

ПЕРИОДИЧНИ НИЗОВИ

Ратко Тошић, Нови Сад

Пођимо од следећа два задатка:

Задатак 1. Испиши недостајуће чланове низа

$$6, *, *, *, *, *, *, *, 4, *, *, *, *, *$$

ако се зна да је збир свака три узастопна члана низа једнак 15.

Решење. Нека су чланови посматраног низа

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{14}.$$

Позната су нам само два члана низа $a_1 = 6, a_9 = 4$. По услову задатка је

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3},$$

одакле следи да је $a_{i+3} = a_i$ за $i = 1, 2, \dots, 12$. Како је $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ и $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, тј.

$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4$, следи да је $a_1 = a_4 = a_7 = a_{10} = a_{13} = 6$. Слично закључујемо да је

$a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = a_{14}$ и $a_3 = a_6 = a_9 = a_{12} = 4$. Како је $a_1 + a_2 + a_3 = 6 + a_2 + 4 = 15$, то је $a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = a_{14} = 5$. Дакле, тражени низ је

$$6, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 5.$$

У низу из претходног задатка чланови низа се понављају у блоковима од по три узастопна члана. Кажемо да је тај низ *периодичан*, да периоду чине чланови 6, 5, 4 и да је дужина периоде 3 (састоји се из три члана).

Задатак 2. У низу

$$*, 8, *, *, *, 21, 30, *, *, *, *, *$$

сваку звездицу замени неким бројем тако да сви зборови од по три узастопна члана буду једнаки.

Решење. Познати чланови низа су: $a_2 = 8, a_6 = 21, a_7 = 30$. Као у задатку 1 налазимо да је

$$a_1 = a_4 = a_7 = a_{10} = 30,$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = 8,$$

$$a_3 = a_6 = a_9 = a_{12} = 21.$$

И у овом случају добили смо периодичан низ са периодом дужине 3. Оба низа су и коначна, тј. садрже коначан број чланова (први 14, други 12). У даљем излагању посматраћемо и бесконачне низове, тј. оне који садрже бесконачно много чланова, као што је низ у следећем задатку.

Задатак 3. Низ бројева формира се на следећи начин: На првом месту је број 7, а даље, иза сваког броја је збир цифара његовог квадрата увећан за 1. Тако, на другом месту је број 14 јер је $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На трећем месту је број 17, итд. Који број се налази на 2014. месту?

Решење. Непосредно се израчунава првих осам чланова низа. То су:

$$7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, \dots$$

Закључујемо да ће се, после прва четири члана низа, периодично појављивати тројка бројева: 5, 8, 11. Како је $2014 - 4 = 2010 = 3 \cdot 670$, следи да ће се после прва четири члана низа, 670 пута поновити тројка бројева 5, 8, 11; дакле, на 2014. месту у низу биће последњи члан те тројке, тј. број 11.



И овај низ је периодичан са периодом дужине 3. У овом случају, међутим, периодичност почиње тек од петог члана. За део који се налази испред прве периоде кажемо да чини *претпериоду*.

Задатак 4. Исписано је 2014 цифара у низ једна иза друге. Познато је да је сваки двоцифрен број који сачињавају две суседне цифре у низу (тим редом којим су записане) дељив са 17 или са 23.

(а) Последња цифра у низу је 1. Која је прва?

(б) Прва цифра у низу је 9. Која је последња?

Решење. (а) Двоцифрени бројеви дељиви са 17 су 17, 34, 51, 68 и 85, а двоцифрени бројеви дељиви са 23 су 23, 46, 69 и 92. Свих девет двоцифрених бројева који су дељиви са 17 или 23 имају различите последње цифре (цифре јединица); према томе, свака цифра у низу једнозначно одређује цифру која јој претходи. То значи да је са последњом цифром у низу једнозначно одређен цео низ. Лако се види да су последњих 10 цифара у низу 4692346851, одакле следи да се испред последњих пет цифара периодично понавља блок цифара 46923. Како је $2009 = 401 \cdot 5 + 4$, следи да ће испред последњих пет цифара бити тачно 401 блок цифара 46923 и испред њих четири последње цифре истог блока. Према томе, прве четири цифре у низу су 6923, тј. прва цифра је 6.

(б) Посматрајући девет двоцифрених бројева дељивих са 17 или 23, закључујемо да свака цифра, изузев 6 и 7, једнозначно одређује наредну цифру. После цифре 7 низ се не може продужити, а после цифре 6 може доћи 8 или 9. Почетак низа је блок од пет цифара 92346. Ако је шеста цифра у низу 8, могу се написати још само четири цифре и добиће се низ 923468517, који се даље не може продужити. Ако је шеста цифра у низу 9, поновиће се још једанпут блок од првих пет цифара. Слично закључујемо да ако на неком месту у низу иза цифре 6 дође цифра 8, низ цифара ће се завршити цифром 7 и укупан број цифара у низу при дељењу са 5 даје остатак 4. Према томе, да би се добио низ од 2014 цифара са траженом особином, треба увек иза цифре 6 писати цифру 9, све док се не испише 2010 цифара. После тога, могуће је после цифре 6 написати цифру 9, па ће последња (2014.) цифра бити 4, или после цифре 6 написати цифру 8, па ће последња цифра бити 7.

При изучавању разломака научили смо да је број рационалан ако је низ цифара иза децималне запете у децималном запису тога броја коначан или бесконачан периодичан. (И у случају кад је тај низ коначан, може се сматрати бесконачним периодичним, при чему периоду чини цифра 0).

Задатак 5. (Општинско такмичење 2006, 6. разред) Одреди 2014. цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\frac{21}{37}$.

Решење. Дељењем налазимо да је $\frac{21}{37} = 0,5\overline{67}$, а $2014 = 3 \cdot 671 + 1$, па закључујемо да ће на 2014. месту иза децималне запете бити цифра 5.

У задацима који следе ученик ће се срести мноштвом идеја корисних при решавању задатака о периодичним низовима.

Задатак 6. На табли је написан број 61. Сваке секунде број на табли замењује се бројем који се добије кад се производ цифара написаног броја повећа за 13. Који ће број бити написан на табли после 2014 секунди?

Решење. Посматрајмо почетак низа:

61, 19, 22, 17, 20, 13, 16, 19, 22, ...

Видимо да је низ периодичан, са периодом 19, 22, 17, 20, 13, 16 и претпериодом 61. Како је $2014 = 335 \cdot 6 + 4 = 1 + 335 \cdot 6 + 3$, 2014. члан ће бити једнак трећем броју периоде, тј. 17.

Задатак 7. Бесконачни прави децимални разломак добијен је тако што су за прве две цифре иза децималне запете узете цифре a и b , а свака следећа цифра једнака је последњој цифри збира две претходне цифре. За које ће се парове цифара a и b у запису тога децималног разломка појавити комбинација цифара 57?

Решење. Како постоји тачно 100 парова узастопних цифара ab , неки пар узастопних цифара се мора поновити, а како је свака следећа цифра једнозначно одређена са две претходне, цифре низа се периодично понављају.

Ако се у разломку појављује пар узастопних цифара 57, онда се у том разломку појављује низ цифара

...57291011235831459437077415617853819099875279651673033695493257...

Одавде видимо да се сваки од 60 парова који се у наведеном низу појављује као пар узастопних цифара доводи до разломка у коме се појављује пар 57. С друге стране, ниједан други пар цифара не доводи до тог разломка, јер се при постојању пара 57 може појавити само 60 горе исписаних парова.

Задатак 8. Одреди последњу цифру броја 2^{2014} .

Решење. Испишимо последње цифре првих неколико степена двојке:

2, 4, 8, 6, 2, ... (1)

Видимо да се 2^5 , као и 2^1 , завршава цифром 2. Како је свака цифра у низу (1) одређена претходном, цифре у низу се периодично понављају са периодом дужине 4. Дакле, последња цифра броја 2^{2014} одређена је остатком при дељењу броја 2014 са 4. Како је тај остатак једнак 2, последња цифра броја 2^{2014} је иста као и последња цифра броја 2^2 , тј. 4.

Задатак 9. Одреди последњу цифру броја 2013^{2014} .

Решење. Последња цифра броја 2013^n иста је као и последња цифра броја 3^n . Испишимо последње цифре првих неколико степена тројке:

3, 9, 7, 1, 3, ... (2)

Видимо да се 3^5 , као и 3^1 , завршава цифром 3. Како је свака цифра у низу (2) одређена претходном, цифре у низу се периодично понављају са периодом дужине 4. Дакле, последња цифра броја 2013^{2014} одређена је остатком при дељењу броја 2014 са 4. Како је тај остатак једнак 2, последња цифра броја 2013^{2014} је иста као и последња цифра броја 3^2 , тј. 9.

Задатак 10. (Државно такмичење 2008, 6. разред) У низу

$$1, -1, -1, 1, -1, \dots$$

шести члан једнак је производу првог и другог, седми производу другог и трећег, осми производу трећег и четвртог, ... сваки члан почев од шестог једнак је производу два члана који су за четири и за пет места испред њега. Који је број на 2014. месту? Израчунај збир првих 2014 бројева.

Решење. Израчунавајући првих 20 чланова низа закључујемо да ће се првих 15 чланова низа понављати, а како се у првом блоку од 15 чланова низа тројка $1, -1, -1$ понавља пет пута, закључујемо да је

$$a_{3k+1} = 1, a_{3k+2} = -1, a_{3k+3} = -1$$

за било који ненегативан цео број k . Како је $2014 = 3 \cdot 671 + 1$, то је $a_{2014} = 1$. Тражени збир је

$$672 \cdot 1 + 671 \cdot (-1) + 671 \cdot (-1) = -670.$$

Задатак 11. Фибоначијев низ бројева формира се по следећем закону:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ за } n \geq 3.$$

Одреди последњу цифру 2014. члана Фибоначијевог низа.

Решење. Посматрајмо низ последњих цифара чланова Фибоначијевог низа:

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

Јасно је да је $f_1 = f_2 = 1$ и да је, за $n \geq 3$, f_n последња цифра збира $f_{n-1} + f_{n-2}$. Ако је за неке природне бројеве m и k , $k > m$, $f_k = f_m$ и $f_{k+1} = f_{m+1}$, онда је и $f_{k+2} = f_{m+2}$ и низ ће се периодично понављати са периодом дужине $k - m$.

У низу последњих цифара чланова Фибоначијевог низа

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, \dots$$

сваки трећи члан је паран, а остали су непарни. Постоји укупно 25 уређених парова непарних цифара. Зато је посматрани низ цифара периодичан, при чему је дужина периоде највише 75.

Непосредним израчунавањем показује се да је $f_{61} = f_{62} = 1$, тј. да се првих 60 цифара периодично понављају. Како је $2014 = 33 \cdot 60 + 34$, то је $f_{2014} = f_{34} = 7$.

Задатак 12. Посматрајмо низ бројева

$$1, 14, 27, 40, \dots$$

у коме је сваки број за 13 већи од претходног броја у низу. Докажи да у том низу постоји бесконачно много бројева који се записују само помоћу цифре 2.

Решење. Лако се види да је у посматраном низу први такав број 222 ($222 = 1 + 17 \cdot 13$). Приметимо даље да је број 222222 дељив са 13 ($222222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$). Даље се лако доказује да је сваки број облика $\underbrace{222\dots 2}_{6k}$ дељив са 13. Наиме:

$$\underbrace{222\dots 2}_{6k} = 222222 \cdot (10^{6(k-1)} + 10^{6(k-2)} + \dots + 10^6 + 1).$$

Одавде следи да је број који се записује помоћу $6k + 3$ двојки, $k = 0, 1, 2, \dots$ члан посматраног низа, тј. да при дељењу са 13 даје остатак 1. Заиста,

$$\underbrace{222\dots 2}_{6k+3} = 1000 \cdot \underbrace{222\dots 2}_{6k} + 222 = 1 + 17 \cdot 13 + 1000 \cdot \underbrace{222\dots 2}_{6k}.$$

Задатак 13. Докажи да у низу

$$31, 331, 3331, 33331, \dots$$

има бесконачно много бројева дељивих са 31, а нема ниједног дељивог са 13.

Решење. Дељењем проверавамо да је број $\underbrace{333\dots31}_{15k+1}$ дељив са 31. Зато је и сваки број облика $\underbrace{333\dots31}_{15k+1}$, где је k произвољан ненегативан цео број, дељив са 31.

С друге стране, лако се проверава да је број 333333 дељив са 13, а да ниједан од бројева 1, 31, 331, 3331, 33331, 333331 није дељив са 13. Према томе, сваки члан датог низа може се представити у облику $13k + r$, где је r један од горе наведених 6 бројева који нису дељиви са 13. Дакле, ниједан члан низа није дељив са 13.

Задатак 14. Докажи да је за сваки природан број n цифра десетица броја 3^n парна.

Решење. За $n = 1, 2, \dots, 21$ добија се следећи низ двоцифрених завршетака бројева 3^n :

$$03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, 03.$$

Видимо да међу првих 20 степена тројке нема таквих у којим је цифра десетица непарна. Међутим, почев од двадесет првог члана горњи низ двоцифрених завршетака се периодично понавља, па то важи за све степене тројке.

Задатак 15. У врсту је исписано 100 бројева различитих од 0. Познато је да је сваки број осим првог и последњег једнак производу два њему суседна броја. Одреди последњи број ако је први 7.

Решење. По услову задатка је $a_2 = a_1 \cdot a_3$, $a_3 = a_2 \cdot a_4$, ..., $a_{99} = a_{98} \cdot a_{100}$. Множењем две суседне једнакости добијамо да је $a_k \cdot a_{k+3} = 1$, тј. $a_{k+3} = \frac{1}{a_k}$. Следи да је $a_{k+6} = a_k$, па је a_1

$$= a_7 = a_{97} = 7, \text{ одакле је } a_{100} = \frac{1}{a_{97}} = \frac{1}{7}.$$

Задатак 16. Дат је низ

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

где је $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} \cdot a_n + 1$, за $n \geq 1$. Докажи да број a_{2014} није дељив са 4.

Решење. Остатак производа зависи само од остатака чинилаца. Користећи ту чињеницу, испишимо низ остатака при дељењу чланова датог низа са 4:

$$1, 1, 2, 3, 3, 2, 3, 3, \dots$$

Овај низ остатака је периодичан са периодом дужине 3, па видимо да ниједан члан низа није дељив са 4.

Задатак 17. Колико има природних бројева x мањих од 10000 за које је број $2^x - x^2$ дељив са 7?

Решење. 2857. Остаци при дељењу са 7 бројева 2^x и x^2 редом понављају се са периодима 3 и 7 (4, 2, 1 и 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0). Зато остаци при дељењу $2^x - x^2$ са 7 чине периодични низ са периодом дужине 21. Међу бројевима x од 1 до 21, једнаки остаци при дељењу са 7 се добијају за 6 вредности x . Зато међу бројевима од 1 до $9996 = 21 \cdot 476$ има $476 \cdot 6 = 2856$ тражених бројева. Од преостала три (9997, 9998, 9999) услов задовољава само број 9998.

Задатак 18. Докажи да не постоје два различита степена двојке који се један из другог могу добити пермутовањем цифара.

Решење. Два броја који се разликују само поретком цифара дају исте остатке при дељењу са 9. Међутим, низ остатака при дељењу 2^n са 9 је

$$2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, \dots$$

и он је периодичан са дужином периоде 6. Следи да ако два степена двојке имају једнаке остатке при дељењу са 9, онда је један од њих бар 64 пута већи од другог; међутим, тада се они разликују по броју цифара па се не могу један из другог добити пермутовањем цифара.

Задатак 19. Низ бројева формира се на следећи начин: Први члан низа је број 3^{2014} ; сваки следећи, почев од другог, једнак је збиру цифара претходног. Нађи који број у том низу стоји на 2014. месту.

Решење. Ако је број дељив са 9, онда је и збир његових цифара дељив са 9. Како је $3^{2014} = 9 \cdot 3^{2012}$, следи да је сваки број у посматраном низу дељив са 9.

Може се дати следећа оцена величине броја у низу: Како је $3^2 < 10$, то је $3^{2014} < 10^{1007}$, тј. број 3^{2014} нема више од 1007 цифара. Одатле следи да други број у низу није већи од $9 \cdot 1007 < 10^5$, тј. он нема више од пет цифара. Према томе, трећи број у низу није већи од $9 \cdot 5 = 45$, а како је дељив са 9, то мора бити неки од бројева 9, 18, 27, 36, 45. Како је збир цифара сваког од ових бројева једнак 9, следи да је сваки члан низа, почев од четвртог, једнак 9.

Задатак 20. На столу се налазе жетони, међу којима има црних и белих. Пера од жетона прави два стуба на следећи начин: он узима један по један жетон и ставља их на један од два стуба. При томе не сме никад поставити неки жетон на жетон исте боје. Десети и једанаести жетон које је узео Пера су беле боје, а двадесет пети је црне боје. Које је боје двадесет шести жетон?

Решење. Разликоваћемо два типа позиција:

- (1) оба жетона на врховима стубова су исте боје;
- (2) жетони на врховима стубова су различите боје.

Приметимо да се та два типа позиције смењују после постављања сваког жетона. Како су десети и једанаести жетон бели, после постављања једанаестог жетона имамо позицију првог типа. Зато ћемо и после постављања двадесет петог жетона имати позицију првог типа, али су сада оба жетона на врху црне боје. Зато ће следећи, двадесет шести жетон, бити беле боје.

Задаци за самостални рад

1. Дат је низ бројева у коме је сваки члан, почев од другог, једнак производу два суседна члана. Производ првих 10 чланова једнак је 18, а производ првих 20 једнак је 12. Нађи производ првих 2014 чланова низа.
2. Докажи да последње цифре бројева n^n образују периодичан низ.
3. Нека је a_1 природан број који није дељив са 5 и нека је

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

низ у коме се сваки члан, почев од другог добија тако што се претходни члан сабере са његовом последњом цифром. Докажи да тај низ садржи бесконачно много степена двојке.

4. За дати природни број n формира се низ природних бројева

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

тако да је број n_1 једнак збиру кубова цифара броја n ; n_2 је збир кубова цифара броја n_1 , итд. Докажи да се, почевши од неког места, бројеви у том низу периодично понављају.

**Статијата е прв пат објавена во списанието Математички
лист на ДМ на Србија**