Šest dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti

Ilija Ilišević, Osijek*

Znamo da je bolje riješiti jedan zadatak na više načina,
nego njih mnogo na isti način.

Pokazat ćemo kako dokazati jednu trigonometrijsku nejednakost na šest načina.

Zadatak. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Dokaz 1. Imamo

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}&=\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\sin\frac{\gamma}{2}\\&=\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\sin\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}\\&=\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\&\le\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\end{aligned}$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\Big(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\le\left(\frac{\big(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\big)+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right)^2=\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{1}{4}.$$

Dakle,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1\quad\text{i}\quad 1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

a to je ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. $\square$

Dokaz 2. Primjenom kosinusovog poučka dobivamo

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\Big(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\Big)-\frac{a^2}{2bc}.$$

Slijedi, prema AG-nejednakosti,

$$\cos\alpha\ge 1-\frac{a^2}{2bc},$$

* Autor predaje matematiku u III. gimnaziji u Osijeku.

odakle je $1-\cos\alpha \le \dfrac{a^2}{2bc}$ i konačno $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \le \dfrac{a^2}{4bc}$. Analogno, $\sin^2\dfrac{\beta}{2} \le \dfrac{b^2}{4ac}$, $\sin^2\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{c^2}{4ab}$. Odavde je

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} \le \frac{a^2}{4bc}\cdot\frac{b^2}{4ac}\cdot\frac{c^2}{4ab} = \frac{1}{64},$$

pa je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b} = \frac{a}{c}+\frac{c}{a} = \frac{a}{b}+\frac{b}{a} = 2,$$

a to je ako i samo ako je $a=b=c$. $\square$

Dokaz 3. Primjenom formule za sinus polukuta i kosinusovog poučka dobivamo

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc},\end{aligned}$$

gdje je s poluopseg trokuta. Analogno,

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{ac}, \qquad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}.$$

Dakle,

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} = \left(\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)^2,$$

pa je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

Iz Heronove formule $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ slijedi

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s}.$$

Stoga je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{P^2}{abcs}.$$

Kako je

$$R=\frac{abc}{4P}, \qquad r=\frac{P}{s},$$

gdje je P površina trokuta, a R i r redom polumjeri trokutu opisane i upisane kružnice, to je

$$\frac{P^2}{abcs} = \frac{P}{abc}\cdot\frac{P}{s} = \frac{1}{4R}\cdot r = \frac{r}{4R}.$$

Prema tome, dokazali smo da je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}.$$

Obzirom da je $R \geq 2r$, to je $\frac{r}{4R} \leq \frac{1}{8}$. (Nejednakost $R \geq 2r$ se lako dokazuje bez trigonometrije. Primjerice, može se dokazati da je kvadrat udaljenosti središta trokutu opisane i središta trokutu upisane kružnice jednak $R^2 - 2Rr$. Odatle slijedi $R^2 - 2Rr \geq 0$, pa je $R - 2r \geq 0$.) Konačno,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $R = 2r$, a to je ako i samo ako je trokut jednakostraničan. □

Dokaz 4. Kao u dokazu 3 dobivamo

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}, \qquad \sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{b^2-(c-a)^2}{4ca}, \qquad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\cdot\frac{b^2-(c-a)^2}{4ca}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}\\ &= \frac{\big(a^2-(b-c)^2\big)\big(b^2-(c-a)^2\big)\big(c^2-(a-b)^2\big)}{64a^2b^2c^2}.\end{aligned}$$

Kako je

$$a^2-(b-c)^2 \leq a^2, \qquad b^2-(c-a)^2 \leq b^2, \qquad c^2-(a-b)^2 \leq c^2,$$

pri čemu sve tri nejednakosti postaju jednakosti ako i samo ako je $a = b = c$, to je

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{a^2b^2c^2}{64a^2b^2c^2},$$

odakle slijedi

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

□

Dokaz 5. Imamo

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right)\sin\frac{\gamma}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Neka je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = m.$$

Tada je

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = -m,$$

tj.

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 2m = 0.$$

Da bi korijeni ove kvadratne jednadžbe bili realni, njena diskriminanta mora biti nenegativna. Stoga je

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 8m \geq 0,$$

odnosno

$$m \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Međutim,

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1,$$

pa je $m \leq \frac{1}{8}$. Dakle,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \quad \text{i} \quad \sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} = 0,$$

a to je ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. $\square$

Dokaz 6. Prema AG-nejednakosti je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3.$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

pa je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{6}$ odnosno $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. $\square$