на теоремата. ■

Забелешка 6. Бидејќи $b = (1,0,...,0)$ ја мајорира $a = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$, од теоремата на Мјурхед следува дека $T[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}] \leq T[1,0,...,0]$, што според пример 20 значи
$$n!\, x_1^{\frac{1}{n}} x_2^{\frac{1}{n}} ... x_n^{\frac{1}{n}} = T[\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, ..., \tfrac{1}{n}] \leq T[1,0,...,0] = (n-1)!(x_1 + x_2 + ... + x_n),$$
и ова е уште еден доказ на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина.

Пример 30. Нека низата променливи е $x, y, z > 0$ и нека се дадени низите (2,2,1) и (3,1,1). Тогаш јасно $(2,2,1) \prec (3,1,1)$. Сега од претходната теорема следува $T[2,2,1] \leq T[3,1,1]$. Според тоа, точно е неравенството
$$2(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x) \leq 2(x^3yz + y^3zx + z^3yx),$$
кое е еквивалентно на добро познатото неравенство
$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2. \ ■$$

Пример 31. Нека $a,b,c \in \mathbf{R}^+$. Докажи дека
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$$
Решение. Бидејќи $(2,1,1) \prec (4,0,0)$, од теоремата на Мјурхед следува
$$\begin{aligned} & T[4,0,0] \geq T[2,1,1] && \Leftrightarrow \\ & \tfrac{T[4,0,0]}{2} \geq \tfrac{T[2,1,1]}{2} && \Leftrightarrow \\ & a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab && \Leftrightarrow \\ & a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c).\ ■ \end{aligned}$$

Пример 32. Докажи дека за позитивните реални броеви a,b,c важи неравенството
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}. \qquad (1)$$

Решение. Неравенството (1) го множиме со

$$abc(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc)>0$$

и го добиваме еквивалентното равенство

$$\tfrac{3}{2}T[4,4,1]+2T[5,2,2]+\tfrac{1}{2}T[7,1,1]+\tfrac{1}{2}T[3,3,3]\leq$$

$$\leq\tfrac{1}{2}T[3,3,3]+T[6,3,0]+\tfrac{3}{2}T[4,4,1]+\tfrac{1}{2}T[7,1,1]+T[5,2,2],$$

т.е. неравенството

$$T[5,2,2]\leq T[6,3,0],$$

кое следува од теоремата на Мјурхед, бидејќи $(5,2,2)\prec(6,3,0)$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Пример 33. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $a+b+c=1$. Да се докаже дека

$$0\leq ab+bc+ca-2abc\leq\tfrac{7}{27}.$$

Решение. Левата страна на неравенството следува од

$$\begin{aligned}ab+bc+ca-2abc&=(a+b+c)(ab+bc+ca)-2abc\\&=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+abc\\&=T[2,1,0]+\tfrac{1}{6}T[1,1,1]\end{aligned}$$

и од очигледното неравенство

$$T[2,1,0]+\tfrac{1}{6}T[1,1,1]\geq 0.$$

Понатаму имаме:

$$\tfrac{7}{27}=\tfrac{7}{27}(x+y+z)^3=\tfrac{7}{27}(\tfrac{1}{2}T[3,0,0]+3T[2,1,0]+T[1,1,1]),$$

па добиваме дека бараното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$T[2,1,0]+\tfrac{1}{6}T[1,1,1]\leq\tfrac{7}{27}(\tfrac{1}{2}T[3,0,0]+3T[2,1,0]+T[1,1,1]),$$

т.е. на неравенството

$$12T[2,1,0]\leq 7T[3,0,0]+5T[1,1,1]. \qquad (2)$$

Сега, $(2,1,0)\prec(3,0,0)$, па од теоремата на Мјурхед следува:

$$2T[2,1,0]\leq 2T[3,0,0] \qquad (3)$$

и ако во неравенството на Шур ставиме $a=b=1$ добиваме:

$$10T[2,1,0]\leq 5T[3,0,0]+5T[1,1,1]. \qquad (4)$$

Ако ги собереме (2) и (3) го добиваме неравенството (1), кое и требаше да се докаже. ■

10. ЗАДАЧИ

1. Нека $m,n\in\mathbf{N}$ се такви што $m\geq 2$ и $n\geq 2$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1.$$

2. Ако $x>-1$ и $\alpha\in(0,1)$, тогаш $1+\alpha x\geq(1+x)^{\alpha}$. Докажи!

3. Докажи дека за $n\in\mathbf{N}$ и $\alpha\in(-1,0)$ важат неравенствата

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\le n^{\alpha}\le\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

4. Докажи дека за $m,n\in\mathbf{N}$, $m<n$ и $\alpha\in(-1,0)$ важат неравенствата

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}\le m^{\alpha}+(m+1)^{\alpha}+...+n^{\alpha}\le\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

5. Нека $n\ge 2$ и $x_i\ge 0, i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i\le\binom{n}{2}+\sum_{i=1}^{n}x_i^i.$$

6. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни броеви такви да

$$x_1+x_2+...+x_k\ge k\text{, за } k=1,2,...,n.$$

Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\ge\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{n}).$$

7. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_n\ge y_{n-1}\ge...\ge y_1$ се позитивни реални броеви такви да $x_1^2+x_2^2+...+x_k^2\le y_1^2+y_2^2+...+y_k^2$, за секој $k=1,2,...,n$. Докажи дека

$$x_1+x_2+...+x_n\le y_1+y_2+...+y_n. \qquad (1)$$

8. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_1,y_2,...,y_n$ се реални броеви такви да

$$a_1\ge\tfrac{a_1+a_2}{2}\ge\tfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\ge...\ge\tfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n},$$
$$b_1\ge\tfrac{b_1+b_2}{2}\ge\tfrac{b_1+b_2+b_3}{3}\ge...\ge\tfrac{b_1+b_2+...+b_n}{n}.$$

Докажи дека

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n\ge\tfrac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)(y_1+y_2+...+y_n).$$

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $abc=1$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3\ge 2(a^2b+b^2a+c^2b).$$

10. Докажи дека за секои позитивни броеви a,b,c важи:

а) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$,

б) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{a+b+c}{abc}$.

11. Нека a,b,c се позитивни броеви такви да $abc=1$. Докажи дека

$$\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}\ge a+b+c.$$

12. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b+c)\le 3abc.$$

13. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

14. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

15. Ако $a_i>0, i=1,2,...,n$ и $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, тогаш $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geq\frac{n}{n-1}$. Докажи!

16. Докажи дека:

а) Ако $a_i>0, i=1,2,...,n$ и $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, тогаш $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{S}{S-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}$.

б) Ако $a_i>0, i=1,2,...,n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$, тогаш $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}\geq\frac{n}{2n-1}$.

17. Нека $a\,,b\,,c\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$(1+\tfrac{a}{b})(1+\tfrac{b}{c})(1+\tfrac{c}{a})\geq 2(1+\tfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}).$$

18. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$7(ab+bc+ca)\leq 2+9abc. \tag{1}$$

19. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1.$$

Докажи дека

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1.$$

20. Нека a,b,c,d се ненегативни броеви такви да $a+b+c+d=4$. Докажи дека

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\leq 4. \tag{1}$$

21. За реалните броеви a,b,c,x,y,z важи $a\geq b\geq c>0$ и $x\geq y\geq z>0$. Докажи дека

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geq\frac{3}{4}. \tag{1}$$

22. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ и $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}=3$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2\geq a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}. \tag{1}$$

23. Нека x_1,x_2,x_3,x_4 се позитивни реални броеви такви да $x_1x_2x_3x_4=1$. Докажи дека

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\geq\max\{x_1+x_2+x_3+x_4,\tfrac{1}{x_1}+\tfrac{1}{x_2}+\tfrac{1}{x_3}+\tfrac{1}{x_4}\}.$$

24. а) Нека $x_1\geq x_2\geq x_3>0$ и $0<y_1\leq y_2\leq y_3$. Докажи дека

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}\geq 3\frac{x_1+x_2+x_3}{y_1+y_2+y_3}. \qquad (1)$$

б) Нека $\alpha,\beta,\gamma>0$ и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Докажи дека

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq\frac{9}{\pi}.$$

Кога важи знак за равенство?

25. Нека $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ се различни природни броеви. Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\geq\frac{2n+1}{3}(x_1+x_2+...+x_n). \qquad (1)$$

26. Нека $n>1$ и $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни рални броеви такви да $x_1+x_2+...+x_n=1$. Докажи дека

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+...+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

27. Нека $a,b,c>0$ и $n\geq 1$. Докажи дека

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{3(a^n+b^n+c^n)}{2(a+b+c)}. \qquad (1)$$

28. Нека $1\leq x_1\leq x_2\leq...\leq x_n$, $n\geq 2$ и

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}=1.$$

Докажи дека

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}\geq(n-1)(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{x_n}}). \qquad (1)$$

29. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни рални броеви. Докажи го неравенството

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}...x_n^{x_n}\geq(x_1x_2...x_n)^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}. \qquad (1)$$

30. Нека a,b,c се позитивни броеви такви да $abc=2$. Докажи го неравенството

$$a^3+b^3+c^3\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.$$

31. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $abc\geq 1$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3\geq ab+bc+ca.$$

32. Најди ги сите позитивни реални броеви a,b,c такви да

$$4(ab+bc+ca)-1\geq a^2+b^2+c^2\geq 3(a^3+b^3+c^3).$$

33. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви да $ab+bc+ca=abc$. Докажи дека

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1.$$

34. Нека $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbf{R}^+, n\geq 2$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$. Докажи дека

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+...+x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}. \qquad (1)$$

35. Ако a,b,c,d се позитивните броеви такви да

$$c^2+d^2=(a^2+b^2)^3, \qquad (1)$$

тогаш $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\geq 1$. Докажи!

36. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да

$$ab+bc+ca\geq 3.$$

Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

37. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbf{R}^+$ се такви да

$$\sum_{i=1}^n a_i^3=3 \text{ и } \sum_{i=1}^n a_i^5=5. \qquad (1)$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^n a_i>\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

38. Нека $k,l\in\mathbf{N}$ и нека $a_{ij}>0; i=1,...,k,\ j=1,2,...,l$ се позитивни реални броеви. Докажи дека за $q\geq p>0$ важи

$$(\sum_{j=1}^l(\sum_{i=1}^k a_{ij}^p)^{\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}}\leq(\sum_{i=1}^k(\sum_{j=1}^l a_{ij}^q)^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

38 (прво обопштено неравенство на Хелдер). Нека $a_i,b_i,\ 9\,i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и нека за позитивните реални броеви p,q,r важи $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Докажи дека

$$[\sum_{i=1}^n(a_ib_i)^r]^{\frac{1}{r}}\leq(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}. \qquad (1)$$

40 (второ обопштено неравенство на Хелдер). Нека a_i,b_i,c_i, $i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и нека за позитивните реални броеви p,q,r важи $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i\leq(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^n c_i^r)^{\frac{1}{r}}. \qquad (1)$$

41. Нека a,b,c,x,y,z,t,u,v се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(t^3+u^3+v^3)\geq(axt+byu+czv)^3. \qquad (1)$$

42. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1 .$$

43. Нека за реалните броеви $a,b,c\geq 1$ важи $a+b+c=2abc$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2}\geq \sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{bc-1}+\sqrt[3]{ca-1} .$$

44. Нека a_1,a_2,a_3 се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(a_1^5-a_1^2+3)(a_2^5-a_2^2+3)(a_3^5-a_4^2+3)\geq (a_1+a_2+a_3)^3 .$$

45. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbf{R}^+$ се такви да $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+...+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}} .$$

46. Докажи дека

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2},$$

каде $n>1$ е природен број и a,b,c се должини на страни на триаголник со единичен периметар.

47. Нека a,b,c се реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2} .$$

48. Ако $x_i\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$, $i=1,2,...,n$, тогаш

$$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+...\cos(2x_n-x_1)\leq\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n .$$

Докажи!

49. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc . \qquad (1)$$

50. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbf{R}^+, n\geq 2$. Докажи за секои $p,k\geq 1$ важи

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}\right)^k\geq\frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}} .$$

51. Нека $k\in(0,3]$. Тогаш за секои $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ важи

$$(3-k)+k(abc)^{2/k}+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca) .$$

52. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$. Докажи го неравенството:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+ac+bc) .$$

53. Нека a,b,c се позитивни броеви за кои $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq 1 .$$

54. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}}\geq 4 .$$

55. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2\geq \tfrac{2}{3}[a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)] .$$

56. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=2$. Докажи дека

$$a^4+b^4+c^4+abc\geq a^3+b^3+c^3 .$$

57. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{\sqrt{(b+c)(b^3+c^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(c+a)(c^3+a^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(a+b)(a^3+b^3)}}\geq \frac{3}{2} .$$

58. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^2}{2a^2-ab+2b^2}\geq 1 .$$

59. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq a+b+c .$$

60. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{b^2-bc+c^2}+b^2\sqrt{c^2-ca+a^2}+c^2\sqrt{a^2-ab+b^2} .$$

61. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\geq a^2+b^2+c^2 .$$

62. Нека $a,b>0$. Докажи дека

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} .$$

63. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq \frac{3}{2} .$$

64. Ако a,b,c се позитивни релани броеви, тогаш

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq 3\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} .$$

65. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq \frac{3}{4} .$$

66. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq \frac{3}{4} .$$

67. Докажи дека за секои реални броеви $a,b,c\geq 0$ важи

$$a^3+b^3+c^3 \le a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}\ .$$

68. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \ge a+b+c\ .$$

69. Нека a,b,c се позитивни релани броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2+3abc \ge \frac{4}{9}$.

70. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека

$$a^3+b^3+c^3+abc \ge \frac{1}{7}(a+b+c)^3\ .$$

71. Нека a,b,c се позитивни реални броеви и $n,k \in \mathbf{N}$. Докажи дека

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n} \ge a^k+b^k+c^k\ .$$

72. Нека k е природен број. Докажи дека за позитивни реални броеви x,y,z чиј збир е еднаков на 1, важи неравенството

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \ge \frac{1}{7}\ .$$

73. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b и c, такви да $a+b+c=1$, важи неравенството

$$\frac{1}{bc+a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{ca+b+\frac{1}{b}}+\frac{1}{ab+c+\frac{1}{c}} \le \frac{27}{31}\ .$$

74. Нека $x,y,z \in \mathbf{R}^+$ и $x+y+z=1$. Докажи дека

$$xy+yz+zx \ge 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz\ .$$

75. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. Докажи дека

$$\sqrt{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \le \frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}\ .$$

76. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3 \ge abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^3(a^3+b^3+c^3)\ .$$

77. (Неравенство на Бернули). Ако $x>-1$ и $\alpha \in (0,1)$, тогаш

$$(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x\ , \tag{1}$$

при што знак за равенство важи само за $x=0$.

78. Нека $a<0$. Докажи дека $2^a+2^{\frac{1}{a}} \le 1$.

VII ГЛАВА
СИМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА

1. ПОИМ ЗА СИМЕТРИЧНО НЕРАВЕНСТВО

Во претходните разгледувања често пати ја користевме синтагмата *без ограничување на општоста,* без притоа истата подетално да ја образложуваме. Во овој ќе ги разгледаме таканаречените симетрични неравенства, кај кои и можеме определени претпоставки да ги земеме без притоа да се ограничува општоста на натамошните разгледувања.

Дефиниција 1. За функцијата $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *симетрична* во однос на променливите $x_1, x_2, ..., x_n$ ако

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}),$$

за секоја пермутација $(i_1, i_2, ..., i_n)$ на $(1, 2, ..., n)$.

Ако f е симетрична функција, тогаш неравенството од облик

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$$

го нарекуваме *симетрично неравенство*.

Во точка VI 8 го разгледавме неравенсвото на Шур, кое е едно од најпознатите симетрични неравенства. Навистина од дефиниција 3 во претходната глава непосредно следува дека функцијата

$$T[a_1, a_2, ..., a_n] = \sum{}^{!} F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum{}^{!} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} ,$$

е симетрична, па затоа за $n = 3$ функцијата

$$F(x_1, x_2, x_3) = T[a + 2b, 0, 0] + T[a, b, b] - 2T[a + b, b, 0],$$

е симетрична, што значи дека неравенството на Шур е симетрично.

Дефиниција 2. Полиномот $s_k:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ определен со

$$s_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$$

го нарекуваме *елементарен симетричен полином* од $k-$ти ред.

Во врска со симетричните полиноми и примарните симетрични полиноми точна е следнава теорема, чиј доказ излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, па затоа истиот нема да го презентираме.

Теорема 1. Секој симетричен полином може да се изрази како полином од елементарните симетрични полиноми. □

2. СИМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА СО ТРИ ПРОМЕНЛИВИ

Голем број симетрични полиномни неравенства можат да се докажат користејќи ја теорема 1 и релациите меѓу елементарните симетрични полиноми. Меѓутоа, заради сложеноста на алгебарскиот апарат во нашите разгледувања ќе се задржиме на симетричните неравенства од три променливи. Притоа, ако $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, тогаш елементарните симетрични полиноми се од облик

$$p=x+y+z\,,\; q=xy+yz+zx\,,\; r=xyz\,, \tag{*}$$

и притоа важи $p,q,r\in\mathbf{R}^+$. Во натамошните разгледувања ознаките (*) ќе ги користиме без притоа истото да го нагласуваме. Понатаму, со непосредна проверка можат да се докажат следниве идентитети:

$$x^2+y^2+z^2=p^2-2q \tag{1}$$

$$x^3+y^3+z^3=p(p^2-3q)+3r \tag{2}$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=q^2-2pr \tag{3}$$

$$x^4+y^4+z^4=(p^2-2q)^2-2(q^2-2pr) \tag{4}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)=pq-r \tag{5}$$

$$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=p^2+q \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2&=\\ &=(p^2+q)^2-4p(pq-r)\end{aligned} \tag{7}$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=pq-3r \tag{8}$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+p+q+r \tag{9}$$

$$(1+x)(1+y)+(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x)=3+2p+q \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^2(1+y)^2+(1+y)^2(1+z)^2+(1+z)^2(1+x)^2&=\\ &=(3+2p+q)^2-2(3+p)(1+p+q+r)\end{aligned} \tag{11}$$

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=pq-3r \tag{12}$$

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=q^3-3pqr-3r^2 \tag{13}$$

кои ќе ги користиме во натамошните разгледувања.

Во следните две теореми ќе докажеме повеќе неравенства поврзани со елементарните симетрични полиноми, кои ќе ги користиме во натамошните разгледувања.

Теорема 2. Нека $x, y, z \geq 0$ и нека $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$. Тогаш

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \tag{14}$$

$$p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0 \tag{15}$$

Доказ. Неравенството (14) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(x + y + z)^3 - 4(x + y + z)(xy + yz + zx) + 9xyz \geq 0,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y,$$

и како последното неравенство е точно, пример VI 25, заклучуваме дека е точно и неравенството (14).

Неравенството (15) после средувањето последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a + b + c) \geq (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c)$$

$$T[4,0,0] + T[2,1,1] - 2T[3,1,0] \geq 0,$$

и последното неравенството следува од неравенството на Шур при $a = 2$ и $b = 1$, (задача VI 56). ■

Теорема 3. Нека $x, y, z \geq 0$ и нека $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$. Тогаш точни се неравенствата:

$$pq - 9r \geq 0 \tag{16}$$

$$p^2 \geq 3q \tag{17}$$

$$p^3 \geq 27r \tag{18}$$

$$q^3 \geq 27r^2 \tag{19}$$

$$q^2 \geq 3pr \tag{20}$$

$$2p^3 + 9r \geq 7pq. \tag{21}$$

$$p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q \tag{22}$$

$$2p^3 + 9r^2 \geq 7pqr \tag{23}$$

$$p^2q + 3pr \geq 4q^2 \tag{24}$$

$$q^3+9r^2 \ge 4pqr \qquad (25)$$

$$pq^2 \ge 2p^2r+3qr \qquad (26)$$

Доказ. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$pq=(x+y+z)(xy+yz+zx) \ge 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=9r\,,$$

т.е. точно е неравенството (16).

Неравенството (17) е еквивалентно со добро познатото неравенство

$$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)\,.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$p=x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{r}$$

кое е еквивалентно со неравенството (18).

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$q=xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3\sqrt[3]{r^2}$$

кое е еквивалентно со неравенството (19).

Ако го искористиме неравенството $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$, за $a=xy$, $b=yz$ и $c=zx$, последователно добиваме

$$\begin{aligned} q^2 &= (xy+yz+zx)^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) \\ &\ge (xy)(yz)+(yz)(zx)+(zx)(xy)+2xyz(x+y+z) \\ &= 3xyz(x+y+z)=3pr, \end{aligned}$$

што значи дека е исполнето неравенството (20).

Неравенството (21) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned} &2p^3+9r \ge 7pq && \Leftrightarrow \\ &2(x+y+z)^3+9xyz \ge 7(x+y+z)(xy+yz+zx) && \Leftrightarrow \\ &2(x^3+y^3+z^3) \ge x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y && \Leftrightarrow \\ &T[3,0,0] \ge T[2,1,0]\,, \end{aligned}$$

и последното неравенство следува од теоремата на Мјурхед.

Останатите неравенства се докажуваат аналогно. Деталите гин оставаме на читателот за вежба. ■

Пример 1. Нека $x,y,z>0$ се реални броеви. Докажи дека

$$(xy+yz+zx)\left(\tfrac{1}{(x+y)^2}+\tfrac{1}{(y+z)^2}+\tfrac{1}{(z+x)^2}\right) \ge \tfrac{9}{4}\,.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$4\sum_{\text{cikl}} xy \cdot \sum_{\text{cikl}} (x+y)^2(y+z)^2 \geq 9(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 . \qquad (27)$$

Ставаме $x+y+z=p$, $xy+yz+zx=q$, $xyz=r$ и ако ги искористиме равенствата (5) и (7) добиваме

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=(pq-r)^2$$

и

$$(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2=(p^2+q)^2-4p(pq-r) .$$

што значи дека неравенството (27) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$4q[(p^2+q)^2-4p(pq-r)] \geq 9(pq-r)^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$4p^4q-17p^2q^2+4q^3+34pqr-9r^2 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$pq(p^3-4pq+9r)+q(p^4-5p^2q+4q^2+6pr)+r(pq-9r) \geq 0 .$$

Точноста на последното неравенство непосредно следува од $p,q,r>0$ и неравенствата (14), (15) и (16). Според тоа, даденото равенство важи и притоа важи знак за равенство ако и само ако $x=y=z$. ■

Пример 2. Нека $x,y,z>0$ се реални броеви такви да $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1 .$$

Решение. Нека $p=x+y+z$, $q=xy+yz+zx$ и $r=xyz$. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sum_{\text{cikl}} (1+x)^2(1+y)^2+2(1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2 . \qquad (28)$$

Но,

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+p+q+r=2+p+q$$

$$\sum_{\text{cikl}} (1+x)^2(1+y)^2=(3+2p+q)^2-2(3+p)(1+p+q+r)$$

$$=(3+2p+q)^2-2(3+p)(2+p+q),$$

па затоа неравенството (28) е еквивалентно со неравенството

$$(3+2p+q)^2-2(3+p)(2+p+q)+2(2+p+q) \geq (2+p+q)^2$$

т.е. со неравенството

$$p^2 \geq 2q+3 . \qquad (29)$$

Понатаму од неравенството (19) следува $q^3 \geq 27r^2=27$, па затоа

$$q \geq 3 . \qquad (30)$$

Конечно, од неравенствата (17) и (30) добиваме

$$p^2 \geq 3q = 2q + q \geq 2q + 3,$$

т.е. точно е неравенството (28). ■

Пример 3. Нека $a, b, c > 0$ се такви да $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$. Докажи дека

$$\frac{1}{8ab+1} + \frac{1}{8bc+1} + \frac{1}{8ca+1} \geq 1. \tag{31}$$

Решение. Нека $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ и $r = abc$. Од

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$$

имаме

$$(a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1) = 2(a+1)(b+1)(c+1). \tag{32}$$

Користејќи ги идентитетите (9) и (10) добиваме дека идентитетот (32) е еквивалентен со $3 + 2p + q = 2(1 + p + q + r)$, односно со

$$q + 2r = 1. \tag{33}$$

Понатаму, лесно се докажува дека

$$(8ab+1)(8bc+1) + (8bc+1)(8ca+1) + (8ca+1)(8ab+1) = 64pr + 16q + 3$$

и

$$(8ab+1)(8bc+1)(8ca+1) = 512r^2 + 64pr + 8q + 1,$$

Од што следува дека неравенството (31) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$64pr + 16q + 3 \geq 512r^2 + 64pr + 8q + 1$$

$$8q + 2 \geq 512r^2 \tag{34}$$

Од (19) и (33) последователно ја добиваме следнава низа еквивалентни неравенства

$$(1 - 2r)^3 \geq 27r^2$$

$$8r^3 + 15r^2 + 6r - 1 \leq 0$$

$$(8r - 1)(r^2 + 2r + 1) \leq 0,$$

од каде следува дека неравенството $8r - 1 \leq 0$, т.е. неравенството

$$r \leq \frac{1}{8} \tag{35}$$

Сега, од равенството (33) следува дека неравенството (34) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$8(1 - 2r) + 2 \geq 512r^2$$

$$512r^2 + 16r - 10 \leq 0$$

$$(8r - 1)(64r + 10) \leq 0,$$

а точноста на последното неравенство следува од неравенството (35). ■

Пример 4. Нека $a,b,c>0$ се такви да $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ и $r=abc$. Ако се искористи условот $r=abc=1$, со непосредни пресметувања добиваме

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}=\frac{1}{p+1-a}+\frac{1}{p+1-b}+\frac{1}{p+1-c}=\frac{p^2+4p+3+q}{p^2+2p+pq+q},$$

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}=\frac{12+4p+q}{9+4p+2q},$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{p^2+4p+3+q}{p^2+2p+pq+q}\le\frac{12+4p+q}{9+4p+2q},$$

односно со неравенството

$$(3q-5)p^2+(p-1)q^2+6pq\ge 24p+3q+27. \qquad (36)$$

Но, $r=abc=1$, па затоа

$$p=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3 \text{ и } q=ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3,$$

од што следува дека

$$\begin{aligned}(3q-5)p^2+(p-1)q^2+6pq&\ge 4p^2+2q^2+6pq\ge 12p+6(q-1)p+6p+2q^2\\&\ge 24p+3q+(q^2+6p)\ge 24p+3q+27,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (36). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $p=q=3$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. ■

3. ПОСТАПКА НА НОРМАЛИЗАЦИЈА

При докажување на симетрични неравенства често пати се среќаваме со таканаречените *хомогени симетрични неравенства*, односно со неравенства од видот

$$f(x_1,x_2,...,x_n)\ge 0, \qquad (1)$$

каде f е симетрична функција за која важи

$$f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,...,x_n), \qquad (2)$$

за секои $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbf{R}$. Притоа за функција f која го задоволува условот (2) ќе велиме дека е *хомогена функција од ред* k.

Пример 5. Нека a,b,c се реални броеви такви да $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи дека

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\le 6.$$

Решение. Нека $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ и $r=abc$.Даденото неравенство не е хомогено, но доколку се искористи условот

$$a^2+b^2+c^2=3$$

истото можеме да го хомогенизираме, т.е. да го запишеме во видот

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leq \tfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2. \qquad (3)$$

Неравенството (4) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2\sum_{\text{cikl}} a^4+4\sum_{\text{cikl}} a^2b^2\geq 3\sum_{\text{cikl}} ab(a^2+b^2),$$

$$\sum_{\text{cikl}}(a^4+b^4-3ab(a^2+b^2)+4a^2b^2)\geq 0,$$

$$\sum_{\text{cikl}}(a^2-b^2)^2+3\sum_{\text{cikl}} ab(a-b)^2\geq 0,$$

при што последното неравенство е очигледно исполнето. ■

Пример 6. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\leq\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.$$

Решение. Нека $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ и $r=abc$. Даденото неравенство е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме $q=ab+bc+ca=3$. Од $p^2\geq 3q=9$ следува $a+b+c=p\geq 3$ и уште важи

$$r=abc\leq\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{3}}=1.$$

Понатаму,

$$(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r=3p-r\geq 8,$$

па затоа

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}=1\leq\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Пример 7. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

Решение. Нека $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ и $r=abc$. Даденото неравенство е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме $p=a+b+c=3$, при што добиваме

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leq 8.$$

Но,

$$\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}=1+\frac{8a+6}{(a-1)^2+2}\leq 1+\frac{8a+6}{2}=4a+4$$

и слично

$$\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}\leq 4b+4,\ \frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leq 4c+4\ .$$

Според тоа,

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leq \tfrac{1}{3}[12+4(a+b+c)]=8\ .\ \blacksquare$$

Пример 8. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{ab+4bc+ca}{a^2+bc}+\frac{ba+4ca+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+4ab+bc}{c^2+ab}\geq 6\ .$$

Решение. Нека $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ и $r=abc$. Даденото неравенство е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме $p=a+b+c=1$. Понатаму, користејќи ги елементарите симетрилни полиноми неравенството може да го запишеме во облик

$$7qr-12r^2\geq 4q^3-q^2\ . \tag{1}$$

Ако го искористиме неравенството $p^3-4pq+9r\geq 0$ и условот $p=1$ добиваме $9r\geq 4q-1$, а од неравенствот $p^2\geq 3q$ следува $0\leq q\leq \frac{1}{3}$. Според тоа,

$$\frac{9rq}{3}\geq 9rq^2\geq q^2(4q-1)\ ,$$

па затоа

$$3rq\geq q^2(4q-1)\ . \tag{2}$$

Но, $pq-9r\geq 0$, па затоа $q\geq 9r$, од што следува дека

$$4qr\geq 36r^2\geq 12r^2\ . \tag{3}$$

Конечно, од (2) и (30 следува

$$7qr-12r^2=3qr+4qr-12r^2\geq 3qr\geq q^2(4q-1)=4q^3-q^2\ ,$$

т.е. точно е неравенството (1). ■

4. ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ ПРИ ДОКАЖУВАЊЕ НА СИМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА

Во овој дел ќе разгледаме метод, кој во многу случаи ја исклучува примената на класичните неравенства при докажување на симетричните неравенства со три променливи. Овој метод се базира на теоремите IV 3, IV 4 и IV 5.

Нека a, b и c се реални броеви такви што $a+b+c=1$. Од неравенството

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

следува:

$$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca),$$

т.е. точно е неравенството $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$. Да ставиме

$$ab+bc+ca=\tfrac{1-u^2}{3},$$

каде $u \geq 0$ е параметар. Ќе ги најдеме минималната и максималната вредност која што ја прима производот abc во зависност од вредноста на параметарот u.

Ако $u=0$, тогаш $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$ и од претходно изнесеното следува $a=b=c=\frac{1}{3}$, па затоа $abc=\frac{1}{27}$. Ако $u \neq 0$, тогаш

$$\begin{aligned} & ab+bc+ca=\tfrac{1-u^2}{3}<\tfrac{1}{3}=\tfrac{(a+b+c)^2}{3} && \Leftrightarrow \\ & a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca && \Leftrightarrow \\ & (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0, && \end{aligned}$$

што значи дека барем два од броевите a,b,c се различни меѓу себе.

Да го разгледаме полиномот

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2+\tfrac{1-u^2}{3}x-abc, \qquad (1)$$

$a+b+c=1$. Првиот извод на полиномот (1) е полиномот:

$$f'(x)=3x^2-2x+\tfrac{1-u^2}{3},$$

чии корени се $x_1=\frac{1+u}{3}$ и $x_2=\frac{1-u}{3}$ и тоа се стационарни точки на функцијата (1). За вториот извод на $f(x)$ имаме $f''(x)=6x-2$. Имаме

$$f''(x_1)=6\cdot\tfrac{1+u}{3}-2=6u>0$$

и од теорема IV 5 следува дека функцијата (1) во точката $x_1=\frac{1+u}{3}$ има минимум. Понатаму, од

$$f''(x_2)=6\cdot\tfrac{1-u}{3}-2=-6u<0$$

и од теорема IV 5 следува дека функцијата (1) во точката $x_2=\frac{1-u}{3}$ има максимум. Но, функцијата (1) е непрекината и a,b и c се нули на (1). Затоа минимумот и максимумот на функцијата (1) се достигнуваат меѓу нулите, од што следува дека во точката на минимум функцијата е непозитивна, а во точката на максимум таа е ненегативна. Според тоа

$$0 \geq f(\tfrac{1+u}{3}) = \tfrac{(1+u)^2(1-2u)}{27} - abc \text{ и } 0 \leq f(\tfrac{1-u}{3}) = \tfrac{(1-u)^2(1+2u)}{27} - abc,$$

односно

$$\tfrac{(1+u)^2(1-2u)}{27} \leq abc \leq \tfrac{(1-u)^2(1+2u)}{27}. \tag{2}$$

Од претходното изнесеното следува точноста на следнава теорема.

Теорема 1. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=1$ и

$$ab+bc+ca = \tfrac{1-u^2}{3}, (u \geq 0).$$

Тогаш точни се неравенствата (2), при што знак за равенство важи ако и само ако $u=0$, т.е. ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$. ■

Аналогно на претходните разгледувања може да се докаже следнава теорема, која е природно обопштување на теорема 1.

Теорема 2. Ако a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=v$ и

$$ab+bc+ca = \tfrac{v^2-u^2}{3}, \ (u \geq 0).$$

Тогаш точни се неравенствата

$$\tfrac{(v+u)^2(v-2u)}{27} \leq abc \leq \tfrac{(v-u)^2(v+2u)}{27}, \tag{3}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $u=0$, т.е. ако и само ако

$$a=b=c=\tfrac{v}{3}. \ ■$$

Ако ги искористиме ознаките $a+b+c=v$, $ab+bc+ca=\frac{v^2-u^2}{3}$ и $abc=w$, тогаш лесно се покажува дека се точни следниве идентитети:

$$a^2+b^2+c^2 = \tfrac{v^2+2u^2}{3}, \tag{4}$$

$$a^3+b^3+c^3 = vu^2+3w, \tag{5}$$

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) = \tfrac{v(v^2-u^2)}{3} - 3w, \tag{6}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = \tfrac{v(v^2-u^2)}{3} - w, \tag{7}$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \tfrac{(v^2-u^2)^2}{9} - 2vw, \tag{8}$$

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2) = \tfrac{(v^2+2u^2)(v^2-u^2)}{9} - vw, \tag{9}$$

$$a^4+b^4+c^4 = \tfrac{-v^4+8v^2u^2+2u^4}{9} + 4vw, \tag{10}$$

кои ќе ги користиме во натамошните разгледувања. На читателот му препорачуваме самостојно да ги докаже идентитетите (4) – (10).

Пример 9. Нека $a,b,c \in \mathbf{R}$. Докажи го неравенството

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geq \tfrac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)\,. \qquad (11)$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 &= \\ &=2(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{aligned}$$

што значи дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$5(a^4+b^4+c^4)+14(a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c)+21(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 0\,.$$

Понатаму, ако ги искористиме ознаките

$$a+b+c=v\,,\ ab+bc+ca=\tfrac{v^2-u^2}{3}\ \text{ и }\ w=abc\,,$$

тогаш користејќи ги идентитетите (8), (9) и (10) добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$5(\tfrac{-v^4+8v^2u^2+2u^4}{9}+4vw)+14(\tfrac{(v^2+2u^2)(v^2-u^2)}{9}-vw)+21(\tfrac{(v^2-u^2)^2}{9}-2vw)\geq 0\,,$$

т.е. со неравенството

$$\begin{aligned}5(-v^4+8v^2u^2+2v^4+36vw)+14[(v^2+2u^2)(v^2-u^2)-9vw]&\\ +21[(v^2-u^2)^2-18vw]\geq 0.&\end{aligned} \qquad (12)$$

Ако $v=0$, тогаш неравенството (12) е еквивалентно со неравенството $3u^4\geq 0$, кое очигледно е точно. Нека $v\neq 0$. Без губење на општоста можеме да земеме дека $v=1$ (зошто?). Сега неравенството (12) е еквивалентно со неравенството

$$5(-1+8u^2+2u^4+36w)+14[(1+2u^2)(1-u^2)-9w]+21[(1-u^2)^2-18w]\geq 0\,,$$

т.е. со неравенството

$$3u^4+4u^2+10-108w\geq 0\,. \qquad (13)$$

Сега од теорема 1 следува

$$\begin{aligned}3u^4+4u^2+10-108w &\geq 3u^4+4u^2+10-108\tfrac{(1-u)^2(1+2u)}{27}\\ &=3u^4+4u^2+10-4(1-u)^2(1+2u)\\ &=u^2(u-4)^2+2u^4+6\geq 0,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (13), што значи дека точно е неравенството (11). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=0$. ■

Пример 10. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што $a+b+c=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)\ge 25\,.$$

Решение. Од $ab+bc+ca=\frac{1-u^2}{3}\ge 0$ и $u\ge 0$ следува дека $u\in[0,1]$. Имаме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)=\frac{ab+bc+ca}{abc}+48(ab+bc+ca)=\frac{1-u^2}{3w}+16(1-u^2)\,,$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\frac{1-u^2}{3w}+16(1-u^2)\ge 25$. Понатаму, од теорема 1 следува

$$\begin{aligned}\frac{1-u^2}{3w}+16(1-u^2)&\ge 27\frac{1-u^2}{3(1-u)^2(1+2u)}+16(1-u^2)\\&=9\frac{1+u}{(1-u)(1+2u)}+16(1-u^2)\\&=\frac{2u^2(4u-1)^2}{(1-u)(1+2u)}+25\ge 25,\end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако

$$(a,b,c)=(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})\ \text{ или }\ (a,b,c)=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})\,,$$

(по сите пермутации на a,b и c). ■

Пример 11. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}$ се такви што $a^2+b^2+c^2=9$. Докажи го неравенството

$$2(a+b+c)-abc\le 10\,.$$

Решение. При ознаки $a+b+c=v$, $ab+bc+ca=\frac{1-u^2}{3}$, $abc=w$, ако го искористиме идентитетот (4), условот на задачата ќе го запишеме во обликот

$$9=a^2+b^2+c^2=\frac{v^2+2u^2}{3}\,,$$

т.е. во обликот

$$v^2+2u^2=27 \tag{14}$$

Од теорема 2 следува

$$\begin{aligned}2(a+b+c)-abc&=2v-w\le 2v-\frac{(v+u)^2(v-2u)}{27}=\frac{54v-v^3+3vu^2+2u^3}{27}\\&=\frac{54v-v(v^2+2u^2)+5vu^2+2u^3}{27}=\frac{54v-27v+5vu^2+2u^3}{27}\\&=\frac{27v+5vu^2+2u^3}{27}=\frac{v(27+5u^2)+2u^3}{27},\end{aligned}$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{v(27+5u^2)+2u^3}{27}\le 10\,,$$

т.е. дека

$$v(27+5u^2)\le 270-2u^3\,.$$

Имаме

$$(270-2u^3)^2 \geq [v(27+5u^2)]^2 \qquad \Leftrightarrow$$
$$27(u-3)^2(2u^4+12u^3+49u^2+146u+219) \geq 0$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $(a,b,c)=(2,2,-1)$, по сите пермутации на a,b и c. ■

Пример 12. Докажи, дека за кои било ненегативни реални броеви a,b,c важи

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a). \qquad (15)$$

Решение. Неравенството (15) е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $u=a+b+c=1$. Тогаш $u\in[0,1]$ и неравенство (15) е еквивалентно со неравенството

$$27w+4u^2-1 \geq 0.$$

Ако $u \geq \frac{1}{2}$, тогаш последното неравенство очигледно е точно.

Ако $u \leq \frac{1}{2}$, тогаш од теорема 1 следува

$$27w+4u^2-1 \geq 27\frac{(1+u)^2(1-2u)}{27}+4u^2-1=u^2(1-2u) \geq 0,$$

што значи дека и во овој случај неравенството е исполнето. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $(a,b,c)=(t,t,t)$ или $(a,b,c)=(t,t,0)$, $t\geq 0$, по сите пермутации на a,b и c. ■

5. ЗАДАЧИ

1. Нека $a,b,c \geq 0$ се такви да $a+b+c=1$. Докажи дека
$$7(ab+bc+ca) \leq 2+9abc.$$

2. Нека $x,y,z>0$ се такви да $x+y+z=1$. Докажи дека
$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) \geq 64.$$

3. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви такви да $abc=1$. Докажи дека
$$\tfrac{1}{1+3a}+\tfrac{1}{1+3b}+\tfrac{1}{1+3c}+\tfrac{1}{1+a+b+c} \geq 1.$$

4. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви такви да $a+b+c=3$. Докажи дека
$$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

5. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека
$$6(a^3+b^3+c^3)+1 \geq 5(a^2+b^2+c^2).$$

6. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2} \qquad (1)$$

7. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви. Докажи дека

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3}+\frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3}\leq\frac{12}{a+b+c}\,.$$

8. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви. Докажи дека

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\leq\frac{3}{5}\,.$$

9. Нека a,b,c,d се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{c^2+d^2+a^2}+\frac{c}{d^2+a^2+b^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}\,.$$

10. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\geq 2\,.$$

11. Нека $a,b,c\geq 0$. Докажи дека

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}\,.$$

12. Нека $a,b,c,d>0$. Докажи дека

$$\frac{abc}{(d+a)(d+b)(d+c)}+\frac{bcd}{(a+b)(a+c)(a+d)}+\frac{cda}{(b+c)(b+c)(b+d)}+\frac{dab}{(c+a)(c+b)(c+d)}\geq\frac{1}{2}\,.$$

13. Нека $a,b,c\geq 0$. Докажи го неравенството

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)\,.$$

14. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}$. Докажете го неравенството

$$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)\,.$$

15. Нека $x,y,z\geq 0$ се реални броеви такви да $xy+yz+zx+xyz=4$. Докажи дека

$$3(x^2+y^2+z^2)+xyz\geq 10\,.$$

16. Нека $x,y,z\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)}\,.$$

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ПРВА ГЛАВА

1. Докажи дека за секои реални броеви a и b важи

$$8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4 .$$

Решение. Од $(a-b)^2\geq 0$ имаме $a^2+b^2\geq 2ab$. Додавајќи на двете страни на неравенството a^2+b^2 добиваме $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$. Слично $a^4+b^4\geq 2a^2b^2$, па затоа $8(a^4+b^4)\geq[2(a^2+b^2)]^2$. Конечно, од добиените неравенства следува

$$8(a^4+b^4)\geq[2(a^2+b^2)]^2\geq[(a+b)^2]^2=(a+b)^4 . \blacksquare$$

2. Нека a, b, c, d се реални броеви такви што $a+b+c+d=0$. Да означиме

$$P=ab+bc+cd \text{ и } Q=ac+ad+bd .$$

Докажи дека $19P+93Q\leq 0$ или $19Q+93P\leq 0$.

Решение. Бидејќи $a+b+c+d=0$ добиваме

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2da+2bd+2ac=(a+b+c+d)^2=0 ,$$

па затоа

$$0\leq a^2+b^2+c^2+d^2=-2(ab+bc+cd+da+bd+ac)=-2(P+Q) ,$$

т.е. $P+Q\leq 0$. Значи,

$$(19P+93Q)+(19Q+93P)=112(P+Q)\leq 0 ,$$

од што следува $19P+93Q\leq 0$ или $19Q+93P\leq 0$. $\blacksquare$

3. Нека a,b и c се ненегативни броеви.

а) Докажи, дека од неравенството

$$a^4+b^4+c^4\leq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \tag{1}$$

следува неравенството

$$a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca) \tag{2}$$

б) Дали е точно обратното тврдење: од неравенството (2) да следува неравенството (1).

Решение. а) Бидејќи неравенствата се симетрични во однос на a, b и c можеме да сметаме дека $a \geq b \geq c$. Имаме

$$\begin{aligned} D &= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \\ &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2c^2(a^2 + b^2) - c^4 \\ &= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2. \end{aligned}$$

Ако $D > 0$, тогаш од претходното равенство и од неравенствата $a \geq b \geq c$ следува

$$2ab \geq |a^2 + b^2 - c^2| = a^2 + b^2 - c^2$$

Сега од претходното неравенство и од неравенствата $a \geq b \geq c$ добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2c^2 \leq 2ab + 2c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$$

б) Не е точно. На пример, за $a = 4,\ b = c = 1$. ■

4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b, c точно е неравенството

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}.$$

Решение. Даденото неравенство ќе го запишеме во обликот

$$\frac{c(a-b)}{b(b+c)} + \frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} \geq 0. \qquad (1)$$

Неравенството (1) не се менува при циклична пермутација на броевите a, b, c, па затоа доволно е да разгледаме само два случаја: $a \geq b \geq c$ и $b \geq a \geq c$.

Ако $a \geq b \geq c$, тогаш $a + b \geq a + c \geq b + c > 0$, па затоа

$$\begin{aligned} \frac{c(a-b)}{b(b+c)} + \frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} &\geq \frac{c(a-b)}{b(a+b)} + \frac{a(b-c)}{c(a+b)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} \\ &\geq \frac{1}{a+b}\left[\frac{c(a-b)}{a} + \frac{a(b-c)}{a} + \frac{b(c-a)}{a}\right] = 0. \end{aligned}$$

Ако $b \geq a \geq c$, тогаш $a + b \geq b + c \geq a + c > 0$, па затоа

$$\begin{aligned} \frac{c(a-b)}{b(b+c)} + \frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} &\geq \frac{c(a-b)}{b(a+b)} + \frac{a(b-c)}{c(a+b)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} \\ &\geq \frac{1}{a+b}\left[\frac{c(a-b)}{b} + \frac{a(b-c)}{b} + \frac{b(c-a)}{b}\right] = 0, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

5. Докажи дека за позитивни реални броеви a, b, c, d, e, f важи неравенството

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

Решение. Нека се x, y, z, u позитивни броеви. Со елементарни трансформации лесно може да го докажеме неравенството

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{zu}{z+u} \leq \frac{(x+z)(y+u)}{x+y+z+u} \qquad (1)$$

Ако неравенството (1) двапати последователно го примениме, добиваме

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\le\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}+\frac{ef}{e+f}\le\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}\ .\ ■$$

6. Најди ја најголемата вредност на реалниот број k ако

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a}-k)\ge k\ ,$$

за секои ненегативни реални броеви a,b,c такви да $a+b+c=ab+bc+ca$.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a})\ge k+k(a+b+c)=(a+b+c+1)k\ .$$

Од друга страна, користејќи го условот $a+b+c=ab+bc+ca$ добиваме

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2+(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2-abc}.$$

Затоа,

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+1}(\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a})=\frac{a+b+c}{a+b+c+1}\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2-abc}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-abc}\ge 1\ ,$$

и знак за равенство важи ако и само ако $abc=0$. Според тоа, најголемата можна вредност за k е 1. ■

7. Нека $x>y$ и $xy=1$. Докажи дека $\frac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}$.

Решение. Ако го искористиме условот на задачата последователно добиваме

$$0\le(x-y-\sqrt{2})^2=(x-y)^2-2\sqrt{2}(x-y)+2=x^2+y^2-2\sqrt{2}(x-y)\ ,$$

$2\sqrt{2}(x-y)\le x^2+y^2$, т.е. $\frac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}$. ■

8. Нека x,y,z се реални броеви такви да $xyz=-1$. Докажи дека

$$x^4+y^4+z^4+3(x+y+z)\ge\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}\ .$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$x^4+y^4+z^4+3(x+y+z)\ge-(x^3z+x^3y+y^3x+y^3z+z^3y+z^3x),$$

$$x^3(x+y+z)+y^3(x+y+z)+z^3(x+y+z)+3(x+y+z)\ge 0,$$

$$(x+y+z)(x^3+y^3+z^3-3xyz)\ge 0,$$

$$(x+y+z)(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xy)\ge 0,$$

$$\tfrac{1}{2}(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xy)\ge 0,$$

и последното неравенство е очигледно исполнето. ■

9. Нека a,b,c се по парви различни позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1.$$

Решение. Земаме $x=\frac{a+b}{a-b}, y=\frac{b+c}{b-c}, z=\frac{c+a}{c-a}$ и добиваме $xy+yz+zx=1$. Понатаму, ако го искористиме неравенството $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xy$ добиваме

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\geq 3(xy+yz+zx)=3,$$

т.е. $|x+y+z|\geq\sqrt{3}>1$, што и требаше да се докаже. ■

10. Нека се x и y ненегативни реални броеви такви да $x+y=2$. Докажи дека $x^2y^2(x^2+y^2)\leq 2$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Да означиме $x=1+t,\ y=1-t,\ 0\leq t\leq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}x^2y^2(x^2+y^2)&=(1+t)^2(1-t)^2[(1+t)^2+(1-t)^2]=(1-t^2)^2(2+2t^2)\\&=2(1-t^2)^2(1+t^2)=2(1-t^2)(1-t^4)\leq 2,\end{aligned}$$

бидејќи $1\geq 1-t^2\geq 0$ и $1\geq 1-t^4\geq 0$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $1-t^2=1-t^4=1$, т.е. ако и само ако $t=0$, што значи ако и само ако $x=y$. ■

11. Ако $a,b,c>0$ и $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$, докажи дека важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$.

Решение. Од $(a+b-c)^2\geq 0$ следува $a^2+b^2+c^2+2(ab-bc-ca)\geq 0$, т.е. $\frac{5}{3}\geq 2(-ab+bc+ca)$. Значи, $1>\frac{5}{6}>-ab+bc+ca$ и ако поделиме со abc добиваме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}. \ ■$$

12. Нека се a и b реални броеви за кои важи $0<a<b$ и нека

$$r=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}.$$

Докажи дека важи $0<r<\frac{(b-a)^2}{8}$.

Решение. Левото неравенство е јасно. Десното неравенство следува од низата равенства и неравенства

$$r=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2}<\frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a})^2}=\frac{(b-a)^2}{8}. \ ■$$

13. Докажи го неравенството

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leq\frac{1}{3}$$

каде $0\leq x,y,z\leq 1$.

Решение. Од $0 \le x, y, z \le 1$ следува $0 \le x^3, y^3, z^3 \le 1$, па затоа

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} \le \frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3}$$
$$=\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}$$

и доволно е да докажеме дека

$$3(x+y+z) \le 6+x^3+y^3+z^3 .$$

Последното неравенство следува од фактот дека при $0 \le t \le 1$ важи

$$0 \le (t-1)^2(t+2) = t^3-3t+2 . \blacksquare$$

14. Докажи дека за позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

Решение. Најпрво да забележиме дека за произволни позитивни реални броеви x и $n=5$ важи

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{x+y}{3} , \tag{1}$$

при што равенство важи ако и само ако $x=y$. Навистина ова неравенство можеме да го трансформираме во еквивалентното неравенство

$$2(x+y)(x-y)^2 \ge 0 ,$$

кое очигледно е точно за секои реални броеви x и $n=5$. Од друга страна, лесно се проверува дека важи

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} = \frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ac+a^2} .$$

Од последниот идентитет и неравенството добиваме

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ac+a^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}\right] = \frac{a+b+c}{3},$$

што и требаше да се докаже. $\blacksquare$

15. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1 .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a^5+b^5 &= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) \\ &= (a+b)[(a-b)^2(a^2+ab+b^2)+a^2b^2] \\ &\ge a^2b^2(a+b) \end{aligned}$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Затоа

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}=\frac{1}{ab(a+b)+1}=\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Аналогно

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{a}{a+b+c},\quad \frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{b}{a+b+c}.$$

Според тоа,

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Конечно, од $abc=1$ следува дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$. ■

16. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што

$$a+b\le c+1,\ b+c\le a+1,\ c+a\le b+1.$$

Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2\le 2abc+1.$$

Решение. Ако попарно ги собереме дадените неравенства, добиваме

$$a+2b+c\le a+c+2$$
$$b+2c+a\le b+a+2$$
$$c+2a+b\le b+c+2$$

од каде добиваме $2b\le 2$, $2a\le 2$, $2c\le 2$, односно $a\le 1$, $b\le 1$, $c\le 1$. Земаме $x=1-a$, $y=1-b$, $z=1-c$ и добиваме $0\le x,y,z\le 1$ и

$$x+y=(1-a)+(1-b)=2-a-b\ge 2-1-c=1-c=z$$
$$y+z=(1-b)+(1-c)=2-b-c\ge 2-1-a=1-a=x$$
$$x+z=(1-a)+(1-c)=2-a-c\ge 2-1-b=1-b=y\,.$$

Сега, неравенството кое што треба да се докаже се сведува на нера- венството

$$x^2+y^2+z^2\le 2(xy+yz+zx)-2xyz\,.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\le z$ и $x\le z$. Бидејќи $z\le x+y$ точно е неравенството $z^2\le z(x+y)$, и како $x^2\le xz$, $y^2\le yz$ имаме

$$x^2+y^2+z^2\le 2(yz+xz)\,.$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$0\le 2xy-2xyz\,,$$

што е точно бидејќи $z\le 1$. ■

17. Докажи дека за секои три ненегативни броеви a,b и c важи неравенството

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge\tfrac{1}{4}(a+b+c)^3$$

при што знак за равенство се достигнува ако и само ако два од броевите се еднакви, а третиот е нула.

Решение. Ако $x_1 \geq x_2$ и $y_1 \geq y_2$, тогаш од очигледното неравенство $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$ следува

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \geq x_1 y_2 + x_2 y_1, \qquad (1)$$

при што равенство е можно ако и само ако $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \geq b \geq c$. Имаме,

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = a(a^2 + bc) + b(b^2 + ac) + c(c^2 + ab)$$

Бидејќи $a \geq b$, $a^2 - bc \geq b^2 - ca$ и освен тоа $c \leq a, \ c \leq b$ од (1) следува

$$A \geq [a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc)] + c(ac + bc) = a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b = B$$

Од тука

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - \tfrac{1}{4}(a+b+c)^3 &= \tfrac{3}{4}(a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - \\ &\quad - a^2 b - a^2 c - b^2 a - b^2 c - c^2 a - c^2 b) \\ &= \tfrac{3}{4}(A - B + 3abc) \geq 0 \end{aligned}$$

Очигледно знак за равенство важи при $A = B$ и $abc = 0$, што е еквивалентно на $c = 0$ и $a = b$. ■

18. Нека a, b, c се броеви за кои $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$. Докажи дека

$$a^2 + b^2 < c^2.$$

Решение. Нека a, b, c се реални броеви за кои

$$a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0.$$

Тогаш последователни добиваме

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2bc + 2ca < 0 \\ &a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + a^2 + b^2 - c^2 < 0 \\ &(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 - c^2 < 0 \\ &a^2 + b^2 - c^2 < -(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

и бидејќи $-(a+b+c)^2 \leq 0$ добиваме $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, т.е. $a^2 + b^2 < c^2$. ■

19. Нека $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ се реални броеви за кои важи

$$b_1 b_2 b_3 \neq 0, \ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \text{ и } a_1 a_3 - a_2^2 > 0.$$

Докажи дека $b_1 b_3 - b_2^2 < 0$.

Решение. Ако $b_1 b_3 < 0$, тогаш $b_1 b_3 - b_2^2 < 0$. Ако $b_1 b_3 > 0$, тогаш воведуваме ознаки $x = -a_2 b_2$, $y = x - a_1 b_1$ и добиваме

$$a_1b_1 = x - y,\ a_3b_3 = x + y,\ a_1 = \frac{x-y}{b_1},\ a_3 = \frac{x+y}{b_3}$$

и

$$0 < a_1a_3 - a_2^2 = \frac{x^2-y^2}{b_1b_3} - \frac{x^2}{b_2^2} = \frac{x^2(b_2^2-b_1b_3)-y^2b_2^2}{b_2^2b_1b_3},$$

па затоа $b_2^2 - b_1b_3 > 0$, т.е. $b_1b_3 - b_2^2 < 0$. ■

20. Докажи дека за произволни реални броеви a и b и произволен природен број k важи неравенството

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)...(a^{4k-1}+b^{4k-1}) \le 2^{4k-2}(a^{8k^2-2k}+b^{8k^2-2k}).$$

Упатство. Прво докажете, дека ако a и b се реални броеви а m и n се природни броеви со иста парност, тогаш

$$(a^m+b^m)(a^n+b^n) \le 2(a^{m+n}+b^{m+n}).$$

Потоа запишете го бараното неравенство во облик

$$\frac{a+b}{2}\frac{a^2+b^2}{2}\frac{a^3+b^3}{2}...\frac{a^{4k-1}+b^{4k-1}}{2} \le \frac{a^{8k^2-2k}+b^{8k^2-2k}}{2}.$$ ■

21. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се произволни реалните броеви. Докажи дека за $n = 3$ или $n = 5$ точно е неравенството

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)....(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)....(a_2-a_n)+$$
$$+...+(a_n-a_2)(a_n-a_3)....(a_n-a_{n-1}) \ge 0,$$

но тоа не е точно за било кој друг природен број $n, n > 2$.

Решение. За $n = 3$ имаме

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_2)(a_3-a_1) =$$
$$= a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_1a_2-a_2a_3-a_3a_1$$
$$= \tfrac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2] \ge 0.$$

За $n = 5$, заради симетричност на разгледуваиот израз при замена на местата на a_i и a_j, $i \ne j$ за произволни i и j, можеме да претпоставиме дека $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge a_5$. Бидејќи

$$a_1-a_3 \ge a_2-a_3,\ a_1-a_4 \ge a_2-a_4,\ a_1-a_5 \ge a_2-a_5,$$
$$a_1-a_5 \ge a_1-a_4,\ a_2-a_5 \ge a_2-a_4,\ a_3-a_5 \ge a_3-a_4,$$

добиваме

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5) =$$
$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5) \ge 0,$$
$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4) =$$
$$(a_1-a_5)(a_2-a_5)(a_3-a_5)(a_4-a_5)-(a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4)(a_4-a_5) \ge 0$$

и како $(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geq 0$, со собирање на последните три неравенства добиваме дека тврдењето важи за $n=5$.

За $n=4$ можеме да земеме $a_1=0, a_2=a_3=a_4=1$, и притоа изразот на левата страна е еднаков на $(-1)^3=-1<0$, а за $n>5$ можеме да земеме

$$a_1=a_2=...=a_{n-4}=0\,,\; a_{n-3}=a_{n-2}=a_{n-1}=2\,,\; a_n=1$$

и притоа изразот на левата страна е еднаков на $1^{n-4}(-1)^3=-1<0$, што значи дека неравенството во овие случаи не важи. ■

22. Докажи, дека за позитивни броеви a,b и c точно е неравенството

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

Решение. За позитивни реални броеви x,y и z важат следниве неравенства:

$$(x+y)(x-y)^2\geq 0$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\geq 0$$

$$x^3+y^3\geq xy(x+y)$$

$$x^3+y^3+xyz\geq xy(x+y+z)$$

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\leq\frac{1}{xy(x+y+z)}\,,$$

при што равенство важи ако и само ако $x=y$. Од тука следува

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{abc}\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

23. Докажете дека за секој реални броеви x, таков што $0<x<1$ и за секој природен број n точно е неравенството

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}\,.$$

Решение. Од

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n}=1+\frac{x^n(1-x)}{1-x^n}=1+\frac{x^n}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^n}}<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$$

добиваме

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}\,.\ ■$$

24. Нека a и b се реални броеви такви што $|a+b|+|a-b|\leq 2$. Докажи дека $a^2+b^2\leq 2$.

Решение. *Прв начин.* Од својствата на апсолутна вредност, имаме

$$2|a|=|2a|=|(a+b)+(a-b)|\leq|a+b|+|a-b|\leq 2,$$
$$2|b|=|2b|=|(a+b)+(b-a)|\leq|a+b|+|b-a|\leq 2,$$

па затоа $|a|\leq 1$, $|b|\leq 1$, што значи

$$a^2+b^2=|a|^2+|b|^2\leq 1^2+1^2=2.$$

Втор начин. Бидејќи a и b се реални броеви за кои

$$0\leq|a+b|+|a-b|\leq 2,$$

со квадрирање на последното неравенство добиваме

$$0\leq(|a+b|+|a-b|)^2\leq 2^2=4,$$
$$(a+b)^2+2|a^2-b^2|+(a-b)^2\leq 4.$$

Според тоа,

$$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2\leq(a+b)^2+2|a^2-b^2|+(a-b)^2\leq 4,$$

па затоа $a^2+b^2\leq 2$. ■

25. Ако x,y,z се произволни реални броеви, тогаш

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}+\frac{|z|}{1+|z|}.$$

Докажи!

Решение. Од неравенството на триаголник $|x+y|\leq|x|+|y|$ добиваме

$$|x+y|+|x+y|(|x|+|y|)\leq|x|+|y|+|x+y|(|x|+|y|),$$

па затоа

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}=\frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}.$$

Со последователна примена на последното неравенство добиваме:

$$\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}+\frac{|z|}{1+|z|}\geq\frac{|x+y|}{1+|x+y|}+\frac{|z|}{1+|z|}\geq\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}. \ ■$$

26. Реалните броеви $a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1}$ ги задоволуваат условите

$$a_1=0,|a_2|=|a_1+1|,|a_3|=|a_2+1|,...,|a_n|=|a_{n-1}+1|,|a_{n+1}|=|a_n+1|.$$

Докажи дека $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq-\frac{1}{2}$.

Решение. Ако ги квадрираме равенствата

$$a_1=0,|a_2|=|a_1+1|,|a_3|=|a_2+1|,...,|a_n|=|a_{n-1}+1|,|a_{n+1}|=|a_n+1|$$

и ги собереме добиваме

$$2(a_1+a_2+...+a_n)+n=a_{n+1}^2\geq 0,$$

од каде следува

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq-\frac{1}{2}. \ ■$$

27. Нека $n>2$ е природен број и $a_1,a_2,...,a_n$ се произволни позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{2^n}(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_n+a_1)\le(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)...(a_n+a_1+a_2)\ . \quad (1)$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3)^2&=a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_1a_2+2a_2a_3+2a_3a_1\\&=(2a_1+a_2)(a_2+2a_3)+(a_1-a_3)^2\\&\ge(2a_1+a_2)(a_2+2a_3)\end{aligned}\quad (2)$$

и

$$(2a_1+a_2)(2a_2+a_1)=2a_1^2+2a_2^2+5a_1a_2\ge2(a_1+a_2)^2\ . \quad (3)$$

Сега, ако ставиме $a_{n+1}=a_1,\ a_{n+2}=a_2$, од (2) и (3) следува неравенството

$$\begin{aligned}2^n\prod_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})^2&\le\prod_{i=1}^{n}(2a_i+a_{i+1})(2a_{i+1}+a_i)=\prod_{i=1}^{n}(2a_i+a_{i+1})(a_{i+1}+2a_{i+2})\\&\le\prod_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1}+a_{i+2})^2,\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

28. Позитивните броеви x,y,z се такви што апсолутната вредност на разликата на било кои два од нив е помала од 2. Докажи дека

$$x+y+z<\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}\ .$$

Решение. Од условот на задачата последователно добиваме

$|x-y|<2$, $|y-z|<2$ и $|z-x|<2$

$$x^2-2xy+y^2<4,\quad y^2-2yz+z^2<4,\quad z^2-2zx+x^2<4\ ,$$

$$(x+y)^2<4+4xy,\quad (y+z)^2<4+4yz,\quad (z+x)^2<4+4zx\ ,$$

$$x+y<2\sqrt{xy+1}\ ,\ \ y+z<2\sqrt{yz+1}\ \text{ и }\ z+x<2\sqrt{zx+1}\ . \quad (1)$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1) и поделиме со 2, го добиваме бараното неравенство. ■

29. Нека $a,b>0$. Докажи дека $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

Решение. *Прв начин*. Од $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge0$ следува $a-\sqrt{ab}+b\ge\sqrt{ab}$, па затоа

$$\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}\ge1\ .$$

Според тоа,

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}=\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}\ .$$

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \ge b$. Тогаш $\sqrt{a^2} \ge \sqrt{b^2}$ и $\frac{1}{\sqrt{b}} \ge \frac{1}{\sqrt{a}}$, па од пример 1 следува

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} = \sqrt{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{b^2}\,\frac{1}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b^2}\,\frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\ . \ ■$$

30. Нека a,b,c се позитивни броеви такви да $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажи дека

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \ge \sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ .$$

Решение. Ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ го помножиме со $\sqrt{abc}$ добиваме

$$\sqrt{abc} = \sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

Па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \ge \sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ . \qquad (1)$$

За да го докажеме неравенството (1) доволно е да докажеме дека

$$\sqrt{c+ab} \ge \sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{c}\ . \qquad (2)$$

Ако го квадрираме последното неравенство и искористиме дека $\frac{1}{c}=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ последователно ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$c+ab \ge \frac{ab}{c}+c+2\sqrt{ab}$$

$$ab \ge ab(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+2\sqrt{ab}$$

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}\ ,$$

што значи дека е точно неравенството (2), односно неравенството (1). ■

31. Докажи дека за секои реални броеви x и y е исполнето неравенството

$$x^2+y^2+1 > x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\ .$$

Решение. Ако ги собереме очигледните неравенства

$$(x-\sqrt{y^2+1})^2 \ge 0 \text{ и } (y-\sqrt{x^2+1})^2 \ge 0$$

го добиваме неравенството

$$(x-\sqrt{y^2+1})^2+(x-\sqrt{y^2+1})^2 \ge 0\ ,$$

од кое после средувањето го добиваме неравенството

$$x^2+y^2+1 \ge x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\ . \qquad (1)$$

Во последното неравенство знак за равенство важи ако и само ако

$$(x-\sqrt{y^2+1})^2 = 0 \text{ и } (y-\sqrt{x^2+1})^2 = 0\ ,$$

т.е. ако и само ако

$$x^2 = y^2 + 1 \text{ и } y^2 = x^2 + 1$$

што не е можно, па затоа во (1) важи строго неравенство, што и требаше да се докаже. ■

32. Нека a и b се природни броеви и $c = \frac{a^{a+1}+b^{b+1}}{a^a+b^b}$. Докажи дека

$$c^a + c^b \geq a^a + b^b .$$

Решение. За $a = b$ неравенството преминува во равенство, па според тоа е точно. Нека претпоставиме дека $a \neq b$.

Нека $n \in \mathbf{N}$. Ако $x, y \in \mathbf{R}$ и $x \neq y$, тогаш

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1},$$

па затоа за $x < y$ важи

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \leq ny^{n-1}, \tag{1}$$

а за $x > y$ важи

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \geq ny^{n-1}. \tag{2}$$

Земаме $y = n$ и ако $x < n$, тогаш од (1) добиваме $\frac{x^n - n^n}{x-n} < n^n$, па затоа $x^n - n^n > (x-n)n^n$, а ако $x > n$, тогаш од (2) добиваме $\frac{x^n - n^n}{x-n} > n^n$, па затоа $x^n - n^n > (x-n)n^n$. Според тоа

$$x^n - n^n > (x-n)n^n , \tag{3}$$

за секои $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$, $x \neq n$.

Во (3) прво заменуваме $x = c, n = a$, а потоа $x = c, n = b$ и добиваме $c^a - a^a > (c-a)a^a$ и $c^b - b^b > (c-b)b^b$, соодветно. Конечно

$$c^a + c^b - a^a - b^b \geq (c-a)a^a + (c-b)b^b = c(a^a + b^b) - (a^{a+1} + b^{b+1}) = 0,$$

односно

$$c^a + c^b \geq a^a + b^b . ■$$

33. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека $a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b} \leq 1$.

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик

$$a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b} = \frac{a^{a+b+c}b^{a+b+c}c^{a+b+c}}{a^a b^b c^c} = \frac{(abc)^{a+b+c}}{a^a b^b c^c} = \frac{1}{a^a b^b c^c} .$$

Според тоа доволно е да докажеме дека $a^a b^b c^c \geq 1$. Бидејќи a, b и c се позитивни реални броеви, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$a \le b \le c$. Сега, доволно е да ги разгледаме случаите кога $a \le b \le 1 \le c$ и $a \le 1 \le b \le c$.

Ако $a \le b \le 1 \le c$, тогаш $c = \frac{1}{ab}$, па затоа

$$a^a b^b c^c = \frac{a^a b^b}{a^c b^c} = (\tfrac{1}{a})^{c-a} (\tfrac{1}{b})^{c-b} \ge 1,$$

бидејќи $c-a > 0, c-b > 0$ и $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \ge 1$.

Ако $a \le 1 \le b \le c$, тогаш $a = \frac{1}{bc}$, па затоа

$$a^a b^b c^c = \frac{b^b c^c}{b^a c^a} = b^{b-a} c^{c-a} \ge 1,$$

бидејќи $b, c \ge 1$ и $b-a, c-a \ge 0$. ■

34. Нека α е произволен позитивен број. Докажи го неравенството

$$\sqrt[3]{27+8\alpha} \le \sqrt[3]{1+\alpha} + \sqrt[3]{8+\alpha} .$$

Решение. Нека претпоставиме дека за некој $\alpha > 0$ важи

$$\sqrt[3]{27+8\alpha} \ge \sqrt[3]{1+\alpha} + \sqrt[3]{8+\alpha} . \qquad (1)$$

Тогаш

$$(\sqrt[3]{27+8\alpha} - \sqrt[3]{1+\alpha})^3 \ge \sqrt[3]{8+\alpha}^3$$

т.е.

$$6+2\alpha \ge \sqrt[3]{(27+8\alpha)(1+\alpha)}(\sqrt[3]{27+8\alpha} - \sqrt[3]{1+\alpha}) \qquad (2)$$

Од $\alpha > 0$, следува $\sqrt[3]{(27+8\alpha)(1+\alpha)} > 0$ и затоа од неравенствата (1) и (2) следува

$$6+2\alpha \ge \sqrt[3]{(27+8\alpha)(1+\alpha)(8+\alpha)}$$

т.е.

$$(6+2\alpha)^3 \ge (27+8\alpha)(1+\alpha)(8+\alpha)$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $0 \ge 91 + 27\alpha^2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува

$$\sqrt[3]{27+8\alpha} \le \sqrt[3]{1+\alpha} + \sqrt[3]{8+\alpha}, \text{ за секој } \alpha > 0. \ ■$$

35. Ако е $a \ge 1$, $b \ge 1$, $c \ge 1$, докажи дека

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)} .$$

Решение. Нека $a \ge 1$, $b \ge 1$. Тогаш точно е неравенството

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \le \sqrt{ab}, \qquad (1)$$

кое заради $\sqrt{ab} \ge 0$ и $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \ge 0$ е еквивалентно со очигледното неравенство

$$(\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1)^2 \ge 0$$

Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $(a-1)(b-1)=1$, т.е. ако и само ако $ab=a+b$.

За $c\geq 1$, ако два пати го искористиме неравенството (1) добиваме

$$\sqrt{c-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leq\sqrt{ab}+\sqrt{c-1}=\sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1}\leq\sqrt{c(ab+1)}\ .$$

Јасно, зна за равенство важи ако и само ако

$$ab=a+b,\ c(ab+1)=c+ab+1,$$

т.е. за $a=1$ кога $c=\frac{b+1}{b}$, а за $a>1$ кога $b=\frac{a}{a-1}$ и $c=\frac{a^2+a-1}{a^2}$. ■

36. Нека $x_i\in[0,1]$, $i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$(x_1+x_2+...+x_n+1)^2\geq 4(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$$

Решение. Од $x_i\in[0,1]$, $i=1,2,...,n$ следува $x_i^2\leq x_i$, за $i=1,2,...,n$. Нека $S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. Имаме $(S-1)^2\geq 0$, т.е. $S^2+1\geq 2S$, па затоа $(S+1)^2\geq 4S$, од каде добиваме

$$(x_1+x_2+...+x_n+1)^2\geq 4(x_1+x_2+...+x_n)\geq 4(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)\ .\ ■$$

37. Докажи дека

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2\ \text{, за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Решение. За секој $k\geq 2$ имаме

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{k-(k-1)}{k(k-1)}=\frac{k}{k(k-1)}-\frac{k-1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\ .$$

Според тоа

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2\ ,$$

за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

38. Докажи дека за секои природни броеви M и N важи

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{i^2n^2}\leq 4\ .$$

Решение. Фиксираме i и добиваме

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{i^2n^2}=\frac{1}{i^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\frac{1}{i^2}[1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)}]<\frac{2}{i^2}\ .$$

Сега имаме

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{i^2n^2}<\sum_{i=1}^{M}\frac{2}{i^2}=2\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{i^2}<4\ .\ ■$$

39. Докажи дека за секои природни броеви p и N важи

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{in}\min\{\frac{1}{i^2},\frac{1}{n^2}\}<4$$

Решение. Од неравенствата $\min\{\frac{1}{i^2},\frac{1}{n^2}\}\le\frac{1}{i^2}$ и $\min\{\frac{1}{i^2},\frac{1}{n^2}\}\le\frac{1}{n^2}$ имаме $\min\{\frac{1}{i^2},\frac{1}{n^2}\}\le\frac{1}{in}$. Според претходната задача добиваме

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{in}\min\{\frac{1}{i^2},\frac{1}{n^2}\}\le\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{i^2n^2}<4\,.\ \blacksquare$$

40. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+...+\frac{n}{4^n}<\frac{4}{9}\ .$$

Решение. Да ја означиме левата страна на неравенството со $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.

Тогаш

$$S_{n-1}<S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4^k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1+1}{4^{k-1}}=\frac{1}{4}[\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{4^{k-1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^{k-1}}]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{4^k}+\frac{1}{4}\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}S_{n-1}+\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{4})^n<\frac{1}{4}S_{n-1}+\frac{1}{3},$$

Значи, $S_{n-1}<\frac{1}{4}S_{n-1}+\frac{1}{3}$ т.е. $S_{n-1}<\frac{4}{9}$, за секој $n\in\mathbf{N}$. $\blacksquare$

41. Нека n е природен број, x и y се позитивни реални броеви такви што $x^n+y^n=1$. Докажи дека

$$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}})<\frac{1}{(1-x)(1-y)}\ .$$

Решение. За секој $t\in(0,1)$ имаме

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{1}{t}-\frac{(1-t)(1-t^3)}{t(1+t^4)}<\frac{1}{t}.$$

Заменувајќи $t=x^k$ и $t=y^k$, добиваме:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x^k}=\frac{1-x^n}{x^n(1-x)}\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y^k}=\frac{1-y^n}{y^n(1-y)}\ .$$

Ако ги искористиме равенствата

$$1-x^n=y^n \text{ и } 1-y^n=x^n\ ,$$

имаме

$$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}})<\frac{1-x^n}{x^n(1-x)}\,\frac{1-y^n}{y^n(1-y)}=\frac{y^n}{x^n(1-x)}\,\frac{x^n}{y^n(1-y)}=\frac{1}{(1-x)(1-y)}\ .\ \blacksquare$$

42. Докажи дека за секој природен број n важи:

а) $\sum_{i=2}^{4^n}\frac{1}{i}>n$, б) $\sum_{i=2}^{2^n}\frac{1}{i}<n$

Решение. а) Имаме, дека

$$\sum_{i=2}^{4^n}\frac{1}{i}=\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{i}>\sum_{k=0}^{2n-1}2^k\frac{1}{2^{k+1}}=2n\frac{1}{2}=n\ .$$

б) Имаме, дека

$$\sum_{i=2}^{2^n}\frac{1}{i}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{i}\le\sum_{k=0}^{n-1}2^k\frac{1}{2^k+1}<n\cdot 1<n\ .\ \blacksquare$$

43. Докажи дека за секои природни броеви $n\ge 1$ и $m\ge 1$ точно е неравенството

$$\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+...+\frac{1}{(n+m)^3}<\frac{1}{2n(n+1)}$$

Решение. Имаме

$$\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+...+\frac{1}{(n+m)^3}<\frac{1}{(n+1)^3-(n+1)}+\frac{1}{(n+2)^3-(n+2)}+...+\frac{1}{(n+m)^3-(n+m)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+...+\frac{1}{(n+m-1)(n+m)(n+m+1)}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}+\frac{n+3-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}+...+\frac{n+m+1-(n+m-1)}{(n+m-1)(n+m)(n+m+1)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{1}{(n+m-1)(n+m)}-\frac{1}{(n+m)(n+m+1)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+m)(n+m+1)}]<\frac{1}{2n(n+1)},$$

што и требаше да се докаже. ■

44. Докажи дека за секој природен број $n\in\mathbf{N}$ е точно неравенството

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+...+\frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!}+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}<\frac{1}{2}\ .$$

Решение. За секој природен број k имаме

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+2)(k+1)]}=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=\frac{1}{k!(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k!(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{k+2-1}{(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\ .$$

Сега,

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+...+\frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!}+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=$$

$$=(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!})+..+(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!})=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}<\frac{1}{2!}=\frac{1}{2},$$

што и требаше да се докаже. ■

45. Нека $a_i = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{i}$. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+....+\frac{1}{na_n^2}<2$$

Решение. За секој $k \geq 2$ важи

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k a_{k-1}}=\frac{1}{ka_k a_{k-1}}>\frac{1}{ka_k^2}.$$

Ако ги собереме горните неравенства за $|S(\pi_i)|\leq r$, добиваме

$$\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+....+\frac{1}{na_n^2}<\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}=1$$

и како $p=-1$ добиваме

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+....+\frac{1}{na_n^2}<2. \blacksquare$$

46. Нека $a_k, k=1,2,...,n,...$ е низа од различни природни броеви. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ точно е неравенството

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Решение. Ако низата $a_1, a_2, ..., a_n$ не е растечка, тогаш постои i, таков што $a_i > a_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$. Тогаш лесно се проверува дека важи неравенството

$$\frac{a_i}{i^2}+\frac{a_{i+1}}{(i+1)^2}>\frac{a_{i+1}}{i^2}+\frac{a_i}{(i+1)^2}.$$

Но, тоа значи дека збирот $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$ ќе биде поголем од соодветниот збир за низата $b_1, b_2, ..., b_n$ за која $b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_n$. Понатаму, $b_k \geq k$, за $k=1, \;\; 2,...,n$, па затоа што значи

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \blacksquare$$

47. Нека за природниот број n и реалните броеви α и x се исполнети неравенствата $\alpha^{n+1} \leq x \leq 1$ и $0 < \alpha < 1$. Докажи

$$\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x-\alpha^k}{x+\alpha^k}\right| \leq \prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha^k}{1+\alpha^k}. \qquad (1)$$

Решение. Од условот на задачата имаме $1>\alpha>\alpha^2>...>\alpha^{n+1}>0$. Нека x е меѓу броевите α^{s+1} и α^s, т.е. $\alpha^{s+1} \leq x \leq \alpha^s$. Тогаш, за $i \geq s+1$ имаме $x \geq \alpha^i$, па затоа $\left|\frac{x-\alpha^i}{x+\alpha^i}\right|=\frac{x-\alpha^i}{x+\alpha^i}$ и освен тоа

$$\frac{x-\alpha^i}{x+\alpha^i}-\frac{1-\alpha^i}{1+\alpha^i}=\frac{2\alpha^i(x-1)}{(x+\alpha^i)(1+\alpha^i)}\leq 0\,,$$

и значи

$$\prod_{k=s+1}^{n}\left|\frac{x-\alpha^k}{x+\alpha^k}\right|\leq\prod_{k=s+1}^{n}\frac{1-\alpha^k}{1+\alpha^k}\,. \tag{2}$$

Од друга страна, за $k=1,2,...,s$ имаме $\left|\frac{x-\alpha^{s-(k-1)}}{x+\alpha^{s-(k-1)}}\right|=\frac{\alpha^{s-(k-1)}-x}{\alpha^{s-(k-1)}-x}$, па затоа

$$\frac{\alpha^{s-(k-1)}-x}{\alpha^{s-(k-1)}+x}-\frac{1-\alpha^i}{1+\alpha^i}=\frac{2(\alpha^{s+1}-x)}{(\alpha^{s-(k-1)}+x)(1+\alpha^i)}\leq 0\,.$$

Според тоа,

$$\prod_{k=1}^{s}\left|\frac{x-\alpha^k}{x+\alpha^k}\right|\leq\prod_{k=1}^{s}\frac{1-\alpha^k}{1+\alpha^k}\,. \tag{2}$$

Конечн, од неравенствата (2) и (3) следува неравенството (1). ■

48. Докажи дека за секој природен број n, важи

$$\sqrt{n}<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n-2}<\sqrt{2n}\,. \tag{1}$$

Решение. Нека означиме $P_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n-2}$. Бидејќи за $k>1$ важи $\frac{2k-1}{2k-2}>\sqrt{\frac{k}{k-1}}$ добиваме

$$P_n>\sqrt{\frac{2}{1}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot...\sqrt{\frac{n}{n-1}}=\sqrt{n}$$

т.е. точно е левото неравенство во (1).

Означуваме, $Q_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}$. Од $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$, за секој $k\in\mathbf{N}$ следува

$$Q_n<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{P_n}\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\frac{1}{Q_n}<\frac{1}{2nQ_n}$$

што значи $Q_n<\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Конечно,

$$P_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot 2n=2nQ_n<\sqrt{2n}$$

со што го докажавме и десното неравенство. ■

49. Нека a и b се различни реални броеви. Докажи дека за произволни реални броеви $c_1,c_2,...,c_n$ постои низа $x_1,x_2,...,x_n$ за која секој член е еднаков на еден од броевите a или $a_{ij}=0$ и таква што

$$|x_1c_1+x_2c_2+...+x_nc_n|\geq\frac{|b-a|}{2}(|c_1|+|c_2|+...+|c_n|)\,.$$

Решение. Бидејќи

$$\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2} \text{ и } \max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$$

добиваме

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \varepsilon_i \frac{|a-b|}{2}, \ \ \varepsilon_i = \pm 1, \text{ за } i = 1,2,...,n.$$

Оттука

$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = \frac{a+b}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i + \frac{|a-b|}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i c_i$$

Ако бројот $A = \frac{a+b}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i$ е ненегативен, избираме ε_i, таков што $\varepsilon_i c_i = |c_i|$, за $i = 1,2,...,n$. Тогаш $B = \frac{|a-b|}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i c_i = \frac{|a-b|}{2}\sum_{i=1}^{n}|c_i|$ исто така е ненегативен број.

Ако бројот $a_1 = a_2 = ... = a_{n-4} = 0$ е негативен број избираме ε_i таков што $\varepsilon_i c_i = -|c_i|$. Тогаш $B = -\frac{|a-b|}{2}\sum_{i=1}^{n}|c_i|$ е негативен број.

И во двата случаи A и B се со ист знак, па затоа

$$|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i| = |A + B| \geq |B| = \frac{|b-a|}{2}\sum_{i=1}^{n}|c_i|. \ ■$$

50. Сто позитивни броеви $x_1, x_2, ..., x_{100}$ ги задоволуваат неравенствата

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{100}^2 > 10000$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_{100} > 300$$

Докажи, дека збирот на некои три од овие броеви е поголем од 100.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{100}$. Нека $S = x_1 + x_2 + x_3$. Тогаш $n = 4$ и

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_3^2 - 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \\ &\leq (x_1 + x_2 + x_3 - 2x_3)^2 + x_3^2 \\ &= (S - 2x_3)^2 + x_3^2 = S^2 - 4Sx_3 + 5x_3^2. \end{aligned}$$

Ако $n = 5$, тогаш

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 &\leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_3\sum_{i=4}^{100} x_i \leq S^2 - 4Sx_3 + 5x_3^2 + x_3^2 + x_3(300 - S) \\ &\leq S^2 - 2x_3(S - 3x_3) + 3x_3(100 - S) \\ &\leq S^2 + 3x_3(100 - S) \leq S^2 + S(100 - S) \\ &= 100S \leq 10000, \end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата. ■

51. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се произволни броеви од интервалот $[0,2]$. Докажи го неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| \le n^2$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Збирот на левата страна да го означиме со R_n. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $0 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$. Тогаш

$$R_n = 2\sum_{i<j}|x_i - x_j| = 2\sum_{i<j}(x_j - x_i)$$

Во збирот $\sum_{i<j}(x_j - x_i)$ при фиксирано k бројот x_k е намалител $(n-k)-$ пати и намаленик $(k-1)-$ пати. Според тоа,

$$R_n = 2\sum_{k=1}^{n}[(k-1)x_k - (n-k)x_k] = 2\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k$$

Ако $2k < n+1$, т.е. $k < \frac{n+1}{2}$, тогаш собироците од видот $(2k-n-1)x_k$ се непозитивни, а при $k \ge \frac{n+1}{2}$ се ненегативни. Затоа,

$$\begin{aligned} R_n &= 2\sum_{k<\frac{n+1}{2}}(2k-n-1)x_k + 2\sum_{k\ge\frac{n+1}{2}}(2k-n-1)x_k \\ &\le 2\sum_{k\ge\frac{n+1}{2}}(2k-n-1)x_k \le 4\sum_{k\ge\frac{n+1}{2}}(2k-n-1) = 4S_n \end{aligned}$$

Ако $n = 2m$, тогаш $S_n = 1+3+5+...+(2m-1) = \frac{n^2}{4}$, а при непарно n имаме:

$$S_n = 2+4+6+...+(n-1) = \frac{n^2-1}{4}$$

Равенство е можно само ако n е парен и половината од броевите x_k се еднакви на нула, а другата половина на 2. ■

52. Нека $n > 1$, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ се реални броеви и $S = \sqrt{\frac{A}{n-1}}$, каде

$A = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + ... + (a_1 - a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2 + ... + (a_2 - a_n)^2 + ... + (a_{n-1} - a_n)^2$. Докажи го неравенството

$$na_1 \le \sum_{i=1}^{n}a_i - S \le \sum_{i=1}^{n}a_i + S \le na_n$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$\begin{aligned} S^2 = \tfrac{1}{n-1}[(a_1-a_2)^2 + (a_1-a_3)^2 + ... + (a_1-a_n)^2 + (a_2-a_3)^2 + ... + \\ + (a_2-a_n)^2 + ... + (a_{n-1}-a_n)^2] = \tfrac{1}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2. \end{aligned}$$

Тогаш,

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}[\sum_{j=1}^{i-1}(a_i-a_j)^2] \le \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}[\sum_{j=1}^{i-1}(a_i-a_1)^2]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(i-1)(a_i-a_1)^2 \le \sum_{i=2}^{n}(a_i-a_1)^2 \le [\sum_{i=2}^{n}(a_i-a_1)]^2 = [\sum_{i=1}^{n}a_i - na_1]^2,$$

т.е.

$$S^2 \le [\sum_{i=1}^{n}a_i - na_1]^2, \tag{1}$$

Аналогно,

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}[\sum_{i=j+1}^{n}(a_i-a_j)^2]$$

$$\le \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}[\sum_{j=i+1}^{n}(a_n-a_j)^2] \le \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(a_n-a_j)^2$$

$$\le \sum_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)^2 \le [\sum_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)]^2 = [na_n - \sum_{i=1}^{n}a_i]^2$$

па затоа

$$S^2 \le [na_n - \sum_{i=1}^{n}a_i]^2 \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) имаме

$$na_1 \le \sum_{i=1}^{n}a_i - S \le \sum_{i=1}^{n}a_i + S \le na_n\,. \blacksquare$$

53. Најголемиот од ненегативните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ е еднаков на a. Докажи, дека

$$\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n} \le (\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n})^2 + \frac{a^2}{4}\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ставаме $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = m$. Тогаш, од $a_i^2 \le aa_i$, $i = 1,2,...,n$ следува

$$\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n} - m^2 \le am - m^2 = \frac{a^2}{4} - (\frac{a}{2}-m)^2 \le \frac{a^2}{4}\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a_i^2 = a_i a$, т.е. ако и само ако за секој i важи или $a_i = a$ или $a_i = 0$ или ако и само ако $m = \frac{a}{2}$ што е можно во два случаи

1) сите a_i се еднакви на нула,

2) n е парен број и $\frac{n}{2}$ броеви a_i се еднакви на нула, а останатите $\frac{n}{2}$ се еднакви на $a > 0$.

Забелешка. Слично можеме да го докажеме следното поопшто неравенство

$$p_1a_1^{\alpha}+p_2a_2^{\alpha}+...+p_na_n^{\alpha}\le(p_1a_1+p_2a_2+...+p_na_n)^{\alpha}+(\alpha-1)\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}a^{\alpha}$$

за $p_i\ge 0,\ i=1,2,...,n;\ \sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1,\ \alpha>1$. ■

54. Дадена е строго растечка неограничена низа позитивни реални броеви $a_1,a_2,...$. Докажете дека за секој доволно голем k точно е неравенството

а) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$ б) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$

Решение. Ставаме $S_k=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_k}{a_{k+1}}$. Ќе докажеме дека за секој доволно голем k важи $S_k<k-\frac{1}{2}$. Бидејќи низата $a_1,a_2,...$ неограничено расте постои таков t, што $\frac{a_1}{a_t}<\frac{1}{2}$, па затоа за секој $k\ge t$ важи

$$\begin{aligned}k-S_k&=(1-\tfrac{a_1}{a_2})+(1-\tfrac{a_2}{a_3})+...+(1-\tfrac{a_k}{a_{k+1}})\\&>\tfrac{a_2-a_1}{a_{k+1}}+\tfrac{a_3-a_2}{a_{k+1}}+...+\tfrac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}=1-\tfrac{a_1}{a_{k+1}}>1-\tfrac{a_1}{a_t}>\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ако ова тврдење го примениме на низата $a_{m+1},a_{m+2},....$ добиваме дека за секој доволно голем $k,k>m$ важи

$$S_k-S_m=\tfrac{a_{m+1}}{a_{m+2}}+...+\tfrac{a_k}{a_{k+1}}<k-m-\tfrac{1}{2}.$$

Последователно избираме таков k_1, што $S_{k_1}<k_1-\frac{1}{2}$, потоа $k_2>k_1$ таков што $S_{k_2}-S_{k_1}<k_2-k_1-\frac{1}{2}$, потоа $k_3>k_2$ таков што $S_{k_3}-S_{k_2}<k_3-k_2-\frac{1}{2}$ итн. Тогаш за секој $k\ge k_n$ важи:

$$\begin{aligned}S_k&=(S_k-S_{k_n})+(S_{k_n}-S_{k_{n-1}})+...+(S_{k_2}-S_{k_1})+S_{k_1}\\&<(k-k_1)+(k_n-k_{n-1}-\tfrac{1}{2})+...+(k_2-k_1-\tfrac{1}{2})+k_1-\tfrac{1}{2}=k-\tfrac{n}{2}.\end{aligned}$$

Од последното неравенство следуваат двете тврдења на задачата

(а) $n=2$ и (б) $n=2\cdot 1985$. ■

55. За кои природни броеви n неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i^3\ge 6\prod_{i=1}^{n}a_i\ , \qquad (1)$$

е исполнето за произволни ненегативни броеви $a_1,a_2,...,a_n$?

Решение. Ако неравенството е исполнето за произволни ненегативни броеви $a_1,a_2,...,a_n$, тогаш при $a_1=a_2=...=a_n=1$ од (1) добиваме $n^2-n\ge 6$, од што ќе следува $n \geq 3$. Ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = a > 0$, тогаш $na^2 \cdot an - na^3 = 6a^n$, од што ќе следува $n^2 - n \geq 6a^{n-3}$. Ако $n > 3$, тогаш неравенството не е исполнето за $a = n^2$. Останува можноста $n = 3$. Треба да докажеме дека важи

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_1 + a_2 + a_3) - (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) \geq 6a_1a_2a_3$$

Последното неравенство е исполнето бидејќи е еквивалентно со очигледното неравенство

$$a_1(a_2 - a_3)^2 + a_2(a_3 - a_1)^2 + a_3(a_2 - a_1)^2 \geq 0$$

Значи, $n = 3$ е единствениот природен број кој го задоволува условот на задачата. ■

56. а) Најди ги сите реални броеви p , за кои неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3)$$

важи за произволни реални броеви x_1, x_2, x_3.

б) Најди ги сите реални броеви q , за кои неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq q(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)$$

важи за произволни реални броеви x_1, x_2, x_3, x_4 .

Решение. а) Имаме

$$x_1^2 + \frac{p^2}{4}x_2^2 \geq px_1x_2 \text{ и } x_2^2\frac{p^2}{4} + x_3^2 \geq px_2x_3 .$$

Значи,

$$x_1^2 + \frac{p^2}{2}x_2^2 + x_3^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3)$$

и ако $p^2 \leq 2$, т.е. $| p |< \sqrt{2}$, тогаш

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3)$$

Ако $| p |> \sqrt{2}$, неравенството е нарушено на пример за $x_1 = x_3 = 1$ и $x_2 = p$.

б) Ако ставиме $x_4 = 0$, од (а) добиваме $|q| \leq \sqrt{2}$. Ако ги собереме неравенствата

$$x_1^2 + \frac{q^2}{4}x_2^2 \geq qx_1x_2$$

$$\frac{4-q^2}{4}x_2^2 + \frac{q^2}{4-q^2}x_3^2 \geq qx_2x_3$$

$$\frac{4-2q^2}{4-q^2}x_3^2 + \frac{q^2(4-q^2)}{4(4-2q^2)}x_4^2 \geq qx_3x_4$$

добиваме

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{q^2(4-q^2)}{4(4-2q^2)}x_4^2 \geq q\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4\right)$$

Од тука при

$$\frac{q^2(4-q^2)}{4(4-2q^2)} \le 1$$

важи неравенството. Ако земеме $|q| \le \sqrt{2}$ и го решиме добиеното неравенство добиваме $|q| \le \sqrt{6-2\sqrt{5}}$. За овие вредности на q неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \ge q(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)$$

е исполнето за произволни вредности на x_1, x_2, x_3, x_4 .

Ако $|q| > \sqrt{6-2\sqrt{5}}$, лесно се гледа дека неравенството не важи. ■

57. Разгледуваме квадратна таблица

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

што се состои од ненегативни цели броеви за кои важи следното својство: ако $a_{ij} = 0$, тогаш важи неравенството

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \ge n .$$

Докажи дека $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ge \frac{1}{2}n^2$.

Решение. Ги пресметуваме збировите на елементите од секоја редица и од секоја колона на дадената квадратна таблица и со p да го означиме најмалиот од добиените збирови. Ако $p \ge n$, тогаш збирот на сите елементи од таблицата не е помал од $n \cdot n \ge \frac{1}{2}n^2$.

Нека $p < n$. Со замена на редиците и колоните збировите не се менуваат, а исто може да се правата пермутации меѓу одделни колони, односно одделни редици. Затоа можеме да претпоставиме дека збирот на елементите од првата колона е еднаков на p и дека сите елементи со вредност 0, а нив ќе ги има најмалку $n-p$ се наредени на најгорните места во колоната. Од неравенството следува

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \ge a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + p \ge n ,$$

т.е.

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} \ge n - p ,$$

што значи дека збирот на елементите во секоја редица не е помал од $n-p$. Според тоа, збирот на елементите на секоја од првите $n-p$ редици не е помал од $n-p$, а збирот на елементите на секоја од преостанатите p редици не е помал од p , па затоа

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n-p}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}+\sum_{i=n-p+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\geq(n-p)(n-p)+p\cdot p=\frac{n^2}{2}+\frac{(n-2p)^2}{2}\geq\frac{n^2}{2},$$

што и требаше да се докаже. ■

58. Нека $m,n\in\mathbf{N}$, а $a_1,a_2,...,a_m$ се меѓусебно различни елементи од множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што $a_i+a_j\leq n$ за некои i,j, $1\leq i<j\leq m$, тогаш постои k, $1\leq k\leq m$, таков што $a_i+a_j=a_k$. Докажи дека

$$\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m}\geq\frac{n+1}{2}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за важи $a_1<a_2<...<a_m$. Ќе докажеме дека $a_i+a_{m-i+1}\geq n+1$, за секој $i=1,2,...,m$. Навистина, да претпоставиме дека постои i таков што $a_i+a_{m-i+1}\leq n$. Тогаш,

$$a_{m-i+1}<a_{m-i+1}+a_1<a_{m-i+1}+a_2<...<a_{m-i+1}+a_i\leq n,$$

па добивме $i+1$ различни броеви кои припаѓаат на множеството

$$\{a_{m-i+1},a_{m-i+2},a_{m-i+3},...,a_m\}$$

кое има i елементи, што противречи на принципот на Дирихле. Значи, за секој $i=1,2,...,m$ важи $a_i+a_{m-i+1}\geq n+1$.

Од претходно изнесеното следува дека

$$2(a_1+a_2+...+a_m)=(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+...+(a_{m-1}+a_2)+(a_m+a_1)\geq m(n+1),$$

т.е. $\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m}\geq\frac{n+1}{2}$, што и требаше да се докаже. ■

59. Нека $x_1,x_2,\dots,x_n$ се реални броеви кои ги задоволуваат условите

$$|x_1+x_2+\dots+x_n|=1,\quad |x_i|\leq\frac{n+1}{2}\text{ за }i=1,2,\dots,n.$$

Докажи дека постои пермутација $y_1,y_2,\dots,y_n$ на $x_1,x_2,\dots,x_n$ така што

$$\left|y_1+2y_2+\dots+ny_n\right|\leq\frac{n+1}{2}.$$

Решение. За секоја пермутација $\pi=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ од $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ со $S(\pi)$ ќе го означиме збирот $y_1+2y_2+\dots+ny_n$. Нека $r=\frac{n+1}{2}$. Треба да докажеме дека постои пермутација π таква што $|S(\pi)|\leq r$.

Нека π_0 е идентичната пермутација, т.е. $\pi_0=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, а $\tilde{\pi}=(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)$. Ако $|S(\pi_0)|\leq r$ или $|S(\tilde{\pi})|\leq r$, тогаш тврдењето е точно. Затоа да претпоставиме дека $|S(\pi_0)|>r$ и $|S(\tilde{\pi})|>r$. Од

$$\begin{aligned}|S(\pi_0)+S(\tilde{\pi})|&=|(x_1+2x_2+\dots+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+\dots+nx_1)|\\&=|(n+1)(x_1+\dots+x_n)|=n+1=2r\end{aligned}$$

и од $|S(\pi_0)|>r$ и $|S(\tilde{\pi})|>r$ следува дека броевите $S(\pi_0)$ и $S(\tilde{\pi})$ мора да бидат со различни знаци и еден од нив е поголем од r, а другиот е помал од $-r$. Значи, $|S(\pi_0)-S(\tilde{\pi})|>2r$.

Поаѓајќи од почетната пермутацијата π_0 можеме да ја добиеме секоја пермутација со последователно заменување на соседни елементи. Специјално, постои низа од пермутации $\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_m$ така што $\pi_m=\tilde{\pi}$ и, за секој $i\in\{0,1,\dots,m-1\}$ пермутацијата π_{i+1} се добива од π_i со замена на два соседни члена.

Тоа значи дека ако $\pi_i=(y_1,\dots,y_n)$ и $\pi_{i+1}=(z_1,\dots z_n)$, тогаш постои индекс $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ така што

$$z_k=y_{k+1},\ z_{k+1}=y_k,\ z_j=y_j \text{ за } j\neq k,k+1.$$

Бидејќи броевите x_i по апсолутна вредност не се поголеми од r, добиваме

$$\begin{aligned}|S(\pi_{i+1})-S(\pi_i)|&=|kz_k+(k+1)z_{k+1}-ky_k-(k+1)y_{k+1}|\\&=|y_k-y_{k+1}|\le|y_k|+|y_{k+1}|\le 2r,\end{aligned}$$

што значи дека разликата меѓу секои два соседни члена на низата $S(\pi_0)$, $S(\pi_1),\dots,S(\pi_m)$ не е поголема од $2r$.

Броевите $S(\pi_0)$ и $S(\pi_m)$, разгледувани како броеви на реалната права, лежат надвор од интервалот $[-r,r]$ и тоа од негова различна страна. Оттука следува дека барем еден од броевите $S(\pi_i)$ се наоѓа во тој интервал. Затоа $|S(\pi_i)|\le r$ за некоја пермутација π_i. ■

60. Нека $n\ge 2$ е цел број.

а) Да се најде најмалата константа C таква што неравенството

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\le C\Big(\sum_{1\le i\le n} x_i\Big)^4 \tag{1}$$

важи за секои ненегативни реални броеви $x_1,x_2,\dots,x_n$.

б) За константата C, да се најде кога се добива еднаквост.

Решение. а) Бидејќи неравенството не се менува ако било кои елементи си ги заменат местата и ако броевите $x_1,x_2,\dots,x_n$ ги замениме со броевите λx_1, $\lambda x_2\dots,\lambda x_n$, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $0\le x_1\le x_2\le \dots\le x_n$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$. Сега доволно е да најдеме максимум од функцијата

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i<j} x_ix_j(x_i^2+x_j^2).$$

Ќе докажеме дека потребен услов за функцијата $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ да прими максимум е $n-2$, ако $n>2$ од вредностите $x_1,x_2,\dots,x_n$ да се еднакви на нула. Навистина, ако постојат барем три ненулти броеви, на пример x_1, x_2, x_3, тогаш за два од нив, на пример x_1 и x_2 ќе важи $x_1 + x_2 \leq \frac{2}{3}$, бидејќи ако

$$x_1 + x_2 > \tfrac{2}{3}, \quad x_2 + x_3 > \tfrac{2}{3}, \quad x_3 + x_1 > \tfrac{2}{3},$$

тогаш

$$x_1 + x_2 + x_3 > 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

што е противречност. Понатаму, ако x_1 и x_2 се заменат со 0 и $x_1 + x_2$, тогаш

$$\begin{aligned} &F(0, x_1 + x_2, \ldots, x_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= \sum_{i>2} \{(x_1 + x_2)x_i[(x_1 + x_2)^2 + x_i^2] - x_1 x_i (x_1^2 + x_i^2) - x_2 x_i (x_2^2 + x_i^2)\} - x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &= 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \sum_{i>2} x_i - x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &= x_1 x_2 [3(1 - x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_2^2)] \geq 0, \end{aligned}$$

при што последното неравенство следува од

$$3(1 - x_1 - x_2) \geq 3(1 - \tfrac{2}{3}) = 1, \; x_1 \geq x_1^2, \; x_2 \geq x_2^2 .$$

Применувајќи го претходното заменување неколку пати ќе добиеме

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq F(0, \ldots, 0, a, b) = ab(a^2 + b^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4} - (2ab - \tfrac{1}{2})^2] \leq \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

па бараната константа е $\frac{1}{8}$.

б) Знак за равенство важи ако и само ако $2ab - \frac{1}{2} = 0$ и како $a + b = 1$, решавајќи го системот составен од последните две равенки добиваме $a = b = \frac{1}{2}$, а останатите $n - 2$ броеви се еднакви на 0. ■

61. Нека $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ се позитивни реални броеви такви што

а) $0 < x_1 y_1 < x_2 y_2 < .... < x_n y_n$

б) $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq y_1 + y_2 + ... + y_k$, за секој $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Докажи дека

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} < \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + ... + \frac{1}{y_n} .$$

Решение. За секој $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ имаме

$$S_k = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) + ... + (x_n - y_n) \geq 0 ,$$

и ако $z_k = \frac{1}{x_k y_k}$, тогаш $z_k - z_{k+1} > 0$, $k = 1, 2, 3, ..., n-1$. Но тогаш

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} - (\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + ... + \frac{1}{y_n}) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{y_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{y_2} + ... + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n}$$

$$=\frac{y_1-x_1}{x_1y_1}+\frac{y_2-x_2}{x_2y_2}+\dots+\frac{y_n-x_n}{x_ny_n}$$
$$=-S_1z_1-(S_2-S_1)z_2-\dots-(S_n-S_{n-1})z_n$$
$$=-(z_1-z_2)S_1-(z_2-z_3)S_2-\dots-(z_{n-1}-z_n)S_{n-1}-z_nS_n<0$$

што требаше и да се докаже. ■

62. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ и $b_1,b_2,...,b_n$ се пермутации на броевите $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}$ такви да $a_1+b_1\ge a_2+b_2\ge...\ge a_n+b_n$. Докажи дека $a_m+b_m\le\frac{4}{m}$, за некој $m\in\{1,2,...,n\}$.

Решение. За секој m, $1\le m\le n$ меѓу m парови (a_k,b_k), $1\le k\le m$, едно од неравенствата $a_k\le b_k$ или $a_k\ge b_k$ е исполнето за најмалку $\frac{m}{2}$ парови.

Нека, на пример, $a_k\le b_k$ е исполнето за најмалку $\frac{m}{2}$ парови. Ако b_i е најмалиот од тие b_k, тогаш $b_i\le\frac{2}{m}$. Затоа $a_i+b_i\le 2b_i\le\frac{4}{m}$, а бидејќи $i\le m$ добиваме $a_m+b_m\le a_i+b_i\le\frac{4}{m}$. ■

63. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се реални броеви. Докажи дека следниве тврдења се еквивалентни:

(А) $a_i+a_j\ge 0$, за секои i и j, $i\ne j$,

(Б) $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\ge a_1x_1^2+a_2x_2^2+...+a_nx_n^2$, за секои ненегативни реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ такви што $x_1+x_2+...+x_n=1$.

Решение. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се ненегативни реални броеви такви што $x_1+x_2+...+x_n=1$. Имаме

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k^2+\sum_{i\ne j}(a_i+a_j)x_ix_j\,. \qquad (1)$$

Ако е точно тврдето (А), тогаш, за секои $i\ne j$ важи $(a_i+a_j)x_ix_j\ge 0$, па затоа $\sum_{i\ne j}(a_i+a_j)x_ix_j\ge 0$ и од (1) следува

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\ge\sum_{k=1}^{n}a_kx_k^2\,,$$

т.е. точно е тврдењето (Б).

Нека претпоставиме дека е точно тврдењето (Б). За $1\le i<j\le n$ земаме $x_i=x_j=\frac{1}{2}$ и $x_k=0$, за $k\ne i,j$. Од (Б) следува

$$\tfrac{1}{2}(a_i+a_j)\ge\tfrac{1}{4}(a_i+a_j)\text{, за } i\ne j\text{, т.е. } a_i+a_j\ge 0,\ i\ne j\,. \ ■$$

64. Нека $n\in\mathbf{N}, n>2$ и $x_1,x_2,...,x_n$ се ненегативни цели броеви такви да

1) $x_1+x_2+...+x_n=n$ и

2) $x_1+2x_2+...+(n-1)x_{n-1}=2n-2$.

Најди $\min\sum_{k=1}^{n-1}kx_k(2n-k)$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}k^2x_k &= \sum_{k=1}^{n-1}[(k-1)(k+1)+1]x_k = \sum_{k=1}^{n-1}x_k+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(k+1)x_k\\ &\le n+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)nx_k = n+n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)x_k\\ &= n+n[\sum_{k=1}^{n-1}kx_k-\sum_{k=1}^{n-1}x_k]=n+n(2n-2-n)=n^2-n.\end{aligned}$$

Така,

$$\sum_{k=1}^{n-1}kx_k(2n-k)=2n\sum_{k=1}^{n-1}kx_k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2x_k\ge 2n(2n-2)-n^2+n=3n^2-3n,$$

при што знак за равенство се достигнува за

$$x_1=n-1,\ x_2=...=x_{n-2}=0,\ x_{n-1}=0. \ ■$$

65. Нека $n>2$ и $a_1,a_2,...,a_n$ се реални броеви за кои $2\le a_i\le 3$, $i=1,...,n$. Ако $S=a_1+a_2+...+a_n$, докажи

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+...+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\le 2S-2n.$$

Решение. Од $2\le a_i\le 3$ следува $(a_i-2)(a_{i+1}-2)\ge 0$ следува

$$-2a_ia_{i+1}\le -4(a_i+a_{i+1}-2)$$

од што добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-a_{i+2}^2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}} &= a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-\frac{2a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}\le a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4\frac{a_i+a_{i+1}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}\\ &= a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4(1+\frac{a_{i+2}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}})\end{aligned}$$

за $i=1,2,...,n$. Но, $1=2+2-3\le a_i+a_{i+1}-a_{i+2}\le 3+3-2=4$, па затоа $-\frac{a_{i+2}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}\le -\frac{a_{i+2}-2}{4}$ и затоа

$$\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-a_{i+2}^2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}\le a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4(1+\frac{a_{i+2}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}})\le a_i+a_{i+1}-2,\text{ за } i=1,2,...,n.$$

Конечно,

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+...+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\le\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1}-2)=2S-2n. \ ■$$

66. Нека $n \geq 2$ и $0 \leq x_i \leq 1$, за $i = 1, 2, ..., n$. Докажи го неравенството

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_1x_n) \leq [\tfrac{n}{2}].$$

Решение. Со $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ да ја означиме левата страна на неравенството. Оваа функција е линеарна во однос на секоја променлива x_i, па затоа

$$S(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \max\{S(0, x_2, ..., x_n), S(1, x_2, ..., x_n)\}.$$

Од овде следува дека е доволно неравенството да го докажеме кога $x_i = 0$ или 1, за $i = 1, 2, ..., n$. Од друга страна, од $0 \leq x_i \leq 1$, за $i = 1, 2, ..., n$ следува

$$\begin{aligned} 2S(x_1, x_2, ..., x_n) &= n - (1 - x_1)(1 - x_2) - (1 - x_2)(1 - x_3) - ... - (1 - x_n)(1 - x_1) \\ &\quad - x_1x_2 - x_2x_3 - ... - x_{n-1}x_n - x_1x_n, \end{aligned} \tag{1}$$

па затоа $S(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \frac{n}{2}$. Во случај кога $x_i = 0$ или 1, за $i = 1, 2, ..., n$ левата страна на последното неравенство е цел број, па затоа

$$S(x_1, x_2, ..., x_n) \leq [\tfrac{n}{2}].$$

Од (1) следува дека кога n е парен број, знак за равенство важи ако и само ако

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n) \equiv (1, 0, 1, 0, ..., 0, 1, 0) \text{ или}$$
$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n) \equiv (0, 1, 0, 1, ..., 1, 0, 1). \blacksquare$$

67. Нека $Ax^2 + Bx + c = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$ и

$$H = \max\{|A|, |B|, |C|\}, \quad h_1 = \max\{|a_1|, |b_1|\}, \quad h_2 = \max\{|a_2|, |b_2|\}.$$

Докажи дека

$$\frac{h_1h_2}{2} < H \leq 2h_1h_2.$$

Решение. Имаме $Ax^2 + Bx + c = a_1a_2x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2$, па значи

$$|A| = |a_1a_2| \leq h_1h_2, \; |B| = |a_1b_2 + a_2b_1| \leq |a_1b_2| + |a_2b_1| \leq 2h_1h_2, \; |C| = |b_1b_2| \leq h_1h_2,$$

и затоа $H \leq 2h_1h_2$.

Нека за определеност ставиме $h_1 = |a_1|, h_2 = |b_2|$. Ако $|b_1| > \frac{h_1}{2}$, тогаш $|C| = |b_1b_2| > \frac{h_1h_2}{2}$. Ако $|b_1| \leq \frac{h_1}{2}$, $|a_2| \leq \frac{h_2}{2}$, тогаш

$$|B| = |a_1b_2 + a_2b_1| \geq |a_1b_2| - |a_2b_1| \geq h_1h_2 - \frac{h_1h_2}{4} > \frac{h_1h_2}{2}.$$

Нека сега, $h_1 = |a_1|, h_2 = |a_2|$. Тогаш $H = |A| = |a_1a_2| = h_1h_2 > \frac{h_1h_2}{2}$. $\blacksquare$

68. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви да

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 0.$$

Ако $m = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $M = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq -nmM.$$

Решение. Ако $M=m$, тогаш $x_i=0, i=1,2,...,n$ и неравенството е очигледно.

Нека $M\neq m$. Ставаме $y_i=x_i-m, i=1,2,...,n$. Тогаш $y_i\geq 0$ и

$$y_1+y_2+...+y_n=-nm.$$

Добиваме

$$\begin{aligned} y_1^2+y_2^2+...+y_n^2 &= x_1^2+x_2^2+...+x_n^2-2m(x_1+x_2+...+x_n)+nm^2 \\ &= x_1^2+x_2^2+...+x_n^2+nm^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Забележуваме дека меѓу броевите y_i најголем број е $M-m$, па затоа $y_i^2\leq y_i(M-m),\ \ i=1,2,...,n$ и

$$y_1^2+y_2^2+...+y_n^2\leq(y_1+y_2+...+y_n)(M-m)\leq -nm(M-m). \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=y_1^2+y_2^2+...+y_n^2-nm^2\leq -nmM+nm^2-nm^2=-nmM. \ \blacksquare$$

69. Дадени се реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ за кои важи

$$a_1+a_2+...+a_n=0 \text{ и } |a_i|<M, i=1,2,...,n.$$

Докажи дека

$$a_1+2a_2+...+na_n\leq\tfrac{n^2}{4}M.$$

Решение. Нека $S=a_1+2a_2+...+na_n$. Тогаш

$$S=(a_1+a_2+...+a_n)+(a_2+...+a_n)+...+(a_{n-1}+a_n)+a_n.$$

Понатаму, $a_1+a_2+...+a_n=0$, а за $k\in\{1,2,...,n-1\}$ добиваме

$$\sum_{i=k+1}^{n}a_i\leq\left|\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right|\leq\sum_{i=k+1}^{n}|a_i|\leq(n-k)M,$$

$$\sum_{i=k+1}^{n}a_i\leq\left|\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}a_i\right|\leq\sum_{i=1}^{k}|a_i|\leq kM,$$

па затоа

$$\sum_{i=k+1}^{n}a_i\leq\min\{(n-k)M,kM\}=\begin{cases}kM, & k\leq\frac{n}{2}\\ (n-k)M, & k>\frac{n}{2}.\end{cases}$$

Ќе ги разгледаме посебно случаите кога n е парен, односно непарен број.

1) Ако $n=2p$, тогаш

$$\begin{aligned} S&\leq M+2M+...+(p-1)M+pM+(p-1)M+...+2M+M \\ &=2\tfrac{p(p-1)}{2}M+pM=p^2M=\tfrac{n^2}{4}M. \end{aligned}$$

2) Ако $n=2p+1$, тогаш

$$S\leq 2(M+2M+...+pM)=p(p+1)M=\tfrac{n^2-1}{4}M\leq\tfrac{n^2}{4}M. \ \blacksquare$$

70. Нека x, y, z се различни позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+yz+zx}.$$

Решение. Нека $a,b>0$. Тогаш

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{4}{ab}=\frac{(a^2+b^2-3ab)^2}{a^2b^2(a-b)^2},$$

од што следува

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{ab}. \qquad (1)$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $z=\min\{x, y, z\}$. Сега, ако го примениме неравенството (1) на броевите $a=x-z$ и $b=y-z$ го добиваме неравенството

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{(x-z)(y-z)},$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството $xy+yz+zx \geq (x-z)(y-z)$, односно неравенството $2z(y+z) \geq z^2$, кое очигледно е исполнето. ■

71. Ако $n>3$ и $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви такви да $x_1x_2...x_n=1$, докажи дека

$$\frac{1}{1+x_1+x_2x_3}+\frac{1}{1+x_2+x_3x_4}+...+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

Решение. Користејќи ја смената $x_1=\frac{a_2}{a_1}, x_2=\frac{a_3}{a_2},..., x_n=\frac{a_1}{a_n}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2}>1.$$

Но, $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}<a_1+a_2+...+a_n$, па затоа $\frac{1}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}>\frac{1}{a_1+a_2+...+a_n}$, што значи

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2}>\frac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_2+...+a_n}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_n}=1. \ ■$$

72. Нека $a_1, a_2,..., a_n$ реални броеви. За секој $i \in \{1,2,...,n\}$ нека

$$d_i=\max\{a_j \mid 1 \leq i \leq j\}-\min\{a_j \mid 1 \leq i \leq j\}$$

и нека $d=\max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

а) Докажи дека за произволни реални броеви $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ важи

$$\max\{|x_i-a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (1)$$

б) Докажи дека постојат реални броеви $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ такви да во (1) важи знак за равенство.

Решение. а) Од условот на задачата следува дека $d=a_k-a_l$ за некои $k \leq l$. Бидејќи

$$(a_k-x_k)-(a_l-x_l)=(a_k-a_l)+(x_k-x_l) \geq a_k-a_l=d \text{ и } d \geq 0$$

добиваме

$$\frac{|x_k-a_k|+|x_l-a_l|}{2} \geq \frac{|(a_k-x_k)-(a_l-x_l)|}{2} \geq \frac{d}{2},$$

па затоа $\max\{|x_k-a_k|,|x_l-a_l|\} \geq \frac{d}{2}$, од каде следува неравенството (1).

б) Јасно е дека низата која го задоволува условот зависи од изразите $M_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\}$ и $m_i = \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}$. Со цел да се минимизира изразот на левата страна на (1) природно е да земеме $x_i = \frac{m_i+M_i}{2}$, за $i=1,2,...,n$. Оваа низа го задоволува условот. Имено,

1) по конструкција низите $\{m_i\}_{i=1}^n$ и $\{M_i\}_{i=1}^n$ се растечки, па затоа таква е и низата $\{x_i\}_{i=1}^n$,
2) бидејќи $d_i = M_i - m_i$, за $i=1,2,...,n$ добиваме

$$-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i-M_i}{2} = x_i - M_i \leq x_i - a_i \leq x_i - m_i = \frac{M_i-m_i}{2} = \frac{d_i}{2},$$

па затоа $\max\{|x_i-a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \leq \max\{\frac{d_i}{2} \mid 1 \leq i \leq n\} = \frac{d}{2}$, што според а) значи дека во (1) важи знак за равенство.

73. а) Докажи дека за секои реални броеви $x,y,z \neq 1$ такви што $xyz=1$ важи

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1. \qquad (1)$$

б) Докажи дека во (1) равенство се достигнува за бесконечно многу тројки рационални броеви.

Решение. Нека $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}$ и $c=\frac{z}{z-1}$. Тогаш $x=\frac{a}{a-1}$, $y=\frac{b}{b-1}$ и $z=\frac{c}{c-1}$, за $a,b,c \neq 1$, па затоа треба да се докаже дека $a^2+b^2+c^2 \geq 1$ при услов

$$\begin{aligned}\frac{a}{a-1}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot\frac{c}{c-1}=1 \;&\Leftrightarrow\; ab+bc+ca+1=a+b+c\\ &\Leftrightarrow\; (a+b+c)^2+2=(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)\\ &\Leftrightarrow\; a^2+b^2+c^2=1+[(a+b+c)-1]^2, \text{ за } a,b,c\neq 1.\end{aligned}$$

Но, од последниот услов следува дека $a^2+b^2+c^2 \geq 1$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a+b+c=1$, за $a,b,c \neq 1$, т.е. ако и само ако $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$, за $a,b,c \neq 1$.

Бидејќи подредената тројка $(x,y,z), x,y,z \neq 1$ е тројка рационални броеви ако и само ако е таква и подредената тројка $(a,b,c), a,b,c \neq 1$, доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу тројки $(a,b,c), a,b,c \neq 1$ рационални броеви за кои важи

$$a+b+c=1 \text{ и } ab+bc+ca=0. \qquad (1)$$

Ако го елиминираме c од претходниот систем добиваме $a^2+ab+b^2=a+b$. Понатаму, ако ставиме $d=\frac{b}{a}$, добиваме $a^2(1+d+d^2)=a(1+d)$, па затоа $a=\frac{1+d}{1+d+d^2}$, $b=\frac{d(1+d)}{1+d+d^2}$, $c=-\frac{d}{1+d+d^2}$. Според тоа, за секој $d \neq -1,0$ се добиваат подредени тројки (a,b,c) кои го задоволуваат условот (1) и ако d е рационален број, тогаш броевите a,b и c се рационални. Конечно, бидејќи функцијата $f(d)=\frac{1+d}{1+d+d^2}$ е непрекината, таа нема конечна слика па затоа постојат бесконечно многу тројки $(a,b,c), a,b,c\neq 1$ рационални броеви за кои важи важи условот (1).

74. Позитивните реални броеви $a_1,...,a_n$ и k се такви да

$$a_1+a_2+...+a_n=3k,\ a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=3k^2 \text{ и } a_1^3+a_2^3+...+a_n^3>3k^3+k.$$

Докажи, дека разликата на некои два броја од броевите $a_1,...,a_n$ е поголема од 1.

Решение. Ги помножиме равенството

$$a_1+a_2+...+a_n=3k \tag{1}$$

и неравенството $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3>3k^3+k$ и го добиваме неравенството

$$a_1^4+a_2^4+...+a_n^4+a_1^3a_2+a_1a_2^3+a_1^3a_3+a_1a_3^3+...+a_{n-1}^3a_n+a_{n-1}a_n^3>9k^4+3k^2 \tag{2}$$

Ако го квадрираме равенството

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=3k^2 \tag{3}$$

добиваме

$$a_1^4+a_2^4+...+a_n^4+2a_1^2a_2^2+2a_1^2a_3^2+...+2a_{n-1}^3a_n^2=9k^4. \tag{4}$$

Ако од неравенството (2) го одземеме равенствот (4) добиваме

$$(a_1^3a_2-2a_1^2a_2^2+a_1a_2^3)+(a_1^3a_3-2a_1^2a_3^2+a_1a_3^3)+...+(a_{n-1}^3a_n-2a_{n-1}^3a_n^2+a_{n-1}a_n^3)>3k^2$$

т.е.

$$a_1a_2(a_1-a_2)^2+a_1a_3(a_1-a_3)^2+...+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n)^2>3k^2. \tag{5}$$

Нека претпоставиме, дека разликата на секои два броја од броевите $a_1,...,a_n$ не е поголема од 1. Тогаш квадратите на нивните разлики не се поголеми од 1, па од (5) следува неравенството

$$a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n>3k^2. \tag{6}$$

Ако го одземеме равенството (3) од квадратот на равенството (1) ќе го добиеме равенството

$$2a_1a_2+2a_1a_3+...+2a_{n-1}a_n=6k^2,$$

кое противречи на (6). Од добиената противречност следува дека разликата на некои два броја од броевите $a_1,...,a_n$ е поголема од 1. ■

75. За се реалните броеви a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 важи $|a_i-a_j|\geq 1$, за $i\neq j$. За некој реален број k се исполнети равенствата

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k,\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажи дека $k^2\geq\frac{25}{3}$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$. Тогаш, од условот на задачата следува $a_{i+1}-a_i\geq 1,$ за $i=1,2,3,4$.

Според тоа, $a_j - a_i \geq j - i,$ за $1 \leq i < j \leq 5$. Акосекое од добиените неравенства го квадрираме и ги собереме добиваме

$$\sum_{1\leq i<j\leq 5}(a_j - a_i)^2 \geq \sum_{1\leq i<j\leq 5}(j-i)^2 = 4\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 4^2 = 50,$$

од каде добиваме

$$4\sum_{i=1}^{5} a_i^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 5} a_j a_i \geq 50. \qquad (1)$$

Од друга страна, според условот имаме

$$\sum_{i=1}^{5} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 5} a_j a_i = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 = 4k^2. \qquad (2)$$

Ако ги собереме (1) и (2), тогаш од условот добиваме

$$10k^2 = 5\sum_{i=1}^{5} a_i^2 \geq 50 + 4k^2,$$

од каде $6k^2 \geq 50$, т.е. $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

Забелешка. Условите се задоволени од броевите $a_i = 3 - i + \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $k = \frac{5}{\sqrt{3}}$. Според тоа, бројот $\frac{25}{3}$ во условот не може да сезамени со помал. ■

76. Нека a и b се реални броеви поголеми од -1. Докажи дека

$$\frac{1+a^6}{1+a} \cdot \frac{1+b^6}{1+b} \geq \frac{1+ab}{2} \cdot \frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2,$$

$$2(x^2+1) \geq (1+x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x^2+1)^2 \geq (1+x)^2(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^2 \geq \frac{1+x^2}{2},$$

$$(x-1)^4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2 \geq x^4 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \geq \frac{x^4+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - x + x^2)^2 \geq \frac{x^4+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+x^3}{1+x}\right)^2 \geq \frac{x^4+1}{2}.$$

Тогаш

$$\frac{1+a^2}{1+a} \cdot \frac{1+b^2}{1+b} \geq \sqrt{\frac{1+a^2}{2} \cdot \frac{1+b^2}{2}} \geq \frac{1+ab}{2},$$

$$\frac{1+a^6}{1+a^2} \cdot \frac{1+b^6}{1+b^2} \geq \sqrt{\frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+b^8}{2}} \geq \frac{1+a^4b^4}{2},$$

па ако ги помножиме последните две неравенство го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=1$. ■

77. Нека $a,b,c,d>0$ и нека $a+b+c+d=1$. Докажи дека

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}+\frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2}+\frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2}+\frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2}\geq\frac{1}{8}.$$

Решение. За секои $x,y,z>0$ важи

$$\begin{aligned}(y+z)(2x-y-z)^2\geq 0 &\Leftrightarrow (y+z)[4x^2-4x(y+z)+(y+z)^2]\geq 0\\ &\Leftrightarrow (y+z)[4x^2+(y+z)^2]\geq 4x(y+z)^2\\ &\Leftrightarrow 16x^3\geq 16x^3-4x^2(y+z)+4x(y+z)^2-(y+z)^3\\ &\Leftrightarrow 16x^3\geq[4x-(y+z)][4x^2+(y+z)^2]\\ &\Leftrightarrow \frac{x^3}{4x^2+(y+z)^2}\geq\frac{x}{4}-\frac{y+z}{16}.\end{aligned}$$

Од последното неравенство и од условот $a+b+c+d=1$ следува

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}+\frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2}+\frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2}+\frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2}\geq\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{2a+2b+2c+2d}{16}=\frac{1}{8}. \blacksquare$$

78. Нека $a,b,c,d>0$. Докажи дека

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3}\geq\frac{a+b+c+d}{4}. \quad (1)$$

Решение. За секои $x,y>0$ важи

$$\begin{aligned}&(x^2-y^2)^2+2(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geq 0\\ &(x^2-y^2)^2+2(x-y)(x^3-y^3)\geq 0\\ &x^4-2x^2y^2+y^4+2(x^4-x^3y+y^4-xy^3)\geq 0\\ &3(x^4+y^4)\geq 2x^2y^2+2x^3y+2xy^3\\ &4(x^4+y^4)\geq x^4+x^3y+y^4+xy^3+x^2y^2+x^3y+x^2y^2+xy^3\\ &4(x^4+y^4)\geq(x+y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)\\ &\frac{x^4+y^4}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}\geq\frac{x+y}{4}.\end{aligned}$$

Од последното неравенство, применето за броевите $a,b,c,d>0$, следува неравенството

$$\sum_{cyc}\frac{a^4+b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\geq\sum_{cyc}\frac{a+b}{4}=\frac{a+b+c+d}{2}. \quad (2)$$

Понатаму,

$$0=\sum_{cyc}(a-b)=\sum_{cyc}\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}=\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}-\sum_{cyc}\frac{b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3},$$

т.е.

$$\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}=\sum_{cyc}\frac{b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\ . \tag{3}$$

Конечно, од неравенството (2) и равенството (3) следува неравенството (1). ■

79. Нека $x,y,z>0$ и нека $xy+yz+zx=3xyz$. Докажи дека

$$x^2y+y^2z+z^2x\geq 2(x+y+z)-3\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот следува $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$. Според тоа,

$$x^2y+y^2z+z^2x-2(x+y+z)+3=x^2y-2x+\tfrac{1}{y}+y^2z-2y+\tfrac{1}{z}+z^2x-2z+\tfrac{1}{x}$$

$$=y(x-\tfrac{1}{y})^2+z(y-\tfrac{1}{z})^2+x(z-\tfrac{1}{x})^2\geq 0.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $xy=yz=zx=1$, т.е. ако и само ако $x=y=z=1$. ■

2. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ВТОРА ГЛАВА

1. Докажи дека за секој природен број $n>4$ важи $2^n>n^2$.

Решение. За $n=5$ имаме $2^5=32>25=5^2$, т.е. неравенството важи. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $2^k>k^2$. Тогаш за $n=k+1$, од $k>4$ имаме $k(k-2)-1>14$, па затоа од индуктивната претпоставка и следува

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2=(k+1)^2+k(k-2)-1>(k+1)^2\,.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција заклучуваме дека $2^n>n^2$, за секој $n>4$. ■

2. Докажи дека за секој природен број $n>3$ важи $n!>2^n$.

Решение. За $n=4$ имаме $4!=24>16=2^4$. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $k!>2^k$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$(k+1)!=k!(k+1)>2^k(k+1)>2^{k+1}\,,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека $n!>2^n$, за секој $n>3$. ■

3. Докажи дека за секој природен број $n\geq 2$ важи

$$\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\ldots+\tfrac{1}{n^2}>1\,.$$

Решение. За $n=2$ имаме

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{13}{12}>1\,,$$

т.е. неравенството важи. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{k^2}>1.$$

Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+...+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2}+(\frac{1}{n^2+1}+...+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n})$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{2n+1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)-1}{(n+1)^2}$$
$$>\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2}>1,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој $n\geq 2$. ■

4. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи

$$\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot ...\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot ...\cdot(4n+1)}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

Решение. За $n=1$ имаме $\frac{3}{5}<\sqrt{\frac{3}{7}}$, т.е. неравенството важи. Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n=k$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot ...\cdot(4n-1)(4n+3)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot ...\cdot(4n+1)(4n+5}<\frac{4n+3}{4n+5}\sqrt{\frac{3}{4n+3}},$$

па за да докажеме дека неравенството важи за $n=k+1$ доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{4n+3}{4n+5}\sqrt{\frac{3}{4n+3}}<\sqrt{\frac{3}{4n+5}},$$

кое е еквивалентно со очигледното неравенство $\sqrt{\frac{4n+3}{4n+5}}<1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

5. Да означиме

$$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n-2)\cdot(2n) \text{ и } (2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)\cdot(2n-1).$$

Докажи

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \text{ за секој } n\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош ма математичка индукција.

i) За $n=1$ имаме $\frac{1!!}{2!!}=\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}$, т.е. неравенството важи.

ii) Нека претпоставиме дека (1) важи за $n=k$, т.е. дека

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Ако последното неравенство го помножиме $\frac{2k+1}{2k+2}$ добиваме

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}. \qquad (2)$$

Останува да докажеме дека

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Навистина, последното неравенство следува од низата неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+4}} \quad\Leftrightarrow\quad (2k+1)\sqrt{3k+4}\leq(2k+2)\sqrt{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad (2k+1)^2(3k+4)\leq(2k+2)(3k+1)$$

$$\Leftrightarrow\quad 12k^3+28k^2+19k+4\leq 12k^3+28k^2+20k+4 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq k$$

и како последното неравенство е исполнето за секој $k\in\mathbf{N}$, добиваме дека

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+4}},$$

што заедно со (2) дава

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+4}},$$

т.е. неравенството (1) важи и за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (3) важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

6. Докажи дека $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n$, за $n>1$.

Решение. За $n=2$ имаме $2!\cdot 4!=48>36=[(2+1)!]^2$, т.е. неравенството важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за $n=k$. За $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!(2n+2)! &> [(n+1)!]^n[1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)]\cdot[(n+2)(n+3)...(2n+2)]\\ &>[(n+1)!]^n(n+1)!(n+2)^{n+1}=[(n+1)!]^{n+1}(n+2)^{n+1}\\ &>[(n+1)!(n+2)]^{n+1}=[(n+2)!]^{n+1},\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој $n>1$. ■

7. Докажи дека за секои природни броеви n и p такви што $p\leq n$ важи неравенството

$$(1+\tfrac{1}{n})^p<1+\tfrac{p}{n}+\tfrac{p^2}{n^2}.$$

Решение. За $p=1$ неравенството е очигледно.

Нека претпоставиме дека за $p=k<n$ важи

$$(1+\tfrac{1}{n})^k<1+\tfrac{k}{n}+\tfrac{k^2}{n^2}.$$

Тогаш за $p=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{n})^{k+1}&=(1+\tfrac{1}{n})^k(1+\tfrac{1}{n})<(1+\tfrac{k}{n}+\tfrac{k^2}{n^2})(1+\tfrac{1}{n})=1+\tfrac{k+1}{n}+\tfrac{k^2+k}{n^2}+\tfrac{k^2}{n^3}\\ &=1+\tfrac{k+1}{n}+\tfrac{(k+1)^2}{n^2}+\tfrac{k^2}{n^3}-\tfrac{k+1}{n^2}<1+\tfrac{k+1}{n}+\tfrac{(k+1)^2}{n^2},\end{aligned}$$

бидејќи за $k\leq n$ важи $\frac{k^2}{n^3}<\frac{k+1}{n^2}$. Значи, неравенството важи за $p=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $p\leq n$. ■

8. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ и за секои $a,b\in\mathbf{R}$ важи неравенството

$$a^{2^n}+b^{2^n}+n \geq (ab)^{2^{n-1}}+(ab)^{2^{n-2}}+\ldots+ab+a+b\,.$$

Решение. Од очигледното неравенство

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$$

добиваме

$$a^2+b^2+1 \geq ab+a+b\,,$$

т.е. неравенството важи за $n=1$.

Нека даденото неравенство важи за $n=k$, т.е. нека

$$a^{2^k}+b^{2^k}+k \geq (ab)^{2^{k-1}}+(ab)^{2^{k-2}}+\ldots+ab+a+b\,. \quad (1)$$

Нека $n=k+1$. Од очигледното неравенство

$$(a^{2^k}-b^{2^k})^2+(a^{2^k}-1)^2+(b^{2^k}-1)^2 \geq 0\,,$$

следува

$$a^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}+(k+1) \geq a^{2^k}b^{2^k}+a^{2^k}+b^{2^k}+k=(ab)^{2^k}+a^{2^k}+b^{2^k}+k\,,$$

па од неравенството (1) добиваме

$$a^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}+(k+1) \geq (ab)^{2^k}+a^{2^k}+b^{2^k}+k \geq (ab)^{2^k}+(ab)^{2^{k-1}}+\ldots+ab+a+b,$$

т.е. неравенствот важи за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n \in \mathbf{N}$. ■

9. Докажи дека $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, $a>0, b>0$ и $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Неравенството ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n=1$ имаме $(\frac{a+b}{2})^1 \leq \frac{a^1+b^1}{2}$, т.е. неравенството е исполнето.

Нека претпоставиме дека неравенството е исполнето за $n=k$, т.е. дека $(\frac{a+b}{2})^k \leq \frac{a^k+b^k}{2}$.

Од индуктивната претпоставка за $n=k+1$ имаме

$$(\tfrac{a+b}{2})^{k+1}=(\tfrac{a+b}{2})^k \cdot \tfrac{a+b}{2} \leq \tfrac{a^k+b^k}{2} \cdot \tfrac{a+b}{2}=\tfrac{1}{4}(a^{k+1}+a^k b+ab^k+b^{k+1})\,. \quad (1)$$

Ќе докажеме дека

$$\tfrac{1}{4}(a^{k+1}+a^k b+ab^k+b^{k+1}) \leq \tfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\,. \quad (2)$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенството $(b-a)(a^k-b^k) \leq 0$, кое очигледно е исполнето. Конечно, од (1) и (2) следува

$$(\tfrac{a+b}{2})^{k+1} \leq \tfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\,,$$

т.е. неравенството важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n \in \mathbf{N}$. ■

10. Докажи дека, ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е растечка низа позитивни броеви, тогаш

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_1}{x_n}$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција по n.

За $n=2$ тврдењето важи, бидејќи неравенството се сведува на

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geq\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$$

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. дека

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+...+\frac{x_k}{x_1}\geq\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+...+\frac{x_1}{x_k}.$$

Од индуктивната претпоставка за $n=k+1$ имаме

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+...+\frac{x_{k-1}}{x_k}+\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}=(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+...+\frac{x_{k-1}}{x_k}+\frac{x_k}{x_1})+(\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}-\frac{x_k}{x_1})$$

$$\geq\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+...+\frac{x_k}{x_{k-1}}+\frac{x_1}{x_k}+(\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}-\frac{x_k}{x_1}) \qquad (1)$$

$$=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+...+\frac{x_k}{x_{k-1}}+\frac{x_{k+1}}{x_k}+\frac{x_1}{x_{k+1}}+(\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}-\frac{x_k}{x_1})-(\frac{x_{k+1}}{x_k}+\frac{x_1}{x_{k+1}}-\frac{x_1}{x_k})$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}}{x_1}-\frac{x_k}{x_1}\geq\frac{x_{k+1}}{x_k}+\frac{x_1}{x_{k+1}}-\frac{x_1}{x_k} \qquad (2)$$

важи за три позитивни броеви $x_1\leq x_k\leq x_{k+1}$. Лесно се гледа дека последното неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{(x_k-x_1)(x_{k+1}-x_1)(x_{k+1}-x_k)}{x_{k+1}x_kx_1}\geq 0$ кое е очигледно точно. Конечно, од (1) и (2) следува дека неравенството важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

11. Нека $b_1\geq b_2\geq...\geq b_{2n}$ се ненегативни броеви и $(a_1,a_2,...,a_{2n})$ е произволна пермутација на тие броеви. Докажи дека за секој $t\geq 0$ е точно неравенството

$$(a_1a_2+t)(a_3a_4+t)...(a_{2n-1}a_{2n}+t)\leq(b_1b_2+t)(b_3b_4+t)...(b_{2n-1}b_{2n}+t)$$

Решение. Неравенството ќе го докажме со помош на математичка индукција по n.

За $n=1$ неравенството очигледно важи.

Да претпоставиме дека неравенството важи за $n=k-1$.

За $n=k$ имаме. Нека $b_1=a_i, b_2=a_j$. Можни се два случаи.

1) Ако i е непарен и $j=i+1$ или i е парен и $j=i-1$, тогаш или

$$b_1b_2+t=a_ia_{i+1}+t \text{ или } b_1b_2+t=a_{i-1}a_i+t,$$

па од индуктивната претпоставка следува дека неравенството важи за $n=k$.

2) Нека i и j не се како во случајот 1). Тогаш, ако ставиме

$$i'=\begin{cases} i-1, \text{ако } i \text{ е парен,}\\ i+1, \text{ако } i \text{ е непарен,}\end{cases} \qquad j'=\begin{cases} j-1, \text{ако } j \text{ е парен,}\\ j+1, \text{ако } j \text{ е непарен,}\end{cases}$$

тогаш ниедни два од индексите i,i',j,j' не се совпаѓаат и множителите $a_ia_{i'}+t$ и $a_ja_{j'}+t$ се содржат во левата страна на неравенството. Меѓутоа,

$$(b_1b_2+t)(a_{i'}a_{j'}+t)-(a_ia_{i'}+t)(a_ja_{j'}+t)=t(b_1-a_{j'})(b_2-a_{i'})\geq 0.$$

Значи, ако го замениме $(a_ia_{i'}+t)(a_ja_{j'}+t)$ со $(b_1b_2+t)(a_{i'}a_{j'}+t)$, производот во левата страна на неравенството нема да се намали. Сега од индуктивната претпоставка следува дека и во овој случај неравенството важи $n=k$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

12. Нека $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ се произволни позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+...+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2} \leq n-1$$

Решение. Ставаме

$$y_i = \frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}},\ i=1,2,...,n,\ x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2.$$

Тогаш $\prod_{i=1}^{n} y_i = 1$ и даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{1+y_i} \leq n-1$, т.е. на неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+y_i} \geq 1. \qquad (1)$$

Последното неравенство ќе го докажеме со индукција по n.

Од $\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+y^{-1}}=1$ и $yy^{-1}=1$ следува дека неравенството (1) е точно за $n=2$.

Нека претпоставиме дека (1) е точно за $n=k$, т.е. ако $y_i>0$ и $\prod_{i=1}^{k} y_i = 1$, тогаш $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{1+y_i} \geq 1$.

Нека се дадени $k+1$ позитивни реални броеви y_i такви што $\prod_{i=1}^{k+1} y_i = 1$. Од очигледното неравенство

$$\frac{1}{1+y_{k+1}y_k} < \frac{1}{1+y_k}+\frac{1}{1+y_{k+1}}$$

и индуктивната претпоставка, применета на броевите $y_1, ..., y_{k-1}, y_k y_{k+1}$ следува

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{1+y_i} > \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1+y_i} + \frac{1}{1+y_k y_{k+1}} \geq 1,$$

т.е. неравенството важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n \in \mathbf{N}$. ■

13. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се различни природни броеви. Докажи дека

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2 \leq a_1^3+a_2^3+...+a_n^3.$$

Решение. Природните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ се различни, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Да означиме

$$S_n = a_1+a_2+...+a_n \text{ и } A_n = a_1^3+a_2^3+...+a_n^3.$$

При вака воведените ознаки, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$S_n^2 \le A_n, \qquad (1)$$

кое ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=1$ имаме $S_1^2 = a_1^2 \le a_1^3 = A_1$, т.е. неравенството (1) е точно.

Нека претпоставиме дека $S_k^2 \le A_k$, т.е. дека (1) важи за $n=k$.

За $n=k+1$, од $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_k < a_{k+1}$ следува

$$2S_k = 2(a_1 + a_2 + ... + a_k) \le 2[1+2+3+...+a_k + (a_k+1) + ... + (a_{k+1}-2) + (a_{k+1}-1)]$$
$$= 2\tfrac{a_{k+1}(a_{k+1}-1)}{2} = a_{k+1}^2 - a_{k+1}$$

т.е.

$$2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le a_{k+1}^3,$$

што значи

$$S_{k+1}^2 = (S_k + a_{k+1})^2 = S_k^2 + 2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le A_k + a_{k+1}^3 = A_{k+1}.$$

Според тоа, неравенството (1) важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbf{N}$.

Јасно, знак за равенство $S_n^2 = A_n$ важи ако и само ако $a_1 = 1$ и за секој $k \in \{1,2,3,...,n\}$ важи $a_k + 1 = a_{k+1}$, т.е. ако и само ако $a_i = i$, за $i = 1,2,...,n$. ■

14. Нека $a_1 = 1, b_1 = 2$ и нека за секој $n \ge 1$ важи

$$a_{n+1} = \tfrac{1+a_n+a_nb_n}{b_n} \text{ и } b_{n+1} = \tfrac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}.$$

Докажи дека $a_n < 5$, за $n \ge 1$.

Решение. Од $a_n, b_n > 0$ следува $a_n, b_n \ne -1$. Со математичка индукција ќе докажеме дека за секој $n \ge 1$ важи

$$\tfrac{1}{a_n+1} - \tfrac{1}{b_n+1} = \tfrac{1}{6}. \qquad (1)$$

За $n=1$ имаме

$$\tfrac{1}{a_1+1} - \tfrac{1}{b_1+1} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},$$

т.е. тврдењето важи. Нека претпоставиме дека за некој $k \ge 1$ важи

$$\tfrac{1}{a_k+1} - \tfrac{1}{b_k+1} = \tfrac{1}{6}.$$

Тогаш, од индуктивната претпоставка за $n=k+1$ имаме

$$\tfrac{1}{a_{k+1}+1} - \tfrac{1}{b_{k+1}+1} = \tfrac{b_k}{1+a_k+b_k+a_kb_k} - \tfrac{a_k}{1+a_k+b_k+a_kb_k}$$
$$= \tfrac{b_k-a_k}{1+a_k+b_k+a_kb_k} = \tfrac{b_k-a_k}{(1+a_k)(1+b_k)}$$
$$= \tfrac{1}{1+a_k} - \tfrac{1}{1+b_k} = \tfrac{1}{6},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека за секој $n \ge 1$ важи (1).

Конечно, од (1) следува

$$\tfrac{1}{a_n+1} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{b_n+1} > \tfrac{1}{6},$$

од каде $a_n + 1 < 6$, т.е. $a_n < 5$, за $n \ge 1$. ■

15. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви и нека a е најмалиот меѓу нив. Докажи дека

$$\frac{1+x_1}{1+x_2}+\frac{1+x_2}{1+x_3}+...+\frac{1+x_{n-1}}{1+x_n}+\frac{1+x_n}{1+x_1}\le n+\frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+...+(x_n-a)^2}{(1+a)^2}. \qquad (1)$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=1$ имаме $\frac{1+x_1}{1+x_2}=1\le 1+\frac{(x_1-x_1)^2}{(1+x_1)^2}$, т.е. важи (1).

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$ и нека се дадени ненегативните броеви $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_{n+1}=\max\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$. Нека $a=\min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Од индуктивната претпоставка имаме

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+x_k}{1+x_{k+1}}+\frac{1+x_n}{1+x_1}\le n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2,$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{1+x_n}{1+x_{n+1}}+\frac{1+x_{n+1}}{1+x_1}-\frac{1+x_n}{1+x_1}\le 1+\frac{(x_{n+1}-a)^2}{(1+a)^2},$$

т.е. еквивалентното неравенство

$$\frac{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_1)}{(1+x_{n+1})(1+x_1)}\le\frac{(x_{n+1}-a)^2}{(1+a)^2},$$

кое е исполнето бидејќи $a\le x_1, x_n\le x_{n+1}$. Јасно, знак за равенство важиако и само ако $x_1=x_n=x_{n+1}=a$, т.е. ако и само ако $x_1=x_2=...=x_{n+1}=a$. ■

16. Докажи дека за секој $n\ge 2$ и за секои $x_i\in[0,1]$, $i=1,2,...,n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{1\le i<k\le n}x_ix_k\le 1.$$

Решение. Тврдењето ќе го докаќеме со индукција по n.

За $n=2$ имаме

$$(1-x_1)(1-x_2)\ge 0,$$

па затоа

$$x_1+x_2-x_1x_2\le 1,$$

т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=m$ и нека $x_i\in[0,1]$, за $i=1,2,...,k+1$. Од индуктивната претпоставка следува дека за линеарната функција

$$f(x)=(1-\sum_{i=1}^{m}x_i)x+(\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{1\le i<k\le m}x_ix_k)$$

важи

$$f(0)=\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{1\le i<k\le m}x_ix_k\le 1 \text{ и } f(1)=1-\sum_{1\le i<k\le m}x_ix_k\le 1,$$

па затоа за секој $x\in[0,1]$ важи $f(x)\le 1$, односно важи

$$1 \ge f(x_{m+1}) = (1 - \sum_{i=1}^{m} x_i) x_{m+1} + (\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{1 \le i < k \le m} x_i x_k) = \sum_{i=1}^{m+1} x_i - \sum_{1 \le i < k \le m+1} x_i x_k ,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n \ge 2$. ■

17. Реалната функција $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ е позитивна и ограничена. Докажи дека постојат $x_1, x_2 \in [a,b]$ такви да

$$\frac{(x_2 - x_1)[f(x_1)]^2}{f(x_2)} > \frac{1}{4}(b-a) f(a) . \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека не постојат $x_1, x_2 \in [a,b]$ такви да важи неравенството (1), т.е. дека за секои $x_1, x_2 \in [a,b]$ важи

$$\frac{(x_2 - x_1)[f(x_1)]^2}{f(x_2)} \le \frac{1}{4}(b-a) f(a) ,$$

односно

$$f(x_2) \ge \frac{4(x_2 - x_1)[f(x_1)]^2}{(b-a) f(a)}, \text{ за секои } x_1, x_2 \in [a,b] . \qquad (2)$$

Дефинираме низа

$$c_1 = \frac{a+b}{2},\ c_n = c_{n-1} + \frac{b-a}{2^n}, \text{ за } n > 1 .$$

Јасно, за $n > 1$ важи

$$\frac{a+b}{2} \le c_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^2} + \frac{b-a}{2^3} + ... + \frac{b-a}{2^n} \le \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b ,$$

што значи дека $c_n \in [a,b]$, за секој $n > 1$.

Со индукција ќе докажеме дека

$$f(c_n) \ge 2^n f(a) , \qquad (3)$$

за секој $n \ge 1$, што значи дека од неравенството (2) ќе следува дека функцијата f не е ограничена на $[a,b]$, што е противречност, па од добиената противречност ќе следува тврдењето на задачата.

За $x_1 = a,\ x_2 = c_1$ од неравенството (2) добиваме

$$f(c_1) \ge \frac{4(c_1 - a)[f(a)]^2}{(b-a) f(a)} = \frac{4(\frac{a+b}{2} - a)[f(a)]^2}{(b-a) f(a)} = 2 f(a) ,$$

т.е. точно е неравенствот (3). Нека претпоставиме дека за $n = k$ важи

$$f(c_k) \ge 2^k f(a) .$$

Тогаш со замена во (2) за $x_1 = c_k,\ x_2 = c_{k+1}$, од дефиницијата на низата $c_i,\ i = 1,2,...$ и од индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned} f(c_{k+1}) &\ge \frac{4(c_{k+1} - c_k)[f(c_k)]^2}{(b-a) f(a)} = \frac{4\frac{b-a}{2^{k+1}}[f(c_k)]^2}{(b-a) f)a)} \\ &\ge \frac{4\frac{b-a}{2^{k+1}}[2^k f(a)]^2}{(b-a) f)a)} = 2^{k+1} f(a) \end{aligned} ,$$

т.е. точно е неравенството (3), па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n \ge 1$. ■

18. Дадени се реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n, (n>1)$ за кои важи

$$\begin{aligned} 0 \le a_1 \le a_2 \le 2a_1 \\ a_2 \le a_3 \le 2a_2 \\ .... \\ a_{n-1} \le a_n \le 2a_{n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Докажи дека постојат природни броеви $p_1, p_2, ..., p_n$ такви да

$$0 \le (-1)^{p_1} a_1 + (-1)^{p_2} a_2 + ... + (-1)^{p_n} a_n \le a_1 .$$

Решение. За $n=2$ имаме $0 \le a_1 \le a_2 \le 2a_1$, па затоа

$$0 \le -a_1 + a_2 \le a_1$$

т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$ реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_k$ кои ги задоволуваат неравенствата (1), т.е. дека постојат природни броеви $r_1, r_2, ..., r_k$ такви што

$$0 \le (-1)^{r_1} a_1 + (-1)^{r_2} a_2 + ... + (-1)^{r_k} a_k \le a_1 .$$

Да разгледаме $k+1$ реални броеви $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ кои ги задоволуваат неравенствата (1). Тогаш броевите $a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ ги задоволуваат неравенствата (1), па од индуктивната претпоставка следува дека постојат природни броеви $r_1, r_2, ..., r_k$ такви што за

$$S = (-1)^{r_1} a_2 + (-1)^{r_2} a_3 + ... + (-1)^{r_k} a_{k+1}$$

важи

$$0 \le S \le a_2 .$$

Можни се два случаја:

1) $0 \le S \le a_1$ и тогаш $0 \le a_1 - S \le a_1$, т.е.

$$0 \le (-1)^2 a_1 + (-1)^{r_1+1} a_2 + (-1)^{r_2+1} a_3 + ... + (-1)^{r_k+1} a_{k+1} \le a_1 \text{, и}$$

2) $a_1 \le S \le a_2 \le 2a_1$ и тогаш $0 \le S - a_1 \le a_1$, т.е.

$$0 \le (-1)^1 a_1 + (-1)^{r_1} a_2 + (-1)^{r_2} a_3 + ... + (-1)^{r_k} a_{k+1} \le a_1 . \blacksquare$$

19. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + ... + \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)} < \frac{1}{2} .$$

Решение. Да означиме

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + ... + \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)} \text{, за } n \ge 1 .$$

После сведувањето на збирот на најмал заеднички содржател добиваме $S_n = \frac{a_n}{b_n}$, каде $b_n = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)$. Ќе докажеме дека за секој $n \ge 1$ важи $b_n = 2a_n + 1$.

За $n=1$ добиваме $a_1 = 1, b_1 = 3 = 2a \ \ +1$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $b_k = 2a_k + 1$. Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} &= S_{k+1} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}+...+\frac{k}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2k+1)}+\frac{k+1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)}\\ &= S_k+\frac{k+1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{a_k}{b_k}+\frac{k+1}{b_k(2k+3)}=\frac{(2k+3)a_k+k+1}{(2a_k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{(2k+3)a_k+k+1}{2((2k+3)a_k+k+1)+1}\end{aligned}$$

што значи $b_{k+1}=2a_{k+1}+1$. Конечно од принципот на математичка индукција следува дека $b_n=2a_n+1$, за секој $n\ge 1$.

Од претходно изнесенот добиваме

$$S_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n}{2a_n+1}<\frac{1}{2}, \text{ за секој } n\ge 1. \blacksquare$$

20. Нека $a>2$ и нека $a_0=1, a\;\;=a$ и $a_{n+1}=(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}-2)a_n$. Докажи дека за секој $k\in\mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_k}<\frac{1}{2}(2+a-\sqrt{a^2-4}).$$

Решение. Бидејќи $a>2$, постои позитивен реален број b таков што $a=b+\frac{1}{b}$ и притоа важи $a^2-2=b^2+\frac{1}{b^2}$, од што следува

$$\begin{aligned}&a_1=a=b+\frac{1}{b}\\ &a_2=(a^2-2)a=(b^2+\frac{1}{b^2})(b+\frac{1}{b})\\ &a_3=[(\frac{a_2}{a_1})^2-2]a_2=[(b^2+\frac{1}{b^2})^2-2]a_2=(b^4+\frac{1}{b^4})(b^2+\frac{1}{b^2})(b+\frac{1}{b})\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &a_n=(b^{2^{n-1}}+\frac{1}{b^{2^{n-1}}})(b^{2^{n-2}}+\frac{1}{b^{2^{n-2}}})...(b^4+\frac{1}{b^4})(b^2+\frac{1}{b^2})(b+\frac{1}{b}).\end{aligned}$$

Затоа,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}&=1+\frac{b}{b^2+1}+\frac{b^3}{(b^2+1)(b^4+1)}+...+\frac{b^{2^n-1}}{(b^2+1)(b^4+1)...(b^{2^n}+1)}\\ &=1+\frac{1}{b}[\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{b^4}{(b^2+1)(b^4+1)}+...+\frac{b^{2^n}}{(b^2+1)(b^4+1)...(b^{2^n}+1)}].\end{aligned}\qquad(1)$$

Ќе докажеме дека за секои позитивни реални броеви $a_i, i=1,2,...,n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_i)}=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}.\qquad(2)$$

Навистина, за $n=1$ имаме $\frac{a_1}{1+a_1}=\frac{a_1+1-1}{1+a_1}=1-\frac{1}{1+a_1}$, т.е. равенството важи. Нека претпоставиме дека равенството важи за $n=k$, т.е. дека

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_i)}=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_k)}.$$

Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_i)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_i)}+\frac{a_{k+1}}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{k+1})}$$
$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_k)}+\frac{a_{k+1}}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{k+1})}$$
$$=1-\frac{a_{k+1}+1-a_{k+1}}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{k+1})}=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{k+1})},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секои позитивни реални броеви $a_i, i=1,2,...,n$.

Сега, од (1) и (2) следува

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=1+\frac{1}{b}[\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{b^4}{(b^2+1)(b^4+1)}+...+\frac{b^{2^n}}{(b^2+1)(b^4+1)...(b^{2^n}+1)}]$$
$$=1+\frac{1}{b}[1-\frac{1}{(b^2+1)(b^4+1)...(b^{2^n}+1)}]<1+\frac{1}{b}$$
$$=\frac{1}{2}[b+\frac{1}{b}+2-(b-\frac{1}{b})]$$
$$=\frac{1}{2}(2+a-\sqrt{a^2-4}),$$

што и требаше да се докаже. ■

21. Нека $0\le x_i\le 1,\ x_i+y_i=1,\ i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$(1-x_1x_2...x_n)^m+(1-y_1^m)(1-y_2^m)...(1-y_n^m)\ge 1,$$

за секои $m,n\in\mathbf{N}$.

Решение. неравенството е очигледно точно за $n=1$ и за секој $m\in\mathbf{N}$. Нека претпоставиме дека тоа важи за $n=k-1$ и за секој $m\in\mathbf{N}$. Нека $t=x_{k-1}x_k$. Од индуктивната претпоставка имаме

$$(1-x_1x_2...x_{n-2}t)^m+(1-y_1^m)(1-y_2^m)...(1-y_{n-2}^m)[1-(1-t)^m]\ge 1$$

Според тоа, неравенството ќе биде докажано ако докажеме дека

$$(1-y_{n-1}^m)(1-y_n^m)\ge 1-(1-t)^m,$$

т.е. ако докажеме дека

$$(1-a^m)(1-b^m)\ge 1-(a+b-ab)^m,\ \text{за}\ 0\le a\le 1, 0\le b\le 1,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$(a+b-ab)^m\ge a^m+b^m-a^mb^m. \qquad (1)$$

Неравенството (1) ќе го докажеме со индукција по m. За $m=1$ тоа очигледно важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за $m=p$, т.е.

$$(a+b-ab)^p\ge a^p+b^p-a^pb^p. \qquad (2)$$

Ако неравенството (2) го помножиме со $a+b-ab$, после еквивалентни трансформации добиваме

$$\begin{aligned}(a+b-ab)^{p+1}\ge a^{p+1}+b^{p+1}-a^{p+1}b^{p+1}+\\ +[a^p(b-ab)+b^p(a-ab)-a^{p+1}b^p-a^pb^{p+1}+2a^{p+1}b^{p+1}]\end{aligned} \qquad (3)$$

и како

$$a^p(b-ab)+b^p(a-ab)-a^{p+1}b^p-a^pb^{p+1}+2a^{p+1}b^{p+1}=$$
$$=a^pb(1-a)(1-b^p)+ab^p(1-b)(1-a^p)\geq 0,$$

од (3) добиваме дека

$$(a+b-ab)^{p+1}\geq a^{p+1}+b^{p+1}-a^{p+1}b^{p+1}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (1) важи за секој $m\in\mathbf{N}$. ■

22. Нека $x_i>0, i=1,2,...,n$. Докажи го неравенството

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}<\sqrt{n}\,.$$

Решение. За $n=1$ тврдењето очигледно важи, бидејќи важи следново појако неравенство $\frac{x_1}{1+x_1^2}\leq\frac{1}{2}$, кое е еквивалентно со неравенството $0\leq(x_1-1)^2$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$.

Тврдењето да го докажеме за $n=k+1$. Нека

$$S=\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_{k+1}}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_{k+1}^2}\text{ и } s=\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_{k+1}}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_{k+1}^2}.$$

Тогаш $S=\frac{x_1}{1+x_1^2}+s$. Имаме

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}}}{\frac{1}{1+x_1^2}}s=\frac{\frac{x_2}{\sqrt{1+x_1^2}}}{1+\frac{x_2^2}{1+x_1^2}}+...+\frac{\frac{x_{k+1}}{\sqrt{1+x_1^2}}}{1+\frac{x_2^2}{1+x_1^2}+...+\frac{x_{k+1}^2}{1+x_1^2}},$$

и ако ја воведеме смената $y_i=\frac{x_{i+1}}{\sqrt{1+x_1^2}}, i=1,2,...,k$, тогаш од претпоставката следува дека

$$s\sqrt{1+x_1^2}=\frac{y_1}{1+y_1^2}+\frac{y_2}{1+y_1^2+y_2^2}+...+\frac{y_k}{1+y_1^2+y_2^2+...+y_k^2}<\sqrt{k}\,,$$

односно $s<\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+x_1^2}}$. Според тоа,

$$S=\frac{x_1}{1+x_1^2}+s<\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+x_1^2}}\,, \tag{1}$$

па доволно е да докажеме дека $\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+x_1^2}}<\sqrt{k+1}$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $x_1+\sqrt{k}\leq\sqrt{(k+1)(1+x_1^2)}$ и како двете негови страни се позитивни можеме да квадрираме, после што добиваме

$$x_1^2+2x_1\sqrt{k}+k\leq k+1+(k+1)x_1^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq(\sqrt{k}x_1-1)^2.$$

Последното неравенство очигледно е исполнето, што значи дека важи и неравенството (1). Конечно, тврдењето важи $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n. ■

23. Нека $n \geq 2$ е природен број и нека за позитивните реални броеви $a_0, a_1, ..., a_n$ важи $(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$, за секој $k = 1, 2, ..., n-1$. Докажи дека $a_n < \frac{1}{n-1}$.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{a_k + a_{k+1}} = 1 + \frac{1}{a_{k-1} + a_k}, \text{ за } k > 0.$$

Понатаму, со индукција се докажува дека

$$\frac{1}{a_k + a_{k+1}} = k + \frac{1}{a_0 + a_1}, \text{ за } k > 0,$$

од каде добиваме $\frac{1}{a_{n-1} + a_n} > n - 1$, па затоа $a_n < \frac{1}{n-1}$. ■

24. Нека $n \geq 2$ е природен број и $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{2n+1}$ се реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + ... - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

Решение. Нека $m \geq 2$ е природен број. Со индукција по $n \geq 1$ ќе докажеме поопшто неравенство од даденото, т.е. дека

$$\sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} + ... - \sqrt[m]{a_{2n}} + \sqrt[m]{a_{2n+1}} < \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

За $n = 1$ треба да докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} + \sqrt[m]{a_3} < \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3},$$

т.е. $(a - b + c)^m - a^m \leq c^m - b^m$, каде $a = \sqrt[m]{a_1}, b = \sqrt[m]{a_2}, c = \sqrt[m]{a_3}$. Последното неравенство следува од

$$\begin{aligned}(a-b+c)^m - a^m &= (c-b)(a^{m-1} + a^{m-2}(c-b) + ... + a(c-b)^{m-2} + (c-b)^{m-1}) \\ &< (c-b)(b^{m-1} + b^{m-2}c + ... + bc^{m-2} + c^{m-1}) = c^m - b^m,\end{aligned}$$

при што искористивме дека $m > 1, 0 < a < b$ и $0 < c - b < c$.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за $n \geq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}&\sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} + ... - \sqrt[m]{a_{2n}} + \sqrt[m]{a_{2n+1}} - \sqrt[m]{a_{2n+2}} - \sqrt[m]{a_{2n+3}} < \\ &< \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n} + a_{2n+1}} - \sqrt[m]{a_{2n+2}} - \sqrt[m]{a_{2n+3}} \\ &< \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3}},\end{aligned}$$

при што првото неравенството следува од индуктивната претпоставка, а второто од веќе докажаната база на индукцијата, т.е. неравенството за три броја. Според тоа, неравенството важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

25. Нека $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq ...$ е растечка низа ненегативни цели броеви таква што за секој $k \geq 0$ бројот на членовите на низата кои се помали или еднакви на k е конечен. Тој број да го означиме со y_k. Докажи дека за секои природни броеви m и n е точно неравенството

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geq (n+1)(m+1).$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $m+n$. Од условот на задачата следува дека за $m+n=0$ важи $x_0 \geq 1$ или $y_0 \geq 1$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $m+n$. Ќе докажеме дека тоа важи за $m+n+1$. Ако $x_0 \geq m+1$, тогаш

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geq \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j + x_0 \geq n(m+1)+m+1=(n+1)(m+1) .$$

Ако $x_0 \leq m$, тогаш

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geq \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m-1} y_j + y_m \geq (n+1)m+n+1=(n+1)(m+1) .$$

3. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ТРЕТА ГЛАВА

1. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1 a_2 ... a_n = 1$. Докажи дека

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n) \geq 5^n .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$4+x = 5 \cdot \tfrac{1+1+1+1+x}{5} \geq 5\sqrt[5]{x}, \text{ за секој } x>0 . \qquad (1)$$

Ако ги искористиме неравенството (1) и условот $a_1 a_2 ... a_n = 1$ добиваме

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n) \geq 5^n \sqrt[5]{a_1 a_2 ... a_n} = 5^n .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. ■

2. Докажи го неравенството

$$(x^2+y^2+2)^{x^4+y^4} > (x^4+y^4+2)^{x^2 y^2} .$$

Решение. Имаме

$$(x^2+y^2+2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2+4x^2+4y^2+4 > x^4+y^4+2 .$$

Сега од горното неравенство и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+2)^{x^4+y^4} &= [(x^2+y^2+2)^2]^{\frac{x^4+y^4}{2}} \geq [(x^2+y^2+2)^2]^{\sqrt{x^4y^4}} \\ &= [(x^2+y^2+2)^2]^{x^2y^2} > (x^4+y^4+2)^{x^2y^2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

3. Докажи дека при $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$ важи неравенството

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) \geq 125xyz .$$

Решение. *Прв начин.* Најпрво да забележиме дека при $t \geq 2$ и $u > 0$ важи $t^3+u \geq 4t+u$, па затоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$t^3+u \geq 4t+u = t+t+t+t+u \geq 5t^{\frac{4}{5}}u^{\frac{1}{5}}.$$

Според тоа, за $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$ важи

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) \geq (4y+x)(4z+y)(4x+z)$$
$$\geq 5y^{\frac{4}{5}}x^{\frac{1}{5}}5z^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}}5x^{\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}} = 125xyz.$$

Втор начин. За $u \geq 2$ имаме $t^3+u \geq t^3+2$. Понатаму, ако $t \geq 2$, тогаш $(t-2)(t^2+2t-1) \geq 0$, односно $t^3+2 \geq 5t$. Според тоа, за $t \geq 2$ и $u \geq 2$ имаме $t^3+u \geq t^3+2 \geq 5t$. Конечно, за $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$ добиваме

$$y^3+x \geq 5y, \quad z^3+y \geq 5z \text{ и } x^3+z \geq 5x$$

и ако ги помножиме последните три неравенства добиваме

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) \geq 5y5z5x = 125xyz. \ \blacksquare$$

4. Ако $0 < a,b < 1$, тогаш $\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$. Докажи!

Решение. Да ставиме $u = \sqrt{ab}$ и $w = a+b$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $w \geq 2u$, па затоа

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} = \frac{u^2(1+u^2-w)}{(1-u^2)^2} \leq \frac{u^2(1+u^2-2u)}{(1-u^2)^2} = (\frac{u}{1+u})^2.$$

Сега доволно е да докажеме дека $(\frac{u}{1+u})^2 < \frac{1}{4}$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{1+u}{u} > \frac{1}{2}$, кое е исполнето бидејќи $0 < u < 1$. ■

5. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2,$$

за произволни позитивни реални броеви a,b,c,d.

Решение. Од очигледното неравенство

$$(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$$

со елементарни трансформации го добиваме еквивалентното неравенство

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd) \geq (a+b+c+d)^2$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за позитивни реални броеви x и y важи $\frac{1}{xy} \geq (\frac{2}{x+y})^2$. Добиваме,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} = \frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(a+d)}+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}$$
$$\geq \frac{4a(d+a)+c(b+c)}{(b+c+a+d)^2}+\frac{4b(a+b)+d(c+d)}{(c+d+a+b)^2}$$
$$\geq \frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+ad)}{(a+b+c+d)^2} \geq 2.$$

Равенство важи ако и само ако е $a=c$ и $b=d$. ■

6. Докажи дека за ненегативни реални броеви a и b важи неравенството

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

Решение. Со елементарни трансформации и користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}&=\frac{a+b}{2}(a+b+\frac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\\&\geq\sqrt{ab}(a+b+\frac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\\&=\sqrt{ab}(a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b})\\&=\sqrt{ab}((\sqrt{a}-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{b}-\frac{1}{2})^2)\geq 0.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=\frac{1}{4}$. ■

7. Ако a, x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+z}{a+x}x+\frac{a+x}{a+y}y+\frac{a+y}{a+z}z\leq x+y+z\leq\frac{a+y}{a+z}x+\frac{a+z}{a+x}y+\frac{a+x}{a+y}z.$$

Решение. Бидејќи

$$\frac{a+z}{a+x}x=a+z-a\frac{a+z}{a+x}$$

$$\frac{a+x}{a+y}y=a+x-a\frac{a+x}{a+y}$$

$$\frac{a+y}{a+z}z=a+y-a\frac{a+y}{a+z}$$

левата страна на неравенството е еквивалентна на неравенството

$$3a+x+y+z-a(\frac{a+z}{a+x}+\frac{a+x}{a+y}+\frac{a+y}{a+z})\leq x+y+z$$

т.е. на неравенството

$$3\leq\frac{a+z}{a+x}+\frac{a+x}{a+y}+\frac{a+y}{a+z}. \qquad (1)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\frac{a+z}{a+x}+\frac{a+x}{a+y}+\frac{a+y}{a+z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+z}{a+x}\frac{a+x}{a+y}\frac{a+y}{a+z}}=3,$$

т.е. точно е неравенството (1).

Аналогно се докажува дека десното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\frac{y-z}{a+z}x+\frac{z-x}{a+x}y+\frac{x-y}{a+y}z\geq 0. \qquad (2)$$

Бидејќи со циклично пермутирање на броевите x, y и z добиваме равенство од ист вид без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y\geq z$ или $x\leq y\leq z$

Ако $x\geq y\geq z$, тогаш $\frac{y-z}{a+z}x\geq\frac{y-z}{a+x}x$, $\frac{x-y}{a+y}z\geq\frac{x-y}{a+x}z$. Така,

$$\frac{y-z}{a+z}x+\frac{z-x}{a+x}y+\frac{x-y}{a+y}z\geq\frac{y-z}{a+x}x+\frac{z-x}{a+x}y+\frac{x-y}{a+x}z=\frac{(y-z)x+(z-x)y+(x-y)z}{a+x}=0.$$

Ако $x\leq y\leq z$, тогаш $\frac{z-x}{a+x}y\geq\frac{z-x}{a+z}y$, $\frac{x-y}{a+y}z\geq\frac{x-y}{a+z}z$. Затоа

$$\frac{y-z}{a+z}x+\frac{z-x}{a+x}y+\frac{x-y}{a+y}z\geq\frac{y-z}{a+z}x+\frac{z-x}{a+z}y+\frac{x-y}{a+z}z=\frac{(y-z)x+(z-x)y+(x-y)z}{a+z}=0,$$

т.е. точно е неравенството (2). ■

8. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) \geq 64$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и Њутновата биномна формула следува

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) &= 1+\frac{yz+zx+xy}{xyz}+\frac{x+y+z}{xyz}+\frac{1}{xyz}\\ &\geq 1+\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{xyz}+\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{xyz}+\frac{1}{xyz}\\ &= 1+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}+\frac{1}{xyz}\\ &= (1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}})^3 \geq (1+\frac{3}{x+y+z})^3 = 64.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$. ■

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Решение. Даденото неравенство е последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{a+b-c}{c^2}+\frac{b+c-a}{a^2}+\frac{c+a-b}{b^2} \geq \frac{9}{a+b+c},$$

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{c^2}+\frac{(b+c-a)(a+b+c)}{a^2}+\frac{(c+a-b)(a+b+c)}{b^2} \geq 9$$

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2-b^2}{b^2} \geq 9$$

$$\frac{(a+b)^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2} \geq 12.$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{(a+b)^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2} \geq \frac{4ab}{c^2}+\frac{4bc}{a^2}+\frac{4ca}{b^2} \geq 12\cdot\sqrt[3]{\frac{abbcca}{a^2b^2c^2}} = 12,$$

што и требаше да се докаже. ■

10. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=3$. Докажи дека

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $x^2+2\sqrt{x} \geq 3x$, па ако за x ставиме последователно a,b и c и ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) &\geq 3(a+b+c) = (a+b+c)^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),\end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство. ■

11. Нека се a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 позитивни реални броеви такви да

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1.$$

Докажи дека

$$(\frac{1}{a_1} - 1)(\frac{1}{a_2} - 1)(\frac{1}{a_3} - 1)(\frac{1}{a_4} - 1)(\frac{1}{a_5} - 1) \geq 1024 .$$

Решение. Ако го искористиме условот

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1,$$

тогаш левата страна на даденото неравенство ја запишуваме во обликот

$$\begin{aligned} L &= \frac{1-a_1}{a_1} \cdot \frac{1-a_2}{a_2} \cdot \frac{1-a_3}{a_3} \cdot \frac{1-a_4}{a_4} \cdot \frac{1-a_5}{a_5} \\ &= \frac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1} \cdot \frac{a_1+a_3+a_4+a_5}{a_2} \cdot \frac{a_1+a_2+a_4+a_5}{a_3} \cdot \frac{a_1+a_2+a_3+a_5}{a_4} \cdot \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_1} . \end{aligned}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$L = \frac{4\sqrt[4]{a_2a_3a_4a_5}}{a_1} \cdot \frac{4\sqrt[4]{a_1a_3a_4a_5}}{a_2} \cdot \frac{4\sqrt[4]{a_1a_2a_4a_5}}{a_3} \cdot \frac{4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_5}}{a_4} \cdot \frac{4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}{a_5} = 1024 . \blacksquare$$

12. Докажи дека за ненегативни реални броеви a, b, c, x, y, z важи неравенството

$$\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz} .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$abx + bcy + caz \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2xyz},$$

$$ayz + bzx + cxy \geq 3\sqrt[3]{abcx^2y^2z^2}.$$

Ги собираме последните две неравенства и на две страни на добиеното неравенство додаваме $abc + xyz$, со што го добиваме неравенството

$$abc + abx + bcy + caz + ayz + bzx + cxy + xyz \geq abc + 3\sqrt[3]{(abc)^2 xyz} + 3\sqrt[3]{abc(xyz)^2} + xyz$$

т.е. неравенството

$$(a+x)(b+y)(c+z) \geq (\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz})^3 ,$$

кое е еквивалентно на бараното неравенство. ■

13. Нека a, b, c, d се позитивни реални броеви и m, n се природни броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[m+n]{a^m c^n} + \sqrt[m+n]{b^m d^n} \leq \sqrt[m+n]{(a+b)^m (c+d)^n}.$$

Решение. Даденото неравенство е едквивалентно со неравенството

$$\sqrt[m+n]{(\frac{a}{a+b})^m (\frac{c}{c+d})^n} + \sqrt[m+n]{(\frac{b}{a+b})^m (\frac{d}{c+d})^n} \leq 1 . \qquad (1)$$

Ponatamu, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\sqrt[m+n]{(\frac{a}{a+b})^m (\frac{c}{c+d})^n} \leq \frac{\frac{ma}{a+b} + \frac{nc}{c+d}}{m+n} ,$$

$$\sqrt[m+n]{(\frac{b}{a+b})^m (\frac{d}{c+d})^n} \leq \frac{\frac{mb}{a+b} + \frac{nd}{c+d}}{m+n} .$$

Конечно, ако ги собереме претходните две неравенства и помножиме со

$$\sqrt[m+n]{(a+b)^m(c+d)^n}$$

го добиваме бараното неравенството (1) кое е еквивалентно со даденото неравенство.

Забелешка. Ако ставиме

$$\alpha=\tfrac{a}{a+b}\,,\ \beta=\tfrac{c}{c+d}\,,\ \tfrac{m}{m+n}=p\,,\ \tfrac{n}{m+n}=q\,,$$

тогаш

$$\tfrac{b}{a+b}=1-\alpha\,,\ \tfrac{d}{c+d}=1-\beta\,,\ 0<\alpha,\beta<1,\ p>0,q>0 \text{ и } p+q=1\,.$$

Ако замениме во (1) го добиваме еквивалентното равенство

$$\alpha^p\beta^q+(1-\alpha)^p(1-\beta)^q\le 1\,. \blacksquare$$

14. Ако $x>y\ge 0$, докажи дека $x+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}\ge 3$.

Решение. За $x\ge 3$ неравенството е очигледно, а за $x<3$ истото е еквивалентно со неравенството $(x-y)(y+1)^2(3-x)\le 4$ кое е точно, бидејќи од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, при $0\le y<x<3$ имаме

$$\begin{aligned}(x-y)(y+1)^2(3-x)&=\tfrac{1}{4}(y+1)(y+1)(2x-2y)(6-2x)\\&\le\tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{4}(y+1+y+1+2x-2y+6-2x)]^4=4.\ \blacksquare\end{aligned}$$

15. Нека x,y и z се ненегативни реални броеви за кои е исполнето равенството $x+y+z=1$. Докажи ги неравенствата

$$0\le xy+yz+zx-2xyz\le\tfrac{7}{27}\,.$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик

$$xy+yz+zx-2xyz=xy(1-z)+yz(1-x)+zx\ge 0\,.$$

Неравенството е исполнето бидејќи броевите x,y,z се позитивни и $x+y+z=1$.

Да ги разгледаме броевите $\frac{1}{2}-x,\frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$. Ако овие броеви се ненегативни, тогаш од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$[(\tfrac{1}{2}-x)(\tfrac{1}{2}-y)(\tfrac{1}{2}-z)]^{\frac{1}{3}}\le\tfrac{1}{3}[(\tfrac{1}{2}-x)+(\tfrac{1}{2}-y)+(\tfrac{1}{2}-z)]=\tfrac{1}{3}[\tfrac{3}{2}-(x+y+z)]=\tfrac{1}{6}$$

па затоа

$$(\tfrac{1}{2}-x)\,(\tfrac{1}{2}-y)\,(\tfrac{1}{2}-z)\le(\tfrac{1}{6})^3=\tfrac{1}{216}\,, \tag{1}$$

односно

$$\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{4}(x+y+z)+\tfrac{1}{2}(xy+yz+zx)-xyz\le\tfrac{1}{216}$$

и конечно

$$xy+yz+zx-2xyz\le\tfrac{7}{27}\,.$$

Ако еден од броевите $\frac{1}{2}-x,\frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$ е негативен, тогаш јасно неравенството (1) е исполнето. Два од овие три броја не може да се негативни, бидејќи во тој случај, на пример, $\frac{1}{2}-x<0,\frac{1}{2}-y<0$ повлекува $x+y>1$, што е противречност. ■

16. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што, $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Докажи го неравенството

$$\frac{a+b+c}{3}\geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Решение. Имаме

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3+24,$$

па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+\underbrace{3+...+3}_{8\text{ пати}}\geq 9\sqrt[9]{(a^3+b^3+c^3)3^8}$$

Според тоа, $(\frac{a+b+c}{3})^3\geq \sqrt[9]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$, т.е. $\frac{a+b+c}{3}\geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$. ■

17. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $abcd=1$. Докажи дека

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq 4. \qquad (1)$$

Решение. Имаме $cd=\frac{1}{ad}$ и $da=\frac{1}{bc}$, па затоа

$$\begin{aligned}\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}&=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+\frac{1}{ab}}{1+c}+\frac{1+\frac{1}{bc}}{1+d}\\&=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ab}{ab+abc}+\frac{1+bc}{bc+bcd} \qquad (2)\\&=(1+ab)(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc})+(1+bc)(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd})\end{aligned}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}(1+ab)(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc})+(1+bc)(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd})&\geq 4\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+4\frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\\&=4\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+4\frac{a+abc}{a+ab+abc+abcd}\\&=4\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+4\frac{a+abc}{a+ab+abc+1}=4.\end{aligned}$$

Конечно, од равенството (2) и горното неравенство следува неравенството (1). ■

18. Нека $P(x)=ax^2+bx+c$ е квадратен трином со ненегативни реални коефициенти. Докажи дека за било кој позитивен реален број x важи

$$P(x)P(\tfrac{1}{x})\geq [P(1)]^2.$$

Решение. Броевите ab,bc и ca се ненегативни, па затоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}P(x)P(\tfrac{1}{x})&=(ax^2+bx+c)(a\tfrac{1}{x^2}+b\tfrac{1}{x}+c)\\&=a^2+b^2+c^2+ab(x+\tfrac{1}{x})+bc(x+\tfrac{1}{x})+ca(x^2+\tfrac{1}{x^2})\\&\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2=[P(1)]^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

19. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\tfrac{a}{b+c}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{b}{c+a}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{c}{a+b}+\tfrac{1}{2})\geq 1. \qquad (1)$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно неравенствата:

$$\frac{(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)}{8(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 1$$

$$(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)\geq 8(a+b)(b+c)(c+a). \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$(a+b)+(a+c)\geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$$
$$(b+c)+(b+a)\geq 2\sqrt{(b+c)(b+a)}$$
$$(c+a)+(c+b)\geq 2\sqrt{(c+a)(c+b)}$$

Ако ги помножиме последните три неравенства го добиваме неравенството (2), кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

20. Збирот на природните броеви x, y и z е еднаков на 100. Определи ја најголемата вредност на изразот $xy+yz+zx$.

Решение. Имаме $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, па затоа, ако го искористиме условот на задачата добиваме

$$\begin{aligned}100^2=(x+y+z)^2&=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\ &\geq 3(xy+yz+zx)\end{aligned},$$

од каде пак добиваме

$$zy+yz+zx\leq \tfrac{10000}{3}.$$

Но, x, y, z се природни броеви и $xy+yz+zx$ е природен број, па затоа

$$zy+yz+zx\leq 3333.$$

И знак за равенство се достигнува за $(x,y,z)=(33,33,34)$ или за било која нивна пермутација. Провери! ■

21. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq\frac{1}{2}.$$

Решение. Со елементарни трансформации добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}&=(a-\frac{ab^2}{a^2+b^2})+(b-\frac{bc^2}{b^2+c^2})+(c-\frac{ca^2}{c^2+a^2})\\ &=(a-\frac{b}{2}\frac{2ab}{a^2+b^2})+(b-\frac{c}{2}\frac{2bc}{b^2+c^2})+(c-\frac{a}{2}\frac{2ca}{c^2+a^2}) \qquad (1)\\ &=a+b+c-(\frac{b}{2}\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{c}{2}\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{a}{2}\frac{2ca}{c^2+a^2}).\end{aligned}$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$a^2+b^2\geq 2ab,\ b^2+c^2\geq 2bc,\ c^2+a^2\geq 2ac,$$

односно

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}\leq 1,\ \frac{2bc}{b^2+c^2}\leq 1,\ \frac{2ca}{c^2+a^2}\leq 1$$

и ако замениме во (1) и го искористиме условот $a+b+c=1$ добиваме

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}=a+b+c-\left(\frac{b}{2}\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{c}{2}\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{a}{2}\frac{2ca}{c^2+a^2}\right)$$
$$\geq a+b+c-\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right)=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2},$$

што и требаше да се докаже. ■

22. За позитивните броеви x и y е исполнето неравенството
$$x^2+y^3\geq x^3+y^4.$$
Докажи дека $x^3+y^3\leq 2$.

Решение. Ако x е позитивен реален број, тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува
$$x+x^3\geq 2x^2. \tag{1}$$
Аналогно, ако y е позитивен реален број, имаме
$$y^2+y^4\geq 2y^3. \tag{2}$$

Понатаму, ако x и y се позитивни реални броеви за кои важи $x^2+y^3\geq x^3+y^4$, тогаш $x+y^2\geq x^2+y^3$. Навистина, ако претпоставиме дека $x+y^2<x^2+y^3$ и го собереме со неравенството $x^3+y^4\leq x^2+y^3$, од (1) и (2) имаме
$$2x^2+2y^3\leq (x+x^3)+(y^2+y^4)<2x^2+2y^3,$$
што е противречност. Според тоа,
$$x+y^2\geq x^2+y^3\geq x^3+y^4,$$
па затоа
$$2x+2y^2\geq x^2+y^3+x^3+y^4. \tag{3}$$
Повторно од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува
$$2x\leq 1+x^2 \text{ и } 2y^2\leq 1+y^4$$
и ако го земеме предвид неравенството (3) го добиваме бараното неравенство. ■

23. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c.$$

Решение. Ќе докажеме поопшто тврдење, т.е. ќе докажеме дека

Ако $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни броеви и $y_1,y_2,...,y_n$ е нивна пермутација, тогаш
$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+...+\frac{x_n^2}{y_n}\geq x_1+x_2+...+x_n. \tag{1}$$

Прв начин. Бидејќи $\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_i$, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}, i=1,2,...,n$ и $\sqrt{y_i}$, $i=1,2,...,n$ последователно добиваме

$$(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{y_i}} \sqrt{y_i})^2 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i}.$$

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме $\frac{a^2}{b} \ge 2a-b$, за секои $a,b>0$. Според тоа, $\frac{x_i^2}{y_i} \ge 2x_i - y_i$, за $i=1,2,...,n$ и ако ги собереме последните неравенства, тогаш од равенството $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$ непосредно добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \ge 2\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i. \blacksquare$$

24. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви a,b,c е исполнето неравенството

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \ge a+b+c.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{a^3}{b^2} + b + b \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} bb} = 3a,\ \frac{b^3}{c^2} + c + c \ge 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2} cc} = 3b,\ \frac{c^3}{a^2} + a + a \ge 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^2} aa} = 3c$$

Сега, ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 2b + 2c + 2a \ge 3a + 3b + 3c,$$

т.е.

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \ge a+b+c. \blacksquare$$

25. Ако x и y се позитивни реални броеви, тогаш

$$x^3 + y^3 \ge xy(x+y).$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за два позитивни реални броеви имаме

$$x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{x^2 y^2} = 2xy,$$

па затоа

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \ge (x+y)(2xy - xy) = xy(x+y). \blacksquare$$

26. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви a,b,c е исполнето неравенството

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \ge \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^3}{b^2}+a \ge 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}a} = 2\frac{a^2}{b},\ \frac{b^3}{c^2}+b \ge 2\sqrt{\frac{b^3}{c^2}b} = 2\frac{b^2}{c},\ \frac{c^3}{a^2}+c \ge 2\sqrt{\frac{c^3}{a^2}c} = 2\frac{c^2}{a}$$

и ако ги собереме последните три неравенства три, тогаш од задача 8 следува

$$(\frac{a^3}{b^2}+a)+(\frac{b^3}{c^2}+b)+(\frac{c^3}{a^2}+c) \ge 2\frac{a^2}{b}+2\frac{b^2}{c}+2\frac{c^2}{a} = \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})$$

$$\ge \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c,$$

т.е.

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \ge \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\,.$$

Втор начин. Од задача 24 следува

$$\frac{a^3}{b^2}+b = \frac{a^3+b^3}{b^2} \ge \frac{ab(a+b)}{b^2} = \frac{a^2}{b}+a\,,$$

$$\frac{b^3}{c^2}+c = \frac{b^3+c^3}{c^2} \ge \frac{bc(b+c)}{c^2} = \frac{b^2}{c}+b\,,$$

$$\frac{c^3}{a^2}+a = \frac{c^3+a^3}{a^2} \ge \frac{ca(c+a)}{a^2} = \frac{c^2}{a}+c\,,$$

Ако ги собереме трите последни неравенства го добиваме неравенството, кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

27. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}\,.$$

Решение. Според задача 24 имаме

$$a^3+b^3+abc \ge ab(a+b)+abc = ab(a+b+c)\,,$$

$$b^3+c^3+abc \ge bc(b+c)+abc = bc(a+b+c)\,,$$

$$c^3+a^3+abc \ge ca(b+c)+abc = ca(a+b+c)\,,$$

од каде што добиваме

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$= \frac{c}{abc(a+b+c)}+\frac{a}{abc(a+b+c)}+\frac{b}{abc(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc},$$

што и тебаше да се докаже. ■

28. Докажи дека

$$(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \ge 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}\,, \tag{1}$$

за било кои позитивни реални броеви a,b,c.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}\,. \tag{2}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{a}{b}\frac{b}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{c}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=3\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\frac{c}{a}\frac{a}{b}}=3\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{b}\frac{a}{c}\frac{a}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\frac{b}{a}\frac{b}{a}}=3\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\frac{c}{b}\frac{c}{b}}=3\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Сега со собирање на претходните шест неравенства го добиваме неравенството (2), кое е еквивалентно на неравенството (1). ■

29. Докажи дека

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right), \qquad (1)$$

за било кои позитивни реални броеви a,b,c.

Решение. Ако воведеме ознаки $\frac{a}{b}=x$, $\frac{b}{c}=y$, $\frac{c}{a}=z$, при што $xyz=1$, тогаш почетното неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq \frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq \frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$2x^2+2y^2+2z^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3(x+y+z)\,. \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$2x^2+\frac{1}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2x^2\frac{1}{x}}=3\sqrt[3]{x^3}=3x\,,$$

$$2y^2+\frac{1}{y}\geq 3\sqrt[3]{y^2y^2\frac{1}{y}}=3\sqrt[3]{y^3}=3y$$

$$2z^2+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{z^2z^2\frac{1}{z}}=3\sqrt[3]{z^3}=3z\,.$$

Ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме неравенството (1). ■

30. Нека $c\geq b\geq a\geq 0$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 4\sqrt[4]{ab^3}\cdot 5\sqrt[5]{bc^4}\cdot 3\sqrt[3]{ca^2}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}$$

$$=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}cc^{\frac{2}{15}}\geq 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{20}}=60abc$$

што и требаше да се докаже. ■

31. Нека a,b се позитивни реални броеви. Докажи

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leq\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}\ .$$

Решение. Нека x,y се такви да $a=x^3, b=y^3$. Тогаш даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(x^2+y^2)^3\leq 2(x^3+y^3)^2\ ,\ \ x,y>0\ . \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$3x^4y^2\leq x^6+x^3y^3+x^3y^3,$$
$$3x^2y^4\leq y^6+x^3y^3+x^3y^3.$$

Ако ги собереме последните две неравенства и на двете страни од добиеното неравенство додадеме x^6+y^6 го добиваме неравенството

$$x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6\leq 2(x^6+2x^3y^3+y^6),$$

кое е еквивалелнтно неравенството (1). Јасно знак за равенство важи ако и само ако $x=y$, т.е. $a=b$. ■

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}\ .$$

Решение. Со последователна примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$
$$\geq\frac{3}{\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a+b+b+c+c+a}{3}}=\frac{27}{2(a+b+c)^2},$$

што и требаше да се докаже. ■

33. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\leq a\cdot\frac{1+1+(1+b-c)}{3}=a+\frac{ab-ac}{3}\ ,$$

и аналогно $b\sqrt[3]{1+c-a}\leq b+\frac{bc-ba}{3}$, $c\sqrt[3]{1+a-b}\leq c+\frac{ca-cb}{3}$. Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1). ■

34. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}\ .$$

Решение. *Прв начин.* Од $a+b+c=1$ следува $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{b+c}$, па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{2}{2a+b+c}+\frac{2}{a+2b+c}+\frac{2}{a+b+2c}.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина имаме $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$, па затоа

$$2(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{a+b+2c},$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Прво да забележиме дека од условот следува

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Понатаму, од Енгеловиот принцип на минимум за две променливи следува $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{a+2b+c}=\frac{4}{1+b}$ и аналогно $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{1+c}$ и $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{1+a}$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$2(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\geq\frac{4}{1+a}+\frac{4}{1+b}+\frac{4}{1+c},$$

од каде директно следува бараното неравенство.■

35. Ако $x,y,z\in[1,\frac{3}{2}]$, тогаш

$$xy\sqrt{3-2z}+yz\sqrt{3-2x}+zx\sqrt{3-2y}\leq x^3+y^3+z^3.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{\sqrt{3-2x}}{x}+\frac{\sqrt{3-2y}}{y}+\frac{\sqrt{3-2z}}{z}\leq\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}.$$

Ако $t\in[1,\frac{3}{2}]$, тогаш $3-2t\geq 0$ и од $(t+3)(t-1)\geq 0$ добиваме $3-2t\leq t^2$, т.е. $\frac{\sqrt{3-2t}}{t}\leq 1$. Од претходно изнесеното и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека за секои $x,y,z\in[1,\frac{3}{2}]$ важи

$$\frac{\sqrt{3-2x}}{x}+\frac{\sqrt{3-2y}}{y}+\frac{\sqrt{3-2z}}{z}\leq 3\leq\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}.\ ■$$

36. Нека a,b,c се реални броеви и нека постојат $x,y,z\in\{-1,1\}$ такви да $xa+yb+zc=0$. Најди ја најмалата можна вредност на изразот $(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})^2$.

Решение. Доволно е да разгледаме кога $x=y=z$ и кога $x=y\neq z$.

Ако $x=y=z$, тогаш $a+b+c=0$ и затоа

$$(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})^2=(\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{-ab(a+b)})^2=(\frac{(a+b)^2-a^2+ab-b^2}{ab})=(\frac{3ab}{ab})^2=9.$$

Ако $x=y\neq z$, тогаш $c=a+b$ и затоа

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{(a+b)^2+a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{2a^2+2b^2+ab}{ab}=2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+1.$$

Ако a и b се со ист знак, тогаш $2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+1\geq 5$, а ако a и b се со различен знак, тогаш $2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+1\leq -3$ и

$$(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})^2=[2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+1]^2\geq 9.$$

Значи, најмалата можна вредност на $(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})^2$ е 9. ■

37. Најди го најголемиот број A така што неравенството

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq A$$

е исполнето за за секои позитивни реални броеви x,y,z.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за секој $u>0$ важи $1\geq\frac{2u}{1+u^2}$, т.е. важи $u\geq\frac{2u^2}{1+u^2}$. Земаме $u=\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$ и добиваме

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\geq\frac{2\frac{x^2}{y^2+z^2}}{1+\frac{x^2}{y^2+z^2}}=\frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Аналогно

$$\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}=\frac{2y^2}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq 2.$$

Ќе докажеме дека $A=2$. Нека $A>2$ и нека

$$x=y=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}},\ z=\sqrt{\varepsilon},$$

каде $0<\varepsilon<1$. Тогаш,

$$2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\geq A$$

од каде $2\geq A>2$, кога $\varepsilon\to 0$, што е противречност. ■

38. Докажи дека за секој природен број n и за секои ненегативни реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ важи

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^k}{k!}.$$

Решение. Нека $s=a_1+a_2+...+a_n$. Ако прво го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, а потоа ја искористиме Њутновата биномна формула и искористиме дека

$$n(n-1)...(n-k+1)\leq n^k\text{, за }k=1,2,...,n$$

добиваме

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\leq(1+\frac{s}{n})^n=1+\frac{n}{1!}\frac{s}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{s^2}{n^2}+...+\frac{n!}{n!}\frac{s^n}{n^n}$$

$$\leq 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+...+\frac{s^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^k}{k!},$$

што и требаше да се докаже. ■

39. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$x_1 x_2 ... x_n = a .$$

Докажи дека

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq (1+\sqrt[n]{a})^n .$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во видот

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) &= 1+x_1+x_2+...+x_n+x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n \\ &+ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n+...x_1x_2...x_n.\end{aligned} \qquad (1)$$

Притоа производи од видот $x_i x_j$ има $\binom{n}{2}$, производи од видот $x_i x_j x_k$ има $\binom{n}{3}$ итн. Од равенството (1), неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и Њутновата биномна формула следува

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) &= 1+x_1+x_2+...+x_n+x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+ \\ &+ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n+...+x_1x_2...x_n \\ &\geq 1+n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}+\tbinom{n}{2}\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^2}+ \\ &\tbinom{n}{3}\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^3}+...+\tbinom{n}{n}\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^n} \\ &= 1+n\sqrt[n]{a}+\tbinom{n}{2}\sqrt[n]{a^2}+\tbinom{n}{3}\sqrt[n]{a^3}+...+\tbinom{n}{n}\sqrt[n]{a^n}=(1+\sqrt[n]{a})^n,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

40. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n}{x_1+x_2+...+x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1} .$$

Решение. Нека $S=\sum_{i=1}^{n} x_i$. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина применето на броевите $S_i = S - x_i, i=1,2,...,n$ и фактот дека

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = nS - \sum_{i=1}^{n} x_i = nS - S = (n-1)S$$

добиваме

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} S_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S_i} \geq n^2 \quad &\Leftrightarrow \quad &(n-1)S\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_i} \geq n^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=1}^{n} \frac{S}{S_i} \geq \frac{n^2}{n-1} \quad &\Leftrightarrow \quad &\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i+x_i}{S_i} \geq \frac{n^2}{n-1} \quad \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{x_i}{S_i}\right) \geq \frac{n^2}{n-1} \quad &\Leftrightarrow \quad &\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S_i} \geq \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1} ,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

41. Докажи го неравенството

$$n! < \left(\tfrac{n+1}{2}\right)^n, n > 1 .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, применето на броевите $a_i = i, i = 1,...,n$, равенството

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

и фактот дека $a_i \neq a_k$, $i \neq k$ добиваме

$$n!=a_1a_2...a_n=(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n})^n<(\frac{1+2+...+n}{n})^n=[\frac{n(n+1)}{2n}]^n=(\frac{n+1}{2})^n \text{ . ■}$$

42. Докажи го неравенството

$$(n!)^2<[\frac{(n+1)(n+2)}{6}]^n, \quad n>1 .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, применето на броевите $a_i=i^2$, $i=1,2,...,n$, равенството

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

и фактот дека $a_i \neq a_k$, $i \neq k$ добиваме

$$(n!)^2=a_1a_2...a_n=(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n})^n<(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n})^n$$

$$=(\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n})^n=[\frac{n(n+1)(n+2)}{6n}]^n=[\frac{(n+1)(n+2)}{6}]^n \text{ . ■}$$

43. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важи

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}<n-n^{\frac{n-1}{n}} . \qquad (4)$$

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина го добиваме неравенството

$$n-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})=1+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+...+(1-\frac{1}{n})=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{n-1}{n}$$

$$\geq n\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot...\cdot\frac{n-1}{n}}=n\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=n^{\frac{n-1}{n}},$$

кое е еквивалентно со неравенството (4). ■

44. Докажи дека за секој природен број n важи

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+n\geq n\sqrt[n]{n+1} .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+n=(1+1)+(\frac{1}{2}+1)+(\frac{1}{3}+1)+...+(\frac{1}{n}+1)$$

$$=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+...+\frac{n+1}{n}\geq n\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{n+1}{n}}=n\sqrt[n]{n+1},$$

што и требаше да се докаже. ■

45. Докажи го неравенството

$$1+\frac{1}{1!\sqrt{2!}}+\frac{1}{2\sqrt{2!}\sqrt[3]{3!}}+...+\frac{1}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)!}\sqrt[n]{n!}}>\frac{2(n^2+n-1)}{n(n+1)} . \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{1+2+...+k}{k}\geq\sqrt[k]{k!},$$

при што равенство се достигнува само за $k=1$. Од тука

$$\sqrt[k-1]{(k-1)!} \le \frac{1+2+3+...+k-1}{k-1} \;,\; \sqrt[k]{k!} \le \frac{1+2+...+k}{k}$$

или

$$\left(k-1\right)\sqrt[k-1]{\left(k-1\right)!}\sqrt[k]{k!} \le \frac{(1+2+...+k-1)(1+2+...+k)}{k}$$

т.е.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k-1)\sqrt[k-1]{(k-1)!}\sqrt[k]{k!}} &\ge \frac{k}{(1+2+...+k-1)(1+2+...+k)}\\ &= \frac{1+2+...+k-(1+2+...+k-1)}{(1+2+...+k-1)(1+2+...+k)}\\ &= \frac{1}{1+2+...+(k-1)} - \frac{1}{1+2+...+k}.\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1}{(k-1)\sqrt[k-1]{(k-1)!}\sqrt[k]{k!}} \ge \frac{1}{1+2+...+(k-1)} - \frac{1}{1+2+...+k}$$

Ако ги собереме последните неравенства за $k=1,2,...,n$ го добиваме неравенството (1). ■

46. Докажи дека

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 2\,,$$

за секој $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$.

Решение. Имаме

$$1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n} = (1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot ...\cdot 1\cdot 1}_{(n-1)-\text{пати}}\,,$$

па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} = \sqrt[n]{(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\cdot 1\cdot 1\cdot ...\cdot 1} < \frac{1}{n}(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+n-1) = \frac{1}{n}(\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+n) = 1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\,.$$

Потполно аналогно се добива и неравнството

$$\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}})\cdot 1\cdot 1\cdot ...\cdot 1} < \frac{1}{n}(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+n-1) = \frac{1}{n}(n-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}) = 1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\,.$$

Сега е јасно дека

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}+1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} = 2\,.\ ■$$

47. Нека се $x_1, x_2, ..., x_n$ ненегативни реални броеви и $r_1, r_2, ..., r_n$ позитивни рационални броеви такви што $r_1+r_2+...+r_n=1$. Докажи дека

$$x_1^{r_1}x_2^{r_2}...x_n^{r_n} \le r_1^{r_1}r_2^{r_2}...r_n^{r_n}(x_1+x_2+...+x_n)$$

Решение. Означуваме

$$r_1 = \frac{p_1}{q}, r_2 = \frac{p_2}{q}, ..., r_n = \frac{p_n}{q}\,,$$

при што

$$p_1+p_2+...+p_n = q$$

и $p_1, p_2, ..., p_n, q$ се природни броеви. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина го добиваме неравенството

$$(\frac{x_1}{r_1})^{r_1}(\frac{x_2}{r_2})^{r_2}...(\frac{x_n}{r_n})^{r_n} = [(\frac{x_1}{r_1})^{p_1}(\frac{x_2}{r_2})^{p_2}...(\frac{x_n}{r_n})^{p_n}]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{p_1\frac{x_1}{r_1}+p_2\frac{x_2}{r_2}+...+p_n\frac{x_n}{r_n}}{q} = x_1+x_2+...+x_n,$$

кое е квивалентно со неравенството (1). ■

48. Нека $S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}}$. Дали постои позитивна константа C таква што $n \leq S_n \leq Cn$, за секој природен број $n \geq 3$.

Решение. Левото неравенство $n \leq S_n$ не зависи од константа C и истото ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=3$ со непосредно пресметување имаме:

$$S_n = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}+\frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}+\frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}}+\frac{1}{\sqrt{3^2+3^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\frac{2}{\sqrt{5}}(1+\frac{1}{\sqrt{2}})+\frac{2}{\sqrt{13}}>3$$

т.е. точно е неравенството $n \leq S_n$. Нека претпоставиме дека $S_{n-1} \geq n-1$ за некој $n \geq 4$. Тогаш

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}} - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{j^2+n^2}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}$$

$$>\frac{n-1}{\sqrt{2n^2}}+\frac{n-1}{\sqrt{2n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}=\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2}}>1,$$

од каде добиваме $S_n \geq S_{n-1}+1 \geq (n-1)+1 = n$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $S_n \geq n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$.

За да го докажеме десното неравенство ќе го користиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, т.е ќе искористиме дека за секои i и j важи $j^2+k^2 \geq 2jk$. Добиваме:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}} \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2jk}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{j}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}})^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}T_n^2, \qquad (1)$$

каде $T_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}$. Од друга страна

$$\sqrt{i}-\sqrt{i-1} = \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}} > \frac{1}{2\sqrt{i}},$$

од каде што добиваме

$$T_n < 2\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}) = 2\sqrt{n}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$S_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}T_n^2 < \frac{1}{\sqrt{2}}4n = 2\sqrt{2}n.$$

Значи, една константа C за која $S_n \leq Cn$ е $C = 2\sqrt{2}$. ■

49. Реалните броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни и такви што $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Докажи дека

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + ... + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \geq \frac{n^2}{3} .$$

Решение. Нека $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$. Нека $a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$, $b_i = x_i + x_{i+1} + x_{i+2}$, за $i = 1, 2, 3, ..., n$. Тогаш

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} b_i = 3\sum_{i=1}^{n} x_i = 3. \tag{1}$$

Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{n^2}{3} . \tag{2}$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и од условите (1) добиваме

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{b_n}} = n\frac{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}} \geq \frac{n}{\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}} = \frac{n^2}{3} ,$$

т.е. точно е неравенството (2), што значи дека е точно почетното неравенство. ■

50. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви такви што $x_1x_2...x_n = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + ... + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1 .$$

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $x_k > 0$ постои $a_k > 0$ таков што $x_k = a_k^n$. Според тоа,

$$1 = x_1x_2...x_n = a_1^n a_2^n ... a_n^n = (a_1a_2...a_n)^n .$$

Но, од $a_i > 0, i = 1, 2, ..., n$, добиваме $a_1a_2...a_n = 1$.

Од друга страна, за $k = 1, 2, 3, ..., n$ имаме $x_k = a_k^n = a_k^{n-1}a_k = \frac{a_k^{n-1}}{a_1...a_{k-1}a_{k+1}...a_n}$.

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека за $k = 1, 2, 3, ..., n$ важи

$$\begin{aligned} a_1^{n-1} + ... + a_{k-1}^{n-1} + a_{k+1}^{n-1} + ... + a_n^{n-1} &\geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1^{n-1} \cdot ... \cdot a_{k-1}^{n-1} \cdot a_{k+1}^{n-1} \cdot ... \cdot a_n^{n-1}} \\ &= (n-1)a_1...a_{k-1}a_{k+1}...a_n, \end{aligned}$$

па затоа за секој $k = 1, 2, 3, ..., n$ важи

$$\frac{1}{a_1^{n-1}+...+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+...+a_n^{n-1}} \leq \frac{1}{(n-1)a_1...a_{k-1}a_{k+1}...a_n}$$

$$\frac{(n-1)a_k^{n-1}}{a_1^{n-1}+...+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+...+a_n^{n-1}} \leq \frac{a_k^{n-1}}{a_1...a_{k-1}a_{k+1}...a_n}$$

$$n-1+\frac{(n-1)a_k^{n-1}}{a_1^{n-1}+...+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+...+a_n^{n-1}} \leq n-1+\frac{a_k^{n-1}}{a_1...a_{k-1}a_{k+1}...a_n} .$$

Сега,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-1+\frac{a_k^{n-1}}{a_1...a_{k-1}a_{k+1}...a_n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-1+\frac{(n-1)a_k^{n-1}}{a_1^{n-1}+...+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+...+a_n^{n-1}}}$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1^{n-1}+...+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+...+a_n^{n-1}}{a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1}}=\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1})}{a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1}}=1,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека $y_i=\frac{x_i}{n-1}, i=1,2,...,n$. Тогаш даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+...+\frac{1}{1+y_n}\le n-1, \tag{2}$$

и условот $x_1x_2...x_n=1$ го добива обликот $y_1y_2...y_n=(n-1)^{-n}$. Нека претпоставиме дека неравенството (2) не е точно, т.е. дека важи

$$\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+...+\frac{1}{1+y_n}>n-1.$$

Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{1+y_i}>\sum_{k\ne i}(1-\frac{1}{1+y_k})=\sum_{k\ne i}\frac{y_k}{1+y_k}\ge(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{y_1...y_{i-1}y_{i+1}...y_n}{(1+y_1)...(1+y_{i-1})(1+y_{i+1})...(1+y_n)}},\ i=1,2,...,n$$

па затоа

$$\frac{1}{(1+y_1)(1+y_2)...(1+y_n)}>(n-1)^n\frac{y_1y_2...y_n}{(1+y_1)(1+y_2)...(1+y_n)}=\frac{1}{(1+y_1)(1+y_2)...(1+y_n)},$$

што е противречност. Конечно, од добиената протевречност следува неравенството (1). ■

51. Нека $n\ge2$ е природен број и $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$x_1+x_2+...+x_n\ge x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n. \tag{1}$$

Докажи дека

$$x_1+x_2+...+x_n\le\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+...+\frac{x_n}{y_n}. \tag{2}$$

Решение. Нека претпоставиме дека

$$x_1+x_2+...+x_n>\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+...+\frac{x_n}{y_n}. \tag{3}$$

Ако ги собереме неравенствата (1) и (3) и го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}2(x_1+x_2+...+x_n)&>x_1(y_1+\tfrac{1}{y_1})+x_2(y_2+\tfrac{1}{y_2})+...+x_n(y_n+\tfrac{1}{y_n})\\&\ge2x_1+2x_2+...+2x_n\\&=2(x_1+x_2+...+x_n),\end{aligned}$$

што е противречност. Од добиената противречност следува точноста на неравенството (2). ■

52. Најди го нјамалиот природен број M таков да неравенството

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\le M(a^2+b^2+c^2)^2$$

важи за секои реални броеви a,b,c.

Решение. Имаме

$$
\begin{aligned}
ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) &= (a-b)(a^2b+ab^2+c^3-ca^2-abc-cb^2)\\
&=(a-b)[ab(a-c)+b^2(a-c)-c(a-c)(a+c)]\\
&=(a-b)(a-c)(ab+b^2-ca-c^2)\\
&=(a-b)(a-c)[b(a+b+c)-c(a+b+c)]\\
&=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).
\end{aligned}
$$

Затоа

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|=|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)|,$$

што значи дека треба да го најдеме најмалиот број M таков да

$$|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)|\leq M(a^2+b^2+c^2)^2. \qquad (1)$$

Понатаму, ако тројката (a,b,c) го задоволува неравенството (1), тогаш и тројката (ka,kb,kc) го задоволува ова неравенство, па затоа можеме да земеме дека $a^2+b^2+c^2=1$, со што проблемот го сведовме на наоѓање максимум од

$$A=|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)|,$$

кога $a^2+b^2+c^2=1$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$
\begin{aligned}
[3(a^2+b^2+c^2)]^2 &= [2(a-b)^2+2(a-c)(b-c)+(a+b+c)^2]^2\\
&\geq 8\,|(a-b)(b-c)|\cdot|\,2(a-b)^2+(a+b+c)^2\,|\\
&\geq 16\sqrt{2}\,|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)|=16\sqrt{2}A,
\end{aligned}
$$

што значи дека $A\leq\frac{9}{16\sqrt{2}}$ и максимумот е $\frac{9}{16\sqrt{2}}$, кој се достигнува за $a=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}$, $b=\frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}$, $c=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$, (провери!). ■

53. Нека $a_1,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1+...+a_n=1$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+...+a_{n-1}}\geq\frac{n}{2n-1}.$$

Решение. Со S да ја означиме левата страна на неравенството. Тогаш

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-2+2}{2-a_i}=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-a_i}-n.$$

Но, $2-a_i>0$ и од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за броевите $2-a_i>0, i=1,2,...,n$ добиваме

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2-a_i)\geq\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2-a_i}}, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-a_i}\geq\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(2-a_i)}=\frac{n^2}{2n-1}.$$

Значи, $S\geq\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}$. ■

54. Нека $n\ge 2$ е цел број. Да се најде најмалата константа C таква што за секои ненегативни реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ важи неравенството

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C(\sum_{1\le i\le n} x_i)^4 , \qquad (1)$$

б) За константата C, да се најде кога важи знак за равенство.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(\sum_{1\le i\le n} x_i)^4 &= (\sum_{1\le i\le n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j)^2\\ &\ge 4(\sum_{1\le i\le n} x_i^2)(2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j)\\ &= 8(\sum_{1\le i\le n} x_i^2)(\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j)\\ &= 8\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\\ &\ge 8\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_i^2).\end{aligned}$$

што значи дека една константа C која го задоволува неравенството (1) е $\frac{1}{8}$. Јасно, тоа е и најмалата константа, бидејќи за земеме $n-2$ броја да се еднакви на 0, а другите две да се еднакви на $\frac{1}{2}$ во (1) важи знак за равенство. ■

55. Дадени се реални броеви $a_i, b_i, i=1,2,\dots,n$ такви да

$$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n > 0,\ b_1 \ge a_1,\ b_1 b_2 \ge a_1 a_2,\ \dots,\ b_1 b_2 \dots b_n \ge a_1 a_2 \dots a_n.$$

Докажи дека

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \ge a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Решение. Нека $\frac{b_i}{a_i} = \lambda_i,\ i=1,2,\dots,n$. Од условот на задачата имаме $\lambda_i > 0, i=1,2,\dots,n$ и

$$\lambda_1 \ge 1,\ \lambda_1\lambda_2 \ge 1,\ \dots,\ \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n \ge 1, \qquad (1)$$

а бидејќи $b_i - a_i = (\lambda_i - 1)a_i,\ i=1,2,\dots,n$ треба да докажеме

$$(\lambda_1 - 1)a_1 + (\lambda_2 - 1)a_2 + \dots + (\lambda_n - 1)a_n \ge 0 .$$

Користејќи го (1) и неравенствата меѓу средините, добиваме

$$\lambda_1 \ge 1,\ \lambda_1 + \lambda_2 \ge 2,\ \dots,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \ge n .$$

Означуваме $\lambda_i - 1 = \mu_i,\ i=1,2,\dots,n$ и од $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n > 0$ добиваме

$$\mu_1 \ge 0,\ \mu_1 + \mu_2 \ge 0,\ \dots,\ \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \ge 0 ,$$

а треба да докажеме

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n \ge 0 .$$

Имаме

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n = \mu_1(a_1 - a_2) + (\mu_1 + \mu_2)(a_2 - a_3) + \dots + (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)a_n \ge 0,$$

што и требаше да се докаже. ■

56. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви и $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Докажи го неравенството

$$(a_1 + \frac{1}{a_1})^2 + (a_2 + \frac{1}{a_2})^2 + ... + (a_n + \frac{1}{a_n})^2 \geq n(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n})^2$$

Решение. Ако прво го искористиме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа меѓу аритметичката и хармониската средина последователно добиваме

$$[\frac{1}{n}[(a_1 + \frac{1}{a_1})^2 + (a_2 + \frac{1}{a_2})^2 + ... + (a_n + \frac{1}{a_n})^2]]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{n}[(a_1 + a_2 + ... + a_n] + (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n})]$$

$$= \frac{S_n}{n} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}} \geq \frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n},$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + \frac{1}{a_i})^2 \geq n(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n})^2 . \blacksquare$$

57. Ако $a \geq 1,\ b \geq 1$, тогаш

$$3(\frac{a^2 - b^2}{8})^2 + \frac{ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{8}} \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Означуваме $K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ и $A = \frac{a+b}{2}$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме $K \geq A \geq 1$, па затоа $A^3 \geq 1$, $K - A \geq 0$ и $3(K + A) \geq 2(K + 2A)$.

Имаме,

$$ab = 2A^2 - K^2, \quad (a^2 - b^2)^2 = (a + b)^2 (a^2 + b^2 - 2ab) = 16A^2 (K^2 - A^2)$$

па затоа неравенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$\frac{3}{4} A^2 (A^2 - K^2) + \frac{2A^2 - K^2}{2A} \geq \frac{K}{2},$$

т.е. во еквивалентно неравенство

$$3A^3 (K - A)(K + A) \geq 2(K - A)(K + 2A),$$

кое очигледно е исполнето. ■

58. Нека $n \geq 2$ и $c_1, c_2, ..., c_n$ се реални броеви такви што

$$(n-1)(c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2) = (c_1 + c_2 + ... + c_n)^2$$

Докажи, дека или $c_k \geq 0$, за секој k или $c_k \leq 0$ за секој k.

Решение. Ќе докажеме дека за секој $k = 1, 2, ..., n$ важи неравенството

$$nc_k^2 \leq 2(c_1 + c_2 + ... + c_k)c_k \qquad (1)$$

и од неравенството (1) ќе следува тврдењето на задачата. Имено, ако за некој i важи $c_i \geq 0$, тогаш $c_1 + c_2 + ... + c_n \geq 0$, па затоа мора да е $c_k \geq 0$, за $k \neq i$. Слично заклучуваме и во случај кога $c_i \leq 0$.

Останува да го докажеме неравенството (1). Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина

$$\sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2+...+c_{n-1}^2}{n-1}} \geq \frac{c_1+c_2+...+c_{n-1}}{n-1} \qquad (2)$$

т.е.

$$\begin{aligned}(n-1)(c_1^2+c_2^2+...+c_{n-1}^2+c_n^2) &= (n-1)(c_1^2+c_2^2+...+c_{n-1}^2)+(n-1)c_n^2\\ &\geq (c_1+c_2+...+c_{n-1})^2+(n-1)c_n^2\\ &= (c_1+c_2+...+c_n)^2-2(c_1+c_2+...+c_{n-1})c_n+nc_n^2\end{aligned}$$

па од условот на задачата имаме

$$nc_n^2 \leq 2(c_1+c_2+...+c_n)c_n$$

Со тоа, неравенството (1) го докажавме за $k=n$. Аналогно, ако неравенството (2) го примениме за $c_1,c_2,...,c_{k-1},c_{k+1},...,c_n$ го добиваме неравенството (1) за $k=1,2,...,n-1$. ■

59. Нека се $x_1,x_2,...,x_n$ позитивни броеви и

$$A=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ ,\ K=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}\ .$$

Докажи дека барем еден од броевите $x_1,x_2,...,x_n$ го задоволува неравенството

$$A-\sqrt{K^2-A^2} \leq x_j \leq A+\sqrt{K^2-A^2} \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека не постои $j\in\{1,2,3,...,n\}$ таков што е исполнето неравенството (1). Тогаш

$$x_j^2-2Ax_j+2A^2-K^2>0\,, \qquad (2)$$

за секој $j\in\{1,2,3,...,n\}$. Ако ги собереме неравенствата (2) добиваме

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2-2A(x_1+x_2+...+x_n)+n(2A^2-K^2)>0$$

што не е можно (зошто?). ■

60. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви такви што $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$. Докажи дека за секој природен број $k\geq 2$ постојат цели броеви $a_1,a_2,...,$ a_n, не сите еднакви на нула такви што $|a_i|\leq k-1$ за $i=1,2,...,n$ и

$$|a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n|\leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}\,.$$

Решение. Доволно е да го разгледаме случајот кога сите $x_i\geq 0$ (бидејќи ако најдеме такви цели броеви $a_1,a_2,...,a_n$ кои ги задоволуваат условите за $(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)$, со промена на знакот на a_i за негативните x_i ќе добиеме броеви $a_1,a_2,...,a_n$ соодветни за $(x_1,x_2,...,x_n)$).

Од неравенството меѓу аритметичката и квадратна средина следува

$$x_1+x_2+...+x_n \leq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}=\sqrt{n}\ .$$

Понатаму, ако претпоставиме дека $a_1,...,a_n\in\{0,1,2,...,k-1\}$, тогаш од

$$0 \le a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le (k-1)(x_1 + x_2 + ... + x_n) = (k-1)\sqrt{n} \ ,$$

добиваме дека сите збирови од облик $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ припаѓаат на интервалот $[0,(k-1)\sqrt{n}]$. Но, бројот на разгледуваните збирови од видот $\sum_{i=1}^{n} a_ix_i$ е еднаков на k^n и ако интервалот $[0,(k-1)\sqrt{n}]$ го поделиме на k^n-1 интервали со еднакви должини, од принципот на Дирихле следува дека два од добиените збирови за различни $n-$торки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ мора да се наоѓаат во ист интервал. Нека тоа се броевите

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \quad \text{и} \quad b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n \ .$$

Тогаш,

$$|(b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n) - (a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1} \ ,$$

па затоа броевите $c_i = b_i - a_i, \ i = 1,2,...,n$ го задоволуваат условот на задачата. ■

61. Нека a,b,c се позитивни броеви такви да $abc \le a+b+c$. Докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \sqrt{3}abc \ .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$(\tfrac{a+b+c}{3})^3 \ge abc \ ,$$

и ако ова неравенствот го помножиме со условот $abc \le a+b+c$ добиваме

$$(\tfrac{a+b+c}{3})^4 \ge \tfrac{(abc)^2}{3} \ . \tag{1}$$

Но, од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина следува

$$(\tfrac{a^2+b^2+c^2}{3})^2 \ge (\tfrac{a+b+c}{3})^4 \ . \tag{2}$$

Конечно, бараното неравенство следува од неравенствата (1) и (2). ■

62. За реалните броеви $x_1, x_2, ..., x_6$ се исполнети равенствата

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \ .$$

Докажи дека

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \le \tfrac{1}{2} \ . \tag{1}$$

Решение. Ако меѓу броевите $x_1, x_2, ..., x_6$ има непарен број на негативни или некој од нив е 0, тогаш неравенство (1) е очигледно.

Затоа да претпоставиме дека се негативни два или четири од дадените броеви. Заради симетричноста при промена на знаците доволно е да го разгледаме случајот кога два од дадените броеви се негативни.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека негативни се броевите x_1 и x_2. Нека

$$y_k = |x_k| \ , \ k = 1,2,3,4,5,6 \ .$$

Тогаш

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2=6$$
$$y_1+y_2=y_3+y_4+y_5+y_6=s\,.$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$y_1y_2\le(\tfrac{y_1+y_2}{2})^2=\tfrac{s^2}{4}$$

и

$$y_3y_4y_5y_6\le(\tfrac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4})^4=\tfrac{s^4}{4^4}\,,$$

од каде добиваме

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6\le\tfrac{s^6}{4^5}\,. \tag{2}$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$2(y_1^2+y_2^2)\ge(y_1+y_2)^2=s^2$$
$$4(y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2)\ge(y_3+y_4+y_5+y_6)^2=s^2\,,$$

па затоа

$$6=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2\ge\tfrac{s^2}{2}+\tfrac{s^2}{4}=\tfrac{3}{4}s^2$$

т.е.

$$s^2\le 8\,. \tag{3}$$

Конечно, од (2) и (3) имаме

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6=y_1y_2y_3y_4y_5y_6\le\tfrac{s^6}{4^5}\le\tfrac{8^3}{4^5}=\tfrac{1}{2}\,.\ \blacksquare$$

63. Нека $n>1$ и $a_i>0, i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$(a_1+2a_2+...+na_n)\max\{a_i\,|\,i=1,2,...,n\}\ge\tfrac{n+1}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\,.$$

Решение. Да означиме $M=\max\{a_i\,|\,i=1,2,...,n\}$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$n\sum_{k=1}^n a_k^2\ge\sum_{k=1}^n a_k^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\,,\text{ т.е. }\sum_{k=1}^n a_k^2\ge\tfrac{2}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\,,$$

па затоа

$$M\sum_{k=1}^n ka_k=M\sum_{k=1}^n\sum_{p=k}^n a_p\ge\sum_{k=1}^n(a_k\sum_{p=k}^n a_p)=\sum_{k=1}^n a_k^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j$$
$$\ge\tfrac{2}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j+\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\tfrac{n+1}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j,$$

што и требаше да се докаже. ■

64. Нека $n\ge 2$ е природен број и нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви такви да

$$\tfrac{1}{1+x_1}+\tfrac{1}{1+x_2}+...+\tfrac{1}{1+x_n}=1\,.$$

Докажи дека

$$x_1x_2...x_n \ge (n-1)^n .$$

Решение. Да зоначиме $a_i = \frac{1}{1+x_i}, i = 1,2,...,n$. Тогаш $x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$1 - a_i = \sum_{\substack{k=1,\\ k\ne i}}^{n} a_k \ge (n-1)(\prod_{\substack{k=1,\\ k\ne i}}^{n} a_k)^{1/(n-1)} \text{, за секој } i = 1,2,...,n .$$

Ако ги помножиме горните неравенства добиваме

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \ge (n-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\prod_{\substack{k=1,\\ k\ne i}}^{n} a_k)^{1/(n-1)} = (n-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i \text{, т.е. } \prod_{i=1}^{n} \frac{1-a_i}{a_i} \ge (n-1)^n ,$$

па затоа $x_1x_2...x_n \ge (n-1)^n$. ■

65. Докажи дека за секои позитивни броеви a и b важи

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \le \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} .$$

Решение. Ако даденото неравенство го степенуваме на трета го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \le 4 + 2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a} ,$$

односно

$$3(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}) \le 4 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} . \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритемтичката и геометриската средина следува

$$4 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = (1+1+\frac{a}{b}) + (1+1+\frac{b}{a}) \ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot 1\cdot 1} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot 1\cdot 1} = 3(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}) . \blacksquare$$

66. Докажи дека за секои позитивни броеви a,b,c важи

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \ge \frac{3}{1+abc} .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}(1+abc)(\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)}) + 3 &= \frac{1+abc+ab+a}{a(b+1)} + \frac{1+abc+bc+b}{b(c+1)} + \frac{1+abc+ca+c}{c(a+1)} \\ &= \frac{1+a}{a(b+1)} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{1+b}{b(c+1)} + \frac{c(a+1)}{c+1} + \frac{1+c}{c(a+1)} + \frac{a(b+1)}{a+1} \\ &\ge 6\sqrt[6]{\frac{abc(1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2}{abc(b+1)^2(1+b)^2(1+c)^2}} = 6,\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

67. Ако за позитивните релани броеви a,b,c,d важи $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ докажи дека

$$a^2b^2cd + ab^2c^2d + abc^2d^2 + a^2bcd^2 + a^2bc^2d + ab^2cd^2 \le \frac{3}{32} .$$

Решение. Применувајќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ последователно добиваме

$$a^2b^2cd+ab^2c^2d+abc^2d^2+a^2bcd^2+a^2bc^2d+ab^2cd^2=$$
$$=\sqrt{a^2b^2c^2d^2}(ab+bc+cd+ad+ac+bd)$$
$$\le\sqrt{(\tfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4})^4}(ab+bc+cd+ad+ac+bd)$$
$$\le\tfrac{1}{16}(\tfrac{a^2+b^2}{2}+\tfrac{b^2+c^2}{2}+\tfrac{c^2+d^2}{2}+\tfrac{a^2+d^2}{2}+\tfrac{a^2+c^2}{2}+\tfrac{b^2+d^2}{2})$$
$$=\tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{3(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2}=\tfrac{3}{32},$$

што и требаше да се докаже. ■

68. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $ab+bc+ca=3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$1=\frac{ab+bc+ca}{3}\ge\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

што значи дека $abc\le 1$. Според тоа,

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}=\frac{1}{1+a(ab+ac)}=\frac{1}{1+a(3-bc)}=\frac{1}{3a+1-abc}\le\frac{1}{3a}.$$

Слично,

$$\frac{1}{1+b^2(c+a)}\le\frac{1}{3b},\quad \frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3c}.$$

Сега од последните три неравенства следува

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}=\frac{ab+bc+ca}{3abc}=\frac{1}{abc}.\ ■$$

69. За позитивните реални броеви x,y,z важи $xyz=32$. Најди го минимумот на изразот $x^2+4xy+4y^2+2z^2$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$x^2+4xy+4y^2+2z^2=6\cdot\frac{x^2+2xy+2xy+4y^2+z^2+z^2}{6}$$
$$\ge 6\sqrt[6]{16(xyz)^4}=6\sqrt[6]{16\cdot 32^4}=96.$$

Притоа во последното неравенство знак за равенство се достигнува за $x^2=2xy=4y^2=z^2$ и како $xyz=32$ добиваме дека знак за равенство се достигнува за $x=z=4$ и $y=2$, при што $\min\{x^2+4xy+4y^2+2z^2\}=96$. ■

70. Нека $a,b,c\in\mathbf{N}$. Најди ја најмалата вредност на изразот

$$S=\frac{1+a^2}{15+b^2+c^2}+\frac{15+b^2+c^2}{1+a^2}+\frac{6+b^2}{10+a^2+c^2}+\frac{10+a^2+c^2}{6+b^2}+\frac{9+c^2}{7+a^2+b^2}+\frac{7+a^2+b^2}{9+c^2}.$$

Решение. Означуваме

$$u=1+a^2,\ v=6+b^2,\ w=9+c^2.$$

После елементарни трасформации, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$S=\frac{u}{v+w}+\frac{v+w}{u}+\frac{v}{u+w}+\frac{u+w}{v}+\frac{w}{u+v}+\frac{u+v}{w}$$

$$2S=\frac{2u}{v+w}+\frac{2v}{u+w}+\frac{2w}{u+v}+\frac{v+w}{2u}+\frac{u+w}{2v}+\frac{u+v}{2w}+\frac{3}{2}\left(\frac{v+w}{u}+\frac{u+w}{v}+\frac{u+v}{w}\right)$$

$$=\frac{2u}{v+w}+\frac{v+w}{2u}+\frac{2v}{u+w}+\frac{u+w}{2v}+\frac{2w}{u+v}+\frac{u+v}{2w}+\frac{3}{2}\left(\frac{v}{u}+\frac{u}{v}+\frac{w}{u}+\frac{u}{w}+\frac{v}{w}+\frac{w}{v}\right)\geq 3\cdot 2+\frac{3}{2}\cdot 3\cdot 2=15$$

т.е. $S\geq 7,5$, при што равенство се достигнува за $u=v=w$, т.е. $a=3, b=2, c=1$ и тогаш $\min S=7,5$. ■

71. Ако за реалните броеви x,y,z,w се реални броеви такви да

$$x+y+z+w=0 \text{ и } x^2+y^2+z^2+w^2=1,$$

докажи дека

$$-1\leq wx+xy+yz+zw\leq 0. \qquad (1)$$

Решение. Имаме $x+z=-(w+y)$, па затоа

$$wx+xy+yz+zw=(w+y)(x+z)=-(w+y)^2\leq 0,$$

т.е. точно е десното неравенство во (1). Понатаму од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$|wx+xy+yz+zw|=|(w+y)(x+z)|\leq\left[\frac{(w+y)+(x+z)}{2}\right]^2$$

$$\leq\frac{(w+y)^2+(x+z)^2}{2}\leq w^2+y^2+x^2+z^2=1,$$

од што следува левото неравенство во (1). ■

72. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1.$$

Докажи дека

$$a+b+c\geq ab+bc+ca. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x+y+1)(x+y+z^2)\geq(x+y+z)^2,$$

па затоа точно е неравенството

$$\frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}+\frac{a^2+b+c}{(a+b+c)^2}+\frac{a+b^2+c}{(a+b+c)^2}\geq\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1,$$

односно неравенството

$$2(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

73. Нека a,b,c се реални броеви такви што

$$a^2+4b^2+9c^2-2a-12b+6c+2=0. \qquad (1)$$

Определи ја најголемата вредност на збирот $a+b+c$.

Решение. Равенството (1) можеме да го запишеме во обликот

$$(a-1)^2+(2b-3)^2+(3c+1)^2=9$$

$$(a-1)^2+4(b-\tfrac{3}{2})^2+9(c+\tfrac{1}{3})^2=9$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, имаме

$$\begin{aligned}(|a-1|+|b-\tfrac{3}{2}|+|c+\tfrac{1}{3}|)^2&=(|a-1|+\tfrac{1}{2}|2b-3|+\tfrac{1}{3}|3c+1|)^2\\&\le(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9})[(a-1)^2+(2b-3)^2+(3c+1)^2]\\&=9\cdot\tfrac{49}{36}=\tfrac{49}{4}.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$|a-1|+|b-\tfrac{3}{2}|+|c+\tfrac{1}{3}|\le\tfrac{7}{2},$$

односно

$$a-1+b-\tfrac{3}{2}+c+\tfrac{1}{3}\le|a-1|+|b-\tfrac{3}{2}|+|c+\tfrac{1}{3}|\le\tfrac{7}{2}.$$

Значи,

$$a+b+c\le\tfrac{17}{3}.$$

За $a=\frac{15}{7}, b=\frac{25}{7}$ и $c=-\frac{1}{21}$ имаме $a+b+c=\frac{17}{3}$, и истите го задоволуваат условот (1). ■

74. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})^2\ge(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}).$$

Решение. Прво од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите 1,1,1 и $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$3(\tfrac{a^2}{b^2}+\tfrac{b^2}{c^2}+\tfrac{c^2}{a^2})\ge(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})^2\ge3\sqrt[3]{\tfrac{abc}{bca}}(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})=3(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}),$$

т.е.

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}. \tag{1}$$

Понатаму,

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge3\sqrt[3]{\frac{abc}{cab}}=3,$$

па затоа од неравенството (1) добиваме

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Ако во последното неравенство од лево и десно додадеме $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$, го добиваме неравенството

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\frac{a}{c}+2\frac{b}{a}+2\frac{c}{b}\ge3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

75. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $ab+bc+ca=1$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)}\le\frac{\sqrt[3]{3}}{3abc}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)}=\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1+6a^2bc+6b^2ac+6c^2ab}{abc}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1+3ab(ac+bc)+3bc(ba+ca)3ca(ab+bc)}{abc}},$$

и ако го искористиме прво условот $ab+bc+ca=1$, а потоа неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)}=\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1+3ab-3(ab)^2+3bc-3(bc)^2+3ca-3(ca)^2}{abc}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{4-3[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2]}{abc}}\leq\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{4-(ab+bc+ca)^2}{abc}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\leq\frac{1}{abc}$, односно дека $(abc)^2\leq\frac{1}{27}$, што е точно бидејќи

$$(abc)^2=(ab)(bc)(ca)\leq(\tfrac{ab+bc+ca}{3})^3=\tfrac{1}{27}.\ \blacksquare$$

76. Реалните броеви a,b,c го задоволуваат условот $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи дека

$$|a|+|b|+|c|-abc\leq 4.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(|a|+|b|+|c|)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=9,\text{ т.е. } |a|+|b|+|c|\leq 3.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2},$$

па затоа $|abc|\leq 1$, што значи $-abc\leq 1$. Конечно, од $|a|+|b|+|c|\leq 3$ и $-abc\leq 1$ следува бараното неравенство. ■

77. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=2.$$

Докажи дека

$$ab+bc+ca\leq\frac{3}{2}.$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$1-\frac{1}{1+a^2}+1-\frac{1}{1+b^2}+1-\frac{1}{1+c^2}=1.$$
$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1$$

Од горното равенство и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\frac{b}{\sqrt{1+b^2}},\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ и $\sqrt{1+a^2},\sqrt{1+b^2},\sqrt{1+c^2}$ последователно добиваме

$$(a+b+c)^2\leq(\tfrac{a^2}{1+a^2}+\tfrac{b^2}{1+b^2}+\tfrac{c^2}{1+c^2})(a^2+1+b^2+1+c^2+1)=3+a^2+b^2+c^2$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\leq 3+a^2+b^2+c^2,\qquad ab+bc+ca\leq\tfrac{3}{2}.\ \blacksquare$$

78. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што

$$a^2+b^2+c^2<2(a+b+c)\,. \qquad (1)$$

Докажи дека

$$3abc<4(a+b+c)\,.$$

Решение. Според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за позитивните реални броеви a,b и c имаме

$$|a+b+c|=|1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c|\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,,$$

т.е.

$$(a+b+c)^2<3(a^2+b^2+c^2)\,.$$

Понатаму, од последното неравенствот и од (1) следува

$$(a+b+c)^2<3(a^2+b^2+c^2)<3\cdot 2\cdot(a+b+c)\,,$$

и како $a+b+c>0$ добиваме

$$a+b+c<6\,.$$

Според тоа,

$$\frac{(a+b+c)^3}{9}=\frac{(a+b+c)^2(a+b+c)}{9}<\frac{36(a+b+c)}{9}=4(a+b+c)\,. \qquad (2)$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите a,b и c имаме $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$, односно

$$(a+b+c)^3\ge 27abc\,.$$

Конечно, од последното неравенство и неравенството (2), следува

$$3abc<\frac{(a+b+c)^3}{9}<4(a+b+c)\,. \blacksquare$$

79. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3(a^2+b^2+c^2)\,.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите $\frac{a}{\sqrt{b}},\frac{b}{\sqrt{c}},\frac{c}{\sqrt{a}}$ и $a\sqrt{b},b\sqrt{c},c\sqrt{a}$ имаме

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ba^2+cb^2+ac^2}\,.$$

Ќе го докажеме неравенството

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ba^2+cb^2+ac^2}\ge 3\,, \qquad (1)$$

кое заради условот $a+b+c=1$ е еквивалентно со неравенството

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)\,.$$

Последното неравенство е еквивалентно со очигледното неравенство

$$a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2\ge 0\,,$$

Провери!

Конечно, од (1) следува:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ba^2+cb^2+ac^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{ba^2+cb^2+ac^2}(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2+b^2+c^2)\,. \blacksquare$$

80. Ако a,b,c се ненегативни цели броеви такви да $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2 .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите:

$$x_1=\sqrt{a^2(b^2+1)},\ x_2=\sqrt{b^2(c^2+1)},\ x_3=\sqrt{c^2(a^2+1)} ,$$
$$y_1=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}},\ y_2=\sqrt{\frac{b}{c^2+1}},\ y_3=\sqrt{\frac{c}{a^2+1}} .$$

добиваме

$$[a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)](\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1})\geq(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2 .$$

Според тоа, за да го докажеме бараното неравенство, треба да докажеме дека

$$a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)\leq\frac{4}{3} .$$

Од условот $a^2+b^2+c^2=1$ следува

$$\begin{aligned} a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1) &= a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \\ &= 1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3} \\ &\leq 1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^4+b^4+c^4}{3} \\ &= 1+\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Последното неравенство следува од неравенството

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geq 0 .$$

Со тоа е докажано бараното неравенство и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Во овој случај важи знак за равенство во неравенството (1) и важи знак за равенство последното неравенство. ♦

81. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c такви да $a+b+c=3$, важи

$$\frac{a^2+3b^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{b^2+3c^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{c^2+3a^2}{ca^2(4-ca)}\geq 4 .$$

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во видот $A+3B\geq 4$, каде

$$A=\frac{a}{b^2(4-ab)}+\frac{b}{c^2(4-bc)}+\frac{c}{a^2(4-ca)} \text{ и } B=\frac{1}{a(4-ab)}+\frac{1}{b(4-bc)}+\frac{1}{c(4-ca)} .$$

Ќе докажеме дека $A\geq 1$ и $B\geq 1$, од каде е очигледно бараното неравенство.

Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средна и условот $a+b+c=3$ имаме

$$k=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}=3 .$$

Значи,

$$\frac{4-ab}{a}+\frac{4-bc}{b}+\frac{4-ca}{c}=4k-(a+b+c)=4k-3>0$$

и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите следува

$$\sqrt{\tfrac{4-ab}{a}},\sqrt{\tfrac{4-bc}{b}},\sqrt{\tfrac{4-ca}{c}} \text{ и } \sqrt{\tfrac{a}{b^2(4-ab)}},\sqrt{\tfrac{b}{c^2(4-bc)}},\sqrt{\tfrac{c}{a^2(4-ca)}}$$

добиваме

$$(4k-3)A=(\tfrac{4-ab}{a}+\tfrac{4-bc}{b}+\tfrac{4-ca}{c})(\tfrac{a}{b^2(4-ab)}+\tfrac{b}{c^2(4-bc)}+\tfrac{c}{a^2(4-ca)})$$
$$\geq(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})^2=k^2,$$

т.е. $A\geq\frac{k^2}{4k-3}\geq 1$. Понатаму, повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$(4k-3)B=(\tfrac{4-ab}{a}+\tfrac{4-bc}{b}+\tfrac{4-ca}{c})(\tfrac{1}{a(4-ab)}+\tfrac{1}{b(4-bc)}+\tfrac{1}{c(4-ca)})$$
$$\geq(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})^2=k^2,$$

т.е. $B\geq\frac{k^2}{4k-3}\geq 1$. ■

82. Нека x,y,z се реални броеви поголеми од 1 такви да $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Докажи дека

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}},\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}},\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}}$ и $\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$ следува неравенството

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2\leq(\tfrac{x-1}{x}+\tfrac{y-1}{y}+\tfrac{z-1}{z})(x+y+z)=[3-(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})](x+y+z),$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

83. Ако a,b,c,d се позитивни реални броеви такви да $a+b+c+d=1$, докажи дека

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geq\frac{1}{2}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $\frac{a}{\sqrt{a+b}},\frac{b}{\sqrt{b+c}},\frac{c}{\sqrt{c+d}},\frac{d}{\sqrt{d+a}}$ и $\sqrt{a+b},\sqrt{b+c},\sqrt{c+d},\sqrt{d+a}$ следува

$$1=(a+b+c+d)^2=(\tfrac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}+\tfrac{b\sqrt{b+c}}{\sqrt{b+c}}+\tfrac{c\sqrt{c+d}}{\sqrt{c+d}}+\tfrac{d\sqrt{d+a}}{\sqrt{d+a}})^2$$
$$\leq(\tfrac{a^2}{a+b}+\tfrac{b^2}{b+c}+\tfrac{c^2}{c+d}+\tfrac{d^2}{d+a})[(a+b)+(b+c)(c+d)+(d+a)]$$
$$=2(\tfrac{a^2}{a+b}+\tfrac{b^2}{b+c}+\tfrac{c^2}{c+d}+\tfrac{d^2}{d+a}),$$

што и требаше да се докаже. ■

84. Ако a,b,c се позотивни реални броеви такви да $ab+bc+ca\leq 3abc$, докажи дека $a+b+c\leq a^3+b^3+c^3$.

Решение. Од $ab+bc+ca\leq 3abc$ следува $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$, па затоа од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина добиваме

$$a+b+c \geq \frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq 3 .$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува неравенството

$$3(a+b+c) \leq (a+b+c)^2 = (a^{3/2}a^{-1/2} + b^{3/2}b^{-1/2} + c^{3/2}c^{-1/2})^2$$

$$\leq (a^3+b^3+c^3)\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq 3(a^3+b^3+c^3),$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

85. Нека x, y, z се позитивни броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека

а) $\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y} \geq 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$.

б) $\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y} \leq 2$

Решение. а) Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и од условот $x+y+z=1$ следува

$$\sqrt{xy}+z = \sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{z}\sqrt{z} \leq \sqrt{x+z}\sqrt{y+z} = \sqrt{xy+z(x+y+z)} = \sqrt{xy+z} .$$

Слично, $\sqrt{yz+x} \geq \sqrt{yz}+x$ и $\sqrt{zx+y} \geq \sqrt{zx}+y$. Конечно, од последните три неравенства и од условот на задачата следува точноста на неравенството.

б) Имаме

$$\sqrt{xy+z} = \sqrt{xy+z(x+y+z)} = \sqrt{(z+x)(z+y)} \leq \frac{2z+x+y}{2} ,$$

и аналогно

$$\sqrt{yz+x} \leq \frac{2x+y+x}{2} \text{ и } \sqrt{zx+y} \leq \frac{2y+z+x}{2} .$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме условот $x+y+z=1$ го добиваме бараното неравенство. ■

86. Нека x, y, z се позитивни броеви такви да $xyz \geq 1$. Докажи дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0 .$$

Решение. *Прв начин*. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+1-\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+1-\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0,$$

$$\frac{3}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2} . \qquad (1)$$

Од условот $xyz \geq 1$ неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = (x^{5/2}x^{-1/2}+y^2+z^2)^2 \leq (x^5+y^2+z^2)(\tfrac{1}{x}++y^2+z^2)$$

$$\leq (x^5+y^2+z^2)(yz++y^2+z^2),$$

т.е.

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} = \frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} ,$$

и ако ги искористиме аналогните неравенства добиваме

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2} \leq \frac{xy+yz+zx+2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \leq \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{3}{x^2+y^2+z^2},$$

при што во второто неравенство го користевме добро познатото неравенство

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx .$$

Втор начин. Прво, да забележиме дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(y^2+z^2)(x^3-1)^2}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\ge 0,$$

Според тоа,

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\ge\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^5-y^2}{y^3(y^2+z^2+x^2)}+\frac{z^5-z^2}{z^3(z^2+x^2+y^2)}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2-\tfrac{1}{x}+y^2-\tfrac{1}{y}+z^2-\tfrac{1}{z})$$

$$\ge\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ge 0.$$

Притоа, во второто неравенство користевме дека

$$-\tfrac{1}{x}\ge yz,\ -\tfrac{1}{y}\ge xz,\ -\tfrac{1}{z}\ge xy,$$

а во третото го користевме добро познатото неравенство

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx .$$

Трет начин. Неравенството

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}$$

е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\ge 0,$$

кое е очигледно исполнето. Ако ги искористиме аналогните неравенства за другите два собирци, условот $xyz\ge 1$ и неравенството

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx ,$$

добиваме

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\ge\frac{x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}\ge\frac{x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy}{x^2+y^2+z^2}\ge 0 .\ \blacksquare$$

87. Најди најмал реален број K таков да за секои позитивни реални броеви x,y,z важи

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\le K\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)} .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}=\sqrt{x}\sqrt{xy}+\sqrt{y}\sqrt{yz}+\sqrt{z}\sqrt{zx}\le\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)} .$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x+y+z}{3}\,\frac{xy+yz+zx}{3}\le\sqrt[3]{xyz}\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=xyz=\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}\le\frac{x+y}{2}\,\frac{y+z}{2}\,\frac{z+x}{2} .$$

Според тоа,

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\le\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)}\le\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)} ,$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. Значи, $K=\frac{3}{2\sqrt{2}}$. ■

88. Нека $x_i, i=1,2,...,n,n+1$ се позитивни реални броеви такви што
$$x_1+x_2+...+x_n=x_{n+1}.$$
Докажи дека
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)}.$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}&=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}\le\sqrt{1^2+...+1^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i(x_{n+1}-x_i)}\\&=\sqrt{n[x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i^2]}=\sqrt{n[x_{n+1}^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2]}.\end{aligned}\tag{1}$$
Повторно, од условот на задачата и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме
$$x_{n+1}^2=(\sum_{i=1}^{n}1\cdot x_i)^2\le n\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$
т.е.
$$-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\le -x_{n+1}^2.\tag{2}$$
Конечно, од условот на задачата и од неравенствата (1) и (2) следува
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}&\le\sqrt{nx_{n+1}^2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\le\sqrt{nx_{n+1}^2-x_{n+1}^2}\\&=\sqrt{x_{n+1}(nx_{n+1}-x_{n+1})}=\sqrt{x_{n+1}(nx_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i)}\\&=\sqrt{x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)},\end{aligned}$$
што и требаше да се докаже.

Втор начин. Имаме
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)}=\sqrt{nx_{n+1}^2-x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt{nx_{n+1}^2-x_{n+1}^2}=x_{n+1}\sqrt{n-1},$$
што значи дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}\le x_{n+1}\sqrt{n-1}$$
т.е. на неравенството
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}}(1-\frac{x_i}{x_{n+1}})\frac{1}{n-1}}\le 1.\tag{3}$$
За да го докажеме неравенството (1) ќе го користиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина. Имаме

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}}(1-\frac{x_i}{x_{n+1}})\frac{1}{n-1}} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{x_i}{x_{n+1}}+\frac{1-\frac{x_i}{x_{n+1}}}{n-1})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{n+1}}+\frac{1}{2(n-1)}(n-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{n+1}})$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n-1)}(n-1)=1. \ \blacksquare$$

89. Нека $n\geq 2$ и $a_i \in \mathbf{R}^+, i=1,2,...,n$ се такви да $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Докажи дека за секои $x_i \in \mathbf{R}^+, i=1,2,...,n$ такви да $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ важи

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \le \frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i^2}{1-a_i}.$$

Решение. Ако $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, тогаш $1=(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$, па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенство

$$\frac{1}{n-1}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-a_i}. \tag{1}$$

Од неравенствотона Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-a_i})[\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)]\ge(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-a_i}}\sqrt{1-a_i})^2=(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2=1$$

и како

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=n-\sum_{i=1}^{n}a_i=n-1,$$

добиваме дека е точно неравенството (1). ■

90. Докажи дека за секои реални броеви $a_i, i=1,2,...,n$ важи

$$\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)}\le\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2}. \tag{1}$$

Решение. Со последователна примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за броевите

$$x_i=\sqrt{a_i(a_{i+1}+a_{i+2})},\ y_i=\sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}},\ i=1,2,...,n,$$

каде $a_{n+1}=a_1, a_{n+2}=a_2$ и очигледното неравенство $a_i a_j \le \frac{a_i^2+a_j^2}{2}$ го добиваме неравенството

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2=(x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)^2\le(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2)$$
$$=[a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+...+a_n(a_1+a_2)](\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2})$$

$$\leq (\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{a_1^2+a_3^2}{2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{2}+\frac{a_2^2+a_4^2}{2}+...+\frac{a_n^2+a_1^2}{2}+\frac{a_n^2+a_2^2}{2})(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2})$$

$$= 2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2}),$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

91. Нека $a_i, i=1,2,...,n$ се ненегативни броеви. Докажи, дека неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^4 \tag{1}$$

е точно за произволни реални броеви $x_i, i=1,2,...,n$ ако и само ако $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$.

Решение. Нека за произволни реални броеви $x_i, i=1,2,...,n$ е точно неравенството (1). Земаме $x_i=1, i=1,2,...,n$ и добиваме $(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$, од што следува $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$.

Обратно, нека $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2)^2 = (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\sqrt{a_i}x_i^2)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^4 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^4 \text{ . ■}$$

92. Нека c е произволен позитивен реален број. Најди ја онаа пермутација $k_0, k_1, k_2, ..., k_n$ на броевите $0,1,2,...,n$ за која изразот

$$c^{k_0} + c\cdot c^{k_1} + c^2 \cdot c^{k_2} + ... + c^n \cdot c^{k_n} \tag{1}$$

достигнува максимална вредност.

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски Шварц добиваме

$$1\cdot c^{k_0} + c\cdot c^{k_1} + c^2 \cdot c^{k_2} + ... + c^n \cdot c^{k_n} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(c^i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(c^{k_i})^2} = \sum_{i=0}^{n} c^{2i}. \tag{2}$$

Според тоа, за која било пермутација $k_0, k_1, k_2, ..., k_n$ изразот (1) не е поголем од $\sum_{i=0}^{n} c^{2i}$. Меѓутоа, во неравенството (2) знак за равенство се достигнува ако и само ако

$$\frac{1}{c^{k_0}} = \frac{c}{c^{k_1}} = \frac{c^2}{c^{k_2}} = ... = \frac{c^n}{c^{k_n}} ,$$

што е можно ако и само ако $k_0=0, k_1=1, k_2=2, ..., k_n=n$. Според тоа, бараната пермутација за која изразот (1) достигнува максимална вредност е идентичната пермутација. ■

93. Нека $a_1,a_2,...,a_{2008}$ се реални броеви такви што

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2008}=0 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2008}^2=502. \end{cases} \qquad (1)$$

Одреди ја максималната вредност за a_{2008}. Најди барем една низа од вредности $a_1,a_2,...,a_{2007}$ во која таа се достигнува.

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за реалните броеви $a_1,a_2,...,a_{2007}$ имаме

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+...+a_{2007})^2 &= (1\cdot a_1+1\cdot a_2+...+1\cdot a_{2007})^2 \\ &\le (\underbrace{1^2+1^2+....+1^2}_{2007-\text{пати}})(a_1^2+a_2^2+...+a_{2007}^2) \qquad (2) \\ &= 2007(a_1^2+a_2^2+...+a_{2007}^2),\end{aligned}$$

При што знак за равенство се достигнува ако и само ако

$$\tfrac{a_1}{1}=\tfrac{a_2}{1}=...=\tfrac{a_{2007}}{1},$$

т.е. ако и само ако $a_1=a_2=...=a_{2007}$.

Равенствата (1) ќе ги запишеме во облик

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2007}=-a_{2008} \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2007}^2=502-a_{2008}^2 \end{cases}$$

и ако замениме во (2) добиваме

$$(-a_{2008})^2\le 2007(502-a_{2008}^2).$$

Значи, $a_{2008}^2\le\frac{2007\cdot 502}{2008}=\frac{2007}{4}$, од каде добиваме $|a_{2008}|\le\frac{\sqrt{2007}}{2}$.

За низа реални броеви $a_1,a_2,...,a_{2007}$, за која $a_1=a_2=...=a_{2007}$ е исполнето $|a_{2008}|=\frac{\sqrt{2007}}{2}$. Според тоа, $(a_{2008})_{\max}=\frac{\sqrt{2007}}{2}$. ■

94. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни броеви, за кои што

$$x_1+x_2+...+x_n\ge\sqrt{n},\ n\ge 1.$$

Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{2}+...+\tfrac{1}{n}),\ n\ge 1.$$

Решение. Воведуваме ознаки

$$s_i=x_1+x_2+...+x_i,\ y_i=\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\ \text{ и }\ t_i=\sqrt{i}.$$

Да забележиме дека, според условот на задачата важи

$$s_i\ge t_i. \qquad (1)$$

и при воведените ознаки имаме $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=t_n$. Од друга страна, со непосредно пресметување имаме:

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}x_i[y_{n+1}+\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})]=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})+\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j+1})\sum_{i=1}^{j}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}s_j(y_j-y_{j+1})+y_{n+1}s_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i[y_{n+1}+\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})]=\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})+\sum_{i=1}^{n}y_iy_{n+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j+1})\sum_{i=1}^{j}y_i+\sum_{i=1}^{n}y_iy_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}t_j(y_j-y_{j+1})+y_{n+1}s_n$$

Од претходните две равенства, неравенствата (1) и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{j=1}^{n}t_j(y_j-y_{j+1})+y_{n+1}s_n\le\sum_{j=1}^{n}s_j(y_j-y_{j+1})+y_{n+1}s_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2},$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2\le\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ .$$

Конечно,

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2=\sum_{i=1}^{n}(\tfrac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}})^2=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{i}\tfrac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{1}{i}})^2}\ge\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{i}\tfrac{1}{(1+\sqrt{1})^2}=\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{i},$$

што и требше да се докаже. ■

95. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се дадени реални броеви, не сите еднакви на нула. Реалните броеви $r_1,r_2,...,r_n$ се такви да за секои реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n}r_i(x_i-a_i)\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\ .$$

Најди ги броевите $r_1,r_2,...,r_n$.

Решение. *Прв начин.* Земаме $x_1>a_1$ и $x_k=a_k$, $k=2,3,...,n$. Тогаш

$$r_1(x_1-a_1)\le\sqrt{x_1^2+\sum_{i=2}^{n}a_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}=\frac{x_1^2-a_1^2}{\sqrt{x_1^2+\sum_{i=2}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}\ ,$$

па затоа

$$r_1\le\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+\sum_{i=2}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}\ . \tag{1}$$

Неравенството (1) важи за секој $x_1=a_1+\varepsilon$, каде $\varepsilon>0$ е произволен број, па затоа

$$r_1\le\frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}\ . \tag{2}$$

Ако претходната постапка ја повториме за $x_1>a_1$ и $x_k=a_k$, $k=2,3,...,n$, добиваме

$$r_1 \geq \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} . \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува $r_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$. Аналогно се докажува дека $r_k = \frac{a_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$, $k = 2,3,...,n$.

Втор начин. За $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, од условот добиваме

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} r_i a_i ,$$

а за $x_i = 2a_i$, $i = 1, 2,...,n$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} ,$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} . \tag{4}$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \tag{5}$$

и како $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \neq 0$, од (4) и (5) следува дека $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \geq 1$. Понатаму, за $x_i = r_i$, $i = 1, 2,...,n$, од условот добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} ,$$

па затоа од (4) следува $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \leq 1$, што заедно со претходно изнесеното значи

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} = 1 . \tag{6}$$

Сега, од (4) и (5) следува дека во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, а тоа е можно ако и само ако постои $\lambda \in \mathbf{R}$ таков што $r_i = \lambda a_i$, за $i = 1, 2,...,n$ и ако замениме во (4) добиваме

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \text{, т.е. } r_k = \frac{a_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} ,\ k = 1, 2, 3,...,n . \blacksquare$$

96. Позитивните реални броеви $x_1, x_2,..., x_{1997}$ го задоволуваат условот

$$x_{n+1}^2 \geq \frac{x_1^2}{1^3} + \frac{x_2^2}{2^3} + ... + \frac{x_n^2}{n^3} \text{, за } n = 1, 2,...,1996 .$$

Докажи дека постои природен број N таков што

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{x_{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}>1,997\ .$$

Решение. Од условот на задачата, равенството

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите $\frac{x_i}{\sqrt{i^3}}$, $i=1,2,...,n$ и $\sqrt{i^3}$, $i=1,2,..,n$ добиваме

$$x_{n+1}^2\ge\frac{x_1^2}{1^3}+\frac{x_2^2}{2^3}+...+\frac{x_n^2}{n^3}\ge\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{1^3+2^3+...+n^3}=\frac{4(x_1+x_2+...+x_n)^2}{n^2(n+1)^2}\ ,$$

од што следува

$$\frac{x_{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}\ge\frac{2}{n(n+1)}=2(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1})\ .$$

Според тоа,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{x_{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}\ge 2(1-\tfrac{1}{N+1})$$

и ако земеме $N\ge 666$ добиваме $2(1-\frac{1}{N+1})>1,997$. ■

97. Збирот на m различни позитивни парни броеви и n различни непарни броеви е 1987. Определи ја максималната вредност на изразот $3m+4n$.

Решение. Јасно,

$$1987\ge(2+4+...+2m)+(1+3+...+2n-1)=(m+\tfrac{1}{2})^2+n^2-\tfrac{1}{4}\ ,$$

т.е.

$$(m+\tfrac{1}{2})^2+n^2\le 1987+\tfrac{1}{4}\ .$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\begin{aligned}3m+4n&=3(m+\tfrac{1}{2})+4n-\tfrac{3}{2}\\&\le\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(m+\tfrac{1}{2})^2+n^2}-\tfrac{3}{2}\\&\le 5\sqrt{1987+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{3}{2}<222.\end{aligned}$$

Затоа $3m+4n\le 221$. Во множеството природни броеви равенката $3m+4n=221$ има решение и како $221=7\cdot 31+4$ добиваме дека

$$3(m-31)+4(n-32)=0\ ,$$

т.е. едно решение е $m=31, n=32$. Освен тоа,

$$1+2+...+63=2016=1987+29\ .$$

Но,

$$54+56+58+60-(65+67+69)=29\ ,$$

па затоа збирот на 27 парни броеви $2,4,6,...,50,52,62$ и 35 непарни броеви $1,3,...,69$ е точно 1987 и притоа $3m+4n=221$. ■

98. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_n$ важи неравенството

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k y_k} \geq 4n^2 .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите $a_k = x_k + y_k, b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k y_k}}, k = 1,2,...,n$ следува

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k y_k} \geq (\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+y_k}{\sqrt{x_k y_k}})^2 . \qquad (1)$$

Понатаму, за секој $k = 1,2,...,n$ од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{x_k+y_k}{\sqrt{x_k y_k}} \geq 2 . \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува бараното неравенство.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во (1) и (2) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $x_k = y_k, k = 1,2,...,n$. ■

99. Докажи дека за произволни реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ важи

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + ... + \frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2} < \sqrt{n} . \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_1^2+...+x_i^2} < \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{(1+x_1^2+...+x_i^2)^2}} . \qquad (2)$$

Но, за $i \geq 2$ важи

$$\frac{x_i^2}{(1+x_1^2+...+x_i^2)^2} \leq \frac{x_i^2}{(1+x_1^2+...+x_{i-1}^2)(1+x_1^2+...+x_i^2)} = \frac{1}{1+x_1^2+...+x_{i-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+...+x_i^2} ,$$

и

$$\frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1 - \frac{1}{1+x_1^2} ,$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{(1+x_1^2+...+x_i^2)^2} = 1 - \frac{1}{1+x_1^2} + \sum_{i=2}^{n}(\frac{1}{1+x_1^2+...+x_{i-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+...+x_i^2}) = 1 - \frac{1}{1+x_1^2+...+x_n^2} < 1$$

и ако замениме во (2) го добиваме неравенството (1). ■

100. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви такви да

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = A .$$

Докажи дека

$$\sum_{i \neq k}\frac{a_i}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 A}{A-1} . \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{i\neq k}\frac{a_i}{a_k}\sum_{i\neq k}a_ia_k \geq (\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\neq k}a_i)^2=[(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i]^2=(n-1)A^2 .$$

Од друга страна

$$\sum_{i\neq k}a_ia_k=(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=A^2-A ,$$

па затоа важи (1). ■

101. Нека $a,b,c,d\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ и нека

$$\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=1,\ \cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d\geq \frac{10}{3} .$$

Докажи дека $a,b,c,d\in[0,\frac{\pi}{6}]$.

Решение. Нека $\sin a=x, \sin b=y, \sin c=z, \sin d=t$. Тогаш

$$\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d=4-2(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d$$

$$=4-2(x^2+y^2+z^2+t^2).$$

Доволно е да докажеме дека, ако реалните броеви x,y,z,t ги задоволуваат условите

$$x+y+z+t=1, x^2+y^2+z^2+t^2\leq\frac{1}{3} ,$$

тогаш $x,y,z,t\in[0,\frac{1}{2}]$. Ќе докажеме дека $x\in[0,\frac{1}{2}]$. Ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц за броевите x,y,z и 1,1,1 добиваме

$$(y+z+t)^2\leq 3(y^2+z^2+t^2) ,$$

па затоа

$$\frac{1}{3}\geq x^2+y^2+z^2+t^2\geq x^2+\frac{(y+z+t)^2}{3}=x^2+\frac{(1-x)^2}{3}=\frac{4x^2-2x+1}{3} ,$$

т.е. $4x^2-2x\leq 0$, што значи $x\in[0,\frac{1}{2}]$. Аналогно се докажува дека $y,z,t\in[0,\frac{1}{2}]$. ■

102. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\geq\frac{9}{x+y+z} .$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува неравенството

$$\frac{x+y+z}{3}=\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}}{3}\geq\frac{3}{\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}} ,$$

Кое е еквивалентно со неравенството (1).

Втор начин. Од Ангелскиот принцип на минимум непосредно добиваме

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}=\frac{\sqrt{2}^2}{x+y}+\frac{\sqrt{2}^2}{y+z}+\frac{\sqrt{2}^2}{z+x}\geq\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{x+y+y+z+z+x}=\frac{9}{x+y+z} .$$ ■

103. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\geq x+y+z .$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\geq\frac{1}{x+y}\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{1}{y+z}\frac{(y+z)^2}{2}+\frac{1}{z+x}\frac{(z+x)^2}{2}$$

$$=\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}=x+y+z.$$

Втор начин. Од Ангелскиот принцип на минимум следува

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}=(\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x})+\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z}+\frac{x^2}{z+x}$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}+\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}$$

$$=x+y+z.\ \blacksquare$$

104. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Решение. *Прв начин.* Нека $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ и $z=\frac{1}{c}$. Тогаш, $xyz=1$ и

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\,.$$

Десната страна на неравенството да ја означиме со S. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)]S=x^2+y^2+z^2+(x^2\frac{z+x}{y+z}+y^2\frac{y+z}{z+x})+$$

$$+(y^2\frac{x+y}{z+x}+z^2\frac{z+x}{x+y})+(z^2\frac{y+z}{x+y}+x^2\frac{x+y}{y+z})$$

$$\geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2$$

односно

$$S\geq\frac{x+y+z}{2}\,.$$

Повторно од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$S\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}\,,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$, односно ако и само ако $a=b=c=1$.

Втор начин. Со примена, прво на Ангелскиот принцип на минимум, а потоа на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата, добиваме

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}+\frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)}+\frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}\geq\frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{2abc}\geq\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2abc}=\frac{3}{2}.$$

Трет начин. Прво од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите

$$\frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}, \frac{1}{b\sqrt{b(c+a)}}, \frac{1}{c\sqrt{c(a+b)}} \text{ и } \sqrt{a(b+c)}, \sqrt{b(c+a)}, \sqrt{c(a+b)}$$

а потоа, од неравенството меѓу артиметичката и геометриската средина и од условот на задачата имаме

$$(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})^2 \leq (\tfrac{1}{a^3(b+c)}+\tfrac{1}{b^3(a+c)}+\tfrac{1}{c^3(a+b)})[a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)],$$

т.е.

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2}\frac{ab+bc+ca}{abc}$$

$$\geq \frac{1}{2}\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{abc} = \frac{3}{2}. \ \blacksquare$$

105. Нека a,b,x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}.$$

Решение. *Прв начин.* Десната страна на неравенството можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} = \frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}. \tag{1}$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $\frac{x}{\sqrt{ayx+bzx}}, \frac{y}{\sqrt{azy+bxy}}, \frac{z}{\sqrt{axz+byz}}$ и $\sqrt{ayx+bzx}, \sqrt{azy+bxy}, \sqrt{axz+byz}$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{axy+ayz+azx+bxy+byz+bzx}\\ &= \frac{(x+y+z)^2}{a(xy+yz+zx)+b(xy+yz+zx)} = \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}\end{aligned} \tag{2}$$

Од друга страна $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, па затоа $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} \geq 1$. Сега,

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} = \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+2\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} \geq 1+2=3,$$

од каде добиваме

$$\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{a+b}. \tag{3}$$

Конечно, од (1), (2) и (3) следува точноста на бараното неравенство.

Втор начин. Од Ангелскиот принцип на минимум и познатото неравенство $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ следува

$$\begin{aligned}\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} &= \frac{x^2}{axy+bxz}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}\\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{axy+bxz+ayz+bxy+axz+byz}\\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{a+b}.\end{aligned}$$

Забелешка. Ако во неравенството (1) ставиме $a=1, b=2$ го добиваме неравенството

$$\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\geq 1. \qquad (4)$$

Неравенството (4) е директна последица од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Навистина, со смените $m=y+2z, n=z+2x, p=x+2y$ неравенството (4) го добива видот

$$(\frac{m}{n}+\frac{n}{m})+(\frac{n}{p}+\frac{p}{n})+(\frac{p}{m}+\frac{m}{p})+3(\frac{n}{m}+\frac{p}{n}+\frac{m}{p})\geq 15,$$

Кое се добива ако на собирците од секоја заграда го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. ■

106. Нека $x,y,z\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{x^3}{x^3+2y^3}+\frac{y^3}{y^3+2z^3}+\frac{z^3}{z^3+2x^3}\geq 1.$$

Решение. Земаме $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ и како $abc=1$ добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$1\leq\frac{a^3}{a^3+2}+\frac{b^3}{b^3+2}+\frac{c^3}{c^3+2}=\frac{a^3}{a^3+2abc}+\frac{b^3}{b^3+2abc}+\frac{c^3}{c^3+2abc}=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}.$$

Сега од Ангелскиот принцип на минимум имаме

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1,$$

што и требаше да се докаже. ■

107. Нека $x,y,z\in\mathbf{R}^+$ се такви да $xyz=8$. Докажи дека

$$\frac{x-2}{x+1}+\frac{y-2}{y+1}+\frac{z-2}{z+1}\leq 0.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\geq 1. \qquad (1)$$

Воведуваме смена $x=\frac{2a}{b}, y=\frac{2b}{c}, z=\frac{2c}{a}$ и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\geq 1,$$

кое согласно забелешката во задача 105 е точно. ■

108. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $3\sqrt[3]{a^2b^2}\leq ab+a+b$, па затоа

$$\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}\geq\frac{(b+1)(c+1)^2}{a+b+ab+1}=\frac{(b+1)(c+1)^2}{(a+1)(b+1)}=\frac{(c+1)^2}{a+1}.$$

Слично

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}\geq\frac{(b+1)^2}{c+1},\quad \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq\frac{(a+1)^2}{b+1}.$$

Според тоа, ако ги искористиме претходните неравенства и Ангелскиот принцип на минимум добиваме

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq\frac{(b+1)^2}{c+1}+\frac{(c+1)^2}{a+1}+\frac{(a+1)^2}{b+1}$$

$$\geq\frac{(a+b+c+3)^2}{a+b+c+3}=a+b+c+3,$$

што и требаше да се докаже. ■

109. Дали постои низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ позитивни реални броеви која ги задоволува условите

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leq n^2$, за секој $n\in\mathbf{N}$,

2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leq 2008$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, односно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот 1) следува

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{a_i}\geq\frac{2^{2k}}{\sum\limits_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}a_i}>\frac{2^{2k}}{\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}a_i}\geq\frac{2^{2k}}{(2^{k+1})^2}=\frac{1}{4},$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{a_i}\Big)>\frac{1}{a_1}+\frac{n}{4},$$

што значи дека не може да биде исполнет условот 2). ■

110. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0.$$

Решение. *Прв начин.* Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-a^3b^2c-b^3c^2a-c^3a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0,$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b,$$

кое се добива со собирање на неравенствата

$$a^3b^3+a^3b^3+a^3c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^3b^3\cdot a^3c^3}=3a^3b^2c,$$

$$a^3b^3+b^3c^3+b^3c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3\cdot b^3c^3\cdot b^3c^3}=3b^3c^2a,$$

$$a^3c^3+a^3c^3+b^3c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3c^3\cdot a^3c^3\cdot b^3c^3}=3c^3a^2b,$$

а кои се точни заради неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a^3b^3=b^3c^3=c^3a^3$, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

Втор начин. Ако двете страни на неравенството се поделат $abc>0$ и додадеме $1+1+1=3$, го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{a(b-c)}{c(a+b)}+1+\frac{b(c-a)}{a(b+c)}+1+\frac{c(a-b)}{b(c+a)}+1\geq 3,$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(a+b)}{a(b+c)}+\frac{a(b+c)}{b(c+a)}\geq 3,$$

кое непосредно следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. ■

111. Нека x,y,z се реални броеви такви да $x+y+z=0$. Докажи дека

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geq 0.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geq 3.$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $|z|=\max\{|x|,|y|,|z|\}$. Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}\geq\frac{2(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1}=\frac{2(1-z)^2}{x^2+y^2+1}\geq\frac{2(1-z)^2}{2z^2+1}=3-\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}.$$

Притоа, во првото од претходните неравенства знак за равенство важи ако и само ако $x=y$, а во второто неравенство ако и само ако $z=1$ или $|x|=|y|=|z|$, па затоа знак за равенство се достигнува ако и само ако $x=y=z=0$ или два од броевите x,y,z се еднакви на $-\frac{1}{2}$, а третиот е еднаков на 1. ■

112. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да

$$xy+yz+zx=x+y+z.$$

Докажи дека

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq 1.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц на тројките $(x,\sqrt{y},1)$ и $(1,\sqrt{y},z)$ добиваме

$$(x^2+y+1)(1+y+z^2)\geq(x+y+z)^2,$$

односно

$$\frac{1}{x^2+y+1}\leq\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}.$$

Аналогно,

$$\frac{1}{y^2+z+1}\leq\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2}\text{ и }\frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}=m\ ,$$

па затоа доволно е да докажеме $m\leq 1$, што е еквивалентно на

$$3+x+y+z\leq 2(xy+yz+zx)\ .$$

Ако замениме $xy+yz+zx=x+y+z$, добиваме дека полседното неравенство е еквивалентно со неравенството $x+y+z\geq 3$, кое следува ако во очигледното неравенство

$$x+y+z=xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}\ ,$$

поделиме со $x+y+z$.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$. ■

113. Нека $a,b,c>0$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}\ .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $2\sqrt{\frac{1}{2}(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})}\leq 1+b+\frac{1}{a}$, односно $\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}$ и аналогно

$\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}&\geq\sqrt{2}\left(\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}\right)\\&=\sqrt{2}\left(\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}+\frac{1}{1+a+ab}\right)=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ако се достигнува равенство, тогаш тоа мора да биде во горните неравенства меѓу аритметичката и геометрсиката средина. Но, бидејќи тоа не е случај, заклучуваме дека знак за равенство никогаш не важи. ■

114. Ако $x+y+z=3$ и $x,y,z\geq 0$ докажи дека

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx\ .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина следува $x^2+2\sqrt{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}^2}=3x$ и аналогно $y^2+2\sqrt{y}\geq 3y$ и $z^2+2\sqrt{z}\geq 3z$. Но, $x+y+z=3$, па затоа

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}&=\frac{1}{2}(x^2+2\sqrt{x}+y^2+2\sqrt{y}+z^2+2\sqrt{z})-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\\&\geq\frac{1}{2}(3(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2))\\&=\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))\\&=xy+yz+zx.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x,y,z\in\{0,1\}$ и $x+y+z=3$, т.е. ако и само ако $x=y=z=1$. ■

115. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1.$$

Решение. Од $x^2+1\ge 2x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и условите на задачата следува

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}&=\frac{a}{a^2+1+abc}+\frac{b}{b^2+1+abc}+\frac{c}{c^2+1+abc}\\&\le\frac{1}{2+bc}+\frac{1}{2+ca}+\frac{1}{2+ab}=I,\end{aligned}$$

па затоа доволно е да се докаже дека $I\le 1$. Ако ги помножиме двете страни на последното неравенство со $(ab+2)(bc+2)(ca+2)$, после средувањето при што го користиме условот $abc=1$ добиваме дека неравенството $I\le 1$ е еквивалентно со неравенството $3\le a+b+c$, кое е точно бидејќи $3=3\sqrt[3]{abc}\le a+b+c$. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$. ■

116. Нека $x,y,z\in\mathbf{R}^+$ и $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\ge\frac{9}{4}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\left(\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\right)(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y))\ge(x+y+z)^2,$$

па затоа доволно е да се докаже дека неравенството

$$4(x+y+z)^2\ge 9(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y)),$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$4(x^2+y^2+z^2)\ge xy+yz+zx+9(xy^2+yz^2+zx^2).$$

Но, $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, па затоа доволно е да се докаже дека

$$x^2+y^2+z^2\ge 3(xy^2+yz^2+zx^2).$$

Но, $x^2=x^3+x^2y+x^2z$, $y^2=y^3+y^2x+y^2z$ и $z^2=z^3+z^2x+z^2y$, па затоа

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=x^3+x^2y+x^2z+y^3+y^2x+y^2z+z^3+z^2x+z^2y\\&=x(x^2+z^2)+y(y^2+x^2)+z(z^2+y^2)\\&\ge 2x^2z+2y^2x+2z^2y.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ и како $x+y+z=1$ добиваме ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$. ■

117. Докажи дека ако $a,b,c>0$, тогаш

$$\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b}\le\frac{a+b+c}{12}.$$

Решение. *Прв начин.* Ќе ја докажеме следнава генерализација на даденото неравенство: Ако $x,y\ge 1$ и $a,b,c>0$, тогаш

$$\frac{ab}{xa+yb+2c}+\frac{bc}{xb+yc+2a}+\frac{ca}{xc+ya+2b}\le\frac{a+b+c}{x+y+2}. \tag{1}$$

Даденото неравенство следува за $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{8}{5}$.

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$ab\frac{(x+y+2)^2}{xa+yb+2c}=ab\frac{((x-1)+(y-1)+2+2)^2}{(x-1)a+(y-1)b+(a+c)+(b+c)}$$
$$\le ab(\tfrac{x-1}{a}+\tfrac{y-1}{b}+\tfrac{4}{a+c}+\tfrac{4}{b+c})$$
$$=(x-1)b+(y-1)a+\tfrac{4ab}{a+c}+\tfrac{4ab}{b+c}.$$

Собирајќи го ова неравенство со другите две аналогни неравенства го добиваме неравенството

$$(x+y+2)^2(\tfrac{ab}{xa+yb+2c}+\tfrac{bc}{xb+yc+2a}+\tfrac{ca}{xc+ya+2b})\le$$
$$\le(x-1)(a+b+c)+(y-1)(a+b+c)+4(a+b+c)$$
$$=(x+y+2)(a+b+c),$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

Втор начин. Неравенството е еквивалентно со неравенството

$$0\le 30[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2]$$
$$+11[ab(b-c)^2+bc(c-a)^2+ca(a-b)^2]$$
$$+73[ab(c-a)^2+bc(a-b)^2+ca(b-c)^2],$$

кое очигледно е точно. ■

118. Најди го најголемиот реален број k, за кој неравенството

$$(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\le(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})(\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c})$$

важи за произволни релани броеви a,b и c.

Решение. За $a=b=c$ добиваме $k\le\sqrt[3]{9}-1$. Ќе докажеме, дека $k=\sqrt[3]{9}-1$ е бараниот број.

За $A=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $B=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $A\ge 3$ и $B\ge 3$. Значи, за секој реален број $k\ge 0$ тоќни се неравенствата

$$9(k^3+1)\le(k^3+1)AB,\ 9k^2A\le 3k^2AB,\ 9kB\le 3kAB.$$

Ако ги собереме горните неравенства добиваме

$$9(k^3+1+k^2A+kB)\le(k+1)^3AB \qquad \Leftrightarrow$$
$$9(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\le(k+1)^3AB,$$

кое за $k=\sqrt[3]{9}-1$ е еквиваленто со даденото. ■

119. Дадени се позитвни броеви a,b,c и d такви да

$$2(a+b+c+d)\ge abcd\ .$$

Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2\ge abcd\ .$$

Решение. Ќе разгледаме два случаја.

1) Нека $abcd\ge 16$. Тогаш од неравенството межу аритметичката и квадратната средина следува

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4(\tfrac{a+b+c+d}{4})^2 \geq 4(\tfrac{abcd}{8})^2 = \tfrac{(abcd)^2}{16} \geq abcd.$$

2) Нека $abcd<16$. Тогаш од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} > \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd\ . \blacksquare$$

120. Нека x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\tfrac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\tfrac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\tfrac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2} \geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шваец следува

$$(yx+x^2+x^2)(\tfrac{y}{x}+\tfrac{z}{x}+\tfrac{z^2}{x^2}) \geq (y+\sqrt{zx}+z)^2\ ,$$

од каде следува

$$\tfrac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2} \geq \tfrac{x^2}{xy+xz+z^2}\ .$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\tfrac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2} \geq \tfrac{y^2}{yz+yx+x^2}\ , \qquad \tfrac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2} \geq \tfrac{z^2}{zx+zy+y^2}\ .$$

Според тоа, за да го докажеме даденото неравенство, доволно е да докажеме дека

$$A=\tfrac{x^2}{xy+xz+z^2}+\tfrac{y^2}{yz+yx+x^2}+\tfrac{z^2}{zx+zy+y^2} \geq 1.$$

Повторно, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$A((xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2)) \geq (x+y+z)^2\ ,$$

и како

$$(xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2)=(x+y+z)^2\ ,$$

добиваме $A \geq 1$. ■

121. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека $A \geq B^2$, каде

$$A=\tfrac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \text{ и } B=\tfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}}+\tfrac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}}+\tfrac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}\ .$$

Решение. Од $x+y+z=1$ наожаме

$$\begin{aligned}1+xy+yz+zx &= (x+y+z)^2+xy+yz+zx\\ &= (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\end{aligned}$$

и ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за десната страна на даденото неравенство добиваме

$$\begin{aligned}A &= \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{1}{1-y}+\tfrac{1}{1-z})((x+3x^2)+(y+3y^2)+(z+3z^2))\\ &\geq \sqrt{\tfrac{3x^3+x}{9(1-x)}}+\sqrt{\tfrac{3y^3+y}{9(1-y)}}+\sqrt{\tfrac{3z^3+z}{9(1-z)}})^2.\end{aligned}$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека за секој реален број $s \in (0,1)$ е исполнето неравенството

$$\sqrt{\frac{3s^3+s}{9(1-s)}} \geq \frac{s\sqrt{s+1}}{\sqrt[4]{3+9s^2}}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $3(9s^2-1)^2 \geq 0$, кое очигледно е точно. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$. ■

122. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+1)(b+1)(c+1) \leq 8abc.$$

Докажи дека $a+b+c \geq 9$.

Решение. Од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \frac{8abc}{(a+1)(b+1)(c+1)} \leq \frac{8abc}{2\sqrt{a\cdot 1}\cdot 2\sqrt{b\cdot 1}\cdot 2\sqrt{c\cdot 1}} = \sqrt{abc},$$

од каде добиваме

$$\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ca}}+\sqrt{\frac{1}{ab}} \leq 1.$$

Сега, од последното неравенство и прво од неравенството меѓу геометриската и хармониската средина, а потоа од неравенствот меѓу аритметичката и хармониската средина добиваме:

$$1 \geq \sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ca}}+\sqrt{\frac{1}{ab}} = \sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}+\sqrt{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \geq \frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b} \geq \frac{9}{a+b+c},$$

па затоа $a+b+c \geq 9$. ■

123. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c точно е неравенството

$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17) \geq 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1). \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$16a^2+8b+17 = 16a^2+1+8b+16 \geq 8a+8b+16 = 8(a+b+2)$$
$$= 8(a+1+b+1) \geq 8\cdot 2\sqrt{(a+1)(b+1)} = 2^4\sqrt{(a+1)(b+1)}.$$

Аналогно

$$16b^2+8c+17 \geq 2^4\sqrt{(b+1)(c+1)} \text{ и } 16c^2+8a+17 \geq 2^4\sqrt{(c+1)(a+1)}.$$

Ако ги помножиме последните три неравенства, добиваме дека е точно неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$16a^2=16b^2=16c^2=1 \text{ и } a=b=c,$$

т.е. ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{4}$. ■

124. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=3$. Најди ја најмалата вредност на изразот

$$A = \frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}A&=\tfrac{2-a^3}{a}+\tfrac{2-b^3}{b}+\tfrac{2-c^3}{c}=2(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})-(a^2+b^2+c^2)\\&=2\tfrac{ab+bc+ca}{abc}-(a^2+b^2+c^2)=2\tfrac{ab+bc+ca}{abc}-((a+b+c)-2(ab+bc+ca))\\&=2\tfrac{ab+bc+ca}{abc}-(9-2(ab+bc+ca))=2\tfrac{ab+bc+ca}{abc}+2(ab+bc+ca)-9\\&=2(ab+bc+ca)(\tfrac{1}{abc}+1)-9.\end{aligned}$$

Ако сега го искористиме неравенството

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$$

и земеме $x=ab,\ y=bc,\ z=ca$, добиваме дека

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=9abc\text{, т.е. } ab+bc+ca\geq 3\sqrt{abc}\,.$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{1}{abc}+1\geq 2\sqrt{\frac{1}{abc}}$. Ако ги помножиме последните две неравества добиваме

$$(ab+bc+ca)(\tfrac{1}{abc}+1)\geq 3\sqrt{abc}\cdot 2\tfrac{1}{\sqrt{abc}}=6\,.$$

Така, $A=2(ab+bc+ca)(\frac{1}{abc}+1)-9\geq 2\cdot 6-9$ и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$, т.е. најмалата вредност за A е 3. ■

125. Нека n е природен број и $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви, за кои $x_1\geq x_2\geq ...\geq x_n$.

а) Докажи го неравенството

$$(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|)^2\leq\tfrac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\,.$$

б) Докажи дека знак за равенство важи ако и само ако $x_1,x_2,...,x_n$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Десната страна на неравенството да ја оцениме со помош на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц на следниов начин:

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\geq\frac{(\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)(x_i-x_j))^2}{\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2}=\frac{6(\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)(x_i-x_j))^2}{n^2(n^2-1)}\,.$$

Притоа знак за равенство важи ако и само ако $\frac{x_i-x_j}{i-j}=\mathrm{const}$, што е потребен и доволен услов за да броевите $x_1,x_2,...,x_n$ формираат аритметичка прогресија. Останува да докажеме дека

$$\tfrac{2(n^2-1)}{3}\frac{6(\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)(x_i-x_j))^2}{n^2(n^2-1)}\geq(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|)^2\,.$$

Ова неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)(x_i-x_j)\geq\tfrac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\,.$$

Со споредување на коефициентите пред x_i не е тешко да се провери, дека тоа всушност е равенство, со што задачата е решена. ■

126. Докажи, дека ако $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ се ненегативни реални броеви и $c_k = \prod_{i=1}^{k} b_i^{\frac{1}{k}}$, $k = 1, 2, ..., n$, тогаш

$$nc_n + \sum_{k=1}^{n} k(a_k - 1)c_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k^k b_k .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме, дека за секој $k = 2, 3, ..., n$ важи

$$ka_k c_k = ka_k b_k^{\frac{1}{k}} \underbrace{c_{k-1}^{\frac{1}{k}} ... c_{k-1}^{\frac{1}{k}}}_{k-1 \text{ пати}} \le a_k^k b_k + (k-1)c_{k-1} .$$

Ако ги собереме овие неравенства и равенството $a_1 c_1 = a_1 b_1$, го добиваме саканото неравенство. ■

127. Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$(\tfrac{a}{a+b})^5 + (\tfrac{b}{b+c})^5 + (\tfrac{c}{c+d})^5 + (\tfrac{d}{d+a})^5 \ge \tfrac{1}{8} .$$

Решение. Да ја означиме левата страна на неравенството со A и да ставиме

$$x = \tfrac{b}{a},\ y = \tfrac{c}{b},\ z = \tfrac{d}{c},\ t = \tfrac{a}{d} .$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{2}{(1+x)^5} + \frac{3}{32} \ge \frac{5}{n(1+x)^2} .$$

Оттука и од аналогните неравенства за y, z, t добиваме $2A + \frac{3}{8} \ge \frac{5}{8}B$, каде $B = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2}$. Понатаму, со непосредна проверка се докажува дека $B = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \ge \frac{1}{1+xy}$. Оттука и од $xyzt = 1$ добиваме $B \ge \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zt} = 1$ и конечно $A \ge \frac{1}{8}$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = t$, т.е. ако и само ако $a = b = c = d$. ■

128. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c} .$$

Решение. Даденото неравенство ќе го запишеме во видот

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \ge \frac{4(a-b)^2}{a+b+c} . \qquad (1)$$

Од неравенството на неравенството меѓу апсолутните вредности и неравенството Коши-Буњаковски-Шварц следува неравенството

$$(2|a-b|)^2 \le (|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 \le (b+c+a)(\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a})$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

Забелешка. Од докажаното неравенство непосредно следува точноста на нетавенството $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$, кое всушност следува од Ангелскиот принцип на минимум. ■

129. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x})(1+xy+xz)\geq(1+y+z)^2,$$

па затоа

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}\geq\frac{x}{x+y+z}.$$

Ако добиеното равенство го собереме со аналогните две неравенства го добиваме бараното неравенство. ■

130. Нека a, b и c се позитивни броеви такви да $a+b+c\leq 3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Од Ангелскиот принцип на минимум следува, дека

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3^2}{3+a+b+c}.$$

Од друга страна, од условот на задачата добиваме $a+b+c+3\leq 6$ и значи $\frac{1}{3+a+b+c}\geq\frac{1}{6}$ од каде $\frac{3^2}{3+a+b+c}\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$. ■

131. За позитивните броеви x и y да се докаже неравенството:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}.$$

Решение. Од Ангелскиот принципи на минимум добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}.$$

Понатаму од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина наоѓаме

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leq 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2}}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ \text{ и }\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 2\sqrt{\frac{x+y}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+y},$$

па затоа $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leq 2^{\frac{1}{2}}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{x+y}=2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}$, т.е. . $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\geq\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}$. Конечно,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}=\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}. ■$$

132. Ако a, b и c са ненегативни броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.$$

Решение. Имаме

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}=\frac{a^3}{a^2b^2+a^2}+\frac{b^3}{b^2c^2+b^2}+\frac{c^3}{c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a})^2}{a^2b^2+a^2}+\frac{(b\sqrt{b})^2}{b^2c^2+b^2}+\frac{(c\sqrt{c})^2}{c^2a^2+c^2}.$$

Со примена на Ангелскиот принцип на минимум добиваме

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+a^2+b^2c^2+b^2+c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}.$$

Сега од неравенството $1=(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ следува, дека $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1\leq\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$, односно $\frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}\geq\frac{3}{4}$. Конечно,

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2. \blacksquare$$

133. Ако $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, докажи дека

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}\geq 4(xy+yz+zx).$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следуваат неравенствата

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}\geq(x+y)(z+\sqrt{xy})=(x+y)z+(x+y)\sqrt{xy}\geq(x+y)z+2xy,$$

$$(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}\geq(z+x)(y+\sqrt{zx})=(z+x)y+(z+x)\sqrt{zx}\geq(z+x)y+2zx,$$

$$(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}\geq(y+z)(x+\sqrt{yz})=(y+z)x+(y+z)\sqrt{yz}\geq(y+z)x+2yz.$$

Конечно, ако ги собереме последните неравенства добиваме

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}\geq(x+y)z+2xy+(z+x)y+2zx+(y+z)x+2yz$$

$$=4(xy+yz+zx),$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. ■

134. Нека $n\geq 3$ е природен број и $a_2,a_3,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_2a_3...a_n=1$. Докажи дека

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n\geq n^n.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за секој $k=2,3,4,...,n$ важи

$$(1+a_k)^k=[(k-1)\cdot\tfrac{1}{k-1}+a_k]^k\geq\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}a_k.$$

Ако ги помножиме овие неравенства за $k=2,3,4,...,n$ добиваме

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n\geq n^na_2a_3...a_n=n^n.$$

За да имаме знак за равенство потребно е $1=a_2=2a_3=...=(n-1)a_n$. Тогаш $1=(n-1)!a_2a_3...a_n=(n-1)!$, што не е можно за $n\geq 3$. ■

135. Нека $\alpha > \beta > 0$ се рационални броеви и $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ се позитивни реални броеви такви што $a_1 a_2 a_3 ... a_k = 1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{\alpha} \geq \sum_{i=1}^{k} a_i^{\beta} .$$

Решение. Нека $\alpha = \frac{n}{q}, \beta = \frac{m}{q}$, $m, n, q \in \mathbf{N}, n > m$. Ако земеме $b_i = a_i^{\frac{1}{q}}$, $i = 1, 2, ..., k$, тогаш $b_1 b_2 b_3 ... b_k = 1$, па затоа доволно е да докажеме од $b_1 b_2 b_3 ... b_k = 1$ следува

$$\sum_{i=1}^{k} b_i^n \geq \sum_{i=1}^{k} b_i^{n-1} . \tag{1}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за секој $i = 1, 2, ..., k$ важи

$$1 + (n-1) b_i^n \geq n \sqrt[n]{1 \cdot (b_i^n)^{n-1}} = n b_i^{n-1} .$$

Ако ги собереме горните неравенства за $i = 1, 2, ..., k$, а потоа го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned} k + (n-1) \sum_{i=1}^{k} b_i^n &\geq n \sum_{i=1}^{k} b_i^{n-1} = (n-1) \sum_{i=1}^{k} b_i^{n-1} + \sum_{i=1}^{k} b_i^{n-1} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{k} b_i^{n-1} + k \sqrt[k]{b_1^{n-1} b_2^{n-1} ... b_k^{n-1}} \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^{k} b_i^{n-1} + k, \end{aligned}$$

од каде следува неравенството (1), кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

136. Докажи дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2 .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$. Од друга страна имаме $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, па затоа точно е неравенството $\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$, кое е еквивалентното со бараното неравенство.

137. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c \geq abc$. Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

Решение. Нека претпоставиме дека $a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}$. Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека

$$3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3} .$$

Значи, $abc > 3\sqrt{3}$ и тогаш од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\frac{(abc)^2}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3} .$$

Значи, $abc < 3\sqrt{3}$, што е противречност.

4. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ЧЕТВРТА ГЛАВА

1. Ако $a>1, b\geq 1, x>0$, тогаш

$$(1+\log_a b)(1+\log_{ab}^2 x)\geq 2\log_a x .$$

Докажи!

Решение. Даденото неравенство следува од

$1+\log_{ab}^2 x\geq 2\log_{ab} x=\frac{2\log_a x}{\log_a ab}=\frac{2\log_a x}{\log_a a+\log_a b}=\frac{2\log_a x}{1+\log_a b}$ и $1+\log_a b>0$. ■

2. Докажи дека за $a>1, c>1$ важи неравенството

$$2\log_c a+\log_a c+\log_{a^2} c>4 .$$

Решение. Имаме

$$\log_c a+\log_a c=\frac{1}{\log_a c}+\log_a c\geq 2 \text{ и } 2\log_c a+\log_{a^2} c=\log_c a^2+\frac{1}{\log_c a^2}\geq 2 ,$$

и како во последните две неравенства не може истовремено да важи знак за раменство, бараното неравенство го добиваме со собирање на последните две неравенства. ■

3. Докажи дека за секој $n\geq 2$ важи

$$\log_n 2\cdot\log_n 4\cdot\ldots\cdot\log_n(2n-2)\leq 1 .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од својствата на логаритмите следува

$$\begin{aligned}\sqrt{\log_n k\cdot\log_n(2n-k)}&\leq \tfrac{1}{2}[\log_n k+\log_n(2n-k)]\\&=\tfrac{1}{2}\log_n k(2n-k)\\&\leq \tfrac{1}{2}\log_n[\tfrac{k+2n-k}{2}]^2=\tfrac{1}{2}\log_n n^2=1,\end{aligned}$$

за $k=1,2,...,n$. Според тоа, производите на паровите кои се еднакво оддалечени од краевите на изразот

$$A=\log_n 2\cdot\log_n 4\cdot\ldots\cdot\log_n(2n-2)$$

не надминуваат единица, па значи $A\leq 1$, за $n=2k+1$. Но, $A\leq 1$ и за $n=2k$, бидејќи

$$\log_n(2n-n)=\log_n n=1 . \blacksquare$$

4. Докажи дека за $a>0, b>0$ и $a\neq b$ важи неравенството

$$\log_2(a+b)>1+\tfrac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b) .$$

Решение. Од $a\neq b$ следува неравенството $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ и ако истото го логаритмираме со основа 2 после средувањето го добиваме бараното неравенство. ■

5. Дадени се реални броеви a,b,c кои се поголеми од 1. Докажи дека

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\geq 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b) .$$

Решение. Воведуваме ознаки

$$x=\log a, y=\log b, z=\log c$$

и како $a,b,c>1$ добиваме дека $x,y,z>0$. Ако искористиме дека за секои $u,v,w>0$ важи

$$\log_w uv=\frac{\log u+\log v}{\log w},$$

тогаш даденото неравенство го запишуваме во еквивалентен облик

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geq\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}. \qquad (1)$$

Ќе го докажеме неравенството (1). Од неравенството меѓу аритметичаката и хармонсиката средина следува

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=(\frac{x}{y}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{x}+\frac{z}{y})+(\frac{y}{z}+\frac{y}{x})\geq\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}. \blacksquare$$

6. Нека $a>1, b>1, c>1$. Докажи дека важи

$$\log^3_{abc} a\cdot\log_a b\cdot\log_a c\leq\frac{1}{27}.$$

Решение. Од $a>1, b>1, c>1$ следува

$$\log_a a=1, \log_a b>0, \log_a c>0,$$

па затоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{\log_a a+\log_a b+\log_a c}{3}\geq\sqrt[3]{\log_a a\cdot\log_a b\cdot\log_a c},$$

од каде добиваме

$$\log^3_a abc\geq 27\log_a b\cdot\log_a c,$$

од каде следува бараното неравенство. ■

7. Докажи дека за секои $a,b\in(0,1)$ важи неравенството

$$\log_a\frac{2ab}{a+b}\log_b\frac{2ab}{a+b}\geq 1.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $(\frac{2ab}{a+b})^2\leq ab$. За $a,b\in(0,1)$ важи $ab<1$, па затоа $\frac{2ab}{a+b}<1$. Од својствата на логаритамска функција со основа помала од 1 следува

$$\log_{\frac{2ab}{a+b}} ab\leq\log_{\frac{2ab}{a+b}}(\frac{2ab}{a+b})^2=2.$$

Понатаму, повторно од нераveството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$1\geq(\frac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} ab)^2=(\frac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} a+\frac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} b)^2\geq\log_{\frac{2ab}{a+b}} a\log_{\frac{2ab}{a+b}} b,$$

па затоа $\log_a\frac{2ab}{a+b}\log_b\frac{2ab}{a+b}\geq 1$. ■

8. Ако е $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$, докажи дека

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Решение. И во двата случаи $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$ броевите $\log_b a$, $\log_c b, \log_a c$ се позитивни. Два пати го применуваме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и ако го искористиме фактот дека

$$\log_b a \log_c b \log_a c = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log c} \cdot \frac{\log c}{\log a} = 1$$

добиваме

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c}{(a+b)(b+c)(a+c)}}$$
$$= 6\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}}$$
$$\geq \frac{18}{a+b+b+c+a+c} = \frac{9}{a+b+c}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

9. Ако $a>1, b>1, c>1$, докажи го неравенството

$$(1+\frac{1}{\log_a b \log_a c})\log_a bc \geq 4.$$

Решение. Имаме

$$(1+\frac{1}{\log_a b \log_a c})\log_a bc = (1+\frac{1}{\log_a b \log_a c})(\log_a b + \log_a c)$$
$$= (\log_a b + \frac{1}{\log_a b}) + (\log_a c + \frac{1}{\log_a c}) \geq 2+2=4,$$

што и требаше да се докаже. ■

10. Дадени се броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \geq 3$ такви да

1) $a_i > 1, i = 1,2,...,n$ и

2) производот на произволни $n-2$ броја не е помал од $n-1$.

Докажи дека

$$\log_{a_2+a_3+...+a_n} a_1 + \log_{a_1+a_3+...+a_n} a_2 + ... + \log_{a_1+a_2+...+a_{n-1}} a_n \geq \frac{n}{n-1}.$$

Доказ. За произволни $n-1$ од дадените броеви $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq ... \leq a_{i_{n-1}}$ е исполнето

$$a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_{n-1}} \leq (n-1)a_{i_{n-1}} \leq a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_{n-1}}.$$

Нека

$$A_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_k,\ B_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_i,\ x_i = \ln a_i,\ S_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} x_k,\ i=1,2,...,n.$$

Јасно $x_i > 0$ и притоа важи $\log_{a_i} A_i \leq \log_{a_i} B_i = \frac{S_i}{x_i}$. Според задача III ** имаме $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S_i} \geq \frac{n}{n-1}$, па затоа

$$\log_{A_1} a_1 + \log_{A_2} a_2 + ... + \log_{A_n} a_n = \frac{1}{\log_{A_1} a_1} + \frac{1}{\log_{A_2} a_2} + ... + \frac{1}{\log_{A_n} a_n}$$
$$\geq \frac{x_1}{S_1} + \frac{x_2}{S_2} + ... + \frac{x_n}{S_s} \geq \frac{n}{n-1},$$

што и требаше да се докаже. ■

11. Докажи го неравенството

$$\frac{\log(k+1)!}{k+1} > \frac{\log k!}{k},\ k \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

Решение. Неравенството (11) е еквивалентно со низата неравенства

$$\frac{\log(k+1)!}{k+1} > \frac{\log k!}{k} \quad \Leftrightarrow \quad k\log(k+1)! > (k+1)\log k! \quad \Leftrightarrow \quad \log[(k+1)!]^k > \log(k!)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad [(k+1)!]^k > (k!)^{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)^k (k!)^k > (k!)^k k! \quad \Leftrightarrow$$

$$(k+1)^k > k!. \tag{2}$$

Последното неравенство ќе го докажеме со помош на математичка индукција.

i) За $k=1$ имаме $(1+1)^1 > 1 = 1!$, т.е. неравенството (2) важи.

ii) Нека претпоставиме дека неравенството (2) важи за $k=m$, т.е. дека $(m+1)^m > m!$. Ако последното неравенство го помножиме со $m+1$ и земеме предвид дека

$$(m+2)^{m+1} > (m+1)^{m+1}$$

добиваме

$$(m+2)^{m+1} > (m+1)^{m+1} > (m+1)\bullet m! = (m+1)!,$$

т.е. неравенството (2) важи за $k=m+1$. Од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (2) важи за секој природен број k, што значи дека неравенството (1) важи за секој природен број n. ■

12. Докажи дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи неравенството

а) $\sin^3 x - \sin^6 x \le \frac{1}{4}$,

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \sin 2x(2\sin x + 1) < 3$.

Решение. а) Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sin^6 x - \sin^3 x + \tfrac{1}{4} = (\sin^3 x - \tfrac{1}{2})^2 \ge 0,$$

кое е исполнето за секој $x \in \mathbf{R}$.

б) Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенсвата

$$(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 2x) + 1 - 2\sin\sin 2x - \sin 2x > 0$$

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \sin 2x - 2\sin x\cos x > 0$$

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - \sin 2x)^2 > 0,$$

при што последното неравенство очигледно е точно. ■

13. Докажи дека:

а) ако $a,b \in (0,\frac{\pi}{2})$, тогаш $\sin(a+b) < \sin a + \sin b$,

б) ако за $a,b \in (0,\frac{\pi}{2})$ важи $\sin(a+b) = 2\sin a$, тогаш $a<b$.

Решение. а) Имаме

$$\sin(a+b) < \sin a\cos b + \cos a\sin b < \sin a + \sin b,$$

бидејќи $0 < \cos a < 1,\ 0 < \cos b < 1$.

б) Од неравенството под а) следува

$$2\sin a = \sin(a+b) < \sin a + \sin b,$$

што значи $\sin a < \sin b$, и како $a,b \in (0,\frac{\pi}{2})$ добиваме $a<b$. ■

14. Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ точно е неравенството

$$-\sqrt{3}\le\frac{3\sin x}{2+\cos x}\le\sqrt{3}.$$

Решение. Имаме $2+\cos x>0$, па затоа даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\sqrt{3}\,|\sin x|\le 2+\cos x,$$
$$3\sin^2 x\le(2+\cos x)^2,$$
$$4+4\cos x+\cos^2 x-3\sin^2 x\ge 0,$$
$$4\cos^2 x+4\cos x+1\ge 0,$$
$$(2\cos x+1)^2\ge 0,$$

при што последното неравенство е точно за секој $x\in\mathbf{R}$ и знак за равенство важи ако и само ако $\cos x=-\frac{1}{2}$. ■

15. Ако $a,b\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$, докажи дека

$$\frac{2}{\cos a+\cos b}-1\le\sqrt{(\frac{1}{\cos a}-1)(\frac{1}{\cos b}-1)}\;. \tag{1}$$

Решение. Да означиме $x=\cos a+\cos b,\ y=\cos a\cos b$. Од претпоставката следува дека $0<\cos a\le\frac{1}{2}, 0<\cos b\le\frac{1}{2}$, па затоа $0<x\le 1, 0<y\le\frac{1}{4}$. При овие ознаки даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{2-x}{x}\le\sqrt{\frac{1-x+y}{y}}\;,$$
$$y(2-x)^2\le x^2(1-x+y),$$
$$x^3-x^2-4xy+4y\le 0$$
$$(x-1)(x^2-4y)\le 0. \tag{2}$$

Но,

$$x-1\le 0 \text{ и } x^2-4y=(\cos a+\cos b)^2-4\cos a\cos b=(\cos a-\cos b)^2\ge 0\;,$$

што значи дека е точно неравенството (2), т.е. неравенството (1). ■

16. Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ е точно неравенството

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\le\frac{6-\cos^2 x-4\sin x}{3-2\sin x}\le 2\,. \tag{1}$$

Решение. Бидејќи $3-2\sin x>0$ и $-\cos^2 x\le 0$, добиваме дека

$$6-4\sin x-\cos^2 x\le 6-4\sin x=2(3-2\sin x)\text{, т.е. }\frac{6-\cos^2 x-4\sin x}{3-2\sin x}\le 2\,.$$

т.е. точна е десната страна на (1). Понатаму со елементарни трансформации и примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{6-\cos^2 x-4\sin x}{3-2\sin x}=\frac{5+\sin^2 x-4\sin x}{3-2\sin x}=\frac{20-4\cos^2 x-16\sin x}{4(3-2\sin x)}=\frac{(3-2\sin x)^2+5+2(3-2\sin x)}{4(3-2\sin x)}$$
$$=\frac{3-2\sin x}{4}+\frac{5}{4(3-2\sin x)}+\frac{1}{2}\ge 2\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

т.е. точно е левото неравенство во (1). ■

17. Докажи дека $\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\geq 8$, за секој $x\neq k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\geq\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{8}{(2\sin x\cos x)^2}=\frac{8}{\sin^2 2x}\geq 0,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,$, $k\in\mathbf{Z}$. ■

18. Нека $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{\sin x})(1+\tfrac{1}{\cos x})\geq 3+2\sqrt{2}\,\mathbf{.}$$

Решение. Бидејќи $\sin x>0$ и $\cos x>0$, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$(1+\tfrac{1}{\sin x})(1+\tfrac{1}{\cos x})=1+(\tfrac{1}{\sin x}+\tfrac{1}{\cos x})+\frac{1}{\sin x\cos x}=1+\frac{2}{\sqrt{\sin x\cos x}}+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$\geq(1+\frac{1}{\sqrt{\sin x\cos x}})^2=(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}})^2\geq(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2},$$

што и требаше да се докаже. ■

19. Ако $0<x_1<x_2<...<x_n<\frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\operatorname{tg}x_1<\tfrac{\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}<\operatorname{tg}x_n\,.$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$0<\sin x_1<\sin x_2<...<\sin x_n\text{ и }\cos x_1>\cos x_2>...>\cos x_n>0\,,$$

па затоа

$$n\sin x_1<\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n<n\sin x_n\text{, и}\qquad(1)$$

$$n\cos x_1>\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n>n\cos x_n\,,$$

т.е.

$$\frac{1}{n\cos x_1}<\frac{1}{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}<\frac{1}{n\cos x_n}\,.\qquad(2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$\operatorname{tg}x_1=\frac{n\sin x_1}{n\cos x_1}<\frac{\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}<\frac{n\sin x_n}{n\cos x_n}=\operatorname{tg}x_n\,.\ ■$$

20. Нека $n\in\mathbf{N}$ и $x_i\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$, за $i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$(\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n+\tfrac{1}{4})^2\geq\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n\,.$$

Решение. Бидејќи $x_i\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$, за $i=1,2,...,n$ добиваме дека

$$\sin x_i\geq\cos x_i\text{, за }i=1,2,...,n\,.$$

Според тоа,

$$(\sin x_1+...+\sin x_n+\tfrac{1}{4})^2=(\sin x_1+...+\sin x_n)^2+\frac{\sin x_1+...+\sin x_n}{2}+\frac{1}{16}$$

$$=(\sin x_1+...+\sin x_n)^2-\frac{\sin x_1+...+\sin x_n}{2}+\frac{1}{16}+2\frac{\sin x_1+...+\sin x_n}{2}$$

$$=(\sin x_1+...+\sin x_n-\tfrac{1}{4})^2+\sin x_1+...+\sin x_n$$

$$\geq \sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_n$$
$$\geq \cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n,$$

што и требаше да се докаже. ■

21. Нека $n \geq 1$ и $x_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, ..., 2n+1$. Докажи дека важи неравенството

$$(\sum_{k=1}^{2n+1} \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq 1 .$$

Решение. Еден од интервалите $[0, \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ содржи најмалку $n+1$ од броевите $x_i, i = 1, 2, ..., 2n+1$. Може да претпоставиме дека тоа е интервалот $[0, \frac{\pi}{2}]$, бидејќи во спротивно со смената $y_i = \pi - x_i, i = 1, 2, ..., 2n+1$, задачата ја сведуваме на претходниот случај.

Нека претпоставиме дека $x_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $i = 1, 2, ..., n+1$. Ако $\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k \geq 1$, тогаш важи

$$(\sum_{k=1}^{2n+1} \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq (\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k)^2 \geq 1,$$

и доказот е завршен. Во спротивно, од $\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k < 1$ следува

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos x_k + \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k \geq \sum_{k=1}^{n+1} \cos^2 x_k + \sum_{k=1}^{n+1} \sin^2 x_k \geq n+1,$$

па затоа $\sum_{k=1}^{n+1} \cos x_k \geq n$. Од последното неравенство следува

$$(\sum_{k=1}^{2n+1} \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq (\sum_{k=1}^{n+1} \cos x_k - n)^2 + (\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k)^2 . \tag{1}$$

Да означиме

$$A_m = (\sum_{k=1}^{m} \cos x_k - m + 1)^2 + (\sum_{k=1}^{m} \sin x_k)^2, m = 1, 2, ..., n+1 .$$

Според (1) важи

$$(\sum_{k=1}^{2n+1} \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq A_{n+1}$$

и како $\cos^2 x_1 + \sin^2 x_1 \geq A_1$, доволно е да докажеме дека $A_{n+1} \geq A_n \geq A_{n-1} \geq ... \geq A_1$. За секој $m \in \{1, 2, ..., n\}$ имаме

$$A_{m+1} - A_m = (\sum_{k=1}^{m+1} \cos x_k - m)^2 + (\sum_{k=1}^{m+1} \sin x_k)^2 - (\sum_{k=1}^{m} \cos x_k - m + 1)^2 - (\sum_{k=1}^{m} \sin x_k)^2$$
$$= 2(\cos x_{m+1} - 1)(\sum_{k=1}^{m} \cos x_k - m + 1) + (\cos x_{m+1} - 1)^2 +$$

$$+2\sin x_{m+1}\sum_{k=1}^{m}\sin x_k+\sin^2 x_{m+1}$$

$$=2(\cos x_{m+1}-1)(\sum_{k=1}^{m}\cos x_k-m)+2\sin x_{m+1}\sum_{k=1}^{m}\sin x_k+$$

$$+2(\cos x_{m+1}-1)+(\cos x_{m+1}-1)^2+\sin^2 x_{m+1}$$

$$=2(1-\cos x_{m+1})(m-\sum_{k=1}^{m}\cos x_k)+2\sin x_{m+1}\sum_{k=1}^{m}\sin x_k\geq 0$$

т.е. $A_{m+1}-A_m\geq 0$, со што доказот е завршен. ■

22. Докажи, дека ако n е произволен природен број и α е реален број таков што $0<\alpha<\frac{\pi}{n}$, тогаш

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\ldots\cdot\sin n\alpha<\frac{1}{n^n}\frac{1}{\sin^n\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Ако искористиме дека за $0<\alpha<\frac{\pi}{n}$ важи

$$0<\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}<1,$$

формулата

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\ldots\cdot\sin n\alpha<(\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha}{n})^n$$

$$=(\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{n\sin\frac{\alpha}{2}})^n=\frac{1}{n^n}\frac{1}{\sin^n\frac{\alpha}{2}},$$

што и требаше да се докаже. ■

23. Докажи дека за $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$ и за секој природен број n важи

$$|\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\ldots+(-1)^{n-1}\cos nx|\leq\frac{1}{|\cos\frac{x}{2}|}.$$

Решение. Имаме

$$|\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\ldots+(-1)^{n-1}\cos nx|=$$

$$=|\cos(x+\pi)+\cos 2(x+\pi)+\cos 3(x+\pi)+\ldots+\cos n(x+\pi)|$$

$$=\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})(x+\pi)-\sin\frac{1}{2}(x+\pi)|}{2|\sin\frac{x+\pi}{2}|}\leq\frac{2}{2|\cos\frac{x}{2}|}=\frac{1}{|\cos\frac{x}{2}|},$$

што и требаше да се докаже. ■

24. Ако $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ и $n\in\mathbf{N}$ докажи дека $\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}\geq 1$.

Решение. Имаме

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} - 1 = \sin^2 x \operatorname{tg}^n x + \cos^2 x \operatorname{ctg}^n x - \sin^2 x - \cos^2 x$$
$$= \sin^2 x(\operatorname{tg}^n x - 1) + \cos^2 x(\frac{1}{\operatorname{tg}^n x} - 1)$$
$$= (\operatorname{tg}^n x - 1)(\sin^2 x - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^n x})$$
$$= (\operatorname{tg}^n x - 1)(\cos^2 x \operatorname{tg}^2 x - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^n x})$$
$$= \frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}(\operatorname{tg}^n x - 1)(\operatorname{tg}^{n+2} x - 1) \geq 0,$$

бидејќи $\cos^2 x \geq 0, \operatorname{tg}^2 x \geq 0,$ а $\operatorname{tg}^n x$ и $\operatorname{tg}^{n+2} x$ се истовремено помали или поголеми од 1. ■

25. Ако $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\operatorname{tg} y = 3 \operatorname{tg} x$, тогаш $y \leq x + \frac{\pi}{6}$. Докажи!

Решение. Јасно е дека $0 < y - x < \frac{\pi}{2}$. Понатаму, со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина наоѓаме

$$\operatorname{tg}(y-x) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x + 3 \operatorname{tg} x} \leq \frac{1}{\sqrt{3 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

па од својствата на функцијата $\operatorname{tg} x$ следува $y - x \leq \frac{\pi}{6}$. ■

26. Ако $a, b > 0$ и $a + b < \frac{\pi}{2}$, тогаш $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b < 1$. Докажи!

Решение. Од $0 < a < \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2}$ следува $\operatorname{tg} a < \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - b) = \operatorname{ctg} b = \frac{1}{\operatorname{tg} b}$, т.е. $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b < 1$. ■

27. Докажи, дека од четири броја секогаш може да се изберат два броја x и y такви што

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1.$$

Решение. Нека α, β, γ и δ се аркустангенсите на дадените броеви, подредени во растечки редослед. Тогаш

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \pi$$

Точките β, γ и δ го разбиваат интервалот $[\alpha, \alpha + \pi]$ на четири интервали. Должината на барем еден од нив не надминува $\frac{\pi}{4}$. За x и y можеме да ги земеме тангенсите на краевите на овој интервал. Навистина, ако на пример $\beta - \alpha < \frac{\pi}{4}$, тогаш од $\beta - \alpha > 0$ добиваме

$$0 \leq \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \leq 1$$

и притоа

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{x-y}{1+xy}.$$

Во случај $(\alpha + \pi) - \delta \leq \frac{\pi}{4}$ ќе го користиме равенството

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi-\delta)=\mathrm{tg}(\alpha-\delta)\,.\ \blacksquare$$

28. Докажи дека за произволни реални броеви a,b и ω и за секој $x\in\mathbf{R}$ важи неравенството

$$|\,a\sin\omega x+b\cos\omega x\,|\le\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Решение. Јасно, ако $a=0$ или $b=0$, тогаш неравенството очигледно важи. Нека $a\ne0$ и $b\ne0$. Тогаш постои $\varphi\in\mathbf{R}$ таков да $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{b}{a}$. Притоа важи

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)&=\sqrt{a^2+b^2}[\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi]\\&=\sqrt{a^2+b^2}[\sin\omega x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}+\cos\omega x\cdot\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}]\\&=\sqrt{a^2+b^2}[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x]\\&=a\sin\omega x+b\cos\omega x,\end{aligned}$$

па затоа од $|\sin t|\le1$, за секој $t\in\mathbf{R}$ следува

$$|\,a\sin\omega x+b\cos\omega x\,|=|\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)\,|\le\sqrt{a^2+b^2}\,.\ \blacksquare$$

29. Ако $x+y=\frac{\pi}{3}$, $x,y>0$, докажи дека $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\le\frac{1}{3}$.

Решение. Од $\sqrt{3}=\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$ следува

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y&=1-\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{\sqrt{3}}=1-\frac{\sin(x+y)}{\sqrt{3}\cos x\cos y}=1-\frac{1}{2\cos x\cos y}\\&=1-\frac{1}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos(x-y)}\le1-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. $\blacksquare$

30. Ако $\mathrm{tg}\,y=n\,\mathrm{tg}\,x$, $n\in\mathbf{N}$, докажи дека $\mathrm{tg}^2(y-x)\le\frac{(n-1)^2}{4n}$.

Решение. Имаме

$$\mathrm{tg}^2(y-x)=(\frac{\mathrm{tg}\,y-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{tg}\,x})^2=(\frac{(n-1)\,\mathrm{tg}\,x}{1+n\,\mathrm{tg}^2x})^2=\frac{(n-1)^2}{(\mathrm{ctg}\,x+n\,\mathrm{tg}\,x)^2}=\frac{(n-1)^2}{(\mathrm{ctg}\,x-n\,\mathrm{tg}\,x)^2+4n}\le\frac{(n-1)^2}{4n}\,.\ \blacksquare$$

31. Докажи дека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ е исполнето неравенството

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|\,. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Нека, на пример, $y<x$. Бидејќи $(\sin x)'=\cos x$, од теоремата на Лагранж, применета на интервалот $[y,x]$ следува

$$\sin x-\sin y=(x-y)\sin c\text{, за некој } c\in(y,x)\,.$$

Но, $\sin c\le1$, за секој $c\in\mathbf{R}$, па затоа од претходно изнесеното следува неравенството (1).

Втор начин. Имаме

$$|\sin x-\sin y|=2\,|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}|\le2\,|\sin\frac{x-y}{2}|\le2\cdot\frac{|x-y|}{2}=|x-y|\,.\ \blacksquare$$

32. Ако $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $x < y$, докажи дека $\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}$.

Решение. За функцијата $f(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t}, t \in (0, \frac{\pi}{2})$ имаме

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{\cos^2 t} - \operatorname{tg} t}{t^2} = \frac{t - \sin t \cos t}{t^2 \cos^2 t} > \frac{t - \sin t}{t^2 \cos^2 t} > 0, \text{ за секој } t \in (0, \tfrac{\pi}{2}),$$

што значи дека таа монотоно расте на интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$. Конечно, од $x < y$ следува $\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}$. ■

33. Докажи дека за секои $x, y \in \mathbf{R}$ е исполнето неравенството

$$|\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x| \leq |y - x|. \tag{1}$$

Решение. Нека, на пример, $y < x$. Бидејќи $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, од теоремата на Лагранж, применета на интервалот $[y, x]$ следува

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = (x - y)\frac{1}{1+c^2}, \text{ за некој } c \in (y, x).$$

Но, $\frac{1}{1+c^2} < 1$, за секој $c \in \mathbf{R}$, па затоа од претходно изнесеното следува неравенството (1). ■

34. (неравенство на Жордан). Докажи дека ако $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, тогаш

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}.$$

Решение. За функцијата $f(t) = \frac{\sin t}{t}, t \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $f(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$ и како $t < \frac{\sin t}{\cos t}$, за секој $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, заклучуваме дека таа монотоно опаѓа на интервалот $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Според тоа, за секој $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ важи

$$\frac{\sin x}{x} = f(x) \geq f(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}. \ ■$$

35. Докажи дека за секој $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи

$$1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x.$$

Решение. Од пример 1 и задача 32 следува дека $\frac{2y}{\pi} \leq \sin y \leq y$, за секој $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ако во последните неравенства ставиме $y = \frac{\pi}{2} - x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ добиваме

$$\frac{2}{\pi}(\tfrac{\pi}{2} - x) \leq \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \leq \tfrac{\pi}{2} - x, \text{ т.е. } 1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x.$$

Јасно, во левото неравенство знак за равенство важи ако и само ако $x = 0$, а во десното ако и само ако $x = \frac{\pi}{2}$. ■

36. Докажи дека за секој $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}.$$

Решение. Од неравенството $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ следува неравенството

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \qquad (1)$$

Ако неравенството (1) го помножиме со $2\cos^2\frac{x}{2} > 0$, последователно добиваме

$$2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} < 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$x\cos^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$x(1-\sin^2\frac{x}{2}) < \sin x \qquad (2)$$

Но, $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, па затоа $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$, т.е. $1-\frac{x^2}{4} < 1-\sin^2\frac{x}{2}$ и ако го искористиме неравенството (2) добиваме

$$x(1-\frac{x^2}{4}) < x(1-\sin^2\frac{x}{2}) < \sin x,$$

т.е. точно е бараното неравенство. ■

37. Нека $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{2})$ се такви да $\sin x + \sin y + \sin z = 1$. Докажи дека

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z \geq \frac{3}{8}.$$

Решение. Имаме $\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1$, па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 y} + \frac{1}{\cos^2 z} \geq \frac{27}{8}. \qquad (1)$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и нармониската средина, неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и условот на задачата последователно добиваме

$$\frac{3}{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 y}+\frac{1}{\cos^2 z}} \leq \frac{\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z}{3} = 1 - \frac{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}{3}$$

$$\leq 1 - (\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{3})^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

од каде следува неравенството (1).

38. За броевите a и b е исполнето равенството $a^2+b^2=1$. Определи ја најголемата вредност за a^3b-b^3a.

Решение. Бидејќи $a^2+b^2=1$, постои $\alpha \in [0, 2\pi)$ така да $a = \cos\alpha$ и $b = \sin\alpha$. Тогаш изразот a^3b-b^3a го добива обликот

$$a^3b-b^3a = \cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

и ако искористиме дека

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \text{ и } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

добиваме

$$a^3b - b^3a = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha \cos 2\alpha = \tfrac{1}{4}\sin 4\alpha .$$

Изразот $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$ достигнува најголема вредност $\frac{1}{4}$, на пример за $\alpha = \frac{\pi}{8}$ и во тој случај

$$a = \cos\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{\tfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\tfrac{2+\sqrt{2}}{4}} \text{ и } b = \sin\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{\tfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\tfrac{2-\sqrt{2}}{4}} . \blacksquare$$

39. Нека $x_0 = 0, x \;\; > 0, i = 1,2,...,n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Докажи дека

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+...+x_{i-1}}\sqrt{x_i+...+x_n}} < \frac{\pi}{2} .$$

Решение. Левата страна на неравенството следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, т.е. од

$$\sqrt{1+x_0+...+x_{i-1}}\sqrt{x_i+...+x_n} \le \tfrac{1}{2}(1+x_0+...+x_{i-1}+x_i+...+x_n) = 1 .$$

За да ја докажеме десната страна на неравенството да ставиме

$$x_0+...+x_i = \sin\alpha_i ,\; i = 0,1,2,...,n .$$

Тогаш

$$\sqrt{1+x_0+...+x_{i-1}}\sqrt{x_i+...+x_n} = \sqrt{1+\sin\alpha_{i-1}}\sqrt{1-\sin\alpha_{i-1}} = \cos\alpha_{i-1} ,$$

па затоа треба да докажеме дека

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1}}{\cos\alpha_{i-1}} < \frac{\pi}{2} .$$

Но, функцијата $\cos t$ опаѓа на интревалот $(0,\frac{\pi}{2})$ и важи $\sin t \le t, t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, па затоа

$$\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1} = 2\sin\tfrac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\cos\tfrac{\alpha_i+\alpha_{i-1}}{2} < \cos\alpha_{i-1}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) .$$

Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1}}{\cos\alpha_{i-1}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\alpha_{i-1}(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{\cos\alpha_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \alpha_n - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} . \blacksquare$$

40. Ако $a,b,c \in (0,1)$, докажи дека $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Решение. Земаме

$$a = \cos^2 u, b = \cos^2 v, c = \cos^2 w ,$$

каде $u,v,w \in (0,\frac{\pi}{2})$. Тогаш

$$\sqrt{1-a} = \sqrt{1-\cos^2 u} = \sin u,$$

$$\sqrt{1-b} = \sqrt{1-\cos^2 v} = \sin v, \;,$$

$$\sqrt{1-c} = \sqrt{1-\cos^2 w} = \sin w$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\cos u \cos v \cos w + \sin u \sin v \sin w < 1 .$$

Но, $0 < \cos w < 1, 0 < \sin w < 1$, па затоа

$$\cos u \cos v \cos w + \sin u \sin v \sin w < \cos u \cos v + \sin u \sin v = \cos(u-v) \le 1 ,$$

т.е. точно е неравенството (2), што значи дека е точно и неравенството (1). ■

41. Докажи, дека единствен пар реални броеви (p,q) за кој неравенството

$$|\sqrt{1-x^2}-px-q|\leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

е исполнето за секој $x\in[0,1]$ е парот $p=-1$, $q=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$

Решение. Ако ставиме $x=\sin t$ тогаш даденото неравенство го запишуваме во облик

$$|\cos t-p\sin t-q|\leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\,. \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека C, и q се такви што (1) важи за секој $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Тогаш (1) важи за $t=0, t=\frac{\pi}{2}$ и $t=\frac{\pi}{4}$

$$|1-q|\leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \qquad (2)$$

$$|p+q|\leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \qquad (3)$$

$$|\tfrac{1-p}{\sqrt{2}}-q|\leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \qquad (4)$$

Ќе докажеме дека неравенствата (2), (3) и (4) ги одредуваат p и C еднозначно. Од (2) следува $q\leq\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$. Сега од (4) имаме

$$\tfrac{1-p}{\sqrt{2}}\leq q+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}$$

што значи $n\geq 2$. Од (4) следува $p+q\sqrt{2}\geq\sqrt{2}$ и бидејќи

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}\leq p+q\sqrt{2}=p+q+q(\sqrt{2}-1)=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)+q(\sqrt{2}+1)$$

добиваме $q\geq\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ што заедно со $q\leq\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ дава $q=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$. Понатаму, од последното равенство и од неравенството (3) добиваме

$$p+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\leq\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\,,$$

т.е. $|S(\pi_i)|\leq r$. Претходно констатиравме $p\geq -1$ па значи $p=-1$.

Останува да докажеме дека за секој $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ важи неравенството

$$|\sin t+\cos t-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)|\leq\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$1\leq\sqrt{2}\sin(\tfrac{\pi}{4}+t)\leq\sqrt{2}$$

и тие се исполнети за секој $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. ■

42. Нека $p>1$ и $0<y<x$. Докажи дека

$$py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)\,. \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи $(x^p)'=px^{p-1}$, од теоремата на Лагранж, применета на интервалот $[y,x]$ следува

$$x^p-y^p=pc^{p-1}(y-x)\,. \qquad (2)$$

Но, $o < y < c < x$ и како $p > 1$ добиваме дека

$$y^{p-1} < c^{p-1} < x^{p-1}. \qquad (3)$$

Конечно, од неравенствата (3) и од равенството (2) следуваат неравенствата (1). ■

43. Докажи дека

$$\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}, \text{ за } 0 < y < x. \qquad (1)$$

Решение. Од $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, применувајќи ја теоремата на Лагранж на функцијата $f(x) = \ln x$ на интервалот $[y, x]$ добиваме

$$\ln x - \ln y = \frac{1}{c}(x-y), \text{ за некој } c \in (y, x).$$

Конечно, $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{y}$, па од последното равенство следуваат неравенствата (1). ■

44. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ и за секој $x > 0$ важи

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}. \qquad (1)$$

Решение. Доказот ќе го спроведеме со индукција по n. За $n = 1$, од примерот 1 следува дека $e^x > 1 + x$ за секој $x > 0$.

Нека претпоставиме дека за $n = k$ и за секој $x > 0$ важи

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}. \qquad (2)$$

Да ги разгледаме функциите

$$f(u) = e^u \text{ и } g(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^k}{k!} + \frac{u^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ за } u \in [0, x].$$

Функциите f и g ги задоволуваат условите од теоремата на Коши, па затоа постои $c \in (0, x)$ таков, што

$$\frac{e^x - e^0}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - 1} = \frac{e^c}{1 + c + \frac{c^2}{2!} + \ldots + \frac{c^k}{k!}}.$$

Од последното равенство и од неравенството (2) следува дека

$$\frac{e^x - e^0}{x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}} > 1, \text{ т.е. } e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

што значи неравенството (1) важи и за $n = k + 1$ и за секој $x > 0$. Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ■

45. Докажи го неравенството

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x), \text{ за секој } x > 0. \qquad (1)$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$, $x > 0$. За нејзиниот прв извод добиваме

$$f'(x) = 1 - 2x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x(1+2x)}{1+x} < 0, \text{ за секој } x > 0.$$

Тоа значи дека функцијата опаѓа на интервалот $(0, +\infty)$ и важи (1). ■

46. Докажи го неравенството

$$\ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}, \text{ за секој } x > 0.$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{2(x+1)} - \ln(1+x),\ x > 0.$$

За оваа функција имаме $f'(x) = \frac{x^2}{2(1+x)^2} > 0$, за секој $x > 0$, т.е. таа строго монотоно расте на разгледуваниот интервал, па затоа $f(x) > f(\alpha)$, за $0 < \alpha < x < +\infty$. Од произволноста на α следува $f(x) > f(0) = 0$, за секој $x > 0$, т.е.

$$\ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)} \text{ за секој } x > 0. \blacksquare$$

47. Докажи дека $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, за секои $x, y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$ и

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$((\tfrac{x}{y})^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} > ((\tfrac{x}{y})^\beta + 1)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Ставаме $\frac{x}{y} = a$ и ја разгледуваме функцијата $f(z) = (a^z + 1)^{\frac{1}{z}}$. За оваа функција имаме

$$f'(z) = \frac{(a^z+1)^{\frac{1}{z}}}{z^2(a^z+1)} \ln \frac{(a^z)^{a^z}}{(a^z+1)^{(a^z+1)}}$$

и бидејќи $\frac{(a^z)^{a^z}}{(a^z+1)^{(a^z+1)}} < 1$, за секој $z \in (0,+\infty)$, добиваме дека $f'(z) < 0$, за секој $z \in (0,+\infty)$, што значи дека разгледуваната функција строго монотоно опаѓа на интервалот $(0,+\infty)$, т.е. $f(\alpha) > f(\beta)$, за $0 < \alpha < \beta$. Според тоа, точно е неравенството $(a^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} > (a^\beta + 1)^{\frac{1}{\beta}}$ кое, ако се земе во предвид дека $\frac{x}{y} = a$, е еквивалентно со даденото неравенство. ■

48. Докажи дека за $a, b > 0$ и $p \in [0,1]$ важи

$$(a+b)^p \le a^p + b^p. \qquad (1)$$

Решение. Јасно, неравенството важи за $p = 0$ и $p = 1$. Нека $0 < p < 1$. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(\tfrac{a}{b} + 1)^p \le (\tfrac{a}{b})^p + 1. \qquad (2)$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = (1+x)^p - 1 - x^p$, $0 < p < 1$, $x \ge 0$. Имаме

$$f'(x) = p[(1+x)^{p-1} - x^{p-1}]$$

и како $0 < p < 1$ добиваме дека $f'(x) < 0$, за секој $x > 0$, што значи дека разгледуваната функција строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област, т.е.

$f(0) > f(x)$, за секој $x > 0$. Значи, $(1+x)^p - 1 - x^p < 0$, за секој $x > 0$. Ако во последното неравенство земеме $x = \frac{a}{b}$, добиваме дека важи неравенството (2), што значи дека важи неравенството (1). ■

49. Нека $p \geq 2$. Докажи дека

$$x^p - 1 > p(x-1), \text{ за секој } x > 1. \quad (1)$$

Решение. За функцијата $f(x) = x^p - 1 - p(x-1)$, $x \geq 1$ важи

$$f'(x) = px^{p-1} - p = p(x^{p-1} - 1) > 0, \text{ за секој } x > 1,$$

што значи дека таа строго монотоно расте на целата дефинициона област, т.е. $f(1) < f(x)$, за секој $x > 1$. Значи,

$$x^p - 1 - p(x-1) > 0,$$

за секој $x > 1$, т.е. важи неравенството (1). ■

50. Нека $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека за секој $x \in (0,1)$ важи

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1} < \frac{1-x^n}{n}. \quad (1)$$

Решение. *Прв начин.* За функцијата

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{n+1} - \frac{1-x^n}{n}, \ x \in [0,1)$$

важи

$$f'(x) = -x^n + x^{n-1} = x^{n-1}(x-1) < 0,$$

за секој $x \in (0,1)$, што значи дека таа строго монотоно опаѓа интервалот $[0,1)$, т.е. $f(x) < f(0)$, за секој $x \in (0,1)$. Значи,

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1} - \frac{1-x^n}{n} < -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \text{ за секој } x \in (0,1),$$

т.е. важи неравенството (1).

Втор начин. Од $0 < x < 1$ следува $1 - x \neq 0$, па затоа даденото неравенство последователно е еквивалентно со низата неравенства

$$n(1-x^{n+1}) < (n+1)(1-x^n),$$
$$nx^n - nx^{n+1} < 1 - x^n,$$
$$nx^{n-1}(1-x) < (1-x)(1+x+x^2+...+x^{n-1}),$$
$$nx^{n-1} < 1+x+x^2+...+x^{n-1}. \quad (2)$$

Но, за $0 < x < 1$ важи $x^{n-1} < x^i, i = 0,1,2,...,n-2$ и ако ги собереме овие неравенства и на двете страни додадеме x^{n-1}, го добиваме неравенството (2), со што е докажано неравенството (1). ■

51. Докажи го неравенството

$$1 + \alpha \ln x \leq x^\alpha, \ x > 0, \alpha > 2. \quad (1)$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = 1 + \alpha \ln x - x^\alpha$, $x > 0, \alpha > 2$.

Имаме $f'(x)=\frac{\alpha}{x}-\alpha x^{\alpha-1}$ и $f''(x)=-\frac{\alpha}{x^2}-\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}$. Понатаму, од $f'(x)=0$ наоѓаме $x_0=1$ и како $f''(1)=-\alpha^2<0$ од теорема 5 следува дека функцијата f во точката $x_0=1$ има локален максимум и притоа $f(1)=0$. Но, $x_0=1$ е и глобален максимум (зошто?), па затоа за секој $x>0$ важи $0=f(1)\geq f(x)=1+\alpha\ln x-x^{\alpha}$, т.е. точно е неравенството (1). ■

52. Нека $k>1, a,b>0$ и $x\geq 0$. Докажи дека важи

$$\frac{(ax+b)^k}{ax^k+b}\leq (a+b)^{k-1}. \tag{1}$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{(ax+b)^k}{ax^k+b}$, $x\geq 0$. Имаме

$$f'(x)=\frac{ka(ax+b)^{k-1}(ax^k+b)-kax^{k-1}(ax+b)^k}{(ax^k+b)^2}=\frac{kab(ax+b)^{k-1}(1-x^{k-1})}{(ax^k+b)^2}.$$

Ако $x\in[0,1]$, тогаш $f'(x)\geq 0$, а ако $x\geq 1$, тогаш $f'(x)\leq 0$. Според тоа, функцијата f монотоно расте на интервалот $[0,1]$ и монотоно опаѓа на интервалот $[1,+\infty)$, па затоа за секој $x\geq 0$ важи

$$\frac{(ax+b)^k}{ax^k+b}=f(x)\leq f(1)=\frac{(a+b)^k}{a+b}=(a+b)^{k-1}. \blacksquare$$

53. Нека $0<a<b$ и $x_i\in[a,b]$, $i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\leq\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2. \tag{1}$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, за секој $c>0$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{c}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{x_i}\leq\frac{1}{4}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{c}+\frac{c}{x_i})]^2. \tag{2}$$

Да ја разгледаме функцијата $f(t)=\frac{c}{t}+\frac{t}{c}$, $t\in[a,b]$. Имаме $f'(t)=-\frac{c}{t^2}+\frac{1}{c}$, што значи дека за $t\geq c$ дадената функција монотоно расте, а за $0<t\leq c$ таа монотоно опаѓа. Значи, функција $f(t)=\frac{c}{t}+\frac{t}{c}$, $t\in[a,b]$ има максимум на еден од краевите на интервалот $[a,b]$. Да го избереме c така да $f(x)=f(b)$, т.е. $c=\sqrt{ab}$. Тогаш, за секој $t\in[a,b]$ важи

$$f(t)\leq\frac{\sqrt{ab}}{a}+\frac{a}{\sqrt{ab}}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}},$$

па за $t=\frac{x_i}{c}$, $i=1,2,...,n$ од (2) добиваме

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\leq\frac{1}{4}[\sum_{i=1}^{n}\frac{a+b}{\sqrt{ab}}]^2=\frac{1}{4}(n\frac{a+b}{\sqrt{ab}})^2=\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2. \blacksquare$$

54. Докажи дека за позитивни реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ важи

$$\min_{1\le i\le n} a_i \le \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ дадена со

$$f(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} x^{n+1} - x + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Имаме $f'(x) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} x^n - 1$, па затоа $f'(x) < 0$ за $0 < x < \frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}}$ и $f'(x) > 0$ за $x > \frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}}$. Значи, функцијата f на првиот од овие интервали опаѓа, а на вториот расте и има минимум во точката $\frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}}$, $f_{\min} = 0$. Според тоа, $f(x) + x \ge x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Земаме $\min\limits_{1\le i\le n} a_i$ и добиваме

$$\min_{1\le i\le n} a_i \le f(x) + x = \left(\frac{nx}{n+1}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n+1}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$a_i = \frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}},\ i=1,2,...,n. \ \blacksquare$$

55. Нека $m_i, a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R}$, $i=1,2,...,n$ се такви да $m_i > 0$, за $i=1,2,...,n$ и $a_1 \le ... \le a_n < b_1 \le ... \le b_n < c_1 \le ... \le c_n$. Докажи дека

$$\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(a_i+b_i+c_i)\right]^2 > 3\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i(a_ib_i + b_ic_i + c_ia_i). \quad (1)$$

Решение. Тврдењето на задачата е еквивалентно со тврдењето: полиномот

$$R(x) = 3\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)x^2 - 2\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(a_i+b_i+c_i)\right]x + \sum_{i=1}^{n} m_i(a_ib_i+b_ic_i+c_ia_i),$$

има реални и различни нули.

За да го докажеме ова тврдење, прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека

$$P(x) = x(x-a_1)...(x-a_n),\ x\in\mathbf{R},\ a_i\in\mathbf{R},\ i=1,...,n$$

и $0 = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$. Тогаш полиномот $P'(x)$ има n реални нули кои се наоѓаат меѓу нулите на полиномот $P(x)$.

Доказ. За $P:[a_k, a_{k+1}]\to\mathbf{R}$, $k=0,1,2,...,n-1$ се исполнети условите од теоремата на Рол: *Нека за функцијата* f *важи:*

а) f *е непрекината на интервалот* $[a,b]$,

б) за секој $x\in(a,b)$ *постои* $f'(x)$ *и*

в) $f(a) = f(b)$.

Тогаш постои барем една точка $c\in(a,b)$ *таква, што* $f'(c)=0$.

Навистина,

i) P е полином, и тоа непрекинат на интервалот $[a_k, a_{k+1}]$ за секој $k=0,1,2,...,n-1$, *ii*) за секој $x \in (a_k, a_{k+1})$ постои $P'(x)$ и

iii) $P(a_k) = P(a_{k+1}) = 0$ за секој $k = 0,1,2,...,n-1$.

Затоа, од оваа теорема следува дека за секој $k = 0,1,2,...,n-1$ постои $c_k \in (a_k, a_{k+1})$ таков да $P'(c_k) = 0$, што значи дека $P'(x)$ има n реални нули кои се наоѓаат меѓу нулите на полиномот $P(x)$. □

Да се вратиме на доказот на нашето тврдење. Да го разгледаме полиномот

$$Q(x) = (\sum_{i=1}^{n} m_i)x^3 - [\sum_{i=1}^{n} m_i(a_i + b_i + c_i)]x^2 + [\sum_{i=1}^{n} m_i(a_i b_i + b_i c_i + c_i a_i)]x + D,$$

каде константата D е избрана така да полиномот $Q(x)$ може да се запише во облик

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x - a_i)(x - b_i)(x - c_i). \qquad (2)$$

Од (2) и $a_1 \le ... \le a_n < b_1 \le ... \le b_n < c_1 \le ... \le c_n$ добиваме

$$Q(a_1) \le 0, \quad Q(a_n) \ge 0, \quad Q(b_1) \le 0, \quad Q(b_n) \ge 0, \quad Q(c_1) \le 0, \quad Q(c_n) \ge 0,$$

што значи дека полиномот Q, кој е непрекината функција трипати го менува знакот, па затоа има три реални нули. Конечно, од лемата следува дека полиномот $R(x) = Q'(x)$ има две реални нули, т.е. важи неравенството (1). ■

56. Докажи дека ако $x, y \in (0,1)$ и $r \in \mathbf{Q} \cap (0,1)$, тогаш

$$\frac{|x-y|}{1-xy} \le \frac{|x^r - y^r|}{1-x^r y^r}.$$

Решение. Нека $r = \frac{p}{q}, u = \sqrt[q]{x}$ и $v = \sqrt[q]{y}$. Треба да докажеме дека

$$\frac{u^q - v^q}{1-(uv)^q} \le \frac{u^p - v^p}{1-(uv)^p},$$

за $v \le u$ и $p < q$. Доволно е да докажеме дека

$$\frac{u^{p+1} - v^{p+1}}{1-(uv)^{p+1}} \le \frac{u^p - v^p}{1-(uv)^p},$$

од каде со индукција следува бараното неравенство. Лесно се гледа дека последното неравенство може да се запише како

$$\frac{1-u^{2p+1}}{u^p(1-u)} \le \frac{1-v^{2p+1}}{v^p(1-v)},$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^{p}(u^k + u^{-k}) \le \sum_{k=1}^{p}(v^k + v^{-k}),$$

кое следува од неравенството $t + \frac{1}{t} \le z + \frac{1}{z}$, кога $0 < z \le t < 1$, кое е точно бидејќи функцијата $f(t) = t + \frac{1}{t}$ монотоно опаѓа на интервалот $(0,1)$. ■

57. Докажи дека, ако $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2})$ и $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \le 3$, тогаш

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \ge 0.$$

Решение. Бидејќи за $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ важи $\operatorname{tg}\varphi \geq 0$ и $1 \geq \sin 2\varphi \geq 0$ последователно добиваме

$$-1 \leq -\sin 2\varphi$$
$$-\operatorname{tg}\varphi \leq -\operatorname{tg}\varphi \sin 2\varphi$$
$$1-\operatorname{tg}\varphi \leq 1-\operatorname{tg}\varphi \sin 2\varphi = 1-2\sin^2\varphi = \cos 2\varphi.$$

Според тоа, ако последното неравенство го примениме за $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2})$ и го искористиме условот $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \leq 3$ добиваме:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq 3 - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) \geq 0 . \blacksquare$$

5. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ПЕТТА ГЛАВА

1. Нека f е конвексна и ограничена функција на $(-\infty, +\infty)$. Докажи дека $f = \text{const}$.

Решение. Нека $f \neq \text{const}$, т.е. постојат $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_1 < x_2$ такви да $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ако $f(x_1) < f(x_2)$, тогаш од теорема 2 следува

$$0 < L = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \text{ за секој } x > x_2,$$

т.е.

$$f(x) \geq f(x_1) + L(x-x_1),$$

за секој $x > x_2$. Ако во последното неравенство земеме $x \to +\infty$ добиваме $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, што противречи на претпоставката дека функцијата f е ограничена.

Ако $f(x_1) > f(x_2)$, тогаш повторно од теорема 2 следува

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = L < 0, \text{ за секој } x < x_1,$$

т.е.

$$f(x) \geq f(x_1) + L(x-x_1),$$

за секој $x < x_1$. Ако во последното неравенство земеме $x \to -\infty$ добиваме $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, што противречи на претпоставката дека функцијата f е ограничена. ■

2. Докажи дека, ако f е конвексна и периодична функција, тогаш $f = \text{const}$.

Решение. Нека f е конвексна и периодична функција и T е нејзиниот основен период. Заради периодичноста доволно е да ги разгледаме точки x_1 и x_2 такви што $x_1 < x_2 < x_1 + T$. Ако ја примениме теорема 2 и земеме предвид дека функцијата f е периодична, добиваме

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_1+T)-f(x_1)}{x_1+T-x_1} = 0 \text{, т.е. } f(x_2) \le f(x_1) .$$

Понатаму, од $x_1 < x_2 < x_1 + T$ имаме $x_2 < x_1 + T < x_2 + T$. Ако повторно ја примениме теорема 2 и земеме предвид дека функцијата f е периодична, добиваме

$$\frac{f(x_1+T)-f(x_2)}{x_1+T-x_2} \le \frac{f(x_2+T)-f(x_2)}{x_2+T-x_2} = 0 \text{, т.е. } f(x_1) \le f(x_2) .$$

Конечно, од $f(x_2) \le f(x_1)$ и $f(x_1) \le f(x_2)$ следува $f(x_1) = f(x_2)$ и бидејќи точките x_1 и x_2 се произволни добиваме $f = \text{const}$. ■

3 (неравенство на Петровиќ). Нека $f:[0,+\infty) \to \mathbf{R}$ е конвексна функција и $x_i > 0, i = 1,2,...,n$. Тогаш важи неравенството

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le f(x_1 + x_2 + ... + x_n) + (n-1) f(0) . \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Ако означиме $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $\alpha_i = \frac{x_i}{y}$, $i = 1,2,..,n$, тогаш $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и $x_i = (1-\alpha_i)\cdot 0 + \alpha_i y$, за $i = 1,2,...,n$. Но, функцијата f е конвексна, па затоа

$$f(x_i) \le (1-\alpha_i) f(0) + \alpha_i f(y) \text{, за } i = 1,2,...,n .$$

Ако ги собереме овие неравенства го добиваме неравенството (1). ■

4. а) Нека $f:[a,b] \to \mathbf{R}$, $0 \le a < b$ е конвексна функција и нека $x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$ се такви да $x_1 + x_2 + ... + x_n \le b - a$. Докажи го неравенството

$$f(a + x_1) + ... + f(a + x_n) \le f(a + x_1 + x_2 + ... + x_n) + (n-1) f(a) .$$

б) Нека $f:[0,b_1] \to \mathbf{R}$ е конвексна функција и нека $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge 0$. Докажи го неравенството

$$f(b_1 - b_2 + b_3) \le f(b_1) - f(b_2) + f(b_3) .$$

Решение. а) Да ја разгледаме функцијата $g:[0,b-a] \to \mathbf{R}$ определена со $g(x) = f(a+x)$. Јасно, оваа функција е добро дефинирана. Ќе докажеме дека функцијата g е конвексна. Нека $x_1, x_2 \in [0,b-a]$ и нека $\alpha \in [0,1]$. Тогаш $ax_1 + b$, $ax_2 + b \in [a,b]$, па затоа од конвексноста на функцијата f следува

$$\begin{aligned} g(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) &= f(a + \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = f(\alpha(a + x_1) + (1-\alpha)(a + x_2)) \\ &\le \alpha f(a + x_1) + (1-\alpha) f(a + x_2) = \alpha g(x_1) + (1-\alpha) g(x_2), \end{aligned}$$

што според дефиниција 1 значи дека функцијата g е конвексна. Сега од неравенството на Петровиќ, применето на функцијата g добиваме

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le f(x_1 + x_2 + ... + x_n) + (n-1) f(0) ,$$

односно

$$g(x_1) + g(x_2) + ... + g(x_n) \le g(x_1 + x_2 + ... + x_n) + (n-1) g(0) ,$$

односно

$$f(a + x_1) + ... + f(a + x_n) \le f(a + x_1 + x_2 + ... + x_n) + (n-1) f(a) .$$

б) Да земеме $n = 2$, $b_3 = a$, $x_1 = b_2 - a$ и $x_2 = b_1 - b_2$. Имаме

$$a = b_3, \ a + x_1 = b_2 \text{, } a + x_2 = b_1 - b_2 + b_3 \text{ и } a + x_1 + x_2 = b_1$$

и ако замениме во неравенството под а) го добиваме неравенството

$$f(b_2)+f(b_1-b_2+b_3)\le f(b_1)+f(b_3)\,,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

5. Нека $a,b,c>0$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}\,.$$

Решение. Нека $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$. Тогаш $xyz=1$ и неравенството го добива обликот

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}\,. \tag{1}$$

За функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ важи $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ и $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$, за $x>0$, што значи дека таае конвексна на интервалот $(0,+\infty)$. Сега, прво од неравенството на Јенсен, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $xyz=1$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}&=xf\left(\frac{y+z}{x}\right)+yf\left(\frac{z+x}{y}\right)+zf\left(\frac{x+y}{z}\right)\\ &\ge(x+y+z)\,f\left(\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z}\right)\\ &=(x+y+z)\,f(2)=\frac{x+y+z}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1), што значи и баранното неравенство. ■

6. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a\sqrt{\frac{b}{a+c}}+b\sqrt{\frac{c}{b+a}}+c\sqrt{\frac{a}{c+b}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

т.е. на неравенството

$$\frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{4a^2b}{(a+c)(a+b)^2}}+\frac{b+c}{2}\sqrt{\frac{4b^2c}{(b+a)(b+c)^2}}+\frac{c+a}{2}\sqrt{\frac{4c^2a}{(c+b)(c+a)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Понатаму, за функцијата $f(x)=-\sqrt{x}$, $x\ge 0$ важи $f''(x)=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}>0$, што значи дека таа е конвексна на $[0,+\infty)$. Но, $\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=1$, па од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{4a^2b}{(a+c)(a+b)^2}}+\frac{b+c}{2}\sqrt{\frac{4b^2c}{(b+a)(b+c)^2}}+\frac{c+a}{2}\sqrt{\frac{4c^2a}{(c+b)(c+a)^2}}\le\sqrt{\frac{2a^2b}{(a+c)(a+b)}+\frac{2b^2c}{(b+a)(b+c)}+\frac{2c^2a}{(c+b)(c+a)}}$$

Според тоа, за да го докажеме бараното неравенство доволно е да докажеме дека

$$\frac{a^2b}{(a+c)(a+b)}+\frac{b^2c}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2a}{(c+b)(c+a)}\le\frac{1}{4}\qquad\Leftrightarrow$$

$$4a^2b(b+c)+4b^2c(c+a)+4c^2a(a+b)\le(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)\quad\Leftrightarrow$$

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b),$$

кое е исполнето. Знак за равенство важи за $a=b=c=\frac{1}{3}$. ■

7. Ако $|x|\le 1, |y|\le 1$, докажи дека важи неравенството

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\le 2\sqrt{1-(\tfrac{x+y}{2})^2}\ .$$

Решение. Да ја разгледаме функција $f(t)=-\sqrt{1-t^2}$, $|t|\le 1$. За $|t|<1$ имаме $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ и $f''(t)=\frac{1}{(\sqrt{1-t^2})^3}>0$, што значи дека оваа функција е конвексна на интервалот $(-1,1)$. Оттука, за $x,y\in[-1,1]$ и $\alpha=\frac{1}{2}$ добиваме

$$f(\tfrac{x+y}{2})\le\tfrac{1}{2}f(x)+\tfrac{1}{2}f(y),$$

т.е. го добиваме неравенството

$$-\sqrt{1-(\tfrac{x+y}{2})^2}\le-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-y^2}\ ,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

8. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви и $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Докажи го неравенството

$$(a_1+\tfrac{1}{a_1})^2+(a_2+\tfrac{1}{a_2})^2+...+(a_n+\tfrac{1}{a_n})^2\ge n(\tfrac{S_n}{n}+\tfrac{n}{S_n})^2$$

Решение. Функцијата $f(t)=(t+\frac{1}{t})^2$ е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$, па затоа од неравенството на Јенсен за позитивните реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ и $\alpha_i=\frac{1}{n}, i=1,2,...,n$ следува неравенството

$$(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i+\tfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i})^2\le\tfrac{1}{n}[(a_1+\tfrac{1}{a_1})^2+(a_2+\tfrac{1}{a_2})^2+...+(a_n+\tfrac{1}{a_n})^2],$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство.

Забелешка. За $n=2$, ако $a+b=1$, од претходно изнесеното следува неравенството $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$, а за $n=3$, ако $a+b+c=1$ следува неравенството $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2\ge\frac{100}{3}$. ■

9. Нека $x\ge y\ge 1$. Докажи дека

$$\tfrac{x}{\sqrt{x+y}}+\tfrac{y}{\sqrt{y+1}}+\tfrac{1}{\sqrt{x+1}}\ge\tfrac{y}{\sqrt{x+y}}+\tfrac{x}{\sqrt{x+1}}+\tfrac{1}{\sqrt{y+1}}\ .$$

Решение. Лесно се гледа дека равенство важи кога $y=1$ и кога $x=y$. Ставаме $x=y+a,\ y=1+b,$ каде $a,b\ge 0$. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-1}{\sqrt{y+1}}\geq\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}, \quad \frac{a}{\sqrt{2+a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{2+b}}\geq\frac{a+b}{\sqrt{2+a+b}}.$$

Функцијата $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, x>0$ е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$, па затоа

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{2+a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{2+b}} &= af(2+a+2b)+bf(2+b)\\ &\geq (a+b)\,f(\tfrac{a(2+a+2b)+b(2+b)}{a+b})\\ &=(a+b)\,f(\tfrac{(a+b)^2+2(a+b)}{a+b})\\ &=(a+b)\,f(a+b+2)=\frac{a+b}{\sqrt{2+a+b}},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

10. Нека $x,y\in[0,1]$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\leq\frac{2}{\sqrt{1+xy}}. \qquad (1)$$

Решение. Ако $x=0$, тогаш равенството има облик $1+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\leq 2$ и тоа важи бидејќи $y\geq 0$. Аналогно заклучуваме дека равенството важи ако $y=0$.

Нека $0<x,y\leq 1$. Тогаш постојат $u\geq 0$ и $v\geq 0$ такви да $x=e^{-u}$ и $y=e^{-v}$, при што даденото неравенство има облик

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2u}}}+\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2v}}}\leq\frac{2}{\sqrt{1+e^{-(u+v)}}}. \qquad (2)$$

За функцијата $f(t)=\frac{-1}{\sqrt{1+e^{-2t}}}$ важи $f''(t)=\frac{2e^{2t}-1}{e^{4x}\sqrt{(1+e^{-2t})^5}}>0$, за $x\geq 0$, па затоа е исполнето неравенството

$$\frac{f(u)+f(v)}{2}\leq f(\tfrac{u+v}{2}),$$

кое е еквивалентно со неравенството (2), т.е. со неравенството (1). ■

11. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Решение. Воведуваме смена $u=\frac{a}{a+b+c}, v=\frac{b}{a+b+c}, w=\frac{c}{a+b+c}$, при што $u+v+w=1$. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{u}{(1-u)^2}+\frac{v}{(1-v)^2}+\frac{w}{(1-w)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

За функцијата $f(t)=\frac{t}{(1-t)^2}, t>0$ важи $f''(t)=\frac{4+2t}{(1-t)^4}>0$, за секој $t>0$, што значи дека таа е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$. Конечно, од неравенството на Јенсен следува $\frac{u}{(1-u)^2}+\frac{v}{(1-v)^2}+\frac{w}{(1-w)^2}\geq 3f(\frac{u+v+w}{3})=3f(\frac{1}{3})=\frac{9}{4}$, што и требаше да се докаже. ■

12. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви да $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Функцијата $f(x)=\frac{1}{1+x}$ е конвексна за $x>0$. Од неравенството на Јенсен, применето на броевите ab,bc,ca при $\alpha_i=\frac{1}{3}$, $i=1,2,3$ следува

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)\geq\frac{3}{3+ab+bc+ca}.$$

Но, $3+ab+bc+ca\leq 3+a^2+b^2+c^2=6$, па од последното следува неравенството (1). ■

13. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1. \qquad (1)$$

Решение. За функцијата $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$ важи $f''(x)=\frac{2}{4\sqrt{x^5}}>0$, што значи дека таа е конвексна. За $a,b,c\in(0,1)$ такви да $a+b+c=1$ и $x,y,z>0$, од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{y}}+\frac{c}{\sqrt{z}}\geq\frac{1}{\sqrt{ax+by+cz}}.$$

Ако во последното неравенство ставиме

$$x=a^2+8bc,\ y=b^2+8ca,\ z=c^2+8ab$$

го добивме неравенството

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}. \qquad (2)$$

Но,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc\\&\geq a^3+b^3+c^3+3\cdot 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}+6abc=a^3+b^3+c^3+24abc\end{aligned}$$

и $a+b+c=1$, па од (2) следува неравенството (1). ■

14. Докажи дека за секои $x,y,z\in(0,1)$ важи

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}. \qquad (1)$$

Решение. За функцијата $f(t)=\frac{t}{1-t}$, $t\in(0,1)$ важи $f'(x)=\frac{-1}{(1-x)^2}<0$ и $f''(t)=\frac{2}{(1-t)^3}>0$, за секој $t\in(0,1)$, што значи дека таа монотоно опаѓа и е конвексна на интервалот $(0,1)$. Од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq 3\frac{\frac{x+y+z}{3}}{1-\frac{x+y+z}{3}}. \qquad (2)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$ и како f монотоно опаѓа на $(0,1)$ добиваме

$$\frac{\frac{x+y+z}{3}}{1-\frac{x+y+z}{3}}=f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq f(\sqrt[3]{xyz})=\frac{\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}\,. \qquad (3)$$

Конечно, од (2) и (3) следува (1). ■

15. Докажи дека за секои позитивни броеви $a_1,a_2,...,a_n$ точно е неравенството

$$\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\leq\frac{a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n}{a_1+a_2+...+a_n}\,.$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x\ln x$. Имаме

$$f\,'(x)=1+\ln x \text{ и } f\,''(x)=\tfrac{1}{x}>0\text{, за секој } x\in(0,+\infty)\,,$$

што значи дека таа е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$. Сега, при $x_i=a_i$, $\alpha_i=\frac{1}{n}$, $i=1,2,...,n$ од неравенството на Јенсен следува неравенството

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\leq\frac{a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n}{n}\,,$$

Кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

16. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in(\frac{1}{2},1]$. Докажи дека

$$\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+a_2+...+a_n)^n}\geq\frac{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}{(n-a_1+a_2+...+a_n)^n}\,.$$

Решение. За функцијата $f(t)=\ln t-\ln(1-t),\, t\in(\frac{1}{2},1]$ важи

$$f\,''(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(1-t)^2}>0\text{, за секој } t\in(\tfrac{1}{2},1)\,,$$

што значи дека таа е конвескна на разгледуваниот интервал. Сега од неравенството на Јенсен последователно добиваме

$$\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}-\ln\left(1-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)\leq\frac{\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n}{n}-\frac{\ln(1-a_1)+\ln(1-a_2)+...+\ln(1-a_n)}{n}\,,$$

$$n\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n-a_1-a_2-...-a_n}\leq\ln\frac{a_1a_2...a_n}{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\,,$$

$$\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^n}{(n-a_1-a_2-...-a_n)^n}\leq\frac{a_1a_2...a_n}{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\,,$$

што и требаше да се докаже. ■

17. Нека $a_i,\, i=1,2,...,n$ се реални броеви поголеми од 1. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}\,. \qquad (1)$$

Решение. За функцијата $f(x)=\frac{1}{1+e^x},\, x>0$ важи

$$f\,'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\text{ и } f\,''(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}>0\text{, за секој } x>0\,,$$

т.е. таа е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$.

Понатаму, за секој $a_i>1;\ i=1,2,...,n$ постои $x_i>0,\, i=1,2,...,n$ така да $a_i=e^{x_i}$, $i=1,2,...,n$. Од неравенството на Јенсен применето на броевите x_i, $i=1,2,...,n$ следува неравенството

$$\frac{1}{1+e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+e^{x_1}}+\frac{1}{1+e^{x_2}}+...+\frac{1}{1+e^{x_n}}\right),$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

18. Нека $n>1$ и $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни рални броеви такви да

$$x_1+x_2+...+x_n=1.$$

Докажи дека

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+...+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Решение. За функцијата $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$, $x\in(0,1)$ важи $f''(x)>0$, за секој $x\in(0,1)$, што значи дека таа е конвексна на интервалот $(0,1)$. Од неравенството на Јенсен и условот на задачата следува

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k}=\sqrt{n},$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}}\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}}\ge\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}.\ ■$$

19. Докажи дека

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg}1^0\cdot\operatorname{tg}2^0\cdot...\cdot\operatorname{tg}44^0}<\sqrt{2}-1<\frac{\operatorname{tg}1^0+\operatorname{tg}2^0+...+\operatorname{tg}44^0}{44}. \quad (1)$$

Решение. За функцијата $f(x)=-\ln\operatorname{tg}x$, $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ важи

$$f'(x)=\frac{-2}{\sin 2x} \text{ и } f''(x)=\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}>0, \text{ за секој } x\in(0,\tfrac{\pi}{4}).$$

Според тоа, функцијата f е конвексна на интервалот $(0,\frac{\pi}{4})$, па затоа од неравенството на Јенсен за $x_i=i^0$ и $\alpha_i=\frac{1}{44}$, $i=1,2,...,44$ последователно добиваме

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{44}}{44}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{44})}{44},$$

$$-\ln\operatorname{tg}\frac{1^0+2^0+...+44^0}{44}<-\frac{\ln\operatorname{tg}1^0+\ln\operatorname{tg}2^0+...+\ln\operatorname{tg}44^0}{44},$$

$$\ln\sqrt[44]{\operatorname{tg}1^0\cdot\operatorname{tg}2^0\cdot...\cdot\operatorname{tg}44^0}<\ln\operatorname{tg}\frac{44\cdot45^0}{2\cdot44}=\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg}1^0\cdot\operatorname{tg}2^0\cdot...\cdot\operatorname{tg}44^0}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1,$$

т.е. точно е левото неравенство во (1). За функцијата $g(x)=\operatorname{tg}x$, $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ важи

$$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } g''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0,$$

за секој $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, што значи дека таа е строго конвексна на интервалот $(0, \frac{\pi}{4})$, па затоа од неравенството на Јенсен за $x_i = i^0$ и $\alpha_i = \frac{1}{44}$, $i = 1, 2, ..., 44$ последователно добиваме

$$g(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{44}}{44}) < \frac{g(x_1) + g(x_2) + ... + g(x_{44})}{44},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1^0 + 2^0 + ... + 44^0}{44} < \frac{\operatorname{tg} 1^0 + \operatorname{tg} 2^0 + ... + \operatorname{tg} 44^0}{44} = \sqrt{2} - 1,$$

т.е. точно е десното неравенство во (1). ■

20. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се ненегативни реални броеви не сите еднакви на нула.

а) Докажи дека равенката

$$x^n - a_1 x^{n-1} - ... - a_{n-1} x - a_n = 0, \tag{1}$$

има точно еден позитивен реален корен.

б) Нека $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B = \sum_{i=1}^{n} i a_i$ и нека R е позитивниот реален корен на равенката (1). Докажи дека $A^A \le R^B$.

Решение. а) Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}.$$

Таа е непрекината на интервалот $(0, +\infty)$ и на $(0, +\infty)$ монотоно опаѓа од $+\infty$ до 0. Затоа постои $R > 0$ таков што $f(R) = 1$. Јасно, R е корен на равенката (1).

б) Броевите $c_i = \frac{a_i}{A}, i = 1, 2, ..., n$ се ненегативни и важи $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Понатаму, функцијата $g(x) = -\ln x$ е конвексна на интервалот $(0, +\infty)$, па од неравенството на Јенсен следува дека

$$g(\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{A}{R^i}) \le \sum_{i=1}^{n} c_i g(\frac{A}{R^i}),$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (-\ln \frac{A}{R^i}) \ge -\ln(\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{A}{R^i}) = -\ln(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{R^i}) = -\ln 1 = 0.$$

Од последното неравенство последователно ги добиваме еквивалентните неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (-\ln A + i \ln R) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln A \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i \le \ln R \cdot \sum_{i=1}^{n} i c_i$$

$$\ln A \le \ln R \cdot \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n} i a_i \quad \Leftrightarrow \quad A \ln A = B \ln R$$

$$\ln A^A \le \ln R^B \quad \Leftrightarrow \quad A^A \le R^B. \ ■$$

21. Нека $a_i > 0, i = 1, 2, ..., n$. Докажи дека

$$(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}} \le a_1^{a_1} a_2^{a_2} ... a_n^{a_n}.$$

Решение. Од тежинското неравенство меѓу геометриската и хармониската средина применето на броевите a_i и $\lambda_i = a_i$, $i=1,2,...,n$ добиваме

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \le (a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+...+a_n}}.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и претходното неравенство го добиваме неравенството

$$(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \le (a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+...+a_n}},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

22. Ако a,b и c се позитивни броеви, докажи дека

$$\frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}} \le (\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c} \le a^ab^bc^c. \tag{1}$$

Решение. Од тежинското неравенство за геометриската и хармониската средина за броевите a,b и c со тежини a,b и c, соодветно следува неравенството

$$\frac{a+b+c}{3} \le (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

кое е еквивалентно со десното неравенство во (1).

Од тежинското неравенство за геометриската и аритметичката средина применето на броевите $b+c, c+a$ и $a+b$ со тежини a,b и c, соодветно добиваме

$$[(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c]^{\frac{1}{a+b+c}} \le \frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{a+b+c} = 2\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}. \tag{2}$$

Понатаму, ако го искористиме неравенството $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \le \frac{a+b+c}{3}$, од неравенството (2) следува неравенството

$$[(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c]^{\frac{1}{a+b+c}} \le 2\frac{a+b+c}{3},$$

кое е еквивалентно со левото неравенство во (1). ■

23. Нека a,b,c,n и k се позитивни броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \ge a^k + b^k + c^k.$$

Решение. Од тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина за $x_1 = x^{n+k}, \lambda_1 = k, x_2 = y^{n+k}, \lambda_2 = n$ за $x,y,k,n>0$ добиваме

$$[x^{k(n+k)}y^{n(k+n)}]^{\frac{1}{n+k}} \le \frac{kx^{n+k}+ny^{n+k}}{k+n},$$

од каде после ослободување од корените и делење со y^n следува

$$(n+k)x^k \le k\frac{x^{n+k}}{y^n} + ny^k.$$

Ако во последното неравенство последователно наместо x и y прво ставиме a и b, потоа b и c и најпосле c и a и ги собереме добиените неравенства го добиваме бараното неравенство. ■

24. Докажи дека за секој $p>1$ и за секои $x_i>0, i=1,...,n$ е исполнето неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^p \le n^{p-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^p \ .$$

Решение. Ако во неравенството (7) ставиме $\alpha_i=\frac{1}{n},\ \ i=1,2,...,n$ го добиваме неравенството

$$(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)^p \le \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p \ , \tag{8}$$

од кое множејќи со n^p и го добиваме бараното неравенство. ■

25. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да $x+y+z\ge 1$. Докажи дека

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $\sqrt{xy+xz}, \sqrt{yz+yx}, \sqrt{zx+zy}$ и $\frac{x^{3/4}}{\sqrt{y+z}}, \frac{y^{3/4}}{\sqrt{z+x}}, \frac{z^{3/4}}{\sqrt{x+y}}$ следува

$$2(xy+yz+zx)(\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y})\ge(x^{\frac{5}{4}}+y^{\frac{5}{4}}+z^{\frac{5}{4}})^2\ . \tag{1}$$

Понатаму ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката средина и средината со ред $\frac{5}{4}$ добиваме

$$(\frac{x^{5/4}+y^{5/4}+z^{5/4}}{3})^{\frac{4}{5}}\ge\frac{x+y+z}{3},$$

т.е.

$$(x^{\frac{5}{4}}+y^{\frac{5}{4}}+z^{\frac{5}{4}})^2\ge 3^{-\frac{1}{2}}(x+y+z)^{\frac{5}{2}}\ . \tag{2}$$

Конечно, од неравенсвтата (1) и(2) и неравенството

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$

следува

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\ge\frac{(x^{\frac{5}{4}}+y^{\frac{5}{4}}+z^{\frac{5}{4}})^2}{2(xy+yz+zx)}\ge\frac{3^{-\frac{1}{2}}(x+y+z)^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}(x+y+z)^2}\ge\frac{\sqrt{3}(x+y+z)^{\frac{1}{2}}}{2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\ .\ ■$$

26. Нека $a,b,c,p,q,r\in[0,\frac{1}{2}]$ се такви да $a+b+c=p+q=r=1$. Докажи го неравенството

$$abc\le\tfrac{1}{8}(ap+bq+cr)\ .$$

Решение. Од тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина применето на броевите $\frac{1}{bc},\frac{1}{ca},\frac{1}{ab}$ со тежини p,q,r соодветно следува

$$(\tfrac{1}{bc})^p(\tfrac{1}{ca})^q(\tfrac{1}{ab})^r\le\tfrac{p}{bc}+\tfrac{q}{ca}+\tfrac{r}{ab}\ , \tag{1}$$

а применето на броевите bc,ca,ab со тежини p,q,r соодветно следува

$$(bc)^p (ca)^q (ab)^r \le pbc + qca + rab \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\frac{abc}{ap+bq+cr} = \frac{1}{\frac{p}{bc}+\frac{q}{ca}+\frac{r}{ab}} \le \frac{1}{(\frac{1}{bc})^p(\frac{1}{ca})^q(\frac{1}{ab})^r}$$

$$= (bc)^p (ca)^q (ab)^r \le pbc + qca + rab,$$

т.е.

$$\frac{abc}{ap+bq+cr} \le pbc + qca + rab\,. \qquad (3)$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \le b \le c$. Тогаш

$$pbc + qca + rab \le pbc + (q+r)ac = pbc + (1-p)ac\,.$$

Од друга страна $0 \le p \le \frac{1}{2}$ и $(\frac{1}{2} - p)ac \le (\frac{1}{2} - p)bc$, па затоа

$$pbc + (1-p)ac \le \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2}(a+b)c\,.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството $(a+b)c \le (\frac{a+b+c}{2})^2 = \frac{1}{4}$ и затоа

$$pbc + qca + rab \le pbc + (1-p)ac \le \frac{1}{2}(a+b)c \le \frac{1}{8}\,. \qquad (4)$$

Конечно, од неравенствата (3) и (4) следува неравенството $\frac{abc}{ap+bq+cr} \le \frac{1}{8}$, кое е еквивалентно со даденото неравенство. Знак за равенство се достигнува, на пример, за $a = b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, $p = q = \frac{1}{2}$, $r = 0$. ■

27. Нека $n \ge 1$ е природен број и x_i , $i = 1, 2, ..., n$ се позитивни реални броеви такви да $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n$. Докажи дека $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^i}{i} \ge \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од условот $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n$ следува

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_n}} \le \frac{1}{n}(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) = 1\text{, т. е. } x_1 x_2 ... x_n \ge 1\,.$$

Ако го искористиме последното неравенство, од неравенството меѓу тежинската аритметичка и геометриска средина за броевите x_i^i , $i = 1, 2, ..., n$ со тежини $\alpha_i = \frac{\frac{1}{i}}{\sum \frac{1}{i}}$, $i = 1, 2, ..., n$, соодветно добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^i}{i} \ge (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})(x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{1}{\sum \frac{1}{i}}} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,.$$

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x_i^i + (i-1) \ge i x_i\text{, за } i = 1, 2, ..., n\,,$$

односно

$$\frac{x_i^i}{i} \geq x_i - \frac{i-1}{i}, \text{ за } \quad i = 1,2,...,n.$$

Сега, од неравенството меѓу аритемтичката и хармониската средина и условот $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^i}{i} \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1 + \tfrac{1}{i}) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i - n + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} - n + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_i = 1, i = 1,2,...,n$. ■

28 (неравенство меѓу тежишни средини со ред r и s). Нека $x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$ и $t_i > 0, i = 1,2,...,n$ се такви да $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Нека r и s се два ненулти реални броеви такви што $r > s$. Докажи дека

$$(t_1 x_1^r + t_2 x_2^r + ... + t_n x_n^r)^{\frac{1}{r}} \geq (t_1 x_1^s + t_2 x_2^s + ... + t_n x_n^s)^{\frac{1}{s}}. \tag{1}$$

Решение. Ако $p \geq 1$, тогаш функцијата $f(t) = t^p$, $t > 0$ е конвексна бидејќи

$$f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0, \; t > 0.$$

Ако $r > s > 0$, тогаш $p = \frac{r}{s} > 1$, па од неравенството на Јенсен применето за функцијата $f(t) = t^{\frac{r}{s}}$, $t > 0$ и броевите $x_1^s, x_2^s, ..., x_n^s$ го добиваме неравенството

$$t_1 x_1^r + t_2 x_2^r + ... + t_n x_n^r \geq (t_1 x_1^s + t_2 x_2^s + ... + t_n x_n^s)^{\frac{r}{s}},$$

од кое со степенување на $\frac{1}{r}$ – ти степен се добива неравенството (1).

Ако сега $0 > r > s$, тогаш функцијата $f(t) = -t^{\frac{r}{s}}$, $t > 0$ е конвексна, а ако $r > 0 > s$, тогаш функцијата $f(t) = t^{\frac{r}{s}}$, $t > 0$ е конвексна. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

29. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

а) $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ca)$, и

б) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

Решение. а) Ако некој од броевите a,b,c е еднаков на нула, тогаш неравенството е очигледно. Нека $a,b,c \neq 0$. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. Имаме $f''(x) = 4e^{2x} > 0$, што значи дека таа е конвексна на целата реална права. Од неравенството на Поповициу следува

$$e^{2x} + e^{2y} + e^{2z} + 3e^{\frac{2(x+y+z)}{3}} \geq 2(e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x}) = 2(e^x e^y + e^y e^z + e^z e^x).$$

Ако во последното неравенство ставиме $a=e^x, b=e^y, c=e^z$ го добиваме бараното неравенство.

б) Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2abc+1=abc+abc+1\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ .$$

Сега бараното неравенство следува од неравенството под а) и претходното неравенство. ■

6. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ШЕСТА ГЛАВА

1. Нека $m,n\in\mathbf{N}$ се такви што $m\geq 2$ и $n\geq 2$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1\ .$$

Решение. Од условот $m\geq 2$ и $n\geq 2$, имаме $\sqrt[n]{m}=1+u$, $\sqrt[m]{n}=1+v$, при што $u,v>0$. Сега од неравенството на Бернули добиваме

$$m=(1+u)^n\geq 1+nu,\ n=(1+v)^m\geq 1+mv\ ,$$

па затоа

$$m+n\geq 1+n(u+1),\ \ m+n\geq 1+m(v+1)\qquad ,$$

т.е.

$$1+u\leq \frac{m+n-1}{n},\ 1+v\leq \frac{m+n-1}{m}\ .$$

Од последните неравенства, имаме

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+v}\geq\frac{m}{m+n-1}+\frac{n}{m+n-1}=\frac{m+n}{m+n-1}>1.\ ■$$

2. Ако $x>-1$ и $\alpha\in(0,1)$, тогаш $1+\alpha x\geq(1+x)^\alpha$. Докажи!

Решение. Од $\alpha\in(0,1)$ следува $\frac{1}{\alpha}>1$ и како $\alpha x>-\alpha>-1$, од лема 1 добиваме

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\geq 1+\frac{1}{\alpha}\alpha x=1+x\ \text{, т.е. } 1+\alpha x\geq(1+x)^\alpha\ .\ ■$$

3. Докажи дека за $n\in\mathbf{N}$ и $\alpha\in(-1,0)$ важат неравенствата

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\leq n^\alpha\leq\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ .$$

Решение. Имаме $1+\alpha\in(0,1)$, па затоа од задача 2 следуваат неравенствата

$$(1+\tfrac{1}{n})^{\alpha+1}\leq 1+\tfrac{\alpha+1}{n}\ \text{ и }\ (1-\tfrac{1}{n})^{\alpha+1}\leq 1-\tfrac{\alpha+1}{n}\ .$$

Ако овие неравенства ги помножиме со $n^{\alpha+1}$ добиваме

$$(n+1)^{\alpha+1}<n^{\alpha+1}+(\alpha+1)n^\alpha\ \text{ и }\ (n-1)^{\alpha+1}<n^{\alpha+1}-(\alpha+1)n^\alpha\ ,$$

т.е.

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\leq n^\alpha\ \text{ и }\ n^\alpha\leq\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ .\ ■$$

4. Докажи дека за $m,n\in\mathbf{N}$, $m<n$ и $\alpha\in(-1,0)$ важат неравенствата

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}\le m^{\alpha}+(m+1)^{\alpha}+...+n^{\alpha}\le\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Упатство. Во задача 3 запиши ги неравенствата за $m,m+1,...,n$ и собери ги. ■

5. Нека $n\ge 2$ и $x_i\ge 0, i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i\le\binom{n}{2}+\sum_{i=1}^{n} x_i^i .$$

Решение. Од $x_i\ge 0, i=1,2,...,n$ следува $x_i-1\ge -1, i=1,2,...,n$. Сега, од неравенството на Бернули добиваме

$$x_i^i=[1+(x_i-1)]^i\ge 1+i(x_i-1)=ix_i-(i-1), i=1,2,...,n .$$

Ако ги собереме последните неравенства го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i\ge\sum_{i=1}^{n} ix_i-\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\sum_{i=1}^{n} ix_i-\sum_{i=1}^{n-1} i=\sum_{i=1}^{n} ix_i-\frac{n(n-1)}{2},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

6. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни броеви такви да

$$x_1+x_2+...+x_k\ge k \text{, за } k=1,2,...,n .$$

Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\ge\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}).$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1\ge x_2\ge...\ge x_n$. Нека $y_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$, за $k=1,2,...,n$. Ќе докажеме дека

$$2(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)\ge x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n . \quad (1)$$

и дека

$$2(x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)\ge y_1^2+y_2^2+...+y_n^2. \quad (2)$$

Од равенството на Абел имаме

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(2x_i-y_i)=(x_1-x_2)(2x_1-y_1)+(x_2-x_3)(2x_1+2x_2-y_1-y_2)+...$$

$$+(x_{n-1}-x_n)(2\sum_{i=1}^{n-1} x_i-\sum_{i=1}^{n-1} y_i)+x_n(2\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} y_i)\ge 0,$$

бидејќи по претпоставка $x_k\ge x_{k+1}$, за $k=1,2,...,n-1$ и

$$2\sum_{i=1}^{k} x_i\ge 2k\ge 2\sqrt{k}=2\sum_{i=1}^{k}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})=\sum_{i=1}^{k}\frac{2}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}}\ge\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}=\sum_{i=1}^{k} y_i , \quad (3)$$

за $k=1,2,...,n$, што значи дека важи неравенството (1).

Повторно од равенството на Абел имаме

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(2x_i-y_i)=(y_1-y_2)(2x_1-y_1)+(y_2-y_3)(2x_1+2x_2-y_1-y_2)+...$$

$$+(y_{n-1}-y_n)(2\sum_{i=1}^{n-1}x_i-\sum_{i=1}^{n-1}y_i)+y_n(2\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i)\geq 0,$$

што следува од (3) и фактот дека $b_k=\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}}=b_{k+1}$, за $k=1,2,...,n-1$, па затоа важи (2).

Конечно, од (1) и (2) следува бараното неравенство. ■

7. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_n\geq y_{n-1}\geq...\geq y_1$ се позитивни реални броеви такви да $x_1^2+x_2^2+...+x_k^2\leq y_1^2+y_2^2+...+y_k^2$, за секој $k=1,2,...,n$. Докажи дека

$$x_1+x_2+...+x_n\leq y_1+y_2+...+y_n. \tag{1}$$

Решение. Јасно за $n=1$ неравенството (1) важи. Нека претпоставиме дека (1) е докажано за првите n, $n\geq 1$ природни броеви. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x_1^2+x_2^2+...+x_{n+1}^2)(y_1^2+y_2^2+...+y_{n+1}^2)\geq(x_1y_1+x_2y_2+...+x_{n+1}y_{n+1})^2$$

и како според условот на задачата важи

$$x_1^2+x_2^2+...+x_{n+1}^2\leq y_1^2+y_2^2+...+y_{n+1}^2,$$

од последното неравенство добиваме дека

$$y_1^2+y_2^2+...+y_{n+1}^2\geq x_1y_1+x_2y_2+...+x_{n+1}y_{n+1}. \tag{2}$$

Сега, од (2) и од равенството на Абел имаме

$$0\leq\sum_{i=1}^{n+1}y_i(y_i-x_i)=(y_1-y_2)(y_1-x_1)+(y_2-y_3)(y_1+y_2-x_1-x_2)+...$$

$$+(y_n-y_{n-1})(\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i)+y_{n+1}(\sum_{i=1}^{n+1}y_i-\sum_{i=1}^{n+1}x_i).$$

Според тоа, во последната сума за првите n производи според условот на задачата имаме $y_k-y_{k+1}\leq 0$, за $k=1,2,...,n-1$ и според индуквитната претпоставка

$$\sum_{i=1}^{k}y_i\geq\sum_{i=1}^{k}x_i\text{, за } k=1,2,...,n,$$

па затоа тие се непозитивни. Но, сумата е ненегативна, од што следува дека

$$y_{n+1}(\sum_{i=1}^{n+1}y_i-\sum_{i=1}^{n+1}x_i)\geq 0,$$

и како $y_{n+1}>0$ од последното неравенство следува

$$\sum_{i=1}^{n+1}y_i-\sum_{i=1}^{n+1}x_i\geq 0,$$

т.е. важи и за $n+1$. Конечно, тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ■

8. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_1,y_2,...,y_n$ се реални броеви такви да

$$a_1\geq\frac{a_1+a_2}{2}\geq\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geq...\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},\quad b_1\geq\frac{b_1+b_2}{2}\geq\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\geq...\geq\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}.$$

Докажи дека

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \ge \tfrac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)(y_1+y_2+...+y_n)\,.$$

Решение. Нека

$$z_k = x_1+x_2+...+x_k \text{ , за } k=1,2,...,n \text{ и } y_{n+1}=0\,.$$

Понатаму, од условите на задачата имаме

$$\tfrac{z_1}{1} \ge \tfrac{z_2}{2} \ge \tfrac{z_3}{3} \ge ... \ge \tfrac{z_n}{n}\,, \tag{1}$$

а од $\tfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} y_i \ge \tfrac{1}{k+1}\sum\limits_{i=1}^{k+1} y_i$, за $k=1,2,...,n-1$, добиваме

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \ge k y_{k+1} \text{ , за } k=1,2,...,n-1\,. \tag{2}$$

Сега, од неравенствата (1) и (2), со двократна примена на равенството на Абел добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i+1})z_i = \sum_{i=1}^{n}[i(y_i-y_{i+1})]\tfrac{z_i}{i}\\ &= (z_1-\tfrac{z_2}{2})(y_1-y_2)+(\tfrac{z_2}{2}-\tfrac{z_3}{3})(y_1+y_2-2y_3)+...+\\ &\quad +(\tfrac{z_{n-1}}{n-1}-\tfrac{z_n}{n})(\sum_{i=1}^{n-1} y_i-(n-1)y_n)+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i \ge \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i\,,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $abc=1$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 \ge 2(a^2b+b^2a+c^2b)\,.$$

Решение. Според пример 5 а) имаме

$$a^2b+b^2c+c^2a \le a^3+b^3+c^3. \tag{1}$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\tfrac{1}{a}\le\tfrac{1}{b}\le\tfrac{1}{c}$ и тогаш $\tfrac{1}{a^2}\le\tfrac{1}{b^2}\le\tfrac{1}{c^2}$. Сега од условот $abc=1$ и од неравенството за преуредување следува

$$\begin{aligned}(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 &= \tfrac{1}{a^3}+\tfrac{1}{b^3}+\tfrac{1}{c^3} \ge \tfrac{1}{ca^2}+\tfrac{1}{ab^2}+\tfrac{1}{bc^2}\\ &= \tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c} = a^2b+b^2a+c^2b.\end{aligned} \tag{2}$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1) и (2) го добиваме бараното неравенство. ■

10. Докажи дека за секои позитивни броеви a,b,c важи:

а) $\tfrac{a^2}{b^2}+\tfrac{b^2}{c^2}+\tfrac{c^2}{a^2} \ge \tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c}$,

б) $\tfrac{1}{a^2}+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{1}{c^2} \ge \tfrac{a+b+c}{abc}$.

Решение. а) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\tfrac{a}{b}\le\tfrac{b}{c}\le\tfrac{c}{a}$. Сега од неравенството за преуредување добиваме

$$\tfrac{a^2}{b^2}+\tfrac{b^2}{c^2}+\tfrac{c^2}{a^2} = \tfrac{a}{b}\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}\tfrac{c}{a} \ge \tfrac{a}{b}\tfrac{b}{c}+\tfrac{b}{c}\tfrac{c}{a}+\tfrac{c}{a}\tfrac{a}{b} = \tfrac{a}{c}+\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}\,.$$

б) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b} \le \frac{1}{c}$. Сега од неравенството за преуредување добиваме

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\frac{1}{c} \ge \frac{1}{a}\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\frac{1}{a}=\frac{a+b+c}{abc}\ . \ ■$$

11. Нека a,b,c се позитивни броеви такви да $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge a+b+c\,.$$

Решение. *Прв начин.* Без ограничување на општоста можеме да земеме

$$\frac{a}{b} \le \frac{b}{c} \le \frac{c}{a}\,.$$

Тогаш

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \le \sqrt[3]{\frac{b}{c}} \le \sqrt[3]{\frac{c}{a}} \text{ и } \sqrt[3]{(\frac{a}{b})^2} \le \sqrt[3]{(\frac{b}{c})^2} \le \sqrt[3]{(\frac{c}{a})^2}\ ,$$

па од неравенството за преуредување и условот $abc=1$ следува

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} &= \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\sqrt[3]{(\frac{a}{b})^2}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\sqrt[3]{(\frac{b}{c})^2}+\sqrt[3]{(\frac{c}{a})^2}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\\ &\ge \sqrt[3]{(\frac{a}{b})^2}\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{(\frac{b}{c})^2}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}+\sqrt[3]{(\frac{c}{a})^2}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\\ &= \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{bca}}+\sqrt[3]{\frac{c^3}{cab}}=a+b+c.\end{aligned}$$

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $abc=1$ следува

$$\frac{1}{3}(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}) \ge \sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{a}{b}\frac{b}{c}}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}=a\ ,$$

$$\frac{1}{3}(\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}) \ge \sqrt[3]{\frac{b}{c}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}=\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}}=b \text{ и}$$

$$\frac{1}{3}(\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}) \ge \sqrt[3]{\frac{c}{a}\frac{c}{a}\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}=\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}}=c\ .$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме бараното неравенство. ■

12. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b+c) \le 3abc\ .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $c \le b \le a$, од што следува $a(b+c-a) \le b(a+c-b) \le c(a+b-c)$. На пример за првото неравенство имаме

$$\begin{aligned} a(b+c-a) \le b(a+c-b) \quad &\Leftrightarrow \quad ab+ac-a^2 \le ab+bc-b^2,\\ &\Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b-c) \ge 0\ .\end{aligned}$$

Сега, од левото неравенство во првото неравенство за преуредување имаме

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c) \le ab(b+c-a)+bc(a+c-b)+ca(a+b-c),$$

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c) \le ca(b+c-a)+ab(a+c-b)+bc(a+b-c)$$

и ако ги собереме последните две неравенства, после средувањето добиваме

$$2[a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b+c)] \le 6abc\ . \ ■$$

13. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0\,.$$

Решение. Ќе го разгледаме случајот $c\leq b\leq a$. Останатите случаи се разгледуваат аналогно. Имаме $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$ и според задача 5 точни се неравенствата $a(b+c-a)\leq b(a+c-b)\leq c(a+b-c)$. Сега, од десното неравенство во првото неравенство за преуредување последователно следуваат неравенствата

$$\frac{a(b+c-a)}{a}+\frac{b(c+a-b)}{b}+\frac{c(a+b-c)}{c}\geq\frac{a(b+c-a)}{c}+\frac{b(c+a-b)}{a}+\frac{c(a+b-c)}{b}\,,$$

$$a+b+c\geq\frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}+a+b+c \text{ и}$$

$$0\geq\frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}\,.$$

Од последното неравенство, со множење со $-abc$ се добива бараното неравенство. ■

14. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\,.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\leq b\leq c$. Тогаш $b+c-a\geq c+a-b\geq a+b-c$, па затоа

$$\frac{1}{b+c-a}\leq\frac{1}{c+a-b}\leq\frac{1}{a+b-c}\,.$$

Од неравенството за преуредување следуваат неравенствата

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{b}{b+c-a}+\frac{c}{c+a-b}+\frac{a}{a+b-c}\,,$$

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{c}{b+c-a}+\frac{a}{c+a-b}+\frac{b}{a+b-c}\,.$$

Последните две неравенства ги собираме и го добиваме неравенството

$$2\left(\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\right)\geq\frac{b+c}{b+c-a}+\frac{c+a}{c+a-b}+\frac{a+b}{a+b-c}\,,$$

кое е еквивалентно на неравенството (1). ■

15. Ако $a_i>0, i=1,2,...,n$ и $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, тогаш $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geq\frac{n}{n-1}$. Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1\leq a_2\leq...\leq a_n$, од што следува $S-a_1\geq S-a_2\geq...\geq S-a_n$, па затоа

$$\frac{1}{S-a_1}\leq\frac{1}{S-a_2}\leq...\leq\frac{1}{S-a_n}\,.$$

Од неравенството за преуредување следуваат неравенствата

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+...+\frac{a_{n-1}}{S-a_{n-1}}+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{a_2}{S-a_1}+\frac{a_3}{S-a_2}+...+\frac{a_n}{S-a_{n-1}}+\frac{a_1}{S-a_n}\,,$$

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+...+\frac{a_{n-1}}{S-a_{n-1}}+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{a_3}{S-a_1}+\frac{a_4}{S-a_2}+...+\frac{a_1}{S-a_{n-1}}+\frac{a_2}{S-a_n}\,,$$

....

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+...+\frac{a_{n-1}}{S-a_{n-1}}+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{a_n}{S-a_1}+\frac{a_1}{S-a_2}+...+\frac{a_{n-2}}{S-a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{S-a_n}\,.$$

Ако ги собереме овие $n-1$ неравенство го добиваме неравенството

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+...+\frac{a_{n-1}}{S-a_{n-1}}+\frac{a_n}{S-a_n}\right)\geq\frac{S-a_1}{S-a_1}+\frac{S-a_2}{S-a_2}+...+\frac{S-a_{n-1}}{S-a_{n-1}}+\frac{S-a_n}{S-a_n}=n$$

кое е еквиваентно со бараното неравенство. ■

16. Докажи дека:

а) Ако $a_i > 0, i = 1,2,...,n$ и $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$, тогаш $\sum_{i=1}^{n} \frac{S}{S-a_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$.

б) Ако $a_i > 0, i = 1,2,...,n$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, тогаш $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n}{2n-1}$.

Решение. а) Според задача 15 имаме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S}{S-a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S-a_i+a_i}{S-a_i} = \sum_{i=1}^{n} (1+\frac{a_i}{S-a_i}) = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq n + \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n-1} .$$

б) За низата $b_i = a_i, i = 1,2,...,n$ и $b_{n+i} = a_i, i = 1,2,...,n$ имаме

$$S = \sum_{i=1}^{2n} b_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i = 2 .$$

Сега, од задача 15 имаме

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{b_i}{2-b_i} \geq \frac{2n}{2n-1}$$

и како

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{b_i}{2-b_i} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2-a_i} ,$$

со замена во последното неравенство го добиваме бараното неравенство. ■

17. Нека $a, b, c \in \mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}) .$$

Решение. Ако измножиме после средувањето добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} .$$

Ставаме $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ и добиваме дека неравенството е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{z^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} \geq \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz} .$$

Конечно, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\frac{x}{y} \leq \frac{y}{z} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{x}{z} \leq \frac{z}{y} \leq \frac{y}{x}$, при што важи $\frac{x^2}{y^2} \leq \frac{y^2}{z^2} \leq \frac{z^2}{x^2} \leq \frac{x^2}{z^2} \leq \frac{z^2}{y^2} \leq \frac{y^2}{x^2}$ и ако земеме пермутација $\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}, \frac{z}{y}, \frac{y}{x}, \frac{x}{z}$, од неравенството за преуредување добиваме

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{z^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} \geq \frac{x^2}{y^2}\frac{y}{z} + \frac{y^2}{z^2}\frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2}\frac{x}{y} + \frac{x^2}{z^2}\frac{z}{y} + \frac{z^2}{y^2}\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\frac{x}{z}$$

$$= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{zy} + \frac{z^2}{yx} + \frac{y^2}{xz} = \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz},$$

што и требаше да се докаже. ■

18. Нека a, b, c се ненегативни реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$7(ab+bc+ca) \leq 2+9abc\,. \tag{1}$$

Решение. Ако го искористиме условот $a+b+c=1$ добиваме дека неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$7(ab+bc+ca)(a+b+c) \leq 2(a+b+c)^3+9abc\,,$$

т.е. на неравенството

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \leq 2(a^3+b^3+c^3)\,. \tag{2}$$

Сега, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \leq b \leq c$, од што следува $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, па затоа од неравенството за преуредување добиваме

$$a^2b+b^2c+c^2a \leq a^3+b^3+c^3 \text{ и } ab^2+bc^2+ca^2 \leq a^3+b^3+c^3\,.$$

Конечно, собирајќи ги последните две неравенства го добиваме неравенството (2).

Забелешка. Од $a \leq b \leq c$ и $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, со примена на неравенството на Чебишев го добиваме неравенството

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 3(a^3+b^3+c^3)\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). ■

19. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви да $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1\,.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x \leq y \leq z$. Тогаш

$$x+y \leq z+x \leq y+z\,,\ xy \leq zx \leq yz\,,\ 2z^2(x+y) \geq 2y^2(z+x) \geq 2x^2(y+z) \text{ и}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\,.$$

Сега, од неравенството за преуредување следува

$$\frac{2yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{2zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{2xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq \frac{xy+zx}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{zy+xy}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{xz+zy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\,.$$

Ако на двете страни на последното неравенство додадеме

$$\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{2y^2}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{2z^2}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\,,$$

и го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата добиваме

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+2yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{2y^2+2zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{2z^2+2xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} &\geq \frac{2x^2+xy+zx}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{2y^2+zy+xy}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{2z^2+xz+zy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \\
&\geq \frac{2x^2+x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{2y^2+y(z+x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{2z^2+z(x+y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \\
&\geq \frac{2\sqrt{2x^3(y+z)}}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{2\sqrt{y^3(z+x)}}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{2\sqrt{2z^3(x+y)}}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \\
&\geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=2,
\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

20. Нека a,b,c,d се ненегативни броеви такви да $a+b+c+d=4$. Докажи

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \le 4 . \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека (x,y,z,t) е пермутација на (a,b,c,d) таква да $x \ge y \ge z \ge t$. Тогаш $xyz \ge xyt \ge xzt \ge yzt$ и од неравенството за преуредување следува дека

$$x\cdot xyz+y\cdot xyt+z\cdot xzt+t\cdot yzt \ge a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab . \qquad (2)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} x\cdot xyz+y\cdot xyt+z\cdot xzt+t\cdot yzt &= (xy+zt)(xz+yt) \le \tfrac{1}{4}(xy+zt+xz+yt)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}[(x+t)(y+z)]^2 \le \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{4}(x+y+z+t)^2]^2 \le 4. \end{aligned} \qquad (3)$$

Конечно, од неравенствата (2) и (3) следува неравенството (1). ■

21. За реалните броеви a,b,c,x,y,z важи $a \ge b \ge c > 0$ и $x \ge y \ge z > 0$. Докажи дека

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4} . \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството за преуредување следува

$$bz+cy \le by+cz ,$$

па затоа од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$(bz+cy)(by+cz) \le (by+cz)^2 \le 2[(by)^2+(cz)^2] . \qquad (2)$$

Да означиме $u=(ax)^2, v=(by)^2, w=(cz)^2$. Тогаш неравенството (2) е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^2x^2}{(bz+cy)(by+cz)} \ge \frac{(ax)^2}{2[(by)^2+(cz)^2]} = \frac{u}{2(v+w)} . \qquad (3)$$

Од неравенството (3), аналогните две неравенства и неравенството на Несбит добиваме

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{u}{2(v+w)}+\frac{v}{2(w+u)}+\frac{w}{2(u+v)} \ge \frac{3}{4} . \ ■$$

22. Нека $a,b,c \in \mathbf{R}^+$ и $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}=3$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2 \ge a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}} . \qquad (1)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \le b \le c$. Тогаш $a^{\frac{2}{3}} \le b^{\frac{2}{3}} \le c^{\frac{2}{3}}$ и $a^{\frac{4}{3}} \le b^{\frac{4}{3}} \le c^{\frac{4}{3}}$, па од неравенството на Чебишев и условот на задачата следува неравенството

$$\begin{aligned} 3(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}) &= (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}) \\ &\le 3(a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}}) \end{aligned} ,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

23. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се позитивни реални броеви такви да $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Докажи дека

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geq \max\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\}.$$

Решение. Нека $X = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, $X_i = X - x_i^3$, $i = 1,2,3,4$, Јасно, $X = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} X_i$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од условот $x_1x_2x_3x_4 = 1$ следува $\frac{1}{3}X_1 \geq \sqrt[3]{x_2^3x_3^3x_4^3} = \frac{1}{x_1}$. Аналогно, $\frac{1}{3}X_i \geq \frac{1}{x_i}, i = 2,3,4$, па затоа

$$X = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} X_i \geq \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}. \tag{1}$$

Без оганичување на општоста можеме да земеме $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Тогаш $x_1^2 \leq x_2^2 \leq x_3^2 \leq x_4^2$, па од неравенството на Чебишев следува дека

$$\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}{4} \geq \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4} \cdot \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $x_1x_2x_3x_4 = 1$ следува

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4} \geq \sqrt[4]{x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2} = \sqrt[4]{(x_1x_2x_3x_4)^2} = 1,$$

Од последните две неравенство добиваме

$$\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}{4} \geq \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}. \tag{2}$$

Конечно, од неравенствата (1) и (2) следува бараното неравенство. ■

24. а) Нека $x_1 \geq x_2 \geq x_3 > 0$ и $0 < y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Докажи дека

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \geq 3\frac{x_1+x_2+x_3}{y_1+y_2+y_3}. \tag{1}$$

б) Нека $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Докажи дека

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{9}{\pi}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. а) Ако ставиме $a_i = x_i, b_i = \frac{1}{y_i}, i = 1,2,3$, тогаш од неравенството на Чебишев добиваме

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \geq \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}). \tag{2}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за позитивните реални броеви $0 < y_1 \leq y_2 \leq y_3$ добиваме

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \geq \frac{9}{y_1+y_2+y_3}. \tag{3}$$

Конечно, неравенството (1) следува од неравенствата (2) и (3).

б) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Ако во неравенството (1) ставиме

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \; y_1 = \alpha, y_2 = \beta, \;\; y_3 = \gamma$$

и земеме предвид дека $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, добиваме

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3\frac{1+1+1}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{9}{\pi} .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само во (1) важи знак за равенство, што значи ако и само ако во неравенствата (2) и (3) важи знак за равенство. Но, во (3) важи зна за равенство ако и само ако $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{\pi}{3}$. ■

25. Нека $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ се различни природни броеви. Докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(x_1 + x_2 + ... + x_n) . \tag{1}$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n ,$$

при што од условот на задачата $1 \leq x_1$, $2 \leq x_2$,…, $n \leq x_n$. Значи, постојат природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ такви што

$$x_1 = 1 + a_1 , \; x_2 = 2 + a_2 , \; \dots, \; x_n = n + a_n .$$

Од условот $x_{k+1} - x_k \geq 1$, добиваме

$$k + 1 + a_{k+1} - k - a_k \geq 1$$
$$a_{k+1} - a_k \geq 0$$
$$a_{k+1} \geq a_k .$$

Сега неравенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$3\sum_{k=1}^{n} (k + a_k)^2 \geq (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k . \tag{2}$$

Јасно, за $a_k = 0$ за $k = 1, 2, ..., n$, неравенството преминува во равенство.

Затоа, нека постои k таков што $a_k \neq 0$. Неравенството (2) е еквивалентно со неравенството

$$3\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} ka_k + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \geq (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k .$$

т.е. со неравенството

$$3\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} ka_k \geq (2n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k . \tag{3}$$

Значи, доволно е да го докажеме неравенство (3). Но, од неравенството на Чебишев применето на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ и $1, 2, ..., n$ имаме

$$6\sum_{k=1}^{n} ka_k \geq \frac{6}{n}(\sum_{k=1}^{n} k)(\sum_{k=1}^{n} a_k) = \frac{6}{n}\frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k = 3(n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k > (2n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

и како $3\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq 0$, добиваме дека е точно неравенството (3). ■

26. Нека $n > 1$ и $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни рални броеви такви да $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Докажи дека

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Решение. *Прв начин.* Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$. Тогаш

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\leq\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\leq\ldots\leq\frac{1}{\sqrt{1-x_n}},$$

па последователно од неравенството на Чебишев, неравенството меѓу хармониската и аритметичката и неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}}&\geq\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_k}}\Big)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_k}}\\&\geq\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}}\geq\sqrt{\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\end{aligned}.$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k}=\sqrt{n},$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}\geq\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}.$$

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_k}}\geq\frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}},$$

а од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)}=\sqrt{n(n-1)}.$$

Значи,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(1-x_k)}{\sqrt{1-x_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_k}}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}\geq\frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}}-\sqrt{n(n-1)}\\&\geq\frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}}-\sqrt{n(n-1)}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

Останатиот дел од доказот е идентичен како при првиот начин. ■

27. Нека $a,b,c>0$ и $n\geq1$. Докажи дека

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{3(a^n+b^n+c^n)}{2(a+b+c)}. \tag{1}$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\leq b\leq c$. Тогаш $\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+b}$ и $a^n\leq b^n\leq c^n$, па од неравенството на Чебишев добиваме

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n+b^n+c^n}{3}(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}). \qquad (2)$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на броевите $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ и $b+c,c+a,a+b$ добиваме

$$2(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq 9,$$

т.е.

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}. \qquad (3)$$

Конечно од неравенствата (2) и (3) следува неравенството (1).

Забелешка. Ако во неравенството (1) ставиме $n=2$, тогаш од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме дека

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c. \ \blacksquare$$

28. Нека $1\leq x_1\leq x_2\leq...\leq x_n,\ n\geq 2$ и

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}=1.$$

Докажи дека

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}\geq(n-1)(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{x_n}}). \qquad (1)$$

Решение. Доволно е да го докажеме еквивалентното неравенство

$$\sqrt{x_1}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+...+\sqrt{x_n}+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\geq n(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{x_n}}),$$

односно неравенството

$$(\frac{1+x_1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1+x_2}{\sqrt{x_2}}+...+\frac{1+x_n}{\sqrt{x_n}})(\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n})\geq n(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{x_n}}). \quad (2)$$

Од $1\leq x_1\leq x_2\leq...\leq x_n$ следува $\frac{1}{1+x_1}\geq\frac{1}{1+x_2}\geq...\geq\frac{1}{1+x_n}$. Понатаму, ако $1<a\leq b$, тогаш $\sqrt{b}-\sqrt{a}\geq 0$ и $\sqrt{ab}>1$, па затоа $\sqrt{b}-\sqrt{a}<b\sqrt{a}-a\sqrt{b}$, односно $\frac{1+a}{\sqrt{a}}\leq\frac{1+b}{\sqrt{b}}$. Според тоа, $\frac{1+x_1}{\sqrt{x_1}}\leq\frac{1+x_2}{\sqrt{x_2}}\leq...\leq\frac{1+x_n}{\sqrt{x_n}}$, па од последица 5 следува неравенството (2), кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

29. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни рални броеви. Докажи дека

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}...x_n^{x_n}\geq(x_1x_2...x_n)^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}. \qquad (1)$$

Решение. Од својствата на логаритмите за основа $a>1$ следува дека неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$x_1\ln x_1+x_2\ln x_2+...+x_n\ln x_n\geq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}(\ln x_1+\ln x_2+...+\ln x_n). \quad (2)$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1\leq x_2\leq...\leq x_n$, па затоа повторно од својствата на логаритмите добиваме $\ln x_1\leq\ln x_2\leq...\leq\ln x_n$. Конечно, од неравенството на Чебишев следува неравенството

$$(x_1+x_2+...+x_n)(\ln x_1+\ln x_2+...+\ln x_n)\leq n(x_1\ln x_1+x_2\ln x_2+...+x_n\ln x_n),$$

кое е еквивалентно со неравеството (2). ■

30. Нека a,b,c се позитивни броеви такви да $abc=2$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3 \ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \, .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \ge b \ge c$, што значи $a^2 \ge b^2 \ge c^2$, па од неравенството на Чебишев следува дека

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \le 3(a^3+b^3+c^3) \, . \qquad (1)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $abc=2$ следува

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc = 6 \, ,$$

па затоа прво од (1), а потоа од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\ge \sqrt{6(a^3+b^3+c^3)} \ge \sqrt{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \\ &= \sqrt{[(b+c)+(c+a)+(a+b)](a^2+b^2+c^2)} \\ &\ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

31. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $abc \ge 1$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3 \ge ab+bc+ca \, .$$

Решение. Од неравенството на Чебишев, неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, условот $abc \ge 1$ и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$a^3+b^3+c^3 \ge \tfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3} \ge \sqrt[3]{abc}(a^2+b^2+c^2) \ge ab+bc+ca \, . \; ■$$

32. Најди ги сите позитивни реални броеви a,b,c такви да

$$4(ab+bc+ca)-1 \ge a^2+b^2+c^2 \ge 3(a^3+b^3+c^3) \, .$$

Решение. Од неравенството на Чебишев следува

$$3(a^3+b^3+c^3) \ge (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \, ,$$

и како $a^2+b^2+c^2 \ge 3(a^3+b^3+c^3)$ добиваме дека $a+b+c \le 1$. Од друга страна

$$4(ab+bc+ca)-1 \ge a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \, ,$$

па затоа

$$1 \le 3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 1 ,$$

што значи дека $a+b+c=1$. Конечно, од $a+b+c=1$ и $3(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$ следува $a=b=c=\frac{1}{3}$. ■

33. Нека $a,b,c \in \mathbf{R}^+$ се такви да $ab+bc+ca=abc$. Докажи дека

$$\tfrac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\tfrac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\tfrac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \ge 1 \, .$$

Решение. Ако земеме $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$, тогаш условот на задачата преминува во условот $x+y+z=1$ и даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq 1=x+y+z\,. \tag{1}$$

Понатаму, од неравенството на Чебишев следува

$$x^4+y^4\geq \tfrac{1}{2}(x^3+y^3)(x+y)\text{, т.е. } \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}\geq\frac{x+y}{2}$$

и аналогно

$$\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}\geq\frac{y+z}{2},\ \frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq\frac{z+x}{2}\,.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1). ■

34. Нека $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbf{R}^+, n\geq 2$ и $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=1$. Докажи дека

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}\geq\frac{n}{n-1}\,. \tag{1}$$

Решение. Нека $s=\sum\limits_{i=1}^n x_i$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1\geq x_2\geq...\geq x_n$. Тогаш

$$x_1^4\geq x_2^4\geq...\geq x_n^4 \text{ и } \frac{x_1}{s-x_1}\geq\frac{x_2}{s-x_2}\geq...\geq\frac{x_n}{s-x_n}\,,$$

па затоа од неравенството на Чебишев, неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и условот на задачата следува

$$\begin{aligned}\frac{x_1^5}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}&=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^4}{s-x_i}x_i\geq n\sum_{i=1}^n x_i^4\cdot\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{s-x_i}\\&\geq\sum_{i=1}^n x_i^2\cdot\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{s-x_i}=\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{s-x_i}.\end{aligned} \tag{2}$$

Понатаму, за функцијата $f(t)=\frac{t}{s-t}, t\in(0,s)$ важи $f''(t)=\frac{2s}{(s-t)^3}>0,\ \ t\in(0,s)$, т.е. таа е конвексна, па затоа од неравенството (2) и од неравенството на Јенсен следува

$$\begin{aligned}\frac{x_1^5}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}&\geq\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{s-x_i}=n\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{s-x_i}\\&\geq n\frac{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}{x_1+x_2+...+x_n-\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}=\frac{n}{n-1},\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1). ■

35. Ако a,b,c,d се позитивните броеви такви да

$$c^2+d^2=(a^2+b^2)^3\,, \tag{1}$$

тогаш $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\geq 1$. Докажи!

Решение. Од неравенството на Хелдер, применето на броевите $c^{\frac{2}{3}}, d^{\frac{2}{3}}$ и $\frac{a^2}{c^{2/3}}, \frac{b^2}{d^{2/3}}$, при $p=3$, $q=\frac{3}{2}$ добиваме

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= c^{\frac{2}{3}}\frac{a^2}{c^{2/3}}+d^{\frac{2}{3}}\frac{b^2}{d^{2/3}}\\ &\leq [(c^{\frac{2}{3}})^3+(d^{\frac{2}{3}})^3]^{\frac{1}{3}}[(\frac{a^2}{c^{2/3}})^{\frac{3}{2}}+(\frac{b^2}{d^{2/3}})^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{3}}\\ &= (c^2+d^2)^{\frac{1}{3}}(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d})^{\frac{2}{3}},\end{aligned}$$

и ако го искористиме условот (1), после средувањето го добиваме бараното неравенство. ■

36. Нека a,b,c се позитивни релано броеви такви да $ab+bc+ca\geq 3$. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$(\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}})^{\frac{2}{3}}[a(a+b)+b(b+c)+c(c+a)]^{\frac{1}{3}}\geq a+b+c,$$

т.е.

$$(\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}})^2\geq\frac{(a+b+c)^3}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}. \tag{2}$$

Според тоа, за да го докажеме бараното неравенство доволно е да докажеме дека

$$2(a+b+c)^3\geq 9(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca). \tag{3}$$

Нека $m=a+b+c$ и $n=ab+bc+ca$. Тогаш $n\geq 3$ и неравенството (3) е еквивалентно со неравенството $2m^3+9n\geq 9m^2$. Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2m^3+9n\geq 2m^3+27=m^3+m^3+27\geq 3\sqrt[3]{27m^3m^3}=9m^2. \ ■$$

37. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbf{R}^+$ се такви да

$$\sum_{i=1}^n a_i^3=3 \text{ и } \sum_{i=1}^n a_i^5=5. \tag{1}$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^n a_i>\frac{3}{2}. \tag{2}$$

Решение. Од неравенството на Хелдер и од условите (1) следува

$$3=\sum_{i=1}^n a_i^3=\sum_{i=1}^n a_i^2a_i\leq(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}(\sum_{i=1}^n (a_i^2)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}}=(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}(\sum_{i=1}^n a_i^5)^{\frac{2}{5}}=5^{\frac{2}{5}}(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}},$$

т.е.

$$\frac{3}{5^{\frac{2}{5}}}\leq(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}. \tag{3}$$

Нека $A=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Од $0<\frac{a_i}{A}<1$ следува $(\frac{a_i}{A})^{\frac{5}{3}}\le\frac{a_i}{A}$, што значи дека

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{A})^{\frac{5}{3}}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A}=1,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{5}{3}}\le A^{\frac{5}{3}}=(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{5}{3}}. \qquad (4)$$

Конечно, бидејќи $2>5^{\frac{2}{5}}$, од неравенствата (3) и (4) следува

$$\frac{3}{2}<\frac{3}{5^{\frac{2}{5}}}\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}\le[(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{5}{3}}]^{\frac{3}{5}}=\sum_{i=1}^{n}a_i ,$$

што значи дека точно е неравенството (2). ■

38. Нека $k,l\in\mathbf{N}$ и нека $a_{ij}>0; i=1,...,k,\ j=1,2,...,l$ се позитивни реални броеви. Докажи дека за $q\ge p>0$ важи

$$(\sum_{j=1}^{l}(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^{p})^{\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}}\le(\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}^{q})^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

Решение. Да означиме

$$b_j=\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^{p}\text{, за } j=1,2,...,l$$

и да ги означиме левата и десната страна на неравенството (1) со L и D , соодветно. Тогаш

$$L^q=\sum_{j=1}^{l}b_j^{\frac{q}{p}}=\sum_{j=1}^{l}b_j^{\frac{q-p}{p}}b_j=\sum_{j=1}^{l}[b_j^{\frac{q-p}{p}}(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^{p})]=\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{l}b_j^{\frac{q-p}{p}}a_{ij}^{p}).$$

Сега од неравенството на Хелдер следува неравенството

$$\begin{aligned}L^q&=\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{l}b_j^{\frac{q-p}{p}}a_{ij}^{p})\\&\le\sum_{i=1}^{k}[(\sum_{j=1}^{l}(b_j^{\frac{q-p}{p}})^{\frac{q}{q-p}})^{\frac{q-p}{q}}(\sum_{j=1}^{l}(a_{ij}^{p})^{\frac{q}{p}})^{\frac{p}{q}}]\\&=(\sum_{j=1}^{l}b_j^{\frac{q}{p}})^{\frac{q-p}{q}}\cdot[\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}^{q})^{\frac{p}{q}}]\\&=L^{q-p}D^{p},\end{aligned}$$

од кое со делење ос L^{q-p} и наоѓање на $p-$ ти корен се добива неравенството (1). ■

39 (прво обопштено неравенство на Хелдер). Нека $a_i,b_i,\ i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и нека за позитивните реални броеви p,q,r важи $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Докажи дека

$$[\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)^r]^{\frac{1}{r}} \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}. \qquad (1)$$

Решение. Броевите $a_i^r, b_i^r, i=1,2,...,n$ се позитивни и за позитивните реални броеви $p'=\frac{p}{r}, q'=\frac{q}{r}$ важи $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$. Сега од неравенството на Хелдер следува неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^r \le [\sum_{i=1}^{n}(a_i^r)^{p'}]^{\frac{1}{p'}} [\sum_{i=1}^{n}(b_i^r)^{q'}]^{\frac{1}{q'}},$$

т.е. неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^r \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{r}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{r}{q}},$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

40 (второ обопштено неравенство на Хелдер). Нека $a_i, b_i, c_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и нека за позитивните реални броеви p,q,r важи $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{n} c_i^r)^{\frac{1}{r}}. \qquad (1)$$

Решение. Од тежинското неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина при

$$n=3,\ \alpha_1=\frac{1}{p}, \alpha_2=\frac{1}{q},\ \alpha_3=\frac{1}{r},\ a_1=a^p, a_2=b^q \text{ и } a_3=c^r$$

следува

$$abc=(a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}}(c^r)^{\frac{1}{r}} \le \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q+\frac{1}{r}c^r. \qquad (2)$$

Во неравенството (2) последователно ставиме

$$a=\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, b=\frac{b_i}{(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}}, c=\frac{c_i}{(\sum_{i=1}^{n} c_i^r)^{\frac{1}{r}}}, \text{ за } i=1,2,...,n,$$

ги добиваме неравенствата

$$\frac{a_i b_i c_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^{n} c_i^r)^{\frac{1}{r}}} \le \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}+\frac{1}{r}\frac{c_i^r}{\sum_{i=1}^{n} c_i^r}, \text{ за } i=1,2,...,n. \qquad (3)$$

Со собирање на неравенствата (3) го добиваме неравенството

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^{n} c_i^r)^{\frac{1}{r}}} \le \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}+\frac{1}{r}\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r}{\sum_{i=1}^{n} c_i^r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

Забелешка. На потполно идентичен начин како и неравенството (1) за m низи позитивни реални броеви може да се докаже следново обопштување на второто обопштено неравенство на Хелдер:

Нека за броевите $p_i > 0, i = 1,2,...,m$ важи $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ и нека се дадени m низи позитивни реални броеви

$$(a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}),\ (a_{21}, a_{22}, ..., a_{n2}), ..., (a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{nm}) .$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}...a_{im} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} (\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{p_2})^{\frac{1}{p_2}} ... (\sum_{i=1}^{n} a_{im}^{p_m})^{\frac{1}{p_m}} . \qquad (4)$$

Ако во неравенството (4) земеме $p_1 = p_2 = ... = p_m = m$, тогаш истото го добива видот

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}...a_{im})^m \leq (\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^m)(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^m)...(\sum_{i=1}^{n} a_{im}^m) . \blacksquare \qquad (5)$$

41. Нека a,b,c,x,y,z,t,u,v се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(t^3 + u^3 + v^3) \geq (axt + byu + czv)^3 . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* За низите $a,b,c; x,y,z$ и t,u,v и за $p = q = r$, од второто обопштено неравенство на Хелдер, следува неравенството

$$axt + byu + czv \leq (a^3 + b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}} (x^3 + y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}} (t^3 + u^3 + v^3)^{\frac{1}{3}} ,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство.

Втор начин. Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$3 = \frac{a^3}{a^3+b^3+c^3} + \frac{x^3}{x^3+y^3+z^3} + \frac{t^3}{t^3+u^3+v^3} + \frac{b^3}{a^3+b^3+c^3} + \frac{y^3}{x^3+y^3+z^3} + \frac{u^3}{t^3+u^3+v^3} +$$

$$+ \frac{c^3}{a^3+b^3+c^3} + \frac{z^3}{x^3+y^3+z^3} + \frac{v^3}{t^3+u^3+v^3} \geq \frac{3axt+3byu+3czv}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(t^3+u^3+v^3)}} ,$$

кое е еквивалентно на неравенството (1). ■

42. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1 .$$

Решение. Според задача 31 за низите

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^2+8bc}}, \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{b^2+8ca}}, \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{c^2+8ab}}; \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^2+8bc}}, \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{b^2+8ca}}, \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{c^2+8ab}} \text{ и}$$

$$\sqrt[3]{a(a^2 + 8bc)}, \sqrt[3]{b(b^2 + 8ca)}, \sqrt[3]{c(c^2 + 8ab)}$$

добиваме

$$(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}})^2 (a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \geq (a + b + c)^3 ,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc .$$

Но, со непосредни пресметувања се добива дека последното неравенство е еквивалентно со очигледното неравенство

$$c(a - b)^2 + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 \geq 0 . \blacksquare$$

43. Нека за реалните броеви $a,b,c\geq 1$ важи $a+b+c=2abc$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2}\geq \sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{bc-1}+\sqrt[3]{ca-1}\,. \qquad (1)$$

Решение. Од условот имаме $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=2$, т.е.

$$\frac{ab-1}{ab}+\frac{bc-1}{bc}+\frac{ca-1}{ca}=1\,. \qquad (2)$$

Понатаму, од неравенството на Хелдер во облик (5) од забелешката во задача 34, за $m=3$, применето на низите

$$\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{b},\sqrt[3]{c};\ \sqrt[3]{b},\sqrt[3]{c},\sqrt[3]{a};\ \sqrt[3]{\tfrac{ab-1}{ab}},\sqrt[3]{\tfrac{bc-1}{bc}},\sqrt[3]{\tfrac{ca-1}{ca}}$$

и од условот (2) следува неравенството

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{bc-1}+\sqrt[3]{ca-1})^3 &\leq (a+b+c)(b+c+a)(\tfrac{ab-1}{ab}+\tfrac{bc-1}{bc}+\tfrac{ca-1}{ca})\\ &=(a+b+c)^2,\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

44. Нека a_1,a_2,a_3 се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(a_1^5-a_1^2+3)(a_2^5-a_2^2+3)(a_3^5-a_4^2+3)\geq (a_1+a_2+a_3)^3\,.$$

Решение. Од очигледните неравества

$$(a_i^2-1)(a_i^3-1)\geq 0\,,\ i=1,2,3$$

и од неравенството на Хелдер, т.е. задача 31 имаме

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{3}(a_i^5-a_i^2+3)&=\prod_{i=1}^{3}[a_i^3+2+(a_i^2-1)(a_i^3-1)]\geq \prod_{i=1}^{3}(a_i^3+2)\\ &=(a_1^3+1+1)(1+a_2^3+1)(1+1+a_3^3)\geq (a_1+a_2+a_3)^3,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

45. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbf{R}^+$ се такви да $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+...+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер во облик (5) од забелешката во задача 40 следува

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{1-a_i}})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i(1-a_i)\geq(\sum_{i=1}^{n}a_i)^3=1\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(1-a_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leq 1-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}\,. \qquad (2)$$

Конечно, бараното неравенство следува од неравенствата (1) и (2). ■

46. Докажи дека

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2},$$

каде $n>1$ е природен број и a,b,c се должини на страни на триаголник со единичен периметар.

Решение. *Прв начин.* Ако a,b,c се должини на страни со единичен периметар, тогаш користејќи ја трансформацијата на Рави добиваме дека постојат броеви $x,y,z>0$ такви да $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Понатаму, од $a+b+c=1$ следува $x+y+z=\frac{1}{2}$. Сега од неравенството на Минковски добиваме

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=[(y+z)^n+(z+x)^n]^{\frac{1}{n}}\leq(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}+(2z)^{\frac{1}{n}}<c+\sqrt[n]{2}z.$$

Слично, $(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<a+\sqrt[n]{2}x$ и $(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<b+\sqrt[n]{2}y$. Оттука следува

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<c+a+b+\sqrt[n]{2}(z+x+y)=1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

Втор начин. Нека $a\leq b\leq c$. Тогаш $c<a+b$ и

$$\frac{\sqrt[n]{2}}{2}=\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c)>\frac{\sqrt[n]{2}}{2}2c=\sqrt[n]{2c^n}\geq\sqrt[n]{c^n+b^n}.$$

Бидејќи $a\leq b$, од Њутновата биномна формула следува

$$(b+\tfrac{a}{2})^n=b^n+nb^{n-1}\tfrac{a}{2}+\tfrac{n(n-1)}{2}b^{n-2}(\tfrac{a}{2})^2+...+(\tfrac{a}{2})^n>b^n+\tfrac{n}{2}ab^{n-1}\geq b^n+a^n.$$

Слично, бидејќи $a\leq c$, имаме $(c+\frac{a}{2})^n\geq c^n+a^n$, па затоа

$$\begin{aligned}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}&<b+\tfrac{a}{2}+\tfrac{\sqrt[n]{2}}{2}+c+\tfrac{a}{2}\\&=a+b+c+\tfrac{\sqrt[n]{2}}{2}=1+\tfrac{\sqrt[n]{2}}{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

47. Нека a,b,c се реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Од неравенството на Минковски следува

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}&\geq\sqrt{(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2}\\&=\sqrt{2(a+b+c-\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{9}{2}}\geq\tfrac{3\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

48. Ако $x_i\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$, $i=1,2,...,n$, тогаш

$$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+...\cos(2x_n-x_1)\leq\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n.$$

Докажи!

Решение. Јасно, броевите $2x_1-x_2,2x_2-x_3,...,2x_n-x_1$ и $x_1,x_2,...,x_n$ припаѓаат на интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. На овој интервал функцијата $f(t)=-\cos t$ е конвексна. Сега, аналогно како во пример 18, се докажува дека низите $2x_1-x_2$, $2x_2-x_3,...,2x_n-x_1$ и $x_1,x_2,...,x_n$, кога ќе се подредат да бидат опаѓачки ја задоволуваат теорема 9. Конечно, бараното неравенство следува од неравенството на Карамата. ■

49. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc\,. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \ge b \ge c$. Јасно, меѓу броевите $a+b-c, b+c-a,\ c+a-b$ најмногу еден може да биде негативен и ако еден од броевите е негативен, тогаш неравенството е тривијално. Нека претпоставиме дека сите три броја се ненегативни. Тогаш $(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a,b,c)$ и како функцијата $f(x) = -\ln x$, $x \in (0,+\infty)$ е конвексна, од неравенството на Карамата следува неравенството

$$-\ln(a+b-c) - \ln(b+c-a) - \ln(c+a-b) \ge -\ln a - \ln b - \ln c\,,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство.

Втор начин. После ослободување од заградите, го добиваме еквивалентното неравенство

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y\ ,$$

кое го докажавме во пример 21. ■

50. Нека $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}^+, n \ge 2$. Докажи за секои $p,k \ge 1$ важи

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}\right)^k \ge \frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}\ .$$

Решение. Ако од двете страни на неравенството најдеме $k-$ти корен, тогаш лесно се гледа дека тоа е еквивалентно со неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[k]{\frac{a_i^k}{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}} \ge \sum_{i=1}^{n} \sqrt[k]{\frac{a_i^{pk}}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}}\ . \qquad (1)$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$. Нека $0 < q \le p$ и

$$A_i = \frac{a_i^p}{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p} \text{ и } B_i = \frac{a_i^q}{a_1^q+a_2^q+...+a_n^q}\text{, за } i = 1,2,...,n\,.$$

Имаме,

$$A_1 \ge A_2 \ge ... \ge A_n\,,\ B_1 \ge B_2 \ge ... \ge B_n \text{ и } \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} B_i\,.$$

Понатаму, за секој $m < n$ важи

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \ge \sum_{i=1}^{m} B_i \qquad \Leftrightarrow$$

$$(a_1^p + ... + a_m^p)(a_1^q + ... + a_n^q) \ge (a_1^q + ... + a_m^q)(a_1^p + ... + a_n^p) \qquad \Leftrightarrow$$

$$(a_1^p + ... + a_m^p)(a_{m+1}^q + ... + a_n^q) \ge (a_1^q + ... + a_m^q)(a_{m+1}^p + ... + a_n^p) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{1 \le i \le m < j \le n} (a_i^p a_j^q - a_i^q a_j^p) \ge 0\,,$$

и последното неравенство е точно, бидејќи за $i < j$ и $p - q > 0$ важи $a_i^{p-q} \ge a_j^{p-q}$. Според тоа, низата $A_1, A_2, ..., A_n$ ја мајоризира низата $B_1, B_2, ..., B_n$.

Понатаму, $p,k \ge 1$, па затоа $pk \ge k$, што значи дека низата

$$S_i = \frac{a_i^{pk}}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}\ ,\ i=1,2,...,n$$

ја мајоризира низата

$$T_i = \frac{a_i^{k}}{a_1^{k}+a_2^{k}+...+a_n^{k}}\ ,\ i=1,2,...,n$$

и како функцијата $f(t)=-\sqrt[k]{t}$, $k\ge 1$ е конвексна на $(0,+\infty)$, од неравенството на Карамата следува неравенството (1). ■

51. Нека $k\in(0,3]$. Тогаш за секои $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ важи

$$(3-k)+k(abc)^{2/k}+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)\ .$$

Доказ. Ставаме

$$x=a^{2/3},\ y=b^{2/3},\ z=c^{2/3}\ .$$

Тогаш даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(3-k)+k(xyz)^{3/k}+x^3+y^3+z^3\ge 2((xy)^{3/2}+(yz)^{3/2}+(zx)^{3/2})\ .$$

Сега, од пример 23 следува дека доволно е да го докажеме неравенството

$$(3-k)+k(xyz)^{3/k}\ge 3xyz\ .$$

Но, од тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина, при $a_1=1, a_2=(xyz)^{3/k}, \alpha_1=\frac{3-k}{3}, \alpha_2=\frac{k}{3}$ следува

$$\tfrac{3-k}{3}\cdot 1+\tfrac{k}{3}(xyz)^{3/k}\ge 1^{(3-k)/3}((xyz)^{3/k})^{k/3}=xyz\ ,$$

т.е.

$$(3-k)+k(xyz)^{3/k}\ge 3xyz\ .\ ■$$

52. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$. Докажи го неравенството:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+ac+bc)\ .$$

Решение. После средувањето, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$8+(abc)^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)\ge 9(ab+ac+bc)\ . \quad (1)$$

Понатаму,

$$3(a^2+b^2+c^2)\ge 3(ab+ac+bc)\ . \quad (2)$$

и од очигледното неравeтство

$$(ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\ge 0$$

го добиваме неравенството

$$6+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 4(ab+ac+bc) \quad (3)$$

Ако во задача ** земеме $k=1$ имаме:

$$2+(abc)^2+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+ac+bc)\ . \quad (4)$$

Со собирање на (4), (5) и (6) го добиваме неравенството (3). ■

53. Нека a,b,c се позитивни броеви за кои $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1\,.$$

Решение. Ако го искористиме условот $abc=1$, тогаш неравенството можеме да го запишеме во обликот

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}}+\frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}}+\frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}}\le\frac{1}{(abc)^{1/3}}\,.$$

Сега ако замениме $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ го добиваме неравенството од пример 27. ■

54. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}}\ge 4\,.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$\left(\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}}\right)^2[(b+c)(a^2+bc)+(c+a)(b^2+ca)+(a+b)(c^2+ab)]\ge 8(a+b+c)^3$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a+b+c)^3\ge 2[(b+c)(a^2+bc)+(c+a)(b^2+ca)+(a+b)(c^2+ab)]\,,$$

т.е.

$$(a+b+c)^3\ge 4[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]\,,$$

односно

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\,.$$

Последното неравенство следува од неравенството на Шур, т.е. од пример 25 и од фактото дека $abc\ge 0$. ■

55. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2\ge\tfrac{2}{3}[a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)]\,.$$

Решение. Со примена прво на неравенството на Шур, а потоа на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}3(a^6+b^6+c^6)+3a^2b^2c^2&=2(a^6+b^6+c^6)+(a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2)\\&\ge 2(a^6+b^6+c^6)+a^2b^2(a^2+b^2)+b^2c^2(b^2+c^2)+c^2a^2(c^2+a^2)\\&=[(a^6+a^4b^2)+(b^6+b^4c^2)+(c^6+c^4a^2)]\\&\quad+[(a^6+a^4c^2)+(b^6+b^4a^2)+(c^6+c^4b^2)]\\&=2a^5b+2b^5c+2c^5a+2a^5c+2b^5a+2c^5b\\&\ge 2[a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)],\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

56. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви да $a+b+c=2$. Докажи дека

$$a^4+b^4+c^4+abc\ge a^3+b^3+c^3\,.$$

Решение. Ако во неравенството на Шур, последица 12, ставиме $r=2$, и последователно добиваме

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-a)(b-c)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0,$$
$$a^4+b^4+c^4+a^2bc+b^2ca+c^2ab\geq a^3b+a^3c+b^3c+b^3a+c^3a+c^3b,$$
$$2(a^4+b^4+c^4)+abc(a+b+c)\geq a^3(a+b+c)+b^3(c+a+b)+c^3(a+b+c)$$
$$2(a^4+b^4+c^4)+abc(a+b+c)\geq (a^3+b^3+c^3)(a+b+c).$$

Конечно, бараното неравенство следува од последното неравенство ако ставиме $a+b+c=2$. ■

57. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{\sqrt{(b+c)(b^3+c^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(c+a)(c^3+a^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(a+b)(a^3+b^3)}}\geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$\Big(\sum_{\text{cikl}}\frac{a^2}{\sqrt{(b+c)(b^3+c^3)}}\Big)^2\Big[\sum_{\text{cikl}}a^2(b+c)(b^3+c^3)\Big]\geq (a^2+b^2+c^2)^3,$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$4\Big(\sum_{\text{cikl}}a^2\Big)^3\geq 9\sum_{\text{cikl}}a^2(b+c)(b^3+c^3),$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$4\sum_{\text{cikl}}a^6+3\sum_{\text{cikl}}a^4(b^2+c^2)+24a^2b^2c^2\geq 9abc\sum_{\text{cikl}}a^2(b+c).$$

Но, од неравенството на Шур следува

$$\sum_{\text{cikl}}a^3+3abc\geq \sum_{\text{cikl}}a^2(b+c),$$

па од претходното неравенство следува дека доволно е да докажеме дека

$$4\sum_{\text{cikl}}a^6+3\sum_{\text{cikl}}a^4(b^2+c^2)+24a^2b^2c^2\geq 9abc\Big(\sum_{\text{cikl}}a^3+3abc\Big),$$

т.е.

$$4\sum_{\text{cikl}}a^6+3\sum_{\text{cikl}}a^4(b^2+c^2)\geq 9\sum_{\text{cikl}}a^4bc+3a^2b^2c^2. \tag{1}$$

Понатаму, од неравенството за преуредување и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2\sum_{\text{cikl}}a^6\geq \sum_{\text{cikl}}a^4(b^2+c^2)\geq 2\sum_{\text{cikl}}a^4bc,$$

т.е.

$$\sum_{\text{cikl}}a^4(b^2+c^2)\geq 2\sum_{\text{cikl}}a^4bc, \tag{2}$$

$$2\sum_{\text{cikl}}a^6\geq \sum_{\text{cikl}}a^4(b^2+c^2), \tag{3}$$

$$\sum_{\text{cikl}}a^6\geq \sum_{\text{cikl}}a^4bc, \tag{4}$$

$$\sum_{\text{cikl}}a^6\geq 3a^2b^2c^2. \tag{5}$$

Конечно од неравенствата (2), (3), (4) и (5) добиваме

$$\begin{aligned}4\sum_{cikl} a^6+3\sum_{cikl} a^4(b^2+c^2) &= 2\sum_{cikl} a^6+\sum_{cikl} a^6+\sum_{cikl} a^6+3\sum_{cikl} a^4(b^2+c^2)\\ &\geq \sum_{cikl} a^4(b^2+c^2)+\sum_{cikl} a^4bc+3a^2b^2c^2+3\sum_{cikl} a^4(b^2+c^2)\\ &= \sum_{cikl} a^4bc+4\sum_{cikl} a^4(b^2+c^2)+3a^2b^2c^2\\ &\geq 9\sum_{cikl} a^4bc+3a^2b^2c^2,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1). ■

58. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^2}{2a^2-ab+2b^2}\geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^2}{2a^2-ab+2b^2}\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(2b^2-bc+2c^2)+b^2(2c^2-ca+2a^2)+c^2(2a^2-ab+2b^2)},$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$(\sum_{cikl} a^2)^2\geq \sum_{cikl} a^2(2b^2-bc+2c^2),$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\sum_{cikl} a^4+abc\sum_{cikl} a\geq 2\sum_{cikl} a^2b^2.$$

Но, прво од последица 12, при $r=2$, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sum_{cikl} a^4+abc\sum_{cikl} a\geq (a^3b+b^3a)+(a^3c+c^3a)+(b^3c+c^3b)\geq 2\sum_{cikl} a^2b^2. \ ■$$

59. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq a+b+c.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} &= \frac{a^4}{a(b^2-bc+c^2)}+\frac{b^4}{b(c^2-ca+a^2)}+\frac{c^4}{c(a^2-ab+b^2)}\\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(b^2-bc+c^2)+b(c^2-ca+a^2)+c(a^2-ab+b^2)},\end{aligned}$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$(\sum_{cikl} a^2)^2\geq \sum_{cikl} a(b^2-bc+c^2)\cdot\sum_{cikl} a,$$

кое последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}&\sum_{cikl} a^4+2\sum_{cikl} a^2b^2\geq \sum_{cikl} a\cdot\sum_{cikl} b^2(a+c)-3abc\sum_{cikl} a\\ &\sum_{cikl} a^4+abc\sum_{cikl} a\geq \sum_{cikl} a^3(b+c),\end{aligned}.$$

при што последното неравенство следува од последица 12, при $r=2$. ■

60. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{b^2-bc+c^2}+b^2\sqrt{c^2-ca+a^2}+c^2\sqrt{a^2-ab+b^2}\ .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sum_{\text{cikl}} a^2\sqrt{b^2-bc+c^2} = \sum_{\text{cikl}} a\sqrt{a^2(b^2-bc+c^2)} \leq \tfrac{1}{2}\sum_{\text{cikl}} a(a^2+b^2+c^2-bc)\ ,$$

па затоа е доволно да го докажеме неравенството

$$2\sum_{\text{cikl}} a^3 \geq \sum_{\text{cikl}} a(a^2+b^2+c^2-bc) = \sum_{\text{cikl}} a^3 + \sum_{\text{cikl}} a^2(b+c)-3abc\ ,$$

кое е еквивалентно со неравенството докажано во пример 25. ■

61. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \geq a^2+b^2+c^2\ .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{\text{cikl}} \frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a\sqrt{b^2-bc+c^2}+b\sqrt{c^2-ca+a^2}+c\sqrt{a^2-ab+b^2}}\ ,$$

па затоа е доволно да го докажеме неравенството

$$\sum_{\text{cikl}} a^2 \geq \sum_{\text{cikl}} a\sqrt{b^2-bc+c^2}\ .$$

Повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\sum_{\text{cikl}} a \cdot \sum_{\text{cikl}} a(b^2-bc+c^2) \geq (\sum_{\text{cikl}} a\sqrt{b^2-bc+c^2})^2\ ,$$

па затоа е доволно да го докажеме неравенството

$$(\sum_{\text{cikl}} a^2)^2 - \sum_{\text{cikl}} a \cdot \sum_{\text{cikl}} a(b^2-bc+c^2) = \sum_{\text{cikl}} a^4 + abc\sum_{\text{cikl}} a - \sum_{\text{cikl}} a^3(b+c) \geq 0\ ,$$

кое е еквивалентно со неравенството докажано во пример 25. ■

62. Нека $a,b>0$. Докажи дека

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{\tfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\tfrac{b^2}{a}}\ .$$

Решение. Ставаме $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ и добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$x^3+y^3 \geq xy(x+y)\ .$$

Користејќи ја теоремата на Мјурхед добиваме

$$x^3+y^3 = 2T[3,0] \geq 2T[2,1] = xy(x+y)\ .\ ■$$

63. Нека $a,b,c \in \mathbf{R}^+$ и $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}\ .$$

Решение. *Прв начин.* Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $c \leq b \leq a$. Нека $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$ и $xyz=\frac{1}{abc}=1$, па затоа

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\,.$$

Имаме $x\le y\le z$, па затоа $x+y\le z+x\le y+z$ и $\frac{z}{x+y}\ge\frac{y}{z+x}\ge\frac{x}{y+z}$. Сега, од десното неравенство во првото неравенство за преуредување последователно следуваат неравенствата

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{xy}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{zx}{z+y},$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{xz}{y+z}+\frac{yx}{z+x}+\frac{zy}{z+y},$$

со чие собирање, после средувањето и ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $xyz=1$, добиваме

$$2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)\ge x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3,$$

од каде следува

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}\,.$$

Втор начин. Како и во претходното решение и овде треба да докажеме дека

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}\,.$$

Повторно, $x\le y\le z$ и $\frac{z}{x+y}\ge\frac{y}{z+x}\ge\frac{x}{y+z}$, па прво од неравенството на Чебишев, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, неравенството на Несбит и условот $xyz=1$ добиваме

$$\frac{x}{y+z}x+\frac{y}{z+x}y+\frac{z}{x+y}z\ge\frac{x+y+z}{3}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ge\sqrt[3]{xyz}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

Трет начин. За да може да се примени теоремата на Мјурхед изразите во неравенството мора да се хомогени, па затоа десната страна на неравенството ќе ја поделиме до $(abc)^{\frac{4}{3}}=1$, а потоа неравенството ќе го помножиме со

$$a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a)\,.$$

Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2T[\tfrac{16}{3},\tfrac{13}{3},\tfrac{7}{3}]+T[\tfrac{16}{3},\tfrac{16}{3},\tfrac{4}{3}]+T[\tfrac{13}{3},\tfrac{13}{3},\tfrac{10}{3}]\ge 3T[5,4,3]+T[4,4,4]\,. \qquad (1)$$

Сега од теоремата на Мјурхед следува

$$2T[\tfrac{16}{3},\tfrac{13}{3},\tfrac{7}{3}]\ge 2T[5,4,3],\ T[\tfrac{16}{3},\tfrac{16}{3},\tfrac{4}{3}]\ge T[5,4,3],\ T[\tfrac{13}{3},\tfrac{13}{3},\tfrac{10}{3}]\ge T[4,4,4]\,.$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$. ■

64. Ако a,b,c се позитивни релани броеви, тогаш

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge 3\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\,.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3}+\frac{b^3(c+a)}{c^3+a^3}+\frac{c^3(a+b)}{a^3+b^3}\ge 3\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\,. \qquad (1)$$

Ако неравенството (1) го помножиме со

$$(a+b+c)(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3),$$

после средувањето се добива неравенството

$$\begin{aligned}&T[9,2,0]+T[10,1,0]+T[9,1,1]+T[5,3,3]+T[6,5,0]+T[6,3,2]\geq\\&\geq T[4,4,3]+2T[7,4,0]+T[6,4,1]+2T[7,3,1]\end{aligned} \tag{2}$$

Од неравенството на Мјурхед следува

$$\begin{aligned}&T[9,2,0]\geq T[7,4,0],\\&T[10,1,0]\geq T[7,4,0],\\&T[6,5,0]\geq T[6,4,1],\\&T[6,3,2]\geq T[4,4,3].\end{aligned} \tag{3}$$

Од неравенството на Шур имаме $T[4,2,2]+T[8,0,0]\geq 2T[6,2,0]$ и ако ова неравенство го помножиме со abc го добиваме неравенството

$$T[9,1,1]+T[5,3,3]\geq 2T[7,3,1]. \tag{4}$$

Конечно, ако ги собереме неравенствта (2) и (3) го добиваме неравенството (1). ■

65. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

Решение. *Прв начин.* Од условот $abc=1$ следува

$$\frac{a^3}{[(abc)^{1/3}+b][(abc)^{1/3}+c]}+\frac{b^3}{[(abc)^{1/3}+c][(abc)^{1/3}+a]}+\frac{c^3}{[(abc)^{1/3}+a][(abc)^{1/3}+b}\geq\frac{3}{4}(abc)^{1/3}.$$

Ставаме $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{x^9}{(y^3+xyz)(z^3+xyz)}+\frac{y^9}{(z^3+xyz)(x^3+xyz)}+\frac{z^9}{(x^3+xyz)(y^3+xyz)}\geq\frac{3}{4}xyz.$$

После ослободувањето од дропките го добиваме еквивалентното неравенство

$$4T[12,00]+4T[10,1,1]\geq 2T[4,4,4]+3T[6,3,3]+3T[5,5,2],$$

кое непосредно следува од теоремата на Мјурхед.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\leq b\leq c$. Тогаш

$$\frac{1}{(1+b)(1+c)}\leq\frac{1}{(1+c)(1+a)}\leq\frac{1}{(1+a)(1+b)}.$$

Од неравенството на Чебишев следува

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}&\geq\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)[\frac{1}{(1+b)(1+c)}+\frac{1}{(1+c)(1+a)}+\frac{1}{(1+a)(1+b)}]\\&=\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\frac{3+(a+b+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}.\end{aligned}$$

Понатаму, од неравенствата

$$\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\geq(\frac{a+b+c}{3})^3,\ \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}=1,\ (1+a)(1+b)(1+c)\leq(\frac{3+a+b+c}{3})^3$$

следува

$$\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\frac{3+(a+b+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geq(\frac{a+b+c}{3})^3\cdot\frac{6}{(\frac{3+a+b+c}{3})^3}\geq\frac{6}{8}=\frac{3}{4},$$

при што во последното неравенство искористивме дека

$$\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{a+b+c}{3}}\geq\frac{1}{2}\,.\ \blacksquare$$

66. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}\,.$$

Решение. *Прв начин.* Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{3}{4}\,,$$

$$\frac{a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b}{2abc+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b}\geq\frac{3}{4}\,,$$

$$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc\geq 0,$$

$$T[2,1,0]-T[1,1,1]\geq 0,$$

при што последното неравенство следува од теоремата на Мјурхед.

Втор начин. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}&\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\,.\end{aligned}\tag{1}$$

Понатаму,

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,$$

$$4(a^2+b^2+c^2)+8(ab+bc+ca)\geq 3(a^2+b^2+c^2)+9(ab+bc+ca),$$

$$4(a+b+c)^2\geq 3[a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)],$$

т.е.

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{4}\,.\tag{2}$$

Конечно, од неравенствата (1) и (2) следува бараното неравенство. ■

67. Докажи дека за секои реални броеви $a,b,c\geq 0$ важи

$$a^3+b^3+c^3\leq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}\,.$$

Решение. Заменуваме $a=x^2, b=y^2, c=z^2$ и добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$x^6+y^6+z^6\geq x^4yz+y^4zx+z^4xy\,,$$

кое следува од теоремата на Мјурхед, бидејќи $T[6,0,0]\geq T[4,1,1]$. ■

68. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c\,.$$

Решение. *Прв начин.* Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab\,,$$

кое непосредно следува од теоремата на Мјурхед, бидејќи $T[4,0,0]\geq T[2,1,1]$.

Втор начин. Со двократна примена на неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3abc}$$
$$\geq\frac{(a+b+c)^4}{27abc}=(\frac{a+b+c}{3})^3\,\frac{a+b+c}{abc}$$
$$\geq abc\,\frac{a+b+c}{abc}=a+b+c,$$

што и требаше да се докаже. ■

69. Нека a,b,c се позитивни релани броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2+3abc\geq\frac{4}{9}.$$

Решение. Ако дадено неравенство го помножиме со $a+b+c$ добиваме дека тоа е еквивалентно со неравенството

$$9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc\geq 4(a+b+c),$$

т.е. со неравенството

$$5(a^3+b^3+c^3)+3abc\geq 3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c)]. \tag{1}$$

Но, од неравенството на Шур имаме

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c),$$

а од неравенствот на Мјурхед имаме $2T[3,0,0]\geq 2T[2,1,0]$, т.е.

$$4(a^3+b^3+c^3)+3abc\geq 2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c)].$$

Конечно, од последните две неравенства следува неравенството (1). ■

70. Ако a,b,c се ненегативни реални броеви, докажи дека

$$a^3+b^3+c^3+abc\geq\frac{1}{7}(a+b+c)^3.$$

Решение. Лесно се проверува дека

$$(a+b+c)^3=3T[3,0,0]+18T[2,1,0]+36T[1,1,1],$$

па значи дека треба да го докажеме неравенството

$$3T[3,0,0]+6T[1,1,1]\geq\frac{1}{7}(3T[3,0,0]+18T[2,1,0]+36T[1,1,1])$$

т.е. неравенството

$$3(T[3,0,0]-T[2,1,0])+T[1,1,1]\geq 0,$$

кое следува од неравенствата

$$T[3,0,0]\geq T[2,1,0],\;\; T[1,1,1]\geq 0. \;■$$

71. Нека a,b,c се позитивни реални броеви и $n,k\in\mathbf{N}$. Докажи дека

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\geq a^k+b^k+c^k.$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{k\frac{a^{n+k}}{b^n}+nb^k}{n+k} \geq \sqrt[n+k]{\frac{a^{k(n+k)}}{b^{nk}}b^{nk}} = a^k ,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a^{n+k}}{b^n} = b^k$, т.е. ако и само ако $a = b$. Аналогно,

$$\frac{k\frac{b^{n+k}}{c^n}+nc^k}{n+k} \geq b^k \text{ и } \frac{k\frac{c^{n+k}}{a^n}+na^k}{n+k} \geq c^k ,$$

па ако ги собереме последните три неравенства го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \geq b \geq c$, па затоа

$$a^{n+k} \geq b^{n+k} \geq c^{n+k} \text{ и } \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{b^n} \leq \frac{1}{c^n} .$$

Сега од неравенството за преуредување следува

$$\begin{aligned}\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n} &= a^{n+k}\frac{1}{b^n}+b^{n+k}\frac{1}{c^n}+c^{n+k}\frac{1}{a^n}\\ &\geq a^{n+k}\frac{1}{a^n}+b^{n+k}\frac{1}{b^n}+c^{n+k}\frac{1}{c^n}\\ &= a^k+b^k+c^k.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

Трет начин. Од неравенството на Хелдер за парот $(\frac{n+k}{k}, \frac{n+k}{n})$ следува

$$\begin{aligned}a^k+b^k+c^k &= \frac{a^k}{b^{\frac{nk}{n+k}}}b^{\frac{nk}{n+k}}+\frac{b^k}{c^{\frac{nk}{n+k}}}c^{\frac{nk}{n+k}}+\frac{c^k}{a^{\frac{nk}{n+k}}}a^{\frac{nk}{n+k}}\\ &\leq \left(\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\right)^{\frac{k}{n+k}}(a^k+b^k+c^k)^{\frac{n}{n+k}},\end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$. ■

72. Нека k е природен број. Докажи дека за позитивни реални броеви x, y, z чиј збир е еднаков на 1, важи неравенството

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geq \frac{1}{7} .$$

Решение. Неравенството е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $1 > x \geq y \geq z$. Тогаш

$$0 \leq (x-y)z = (x-y)(1-x-y) = x-x^2-y+y^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1-x}{1-y}$$

и како $\frac{y}{x} \leq 1$ добиваме

$$\left(\frac{y}{x}\right)^k \leq \frac{1-x}{1-y} \Leftrightarrow x^{k+1}+y^k \leq y^{k+1}+x^k ,$$

па затоа

$$x^{k+1}+y^k+z^k \leq y^{k+1}+z^k+x^k \leq z^{k+1}+x^k+y^k .$$

Од неравенството за Чебишев на подредените тројки $(x^{k+2}, y^{k+2}, z^{k+2})$ и $(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}, \frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k}, \frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k})$, односно (x,y,z) и $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ се добива

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cikl}} \frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k} &\geq \frac{1}{3}\sum_{\text{cikl}} x^{k+2} \cdot \sum_{\text{cikl}} \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} \\ &\geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sum_{\text{cikl}} x \cdot \sum_{\text{cikl}} x^{k+1} \cdot \sum_{\text{cikl}} \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} \\ &= \frac{1}{9}\sum_{\text{cikl}} x^{k+1} \cdot \sum_{\text{cikl}} \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} = I.\end{aligned}$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњакоски-Шварц следува

$$\sum_{\text{cikl}} (x^{k+1}+y^k+z^k) \cdot \sum_{\text{cikl}} \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} \geq 9,$$

па затоа од претходното неравенство добиваме

$$I \geq \frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)},$$

што значи дека доволно е да докажеме дека

$$3(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}) \geq x^k+y^k+z^k.$$

Последното неравенство следува од неравенството на Чебишев применето на тројките (x,y,z) и (x^k, y^k, z^k). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$. ■

73. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b и c, такви да $a+b+c=1$, важи неравенството

$$\frac{1}{bc+a+\frac{1}{a}} + \frac{1}{ca+b+\frac{1}{b}} + \frac{1}{ab+c+\frac{1}{c}} \leq \frac{27}{31}.$$

Решение. Бараното неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{a}{p+a^2}+\frac{b}{p+b^2}+\frac{c}{p+c^2} \leq \frac{27}{31}$, каде $a+b+c=1$ и $p=abc+1$. Нека

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3(a+b+c)}{3x+a^2+b^2+c^2} - \frac{a}{x+a^2} - \frac{b}{x+b^2} - \frac{c}{x+c^2} \\ &= \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+a^2)(x+b^2)(x+c^2)(3x+a^2+b^2+c^2)},\end{aligned}$$

при што од неравенството на Мјурхед за $(3,0,0)$ и $(2,1,0)$, односно за $(3,1,0)$ и $(2,1,1)$ следува

$$A = 2a^3+2b^3+2c^3-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a) \geq 0,$$

$$C = -abc[a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)-2abc(a+b+c)] \leq 0.$$

Според тоа, полиномот $P(x)=Ax^2+Bx+C$ или е идентички еднаков на нула или има две реални нули со различен знак. Ако $P \not\equiv 0$ и x_0 е негова позитивна нула, тогаш $P(x) \leq 0$ за $0 \leq x \leq x_0$ и $P(x) \geq 0$ за $x \geq x_0$. Од неравенството на Мјурхед за $(2,0,0)$ и $(1,1,0)$, односно за $(2,1,0)$ и $(1,1,1)$ следува

$$\begin{aligned}f(ab+bc+ca)&=\frac{3(a+b+c)}{3(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2}-\frac{a}{(a+b)(a+c)}-\frac{b}{(b+c)(b+a)}-\frac{c}{(c+a)(c+b)}\\&=\frac{3(a+b+c)}{3(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2}-\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&\geq\frac{9}{4(a+b+c)}-\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0,\end{aligned}$$

па затоа $P(ab+bc+ca)\geq 0$, односно $x_0\leq ab+bc+ca$. Според тоа, за $x\geq ab+bc+ca$ важи $P(x)\geq 0$, т.е. $f(x)\geq 0$. Но, $1+abc>1>ab+bc+ca$, за $a+b+c=1$, па затоа $f(1+abc)\geq 0$, односно

$$\frac{a}{1+abc+a^2}+\frac{b}{1+abc+b^2}+\frac{c}{1+abc+c^2}\leq\frac{3(a+b+c)}{3+a^2+b^2+c^2+3abc}.$$

Од досега изнесеното следува дека доволно е да докажеме

$$a^2+b^2+c^2+3abc\geq\tfrac{4}{9},$$

односно

$$9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc\geq 4(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$$

$$5(a^3+b^3+c^3)+3abc\geq 3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)],$$

што е точно според неравенството на Шур за $(3,0,0),(2,1,0)$ и $(1,1,1)$, односно според неравенството на Мјурхед за $(3,0,0)$ и $(2,1,0)$. ■

74. Нека $x,y,z\in\mathbf{R}^+$ и $x+y+z=1$. Докажи дека

$$xy+yz+zx\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz.$$

Решение. Ако искористиме дека $x+y+z=1$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)^2\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz(x+y+z),$$

т.е. со неравенството

$$x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3\geq 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2), \qquad (1)$$

Кое е точно, бидејќи тоа е неравенството на Мјурхед за тројките $(3,1,0)$ и $(2,2,0)$.

Забелешка. Неравенството (1) следува и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\begin{aligned}x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3&=xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(x^2+y^2)\\&\geq 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).\ ■\end{aligned}$$

75. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. Докажи дека

$$\sqrt{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\leq\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\geq b\geq c$. Тогаш $\frac{a\sqrt{a}}{bc}\geq\frac{b\sqrt{b}}{ca}\geq\frac{c\sqrt{c}}{ab}$ и од неравенството на Чебишев следува

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Од друга страна, од неравенството $3(a^2+b^2+c^2) > (a+b+c)^2$ следува

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3abc}.$$

Од последните две неравенства следува дека доволно е да докажеме, дека

$$(a+b+c)^2 \geq 9\sqrt{3}abc.$$

Навистина, од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)^2\sqrt{ab+bc+ca} \geq (3\sqrt[3]{abc})^2\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = 9\sqrt{3}abc. \blacksquare$$

76. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^3(a^3+b^3+c^3).$$

Решение. Со смените $x=ab^2$, $y=bc^2$ и $z=ca^2$, даденото неравенство се сведува на неравенството на Шур

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x. \blacksquare$$

77. (Неравенство на Бернули). Ако $x>-1$ и $\alpha\in(0,1)$, тогаш

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи само за $x=0$.

Решение. Нека $\alpha\in(0,1)$. На интервалот $[0,x]$, $x>0$ да ги разгледаме функциите $f(u)=(1+u)^\alpha$ и $g(u)=\alpha u$. Тие се непрекинати на $[0,x]$, диференцијабилни на $(0,x)$ и $g'(u)=\alpha\neq 0$, за секој $u\in[0,x]$. Од теоремата на Коши следува дека постои $c\in(0,x)$ таков што $\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, т.е.

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x-0}=\frac{\alpha(1+c)^{\alpha-1}}{\alpha}=(1+c)^{\alpha-1}\leq 1,$$

што значи дека точно е неравенството (1). Ако $-1<x<0$, тогаш функциите $f(u)=(1+u)^\alpha$ и $g(u)=\alpha u$ ги разгледуваме на интервалот $[x,0]$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=0$. $\blacksquare$

78. Нека $a<0$. Докажи дека $2^a+2^{\frac{1}{a}}\leq 1$.

Решение. Да ставиме $b=-a$. Тогаш $b>0$ и заради симетрија на бараното равенство можеме да сметаме дека $b>1$.

Нека $b\geq 2$. Тогаш од неравенството на Бернули и неравенството $2^b\geq 2b$ следува

$$(1-2^a)^b \geq 1-b2^a = 1-\frac{b}{2^b}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \text{ т.е. } 1-2^a\geq 2^{-\frac{1}{b}}=2^{\frac{1}{a}}.$$

Случајот кога $1<b<2$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. $\blacksquare$

7. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД СЕДМА ГЛАВА

1. Нека $a,b,c \geq 0$ се такви да $a+b+c=1$. Докажи дека
$$7(ab+bc+ca) \leq 2+9abc .$$

Решение. Ако го искористиме неравенството $2p^3+9r \geq 7pq$ и условот $p=a+b+c=1$, тогаш последователно добиваме
$$2(a+b+c)^3+9abc \geq 7(ab+bc+ca)(a+b+c) ,$$
$$2+9abc \geq 7(ab+bc+ca) ,$$
што и требаше да се докаже. ■

2. Нека $x,y,z>0$ се такви да $x+y+z=1$. Докажи дека
$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) \geq 64 .$$

Решение. Ако се искористи условот $p=x+y+z=1$ и идентитетот
$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+p+q+r ,$$
добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата
$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 64xyz,$$
$$1+p+q+r \geq 64r,$$
$$2+q \geq 63r.$$

Од друга страна, од условот $p=x+y+z=1$ и од неравенството $pq-9r \geq 0$ следува неравенството $q \geq 9r$, т.е. неравенството
$$2+q \geq 2+9r .$$
Според тоа, за да го докажеме неравенството $2+q \geq 63r$ доволно е да го докажеме дека $2+9r \geq 63r$, т.е. неравенството $r \leq \frac{1}{27}$. Но, последното неравенство непосредно следува од неравенството $p^3 \geq 27r$ и од условот $p=x+y+z=1$. ■

3. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви такви да $abc=1$. Докажи дека
$$\frac{1}{1+3a}+\frac{1}{1+3b}+\frac{1}{1+3c}+\frac{1}{1+a+b+c} \geq 1.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата
$$\frac{3+6p+9q}{28+3p+9q}+\frac{1}{1+p} \geq 1 ,$$
$$\frac{1}{1+p} \geq \frac{25-3p}{28+3p+9q} ,$$
$$3p^2-19p+9q+3 \geq 0 . \qquad (1)$$
Понатаму, ако земеме $z=\sqrt{\frac{p}{3}}$, т.е. $p=3z^2$ и го искористиме неравенството $q^2 \geq 3pr$ и условот $r=abc=1$ добиваме дека $q^2 \geq 9z^2$, т.е. $q \geq 3z$. Според тоа, за да го докажеме неравенството (1) доволно е да го докажеме неравенството

$$27z^4-57z^2+27z+3\ge 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad (z-1)(9z^3+9z^2-10z-1)\ge 0,$$

кое очигледно е точно, бидејќи $z=\sqrt{\frac{p}{3}}\ge \sqrt[6]{abc}=1$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$. ■

4. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви такви да $a+b+c=3$. Докажи дека

$$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2)\ge 9(ab+bc+ca).$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(r-1)^2-(r-1)(p-q)+(p-q)^2\ge 0. \qquad (1)$$

Но, $r=abc\le (\frac{a+b+c}{3})^3=1$ и како $p^2\ge 3q$ и $p=a+b+c=3$ добиваме дека $q\le p$, т.е. $p-q\ge 0$. Според тоа, $(r-1)(p-q)\le 0$, па затоа точно е неравенството (1). ■

5. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви такви да $a+b+c=1$. Докажи дека

$$6(a^3+b^3+c^3)+1\ge 5(a^2+b^2+c^2).$$

Решение. Од условот $p=a+b+c=1$ својствата на елементарните симетрични полиноми имаме

$$a^3+b^3+c^3=p(p^2-3q)+3r=1-3q-3r \text{ и } a^2+b^2+c^2=p^2-2q=1-2q,$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$6(1-3q-3r)+1\ge 5(1-2q),$$

т.е. со неравенството

$$9r+1\ge 4q. \qquad (1)$$

Конечно, за елементарните симетрични полиноми важи $p^3-4pq+9r\ge 0$ и ако во последното неравенство замениме $p=1$, го добиваме неравенството (1). ■

6. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge \frac{9}{(a+b+c)^2} \qquad (1)$$

Решение. Даденото неравенство е хомогено, па без ограничување на општоста можеме да земеме дека $p=1$. Понатаму

$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2&=(a+b)^2-ab=(1-c)^2-ab=1-2c+c^2-ab\\&=1-c-c(1-c)-ab=1-c-c(a+b)-ab=1-c-q.\end{aligned}$$

Аналогно

$$b^2+bc+c^2=1-a-q \text{ и } c^2+ca+a^2=1-b-q.$$

Со елементарни трансформации и претходните идентитети, неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$9q^3+6q^2-3q+9r+1\ge 0$$

т.е. со неравенството

$$q(3q+1)^2+9r+1-4q\ge 0 \qquad (2)$$

Од $p^3-4pq+9r\ge 0$ и $p=1$ имаме

$$1+9r \geq 4q \tag{3}$$

Па од (3) добиваме $q(3q+1)^2+9r+1-4q \geq 0$ т.е. важи неравенството (2). ■

7. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви. Докажи дека

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3}+\frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3} \leq \frac{12}{a+b+c}.$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a+b+c=3$, при што истото е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(3+a)^2}{4a^3+(3-a)^3}+\frac{(3+b)^2}{4b^3+(3-b)^3}+\frac{(3+c)^2}{4c^3+(3-c)^3} \leq 4.$$

Понатаму, од

$$\frac{(3+a)^2}{4a^3+(3-a)^3}-\frac{4}{3}=\frac{(a-1)(-4a^2-15a+27)}{4a^3+(3-a)^3}=(a-1)[\frac{2}{3}-\frac{(a-1)(2a^2+12a+9)}{4a^3+(3-a)^3}] \leq \frac{2(a-1)}{3}$$

и аналогно

$$\frac{(3+b)^2}{4b^3+(3-b)^3}-\frac{4}{3} \leq \frac{2(b-1)}{3} \text{ и } \frac{(3+c)^2}{4c^3+(3-c)^3}-\frac{4}{3} \leq \frac{2(c-1)}{3},$$

заклучуваме

$$\frac{(3+a)^2}{4a^3+(3-a)^3}+\frac{(3+b)^2}{4b^3+(3-b)^3}+\frac{(3+c)^2}{4c^3+(3-c)^3} \leq 3\cdot\frac{4}{3}+\frac{2(a+b+c)-6}{3}=4. \ ■$$

8. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви. Докажи дека

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a+b+c=3$, при што истото е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2}+\frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2}+\frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

т.е. со неравенството

$$\frac{5}{2a^2-6a+9}+\frac{5}{2b^2-6b+9}+\frac{5}{2c^2-6c+9} \leq 3. \tag{1}$$

Понатаму,

$$\frac{5}{2a^2-6a+9}-1=\frac{-2a^2+6a-4}{2a^2-6a+9}=\frac{-2(a-1)(a-2)}{2a^2-6a+9}=\frac{2(a-1)}{5}-\frac{2(a-1)^2(2a+1)}{5(2a^2-6a+9)} \leq \frac{2(a-1)}{5}$$

и аналогно

$$\frac{5}{2b^2-6b+9}-1 \leq \frac{2(b-1)}{5} \text{ и } \frac{5}{2c^2-6c+9} \leq \frac{2(c-1)}{5},$$

па затоа точно е неравенството

$$\frac{5}{2a^2-6a+9}+\frac{5}{2b^2-6b+9}+\frac{5}{2c^2-6c+9}-3 \leq \frac{2(a-1)}{3}+\frac{2(b-1)}{3}+\frac{2(c-1)}{3}=0,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

9. Нека a,b,c,d се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{c^2+d^2+a^2}+\frac{c}{d^2+a^2+b^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}.$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, при што истото е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}+\frac{d}{1-d^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина следува

$$2a^2(1-a^2)^2\leq(\tfrac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3})^3=(\tfrac{2}{3})^2,$$

т.е.

$$a(1-a^2)\leq\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

па затоа

$$\frac{a}{1-a^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

и аналогно

$$\frac{b}{1-b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2,\ \frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2 \text{ и } \frac{d}{1-d^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}d^2.$$

Конечно, ако ги собереме последните четири неравенства и го искористиме равенството $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ добиваме

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}+\frac{d}{1-d^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

што и требаше да се докаже. ■

10. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\geq 2.$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $p=a+b+c=1$ и ако означиме $q=ab+bc+ca$ и $r=abc$ имаме $q\leq\frac{1}{3}$. Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{1}{2q},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{1}{2q}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{r}\geq 2. \qquad (1)$$

Ако $q\leq\frac{1}{4}$, тогаш неравенството (1) е очигледно, Нека $q\geq\frac{1}{4}$. Тогаш од неравенството на Шур следува

$$\begin{aligned}3r=3abc&\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)^3\\&=4a^2b+4a^2c+4b^2a+4b^2c+4c^2a+4c^2b+6abc-1\\&=4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+6abc-1\\&=4ab(1-c)+4bc(1-a)+4ca(1-b)+6abc-1\\&=4(ab+bc+ca)-6abc-1=4q-6r-1,\end{aligned}$$

т.е. $r \geq \frac{4q-1}{9}$, па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{1}{2q} + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt[3]{4q-1} \geq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3q^3(4q-1) \geq (4q-1)^3 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(4q-1)(3q-1)(q^2-5q+1) \geq 0 . \tag{2}$$

Но, $\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{1}{3}$, па затоа $4q-1 \geq 0, 3q-1 \leq 0$ и $q^2-5q+1 < 0$, па затоа точно е неравенството (2), што значи и неравенството (1). ■

11. Нека $a,b,c \geq 0$. Докажи дека

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)} .$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $q = ab+bc+ca = 1$, при што даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$4\sum_{\text{cikl}}(a+b)^2(a+c)^2 = 9(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

т.е. со неравенството

$$4(1+a^2)^2 + 4(1+b^2)^2 + 4(1+c^2)^2 \geq 9(a+b+c-abc)^2 .$$

Понатаму, ако означиме $p = a+b+c$ и $r = abc$ последното неравенство можеме да го запишеме во обликот

$$4(p^4 - 2p^2 + 1 + 4pr) \geq 9(p-r)^2 . \tag{1}$$

Ако $p \geq 2$, тогаш

$$\begin{aligned} 4(p^4 - 2p^2 + 1 + 4pr) &= 9p^2 + (p^2-4)(4p^2-1) \\ &\geq 9p^2 \geq 9(p-r)^2, \end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1). Нека $p \leq 2$. Од последица VI 12, следува дека $6pr \geq (4-p^2)(p^2-1)$ и како $p = pq \geq 9r$, добиваме дека

$$\begin{aligned} 4(p^4 - 2p^2 + 1 + 4pr) - 9(p-r)^2 &= (p^2-4)(4p^2-1) + 34pr - 9r^2 \\ &\geq (p^2-4)(4p^2-1) + 33pr \\ &\geq (p^2-4)(4p^2-1) + \tfrac{11}{2}(4-p^2)(p^2-1) \\ &\geq \tfrac{3}{2}(4-p^2)(p^2-3) \geq 0, \end{aligned}$$

што значи дека и во овој случај е точно неравенството (1). ■

12. Нека $a,b,c,d > 0$. Докажи дека

$$\frac{abc}{(d+a)(d+b)(d+c)} + \frac{bcd}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{cda}{(b+c)(b+c)(b+d)} + \frac{dab}{(c+a)(c+b)(c+d)} \geq \frac{1}{2} .$$

Решение. Нека $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$. Тогаш даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x^3}{(x+y)(x+z)(x+t)} + \frac{y^3}{(y+x)(y+z)(y+t)} + \frac{z^3}{(z+x)(z+y)(z+t)} + \frac{t^3}{(t+x)(t+y)(t+z)} \geq \frac{1}{2} .$$

Последното неравенство е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x+y+z+t=4$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(x+y)(x+z)(x+t)\le(x+\tfrac{y+z+t}{3})^3=(x+\tfrac{4-x}{3})^3=\tfrac{8}{27}(x+2)^3,$$

и ако ги искористиме аналогните неравенства добиваме дека е доволно да докажеме дека

$$\frac{x^3}{(x+2)^2}+\frac{y^3}{(y+2)^2}+\frac{z^3}{(z+2)^2}+\frac{t^3}{(t+2)^2}\ge\frac{4}{27}.$$

Но, за $x\in[0,4]$ важи

$$\frac{x^3}{(x+2)^2}-\frac{2x-1}{27}=\frac{2(x-1)^2(-x^2+6x+4)}{27(x+2)^2}\ge 0,$$

и ако ги скористиме еквивалентните неравенства добиваме дека

$$\frac{x^3}{(x+2)^2}+\frac{y^3}{(y+2)^2}+\frac{z^3}{(z+2)^2}+\frac{t^3}{(t+2)^2}\ge\frac{2x-1}{27}+\frac{2y-1}{27}+\frac{2z-1}{27}+\frac{2t-1}{27}=\frac{4}{27}.\ \blacksquare$$

13. Нека $a,b,c\ge 0$. Докажи го неравенството

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca).$$

Решение. При ознаки $a+b+c=v$, $ab+bc+ca=\frac{1-u^2}{3}$, $abc=w$, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{v^2+2u^2}{3}+2w+1\ge 2\frac{1-u^2}{3},$$

т.е. со неравенството

$$6w+3+4u^2-v^2\ge 0.$$

Ако $2u\ge v$, тогаш јасно неравенството важи.

Ако $v\ge 2u$, тогаш од теорема 2 следува дека доволно е да го докажеме неравенството

$$6w+3+4u^2-v^2\ge 6\frac{(v+u)^2(v-2u)}{27}+3+4u^2-v^2\ge 0,$$

т.е. неравенството

$$\frac{2(v+u)^2(v-2u)}{9}+3+4u^2-v^2\ge 0,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$(v-3)^2(2v+3)\ge 2u^2(2u+3v-18). \qquad (1)$$

Ако $2v\le 9$, тогаш $2u+3v\le 4v\le 18$, па затоа неравенството е точно.

Ако $2v\ge 9$, тогаш

$$\begin{aligned}2q^2(2q+3p-18)&\le 2q^2(p+3p-18)=4q^2(2p-9)\\&\le p^2(2p-9)=(p-3)^2(2p+3)-27\\&<(p-3)^2(2p+3)\end{aligned}$$

што значи дека и во овој случај важи неравенството (1) е докажано. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.♦

14. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}$. Докажете го неравенството

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c) .$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека

$$v=a+b+c=1 ,\ ab+bc+ca=\tfrac{1-u^2}{3} \ \text{ и } \ abc=w .$$

Тогаш даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\tfrac{-1+8u^2+2u^4}{9}+4w \geq w ,$$

т.е. со неравенството

$$-1+8u^2+2u^4+27w \geq 0 .$$

Од теорема 2 следува дека доволно е да докажеме дека

$$-1+8u^2+2u^4+27\tfrac{(1+u)^2(1-2u)}{27} \geq 0 .$$

Имаме

$$\begin{aligned}
-1+8u^2+2u^4+27\tfrac{(1+u)^2(1-2u)}{27} &= -1+8u^2+2u^4+(1+u)^2(1-2u) \\
&= -1+8u^2+2u^4+(1+2u+u^2)(1-2u) \\
&= -1+8u^2+2u^4+(1-3u^2-2u^3) \\
&= 2u^4+5u^2-2u^3 = u^2(2u^2-2u+5) \\
&= u^2\tfrac{4u^2-4u+10}{2} = u^2\tfrac{(2u-1)^2+9}{2} \geq 0,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

15. Нека $x, y, z \geq 0$ се реални броеви такви да $xy+yz+zx+xyz=4$. Докажи дека

$$3(x^2+y^2+z^2)+xyz \geq 10 .$$

Решение. Нека $p=x+y+z$ и ако означиме $q=xy+yz+zx$ и $r=xyz$. Тогаш од условот на задачата имаме $q+r=4$ и даденото неравенство можеме да го запишеме во обликот

$$3(p^2-2q)+r \geq 10 ,$$

т.е. во обликот

$$3p^2-7q+6 \geq 0 . \tag{1}$$

Но, како што знаеме $p^3-4pq+9r \geq 0$ и како $q+r=4$, добиваме

$$p^3-4pq+9(4-q) \geq 0 ,\ \text{т.е.}\ q \leq \tfrac{p^3+36}{4p+9} ,$$

па затоа за да го докажеме неравенството (1) доволно е да го докажеме неравенството

$$3p^2-7\tfrac{p^3+36}{4p+9}+6 \geq 0 ,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\tfrac{(p-3)(5p^2+42p+102)}{4p+9} \geq 0 . \tag{2}$$

Понатаму, за да го докажеме неравенството (2), доволно е да докажеме дека

$$p \geq 3\,. \tag{3}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$4 = xy + yz + zx + xyz \geq 4\sqrt[4]{(xyz)^3}\,,$$

па затоа $r = xyz \leq 1$. Според тоа,

$$p \geq \sqrt{3q} = \sqrt{3(4-r)} \geq \sqrt{3(4-1)} = 3\,,$$

т.е. точно е неравенството (3). ■

16. Нека $x, y, z \in \mathbf{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \sqrt{\tfrac{3}{2}(x+y+z)}\,.$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа доволно е да се докаже дека за $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ такви што $x + y + z = 1$ важи

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,, \text{ т.е. } x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y}} + z \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}} \geq \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.$$

Функцијата $f:(0,1) \to \mathbf{R}$, определена со $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ е строго растечка и строго конвексна, бидејќи $f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^{3/2}} > 0$ и $f''(x) = \frac{3}{4(1-x)^{5/2}} > 0$. Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \tfrac{1}{3}(x+y+z)^2 = \tfrac{1}{3}\,,$$

па затоа од неравенството на Јенсен добиваме

$$x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y}} + z \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}} = xf(x) + yf(y) + zf(z)$$

$$\geq f(x^2 + y^2 + z^2) \geq f(\tfrac{1}{3}) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$. ■

ИНДЕКС НА ПОИМИ

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
3. Boyvalenkov, P.; Kolev, E.; Musharov, O.; Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
4. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
5. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
6. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
7. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
8. Grozdev, S.; Kolev, E.; Mushkarov, O.; Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
9. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
10. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
11. Kadelburg, Z.; Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematika 1960-1989, DMS, Beograd, 1990
12. Kuczma, M. E.; Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
13. Manfrino, R. B.; Ortega, J. A. G.; Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
14. Mitrinović, D. S.; Barnes, E. S.; Marsh, D. C. B.; Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
15. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
16. Nardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
17. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
18. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
19. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.; Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
20. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.; Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
21. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.; Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2012
22. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
23. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
24. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
25. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
26. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
27. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015

28. Бойваленков, П.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
29. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје, 2015
30. Гроздев, С.; Ненков, В.: Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје, 2015
31. Димовски, Д.; Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
32. Ивановски, Н.: Задачи од анализа, Алби, Скопје, 2000
33. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
34. Јанковић, З.; Каделбург, З.; Младеновић, П.: Међунаодне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
35. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
36. Кендеров, П.; Табов, И.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
37. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: Сигмина ризница (конкурсни задачи 1-144), СММ, Скопје, 2011
38. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2011
39. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
40. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
41. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
42. Малчески, Р.: Математичка анализа I, Природно-математички факултет, Скопје, 2002
43. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
44. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
45. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
46. Малчески, Р.: Основи на математичка анализа, Уни. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 2001
47. Малчески, Р.; Димовски, Д; Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
48. Малчески, Р.; Малчески, А. и др..: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
49. Малчески, Р.; Манова – Ераковиќ, В.; Марковски, Ѓ.; Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
50. Малчески, Р.: Ангелски принцип на миниму, Сигма, 2016
51. Номировский, Д.: Неравенство Караматы, Квант, 2003
52. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
53. Тренчевски, К.; Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
54. Цветковски, З.; Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
55. Цветковски, З.; Малчески, Р.: Еден метод за докажување на неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
56. Цветковски, З.; Малчески, Р.: Неравенства на Шур и Мјурхед , Сигма, Скопје, 2007
57. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976