Alija Muminagić, Данска
Jens Carstensen, Данска

ЗБИР НА КВАДРАТИ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛНИ ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Да ги разгледаме следните точни равенства

$$\begin{aligned} &3^2+4^2=5^2,\\ &10^2+11^2+12^2=13^2+14^2, \qquad (1)\\ &21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2. \end{aligned}$$

Меѓутоа,

$$\begin{aligned} &8^2+9^2+10^2\neq 11^2+12^2,\\ &19^2+20^2+21^2+22^2\neq 23^2+24^2+25^2. \end{aligned} \qquad (1^*)$$

Се наметнува прашањето: на кој начин доаѓаме до точните равенства (1). Го воочуваме следното: на пример, во точното равенство

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$

со првиот број 10^2 ги собравме само квадратите на следните два последователни броја (тоа е левата страна на равенството), а на другата страна по 13^2 (забележуваме дека тоа е првиот број на десната страна кој е за 1 поголем од последниот број на левата страна) додадовме само квадрат на еден број, т.е. следниот природен број. Ако со n го означиме првиот природен број на левата страна, тогаш следни природни броеви се $n+1, n+2, ..., n+(k-1), n+k$ а збирот на нивните квадрати е

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+....+[n+(k-1)]^2+(n+k)^2,$$

а горниот коментар десната страна на равенството (1) е

$$\begin{aligned} &(n+k+1)^2+(n+k+2)^2+....+(n+k+(k-1))^2+(n+k+k)^2=\\ &=(n+k+1)^2+(n+k+2)^2+....+(n+2k-1)^2+(n+2k)^2 \end{aligned}$$

Според тоа,

$$n^2+(n+1)^2+...+(n+k)^2=(n+k+1)^2+....+(n+2k-1)^2+(n+2k)^2 \qquad (2)$$

Претходниот дел е детално опишан, па така решението 1, кое следува, може да го пратат учениците од основните училишта кои се во завршните класови.

Решение 1. Последователно добиваме:

$$n^2+(n+1)^2+...+(n+k)^2=(n+k+1)^2+....+(n+2k-1)^2+(n+2k)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$[(n+k+1)^2-n^2]+[(n+k+2)^2-(n+1)^2]+...[(n+2k)^2-(n+k-1)^2]-(n+k)^2=0$$

Сега на на изразите во средни загарди го применуваме равенството

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)\,,$$

и добиваме

$$(k+1)(2n+k+1)+(k+1)(2n+k+3)+...+(k+1)(2n+3k-1)-(n-k)^2=0$$

$$(k+1)[(2n+k)+1+(2n+k)+3+...+(2n+k)+2k-1]-(n+k)^2=0$$

$$(k+1)[(k(2n+k)+1+3+...+(2k-1)]-(n+k)^2=0\,.$$

Ако искористиме дека $1+3+...+(2k-1)=k^2$, последователно добиваме

$$(k+1)(2nk+k^2+k^2)-(n+k)^2=0$$

$$(k+1)2k(n+k)-(n+k)^2=0$$

$$(n+k)(2k^2+2k-n-k)=0$$

$$(n+k)(2k^2+k-n)=0.$$

и оттука, бидејќи $n+k\neq 0$ добиваме дека $2k^2+k-n=0$, т.е. $n=2k^2+k$. Сега гледаме дека:

- за $k=1$ имаме $n=2\cdot 1^2+1=3$ и $3^2+(3+1)^2=[(3+1)+1]^2$, т.е. $3^2+4^2=5^2$
- за $k=2$ добиваме дека $n=10$ и $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$
- за $k=3$ добиваме дека $n=21$ и $21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$.

Со тоа покажавме на кој начин сме дошле до точните равенства од (1). Пробај да докажеш зошто во (1*) не важи знак за равенство?

Сега ќе дадеме доказ на равенството

$$1+3+...+2k-1=k^2.$$

Имаме:

$$\begin{aligned}1+3+5+...(2k-1)&=1+(2+1)+(3+2)+...+(k+(k-1))\\&=(1+2+3+...+k)+(1+2+...+(k-1))\\&=\tfrac{k(k+1)}{2}+\tfrac{(k-1)(k-1+1)}{2}=k^2.\end{aligned}$$

Решение 2. Како и во решението 1 добиваме

$$n^2+(n+1)^2+...+(n+k)^2=(n+k+1)^2+....+(n+2k-1)^2+(n+2k)^2 \qquad (2)$$

Ставајќи во (2) последователно $k=1,2,3,\ldots$ добиваме:

$$n^2+(n+1)^2=((n+1)+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+(n+1)^2=(n+1)^2+2(n+1)+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$n^2-2n-3=0 \tag{3}$$

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=(n+3)^2+(n+4)^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$n^2-8n-20=0 \tag{4}$$

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$n^2-18n-63=0 \tag{5}$$

Едно од решенијата на квадратните равенки (3), (4) и (5) е

$$n=-1, n=-2, n=-3$$

и воопшто $n=-k$. Коефициенти на линеарните членови во равенките (3),(4) и (5) се $-2,-8,-18,\ldots$, т.е. $-2\cdot 1^2$, $-2\cdot 2^2$, $-2\cdot 3^2$ и воопшто $-2k^2$. Но, $n=-k$ е едно решение, па затоа

$$(-k)^2-2k^2(-k)+q=0 \;\Leftrightarrow\; q=-2k^3-k^2.$$

Значи, решение на нашиот проблем е решението на квадратната равенка

$$n^2-2k^2\cdot n-2k^3-k^2=0. \tag{6}$$

Ставајќи во (6) $k=4$ ја добиваме равенката

$$n^2-32n-144=0$$

која има решение $n=36$, па според тоа

$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$

На ист начин за $k=5$ и $k=6$ добиваме:

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$$

$$78^2+79^2+80^2+81^2+82^2+83^2+84^2=85^2+86^2+87^2+88^2+89^2+90^2$$

итн.

Литература

[1] Jens Carstensen, Sum of kvadraltal, Matematik Magasinet, 48/2009

[2] Alija muminagić &Jens Carstensen, Sum of kvadraltal 3, Matematik Magasinet 87/2016