

GH–nejednakost

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. *Dana je GH nejednakost. Primjena GH nejednakosti ilustrirana je na nizu zanimljivih zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *GH-nejednakost*

GH–inequality

Abstract. *GH-inequality is given. Application of GH inequality is illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *GH-inequality*

Neka je $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dana n -toraka pozitivnih brojeva. Tada su harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina n -torke a definirane redom sa

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$K_n(a) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}.$$

Vrijedi

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a).$$

Pritom jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Nejednakosti $G_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq G_n(a)$, $K_n(a) \geq A_n(a)$, nazivamo redom geometrijsko–harmonijska, aritmetičko–harmonijska, aritmetičko–geometrijska, kraće, GH–nejednakost, AH–nejednakost, AG–nejednakost, KA–nejednakost.

Dokazat ćemo GH–nejednakost i primijeniti je na rješavanje nekoliko zadataka.

Dokaz GH–nejednakosti. Primijenimo AG–nejednakost (dokaz AG–nejednakosti se može vidjeti primjerice u [2]) na brojeve

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}.$$

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Imamo

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}},$$

odakle slijedi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Zadatak 1. Dokažite da za svaki prirodni broj $n > 1$ vrijedi nejednakost

$$1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \sqrt[n]{\frac{2n^n}{n+1}}.$$

Rješenje. Nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} < \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}}.$$

Prema GH-nejednakosti je

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} < \sqrt[n]{1 \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}},$$

a prema AG-nejednakosti je dalje

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}} < \sqrt[n]{\frac{1+2+\dots+n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{2}} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}}.$$

Zadatak 2. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$n^n \leq (n!)^2.$$

Rješenje. Za $n = 1$ i $n = 2$ vrijedi jednakost. Ako je $n \geq 3$, primijenimo GH-nejednakost na brojeve $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, (n-1)n$:

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}} &< \sqrt[n-1]{(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \dots \cdot ((n-1)n)}, \\ \frac{n-1}{(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})} &< \sqrt[n-1]{((n-1)!)^2 \cdot n}, \\ \frac{n-1}{1 - \frac{1}{n}} &< \sqrt[n-1]{((n-1)!)^2 \cdot n}, \\ \frac{n-1}{\frac{n-1}{n}} &< \sqrt[n-1]{((n-1)!)^2 \cdot n}, \\ n &< \sqrt[n-1]{((n-1)!)^2 \cdot n}. \end{aligned}$$

Potenciramo posljednju nejednakost sa $n - 1$ i dobivamo

$$n^{n-1} < ((n-1)!)^2 \cdot n.$$

Pomnožimo posljednju nejednakost sa n . Dobivamo

$$n^n < (n!)^2.$$

Zadatak 3. Neka je O oplošje kvadra, a V njegov obujam. Dokažite da vrijedi

$$O^3 \geq 216V^2.$$

Rješenje. Neka su a, b, c duljine bridova tog kvadra. Prema GH-nejednakosti je

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Dalje imamo, redom,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{abc} &\geq \frac{3abc}{bc + ac + ab}, \\ abc &\geq \frac{27a^3b^3c^3}{(ab + bc + ac)^3}, \\ 1 &\geq \frac{27a^2b^2c^2}{(ab + bc + ac)^3}, \\ (ab + bc + ac)^3 &\geq 27a^2b^2c^2, \\ (2(ab + bc + ac))^3 &\geq 216(abc)^2, \\ O^3 &\geq 216V^2. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako i samo ako je taj kvadar kocka.

Zadatak 4. Dokažite da za prirodne brojeve a_1, a_2, \dots, a_n vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}.$$

Rješenje. Broj a_1 uzmimo a_1 puta, broj a_2 uzmimo a_2 puta, ..., broj a_n uzmimo a_n puta. Prema GH-nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_1} \right) + \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)} \\ &\leq (a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}. \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{a_n}} &\leq (a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}, \\ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &\leq (a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}, \\ \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} &\leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Zadatak 5. Dokažite da za prirodne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{1}{3}(a+b+c).$$

Rješenje. Broj a uzmimo a puta, broj b uzmimo b puta, a broj c uzmimo c puta. Prema GH-nejednakosti imamo

$$\frac{a+b+c}{\left(\frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{c}\right)} \leq {}^{a+b+c}\sqrt{a^a b^b c^c}.$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c}} &\leq {}^{a+b+c}\sqrt{a^a b^b c^c}, \\ a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} &\geq \frac{1}{3}(a+b+c). \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Zadatak 6. Neka su a_1, a_2, \dots, a_n pozitivni brojevi čija je suma jednaka 1. Dokažite da tada vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

Rješenje. Nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} \geq n+1.$$

Dokažimo ovu nejednakost. Prema GH-nejednakosti je

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} &\geq \frac{n}{\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}} \\ &= \frac{n}{\frac{1}{\frac{a_1+1}{a_1}} + \frac{1}{\frac{a_2+1}{a_2}} + \dots + \frac{1}{\frac{a_n+1}{a_n}}} = \frac{n}{\frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{a_2+1} + \dots + \frac{a_n}{a_n+1}} \\ &= \frac{n}{\frac{a_1+1}{a_1+1} + \frac{a_2+1}{a_2+1} + \dots + \frac{a_n+1}{a_n+1} - \left(\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}\right)} \\ &= \frac{n}{n - \left(\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}}{n}}. \end{aligned}$$

Sada primijenimo AH-nejednakost na brojeve $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_n + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}} &\leq \frac{(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \dots + (a_n + 1)}{n} \\ &= \frac{n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n} = \frac{n + 1}{n}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\frac{\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}}{n} \geq \frac{n}{n+1}$$

i konačno

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_1}\right)\left(\frac{1}{1+a_2}\right)\dots\left(\frac{1}{1+a_n}\right)} &\geq \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}}{n}} \\ &\geq \frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n + 1. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Literatura

- [1] E. HÓDI, *Szélsőérték-feladatok elemi megoldása*, Typotex, Budapest, 1994.
- [2] B. PAVKOVIĆ, Ž. HANJŠ, B. DAKIĆ, P. MLADINIĆ, *Male teme iz matematike*, Element, Zagreb, 1994.
- [3] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996.
- [4] A. VARENCZA, T. ROZGONYI, *A tanárképző főiskolák Péter Rösza matematikai versenyei IV., 1986–2002*, Typotex Kiadó, Budapest, 2003.

