Методи Главче
Скопје

БРОЈНИ РЕБУСИ

На многу натпревари по математика може да се сретнат задачи во кои треба да дешифрира некое равенство, т.е. наместо букви, ѕвездички или некои други знаци да се стават соодветни цифри така што равенството ќе биде точно. Овие видови задачи популарно се наречени бројни ребуси. Притоа, најчесто различните букви (знаци) треба да се заменат со различни цифри, а истите букви (знаци) треба да се заменат со исти цифри. Од ова непишано правило исклучок се задачите во кои сите непознати цифри се означени со ѕвездички, но во ова наше дружење со бројните ребуси вакви задачи нема да разгледуваме.

Задача 1. Пресметај на вредноста на бројниот израз

$$\frac{Е\cdot В\cdot К\cdot Л\cdot И\cdot Д}{А\cdot Р\cdot Х\cdot И\cdot М\cdot Е\cdot Д}.$$

во кој различните букви означуваат различни цифри, а истите букви означуваат исти цифри:

Решение. Забележуваме дека во дадениот израз се појавуваат десет различни букви и тие треба да се заменат со десет различни цифри. Но, имаме точно десет цифри, па затоа една од цифрите мора да е еднаква на 0. Сега, бидејќи производ на повеќе броеви од кои едниот е 0 е еднаков на 0, а делењето со 0 не е изводливо, заклучуваме дека една од буквите *В, К* или *Л* треба да се замени со цифрата 0, што значи дека $\frac{Е\cdot В\cdot К\cdot Л\cdot И\cdot Д}{А\cdot Р\cdot Х\cdot И\cdot М\cdot Е\cdot Д}=0$. ■

Задача 2. Дишифрирај го следното равенство

$$А+\overline{ЕЕЕЕ}+\overline{ЕЕЕЕ}=\overline{АЕЕЕЕ}.$$

во кое различните букви означуваат различни цифри, а истите букви означуваат исти цифри:

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$А+\overline{ЕЕЕЕ}+\overline{ЕЕЕЕ}=\overline{А0000}+\overline{ЕЕЕЕ},$$

$$А+\overline{ЕЕЕЕ}=\overline{А0000}.$$

Сега, бидејќи збир на едноцифрен и четирицифрен број е помал или еднаков на $9+9999=10008$, заклучуваме дека $А=1$, па затоа

$$1+\overline{EEEE}=10000, \text{ т.е. } \overline{EEEE}=9999.$$

Конечно, дешифрираното равенство е:

$$1+9999+9999=19999. \ \blacksquare$$

Задача 3. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што ќе биде точно равенството:

$$\overline{УРАН}+\overline{УРАН}=\overline{НАУКА}.$$

Решение. Бидејќи

$$\overline{НАУКА}=\overline{УРАН}+\overline{УРАН}\le 2\cdot 9876=1972,$$

заклучуваме дека $Н=1$. Според тоа, равенството го добива обликот $\overline{УРА1}+\overline{УРА1}=\overline{1АУКА}$, па затоа $А=2$, т.е. $\overline{УР21}+\overline{УР21}=\overline{12УК2}$. Сега е јасно дека $К=4$, односно $\overline{УР21}+\overline{УР21}=\overline{12У42}$, од каде следува дека $У=6$ и $Р=3$. Конечно, дешифрираното равенство е:

$$6321+6321=12642. \ \blacksquare$$

Задача 4. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што ќе биде точно равенството:

$$\overline{ДАР}+\overline{МАР}=\overline{МАМА}.$$

Решение. Бидејќи

$$\overline{МАМА}=\overline{ДАР}+\overline{МАР}\le 2\cdot 999=1998,$$

заклучуваме дека $М=1$. Според тоа, равенството го добива обликот $\overline{ДАР}+\overline{1АР}=\overline{1А1А}$. Понатаму, од собирањето на десетките следува дека $А+А\le 1$, што е можно само ако $А=0$, па равенството го добива видот $\overline{Д0Р}+\overline{10Р}=\overline{1010}$, односно $100Д+2Р=910$. Сега е јасно дека $Д=9$ и $Р=5$. Конечно, дешифрираното равенство е:

$$905+105=1010. \ \blacksquare$$

Задача 5. Дешифрирај го следното равенство

$$\overline{АФИКС}+\overline{ФИКС}+\overline{ИКС}=44444.$$

во кое различните букви означуваат различни цифри, а истите букви означуваат исти цифри:

Решение. Од собирањето на единиците следува дека производот $3С$ завршува на цифрата 4, од каде што следува дека $С=8$, т.е

$$\overline{АФИК8}+\overline{ФИК8}+\overline{ИК8}=44444.$$

Сега, бидејќи при собирањето на единиците имаме пренос 2, од собирањето на десетките следува дека збирот $3К+2$ завршува на 4, што значи дека производот $3К$ завршува на цифрата 2. Затоа $К=4$, т.е.

$$\overline{АФИ48}+\overline{ФИ48}+\overline{И48}=44444.$$

Понатаму, при собирањето на десетките имаме пренос 1, па затоа од собирањето на стотките следува дека збирот $3И+1$ завршува на 4, т.е. производот $3И$ завршува на цифрата 3. Затоа $И=1$, т.е.

$$\overline{АФ148}+\overline{Ф148}+148=44444.$$

Сега, од собирањето на стотките немаме пренос, па затоа производот $2Ф$ завршува на цифрата 4, од каде следува $Ф=7$, па лесно наоѓаме дека $А=3$. Конечно, дешифрираното равенство е:

$$37148+7148+148=44444. \blacksquare$$

Задача 6. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што ќе биде точно равенството:

$$\overline{КОЗА}+\overline{КОЗА}=\overline{СТАДО}.$$

Решение. Бидејќи

$$\overline{СТАДО}=\overline{КОЗА}+\overline{КОЗА}\le 2\cdot 9999=19998,$$

заклучуваме дека $С=1$. Понатаму, цифрата на единиците на збирот е парен број, па затоа $О\in\{0,2,4,6,8\}$.

- Ако $О=0$, тогаш $\overline{К0ЗА}+\overline{К0ЗА}=\overline{1ТАД0}$, па мора да е $А=5$, односно $\overline{К0З5}+\overline{К0З5}=\overline{1Т5Д0}$, што не е можно бидејќи преносот од собирањето на десетките може да биде најмногу 1, па затоа цифрата на стотките на збирот не може да е 5.
- Ако $О=2$, тогаш $\overline{К2ЗА}+\overline{К2ЗА}=\overline{1ТАД2}$, па бидејќи $А\ne 1$ следува дека $А=6$. Значи, $\overline{К2З6}+\overline{К2З6}=\overline{1Т6Д2}$, што не е можно бидејќи цифрата на стотките на збирот може да е 4 или 5, а таа треба да е еднаква на 6.
- Ако $О=4$, тогаш $\overline{К4ЗА}+\overline{К4ЗА}=\overline{1ТАД4}$, па затоа од собирањето на единиците добиваме $А=2$ или $А=7$. За $А=2$ го добиваме равенството $\overline{К4З2}+\overline{К4З2}=\overline{1Т2Д4}$ кое не е можно бидејќи цифрата на стотките на збирот може да е 8 или 9, а таа треба да е еднаква на 2. За $А=7$ го добиваме равенството $\overline{К4З7}+\overline{К4З7}=\overline{1Т7Д4}$ кое не е

можно бидејќи цифрата на стотките на збирот може да е 8 или 9, а таа треба да е еднаква на 7.

- Ако $O=6$, тогаш $\overline{К63А}+\overline{К63А}=\overline{1ТАД6}$, па затоа од собирањето на единиците добиваме $А=3$ или $А=8$. За $А=8$ го добиваме равенството $\overline{К638}+\overline{К638}=\overline{1Т8Д6}$ кое не е можно бидејќи цифрата на стотките на збирот може да е 2 или 3, а таа треба да е еднаква на 8. За $А=3$ го добиваме равенството $\overline{К6З3}+\overline{К6З3}=\overline{1Т3Д6}$. Понатаму, од собирањето на иљадитите е јасно дека $К\geq 5$, а заради преносот при собирањето на десетките мора да е и $З\geq 5$. Јасно, $К\neq 6=O$.
  Ако $К=5$, тогаш добиваме $Т=1=С$, што не е можно.
  Ако $К=7$, тогаш $Т=5$, па добиваме $\overline{76З3}+\overline{76З3}=\overline{153Д6}$. Сега, $З=8$, што не е можно бидејќи тогаш добиваме $Д=6=O$, или $З=9$ и затоа $Д=8$, т.е. едно решение на задачата е $7693+7693=15386$.
  Ако $К=8$, тогаш $Т=7$, па добиваме $\overline{86З3}+\overline{86З3}=\overline{173Д6}$. Сега $З=5$ или $З=9$. Ако $З=5$, добиваме $Д=0$ и второ решение на задачата е $8653+8653=17306$. Ако $З=9$, добиваме $Д=8=К$, што не е можно.
- Ако $O=8$, тогаш $\overline{К8ЗА}+\overline{К8ЗА}=\overline{1ТАД8}$, па затоа од собирањето на единиците добиваме $А=4$ или $А=9$. За $А=4$ го добиваме равенството $\overline{К8З4}+\overline{К8З4}=\overline{1Т4Д8}$ кое не е можно бидејќи цифрата на стотките на збирот може да е 6 или 7, а таа треба да е еднаква на 4. За $А=9$ го добиваме равенството $\overline{К8З9}+\overline{К8З9}=\overline{1Т9Д8}$ кое не е можно бидејќи цифрата на стотките на збирот може да е 6 или 7, а таа треба да е еднаква на 9.

Конечно, единствени решенија на задачата се

$$8653+8653=17306 \text{ и } 7693+7693=15386. \ \blacksquare$$

Задача 7. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што ќе биде точно равенството:

$$А\cdot С\cdot \overline{АС}=\overline{ССС}.$$

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$А\cdot С\cdot \overline{АС}=С\cdot 111,$$

$$A \cdot \overline{AC} = 111,$$
$$A \cdot (10A + C) = 111.$$

Имаме $111 = 3 \cdot 37$ и броевите 3 и 37 се прости, следува дека
$$A = 3 \text{ и } 10A + C = 37, \text{ т.е. } A = 3 \text{ и } C = 7.$$

Конечно, дешифрираното равенство е:
$$3 \cdot 7 \cdot 37 = 777. \ \blacksquare$$

Задача 8. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што пресметувањата ќе бидат точни:
$$A - R = I : T = M : E = T \cdot I = K - A.$$

Решение. Од равенството $I : T = T \cdot I$, добиваме $I = T^2 \cdot I$, од каде следува $T^2 = 1$, т.е. $T = 1$. Понатаму, од равенството $M : E = I$, ако земеме дека I, E, M се различни цифри, кои се различни од 1, добиваме дека можни се следниве случаи:

- $I = 4$, $M = 8$ и $E = 2$. Но, тогаш $A - R = 4$ и $K - A = 4$, па ако ги собереме последните две равенства добиваме $K - R = 8$. Последното равенство е само за $K = 8, R = 0$ или $K = 9, R = 1$, но првиот случај противречи на $M = 8$, а вториот на $T = 1$.
- $I = 3$, $M = 6$ и $E = 2$. Но, тогаш $A - R = 3$ и $K - A = 3$, па ако ги собереме последните две равенства добиваме $K - R = 6$. Последното равенство е можно ако $K = 9, R = 3$ или $K = 8, R = 2$ или $K = 7, R = 1$ или $K = 6, R = 0$. Меѓутоа, првиот случај противречи на $I = 3$, вториот на $E = 2$, третиот на $T = 1$ и четвртиот на $M = 6$.
- $I = 2$, $M = 8$, $E = 4$. Сега $A - R = K - A = 2$ од што имајќи предвид дека на различните букви соодветствуваат различни цифри добиваме две решенија $A = 5, R = 3, K = 7$ и $A = 7, R = 5, K = 9$.
- $I = 2$, $M = 6$, $E = 3$. Сега $A - R = K - A = 2$ од што имајќи предвид дека на различните букви соодветствуваат различни цифри го добиваме решението $A = 7, R = 5, K = 9$.

Конечно, задачата има три решенија, и тоа:
$$5 - 3 = 2 : 1 = 8 : 4 = 1 \cdot 2 = 7 - 5,$$
$$7 - 5 = 2 : 1 = 8 : 4 = 1 \cdot 2 = 9 - 7,$$
$$7 - 5 = 2 : 1 = 6 : 3 = 1 \cdot 2 = 9 - 7. \ \blacksquare$$

Задача 9. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што ќе биде точно равенството:

$$3\cdot\overline{НАШДОМ}=4\cdot\overline{ДОМНАШ}.$$

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата:

$$3\cdot(1000\cdot\overline{НАШ}+\overline{ДОМ})=4\cdot(1000\cdot\overline{ДОМ}+\overline{НАШ}),$$
$$2996\cdot\overline{НАШ}=3997\cdot\overline{ДОМ},$$
$$428\cdot\overline{НАШ}=571\cdot\overline{ДОМ}.$$

Бидејќи,

$$\text{NZD}(571,428)=\text{NZD}(143,428)=\text{NZD}(143,142)=1,$$

од последното равенство следува $571\,|\,\overline{НАШ}$, па затоа $\overline{НАШ}=571$. Конечно, $\overline{ДОМ}=428$ и дешифрираното равенство е

$$3\cdot 571428=4\cdot 428571.\ ■$$

Задача 10. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што тоа ќе биде точно равенството:

$$(\overline{ДЕ}+\overline{ДО})^2=\overline{ДЕДО}.$$

Решение. Имаме

$$\overline{ДЕДО}=(\overline{ДЕ}+\overline{ДО})^2=(20Д+Е+О)^2$$
$$=400Д^2+40Д(Е+О)+(Е+О)^2,$$

т.е.

$$1010Д+100Е+О=400Д^2+40Д(Е+О)+(Е+О)^2. \qquad (1)$$

и како $\overline{ДЕДО}\le 9897$, заклучуваме дека $400Д^2\le 9897$, од каде следува $Д\le 4$. Одделно ќе ги разгледаме четирите можности за $Д$.

- Ако $Д=1$, тогаш со замена во (1), по средувањето добиваме

  $$710\le 710+60Е=39О+(Е+О)^2\le 351+289=640,$$

  што не е можно.
- Ако $Д=2$, тогаш со замена во (1), по средувањето добиваме

  $$420+20Е=79О+(Е+О)^2.$$

  Сега, бидејќи бидејќи квадрат на природен број завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 и 9, а изразот на левата страна е делив со 10, заклучуваме дека $79О$ соодветно треба да завршува на цифрата 0, 9, 6, 5, 4 и 1, што значи дека соодветно цифрата $О$ треба да биде 0, 1, 4, 5, 6 и 9.

За $O=0$, добиваме $420+20E=E^2 \leq 81$, што не е можно.

За $O=1$, добиваме $341+20E=(E+1)^2 \leq 100$, што не е можно.

За $O=4$, добиваме $88+12E=E^2 \leq 81$, што не е можно.

За $O=5$, добиваме $10E=E^2$, од каде следува $E=0$. Значи, едно решение на бројниот ребус е $(20+25)^2=2025$.

За $O=6$, добиваме $8E=90+E^2 \geq 90$, што не е можно бидејќи E е едноцифрен број.

За $O=9$, добиваме $2E=372+E^2 \geq 372$, што не е можно бидејќи E е едноцифрен број.

- Ако $Д=3$, тогаш со замена во (1), по средувањето добиваме

$$570+119O+20E+(E+O)^2=0,$$

што не е можно.

- Ако $Д=4$, тогаш со замена во (1), по средувањето добиваме

$$2360+60E+159O+(E+O)^2=0,$$

што не е можно.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека единствено решение на дадениот броен ребус е $(20+25)^2=2025$. ■

Задачи за самостојна работа

1. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што тоа ќе биде точно равенството:
   а) $\overline{UDAR}+\overline{UDAR}=\overline{DRAMA}$,
   б) $\overline{VAGON}+\overline{VAGON}=\overline{SOSTAV}$,
   в) $\overline{SNEG}+\overline{DRAG}=\overline{SPORT}$.

2. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што тоа ќе биде точно равенството:
$$\overline{TETKA}+\overline{TETKA}=\overline{STRINA}.$$

3. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што тоа ќе биде точно равенството:

а) $\overline{RIMAN} \cdot R = \overline{NNNNNN}$,

б) $\overline{DA} \cdot \overline{DA} = \overline{BAL}$.

4. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри така што тоа ќе биде точно равенството:

а) $\overline{AV} \cdot \overline{AV} = \overline{LAV}$,

б) $\overline{IVA} \cdot \overline{IVA} = \overline{TETIVA}$,

б) $\overline{POP} \cdot \overline{POP} = \overline{POTOP}$.