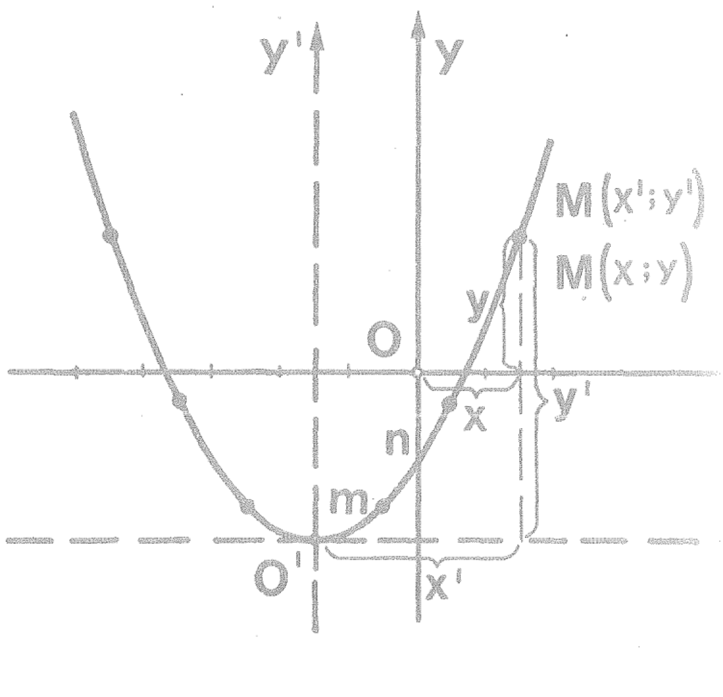
глигор тренчевски

АЛГЕБРА

ЗА II КЛАС НА СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

(по програма 5+3 часа)



ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

АЛГЕБРА

ЗА II КЛАС НА СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

(ПО ПРОГРАМА 5 + 3 ЧАСА)

III ИЗДАНИЕ

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО“
СКОПЈЕ, 1981

Рецензенти:

Академик д-р Благој Попов, професор на Природно-математичкиот факултет во Скопје.
Димитар Битраков, професор на Архитектонско-градежниот факултет во Скопје, и
Гргур Мароевиќ, професор во ЕМУЦ „Никола Тесла" во Скопје.

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 07-53/1 од 26. VI 1975 година се одобрува употребата на овој учебник

Глава I

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

§ 1. ПОИМ И ДЕФИНИЦИЈА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Со проширувањето на множеството $\mathbf{N}$ на природните броеви во множество $\mathbf{Z}$ на целите броеви, постигнато е равенката $x+a=b$ $(a, b \in \mathbf{N})$ да има секогаш решение во множеството $\mathbf{Z}$; со воведувањето на рационалните броеви, овозможено е равенката $ax=b$ $(a, b \in \mathbf{Z}$ и $a \neq 0)$ да има секогаш решение во множеството $\mathbf{Q}$; а со воведувањето, пак, на ирационалните броеви, постигнато е и равенката $x^n=a$ $(a \geqslant 0,\ n \in \mathbf{N})$ да има секогаш решение во множеството $\mathbf{R}$ на реалните броеви.

Меѓутоа, се уште постојат прости равенки кои немаат решение ни во множеството $\mathbf{R}$. На пример, таква е равенката $x^2+1=0$, која во множеството $\mathbf{R}$ нема решение, бидејќи $\sqrt{-1} \notin \mathbf{R}$.

Оттука произлегува потребата за натамошно проширување на поимот број, односно за проширување на множеството $\mathbf{R}$ на реалните броеви во некое ново поширoко множество броеви, во кое и равенките од видот $x^n=a$, за секои $a \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ секогаш ќе имаат решение.

Новото множество броеви треба:

а) — да ги содржи реалните броеви,

б) — во него да останат да важат основните закони на операциите собирање и множење на реалните броеви и

в) — да содржи барем еден број чиј квадрат е еднаков на -1.

Да го формираме (конструираме) тоа ново множество броеви.

Од геометриската интерпретација на реалните броеви знаеме дека на секоја точка од бројната оска и соодветствува еден и само еден реален број и обратно, на секој реален број му одговара една и само една точка од бројната оска.

Аналогно, може да се постави прашањето: дали е можно произволна точка од рамнината да се претстави со еден број. Познато е дека положбата на произволна точка M во рамнината еднозначно е определена со координатите на точката во однос на избраниот координатен систем.

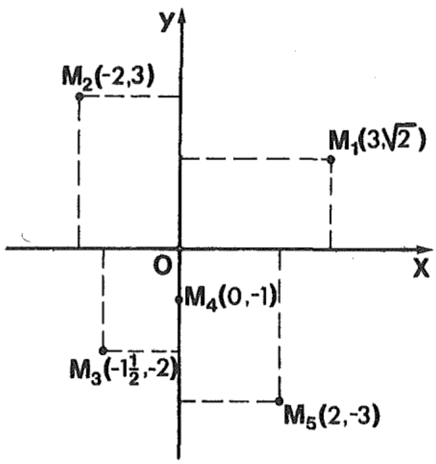
Можеме да усвоиме двојката реални броеви a и b — координати на точката M, да се разгледува како еден број. Тогаш, на секоја точка од рамнината ќе ѝ соодветствува по еден таков број. Новиот број (a, b) се карактеризира со два реални броја a и b земени во определен ред (прв, бројот a — апсциса на точката, и втор, бројот b — ордината на точката). Тој нов број обично го означуваме со една буква z и се вика *комплексен број* (комплексен значи: „составен"). Значи:

Дефиниција 1. *Комплексен број* z *се вика подредената двојка реални броеви* (a, b), т.е. $z=(a, b)$.

На пример:

$$z_1=(3, \sqrt{2}),\ z_2=(-2,\ 3),\ z_3=\left(-1\frac{1}{2},\ -2\right),\ z_4=(0, -1),\ z_5=(2, -3)$$

се комплексни броеви, кои геометриски се претставени на црт 1. соодветно со точките M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.



Црт. 1.

На секоја точка A од апсцисната оска ѝ одговара реален број a. На истата точка A, разгледувана како точка од координатната рамнина, ќе ѝ одговара комплексен број $z=(a, 0)$. Според тоа, реалните броеви се специјален случај од комплексните броеви $z=(a, b)$, кога е $b=0$. Тоа е во согласност со следнава:

Дефиниција 2. *Комплексниот број од видот* $(a, 0)$ *е еднаков на реалниот број* a, т.е.

$$(a, 0) \overset{Df}{=} a, \text{ каде што } a \in \mathbf{R}.$$

Сите комплексни броеви образуваат *множество на комплексни броеви*, кое ќе го означуваме со буквата $\mathbf{C}$. Според тоа:

$$\mathbf{C} \overset{Df}{=} \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R} \text{ и } b \in \mathbf{R}\}.$$

Дефиниција 3. *Кај комплексниот број* $z=(a, b)$, *бројот* a *се вика негов реален дел, а бројот* b *— имагинарен дел*, кое симболички го запишуваме вака: $R_e(z)=a$, $J_m(z)=b$.

Пример: $R_e(3, -4)=3$, $J_m(3, -4)=-4$,

$R_e(\sqrt{2}, 0)=\sqrt{2}$, $J_m(\sqrt{2}, 0)=0$, итн.

Според дефиницијата 2, комплексните броеви, чиј имагинарен дел е нула, се идентификуваат со реалните броеви, со што, всушност, се постигнува

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Дефиниција 4. *Комплексниот број* $z=(a, b)$, *ако е* $b \neq 0$ *се вика имагинарен (нереален) број, а ако е* $b \neq 0$ *и* $a=0$, *тогаш тој уште се вика и чисто имагинарен број.*

Пример: Комплексните броеви: $(-2{,}0)$, $(3{,}0)$, $(\sqrt{5}{,}0)$ се реални броеви, а $(2{,}1)$, $(-\sqrt{2}, -3)$, $(-1{,}2)$ се имагинарни броеви, а пак $(0, -\sqrt{5})$, $(0{,}4)$, $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ се чисто имагинарни.

Од вака утврдената дефиниција следува дека:

Множеството $\mathbb{C}$ на комплексните броеви е унија од множеството на сите реални броеви и множеството на сите имагинарни броеви, а множеството, пак, на чисто имагинарните броеви претставува некое подмножество од множеството на имагинарните броеви.

Според тоа, за бројот $z=(a, b)$ велиме дека е:

а) комплексен,	за секои $a, b \in \mathbf{R}$;
б) реален,	за секое $a \in \mathbf{R}$ и $b=0$;
в) имагинарен,	за секое $a \in \mathbf{R}$ и $b \neq 0$;
г) чисто имагинарен,	за $a=0$ и $b \neq 0$.

Усвоената дефиниција 1. за комплексен број не е потполна. За таа да биде потполна, треба уште да се утврдат и соодветни дефиниции за еднаквост на два комплексни броја и дефиниции за збир и производ на два комплексни броја.

Дефиниција 5. *Два комплексни броја* $z_1=(a_1, b_1)$ и $z_2=(a_2, b_2)$ *се еднакви, ако и само ако* $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$, т.е.

$$(a_1, b_1)=(a_2, b_2) \overset{Df}{\Leftrightarrow} (a_1=a_2 \text{ и } b_1=b_2).$$

Од горната дефиниција, очигледно е дека релацијата еднаквост во множеството на комплексните броеви ќе ги има својствата на:

1°. Рефлексивност: $z=z$ за секој комплексен број z.

2°. Симетричност: $z_1=z_2 \Rightarrow z_2=z_1$.

3°. Транзитивност: $(z_1=z_2 \text{ и } z_2=z_3) \Rightarrow z_1=z_3$.

Бидејќи за точките од рамнината не утврдуваме некое подредување, затоа и за комплексните броеви, односно за два нееднакви имагинарни броја не се утврдуваат поимите „поголем од“ и „помал од“.

Дефиниција 6. *Збир на комплексните броеви* (a_1, b_1) и (a_2, b_2) *се вика комплексниот број* $(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$, т.е.

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2) \overset{Df}{=} (a_1+a_2, b_1+b_2).$$

Дефиниција 7. *Производ на комплексните броеви* (a_1, b_1) и (a_2, b_2) *се вика комплексниот број* $(a_1 a_2-b_1 b_2,\ a_1 b_2+a_2 b_1)$, т.е.

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) \overset{Df}{=} (a_1 a_2-b_1 b_2,\ a_1 b_2+a_2 b_1).$$

Дефиниција 8. *Два комплексни броја, на кои реалните делови им се спротивни броеви, а исто и имагинарните делови им се спротивни броеви, се викаат спротивни комплексни броеви.*

Пример: Броевите $z_1=(3,5)$ и $z_2=(-3,-5)$ се спротивни комплексни броеви.

Дефиниција 9. *Чисто имагинарниот број* $(0,\ 1)$ *се вика имагинарна единица и симболички се означува со буквата* i, т.е.

$$i \overset{Df}{=} (0,\ 1).$$

Ќе докажеме дека важи следнава:

Теорема: *Квадратот на имагинарната единица е еднаков на* -1, т.е.

$$i^2 = -1.$$

Доказ: Врз основа на дефиницијата за производ на два комплексни броја, следува: $i^2 = i \cdot i = (0,\ 1) \cdot (0,\ 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1;\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,\ 0) = -1$ или

$$i^2 = -1.$$

Лесно уочуваме дека и $(-i)^2 = -1$.

Навистина: $(-i)^2 = i^2 = -1$ или $(-i)^2 = -1$.

Следствено: Во множеството $\mathbb{C}$ на комплексните броеви равенката $x^2 = -1$ има две решенија: $x_1 = i$; $x_2 = -i$, бидејќи $i^2 = -1$ или $-1 = -1$; а исто и $(-i)^2 = -1$ или $-1 = -1$.

Комплексните броеви, и ако на прв поглед се апстрактни, денес наоѓаат најшироко примена во хидротехниката, аеротехниката, електротехниката, атомската физика и во низа други природни науки.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Какво множество образуваат: а) унијата од множеството на сите имагинарни броеви и множеството на сите комплексни броеви; б) пресекот од множеството на сите реални броеви и множеството на сите имагинарни броеви; в) пресекот од множеството на сите реални броеви и множеството на сите комплексни броеви?

2. Кои од следниве искази се вистинити, а кои невистинити: а) секој имагинарен број е и комплексен број; б) (обратниот:) секој комплексен број е и имагинарен; в) секој имагинарен број е и чисто имагинарен; г) (обратниот:) секој чисто имагинарен број е и имагинарен број; д) секој комплексен број е или реален број или чисто имагинарен број?

3. Дали ги воведуваме поимите: „позитивен" и „негативен" имагинарен број?

4. Кој е потребен и доволен услов збирот на два комплексни броја $z = (a; b)$, $w = (c; d)$ да биде: а) реален број, б) чисто имагинарен број?

5. Кој е потребен и доволен услов производот на два комплексни броја да биде: а) реален број, б) чисто имагинарен број?

6. Да се одреди збирот на комплексните броеви:

а) $(3; -2)$ и $(1; 4)$; б) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ и $(1; -3)$; в) $(-1{,}5;\ 0{,}5)$ и $\left(\frac{1}{2}; -4\right)$!

7. Да се одреди производот на комплексните броеви:

а) $(1; 2)$ и $(-2; 1)$; б) $(3; -1)$ и $(0; 2)$; в) $(5; 0)$ и $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$!

§ 2. АЛГЕБАРСКА ФОРМА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Теорема: *Секој комплексен број може да се претстави и во следнава форма*:

$$z = a + b\,i, \tag{1}$$

која се вика алгебарска или стандардна форма на комплексниот број.

Доказ: Нека $z=(a;b)$ е кој да било комплексен број. Тогаш врз основа на дефинициите за збир и производ на два комплексни броја, имаме:

$z=(a;b)=(a;0)+(0;b)=(a;0)+(b;0)\cdot(0;1)$, бидејќи $(0;b)=(b;0)\cdot(0;1)$.

Ако се земе предвид дека: $(a;0)=a$; $(b;0)=b$ и $(0;1)=i$ тогаш добиваме:

$$z=(a;b)=(a;0)+(b;0)\cdot(0;1)=a+bi.$$

Според тоа:

$$z=(a;b)=a+bi.$$

Во алгебарската форма на комплексниот број $z=a+bi$, бројот a се вика *реален дел*, а бројот b — *имагинарен дел* на комплексниот број, т.е.

$$R_e(a+bi)=a;\ J_m(a+bi)=b.$$

Правилата за еднаквост, собирање и множење на два комплексни броја запишани во алгебарска форма, ќе гласат:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i \Leftrightarrow (a_1=a_2 \text{ и } b_1=b_2),$$

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,$$

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Аналогно за бројот $z=a+bi$, велиме дека е:

а) комплексен — за секои $a, b \in \mathbf{R}$;

б) реален — за $b=0$, т.е. $a+0i=a$;

в) имагинарен — за $b\neq 0$;

г) чисто имагинарен — за $a=0$ и $b\neq 0$ т.е. $0+bi=bi$.

Согласно дефиницијата 8, за секој комплексен број $a+bi$ негов спротивен комплексен број е бројот $-a-bi$.

Во натамошното разгледување на комплексните броеви претежно ќе ги запишуваме во нивната алгебарска форма, бидејќи таа има некои предности при изведувањето на операциите со нив.

ЗАДАЧИ

1. Претстави ги комплексните броеви во нивната алгебарска форма: $z_1=(-2;-3)$; $z_2=(0;-5)$; $z_3=(1;-1)$; $z_4=(-3;0)$; $z_5=(\sqrt{2};1)$!

2. За кои реални броеви x и y ќе важат равенствата:

а) $(x+1)i-2y=4-3i$; б) $x+(2-y)i+1=3-i$;

в) $x-yi+2=2xi+y-1$; г) $1+xi+(1-i)y=2+i$!

3. Изврши ги операциите со комплексните броеви:

а) $(3+4i)+(-2+i)$; б) $(2\sqrt{3}-i\sqrt{2})+(-\sqrt{3}+2i\sqrt{2})$;

в) $(1+3i)\cdot(0-2i)$; г) $\left(\frac{1}{2}+2i\right)\left(4-\frac{1}{4}i\right)$; д) $(1-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)$!

4. Одреди ги реалниот и имагинарниот дел на комплексните броеви:

а) $z=2-i$; б) $z=\frac{2+i}{3}$; в) $z=x-2yi+1$; г) $z=c-(a-b)i$!

5. Запиши ги комплексните броеви, што се спротивни на дадените:

а) $2+i$; б) $-1+3i$; в) $-3-4i$; г) $1-i$; д) $6i$;

ѓ) $p-ki$; е) $a-b+ci$; ж) $a-(a-b)i$!

6. При кои услови комплексниот број $z=a+bi$ е еднаков на нула, а при кои различен од нула?

§ 3. ОПЕРАЦИИ СО КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

3. 1. СОБИРАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Нека се дадени комплексните броеви $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Нивниот збир, согласно дефиницијата 6, ќе биде:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i. \tag{1}$$

Примери:

$$(3+2i)+(1-5i)=(3+1)+(2-5)\,i=4-3i;$$

$$(2-i)+(1+3i)=(2+1)+(-1+3)\,i=3+2i;$$

$$(3\sqrt{2}+5i)+(-2\sqrt{2}-4i)=(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})+(5-4)\,i=\sqrt{2}+i.$$

Лесно уочуваме дека за броевите од видот $a+0i$, кои ги идентификуваме со реалните броеви, воведената операција собирање не противречи на операцијата собирање само на реални броеви, т.е.

$$(a+0i)+(b+0i)=(a+b)+(0+0)\,i=(a+b)+0i.$$

Бидејќи комплексниот број $a+bi$ е потполно определен со својот реален и имагинарен дел a и b, односно со парот реални броеви $(a; b)$, тоа и збирот на два комплексни броја согласно равенството (1) секогаш постои и е еднозначно определен со единствениот пар реални броеви $(a_1+a_2;\ b_1+b_2)$ значи ќе важи следнава:

Теорема 1. *Множеството* $\mathbf{C}$ *на комплексните броеви е затворено по однос на операцијата собирање, т.е.*

$$(z_1 \in \mathbf{C} \text{ и } z_2 \in \mathbf{C}) \Rightarrow (z_1 + z_2) \in \mathbf{C}.$$

Ќе докажеме дека важи и:

Теорема 2. *За операцијата собирање на комплексни броеви важат комутативниот и асоцијативниот закон на собирањето.*

Доказ: Врз основа на равенството (1) и комутативниот закон на збирот на реални броеви, имаме:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\, i =$$
$$= (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) = z_2 + z_1, \text{ т.е.}$$

За секои $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, важи: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (што требаше да се докаже).

Аналогно се докажува дека важи и асоцијативниот закон на собирањето:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)] + (a_3 + b_3 i) =$$
$$= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i] + (a_3 + b_3 i) = [(a_1 + a_2) + a_3] + [(b_1 + b_2) + b_3]\, i =$$
$$= [a_1 + (a_2 + a_3)] + [b_1 + (b_2 + b_3)]\, i = (a_1 + b_1 i) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) i] =$$
$$= (a_1 + b_1 i) + [(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)] = z_1 + (z_2 + z_3), \text{ т.е.}$$

За секои z_1, z_2, $z_3 \in \mathbf{C}$ важи:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \text{ штд.}$$

Теорема 3. *Во множеството на комплексните броеви постои неутрален елемент во однос на собирањето. Тоа е* $0 + 0i$.

Навистина:

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi.$$

Теорема 4. *За секој комплексен број* $a + bi$, *постои нему инверзен елемент во однос на собирањето* $-a - bi$, *таков што*:

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i.$$

Значи, за даден комплексен број $z = a + bi$ негов инверзен елемент е спротивниот комплексен број $-z = -a - bi$.

3. 2. ОДЗЕМАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Операцијата одземање на комплексни броеви ја дефинираме како обратна операција на собирањето:

Дефиниција 1. *Разлика на два комплексни броја* $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ *се вика таков трет комплексен број* $x + yi$ *кој собран со намалителот ќе го даде намаленикот*, т.е.

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = x + yi \qquad (2)$$

ако е

$$(x + yi) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i) \qquad (3)$$

Теорема 5. *Разликата на два комплексни броја* $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$ *секогаш постои и е еднаква на комплексниот број* $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, т.е.

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \qquad (4)$$

Доказ: Бараната разлика $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$, ако постои согласно дефиницијата 1, нека е бројот $x + yi$ таков што да важи равенството (3).

Врз основа на дефиницијата за збир на два комплексни броја, равенството (3) го добива видот:

$$(x + a_2) + (y + b_2)i = a_1 + b_1 i, \qquad (3')$$

а врз основа на дефиницијата за еднаквост на два комплексни броја од равенството (3′), следува системот равенки:

$$\begin{cases} x + a_2 = a_1 \\ y + b_2 = b_1 \end{cases} \qquad (5)$$

Добиениот систем (5) секогаш има единствено решение

$$x = a_1 - a_2, \quad y = b_1 - b_2.$$

Според тоа, постои единствен пар реални броеви $(a_1 - a_2;\ b_1 - b_2)$ што го задоволува равенството (3). Со тоа теоремата е докажана.

Следствено на тоа ќе важи следнава:

Теорема 6. *Множеството* **C** *на комплексните броеви е затворено по однос на операцијата одземање*, т.е.

$$(z_1 \in \mathbf{C} \text{ и } z_2 \in \mathbf{C}) \Rightarrow (z_1 - z_2) \in \mathbf{C}.$$

Равенството (4) ни го дава следново:

Правило: *Разликата на два комплексни броја е комплексен број, чиј реален дел е еднаков на разликата од реалните делови, а имагинарниот дел е еднаков на разликата од имагинарните делови на дадените броеви.*

Примери:

$$(1+3i)-(4-2i)=(1-4)+(3+2)i=-3+5i;$$
$$(7-i)-(3+i)=(7-3)+(-1-1)i=4-2i;$$
$$(1-\sqrt{2}+3i)-(4-\sqrt{2}-5i)=(1-\sqrt{2}-4+\sqrt{2})+(3+5)i=-3+8i.$$

Забелешка: Ако комплексните броеви се запишани во алгебарска форма, тогаш од формална гледна точка на нив можеме да гледаме и како на полиноми (биноми) по однос на буквата i, па операциите собирање и одземање можат да се извршат и според правилата за собирање и одземање на полиноми. При тоа ќе се добијат исти резултати како и кога собирањето и одземањето го вршиме според равенствата (1) и (4). Во тоа е предноста на алгебарската форма на комплексните броеви над нивното запишување како пар реални броеви.

Примери:

а) $(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i;$

б) $(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=a-c+bi-di=(a-c)+(b-d)i;$

в) $(-2+3i)-(-5+i)=-2+3i+5-i=-2+5+3i-i=3+2i.$

3. 3. МНОЖЕЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Нека се дадени комплексните броеви $z_1=a_1+b_1 i$ и $z_2=a_2+b_2 i$. Нивниот производ, согласно дефиницијата 7, ќе биде:

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)=(a_1 a_2-b_1 b_2)+(a_1 b_2+a_2 b_1)i \qquad (6)$$

Но, до истиот резултат ќе дојдеме и ако комплексните броеви ги помножиме според правилото за множење на полиноми по однос на буквата i, само што i^2 треба да се замени со -1. На пример:

$$(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)=a_1 a_2+a_1 b_2 i+a_2 b_1 i+b_1 b_2 i^2=$$
$$=a_1 a_2-b_1 b_2+(a_1 b_2+a_2 b_1)i.$$

Примери: $(2+3i)\cdot(1-2i)=2-4i+3i-6i^2=(2+6)+(-4+3)i=8-i$

$$(3+4i)\cdot(2-i)=6-3i+8i-4i^2=(6+4)+(-3+8)i=10+5i.$$

Ќе покажеме дека горната дефиниција за производ на два комплексни броја не противречи на порано утврдената дефиниција за производ на два реални броја:

$$(a+0i)(c+0i)=ac+a\cdot 0i+0\cdot ci+0i^2=ac+0i.$$

Производот на комплексните броеви $(a_1+b_1 i)$ и $(a_2+b_2 i)$, согласно равенството (6), е определен со парот реални броеви $(a_1 a_2-b_1 b_2;\ a_1 b_2+a_2 b_1)$. Бидејќи тој пар реални броеви секогаш постои (Зошто?), тоа и производот на секои два комплексни броја секогаш ќе постои и ќе биде пак некој комплексен број. Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема 7. *Множеството* $\mathbb{C}$ *на комплексните броеви е затворено по однос на операцијата множење*, т.е.

$$(z_1 \in \mathbb{C} \text{ и } z_2 \in \mathbb{C}) \Rightarrow (z_1 \cdot z_2) \in \mathbb{C}.$$

Ќе покажеме дека е сочуван принципот на перманенција на основните закони на множењето.

Теорема 8. *За операцијата множење на комплексните броеви важат основните закони на множењето*:

1°. *Комутативен закон*: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

2°. *Асоцијативен закон*: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

3°. *Дистрибутивен закон* на множењето во однос на собирањето:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Доказ: За илустрација ќе го докажеме само комутативниот закон.
Врз основа на равенството (6) се добива:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i,$$

$$z_2 \cdot z_1 = (a_2 + b_2 i) \cdot (a_1 + b_1 i) = (a_2 a_1 - b_2 b_1) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i.$$

Но, $a_1 a_2 - b_1 b_2 = a_2 a_1 - b_2 b_1$ и $a_1 b_2 + a_2 b_1 = a_2 b_1 + a_1 b_2$, тоа следува дека:

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = (a_2 a_1 - b_2 b_1) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i$$

или

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_2 + b_2 i) \cdot (a_1 + b_1 i),$$

односно: За секои $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важи $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Аналогно на ова се докажуваат и асоцијативниот и дистрибутивниот закон.

Теорема 9. *Во множеството на комплексните броеви постои неутрален (единичен) елемент во однос на множењето. Тоа е бројот* $1 + 0i$.

Навистина: $(a + bi) \cdot (1 + 0i) = a + 0 \cdot ai + bi + 0 \cdot bi^2 = a + bi$.

Теорема 10. *Ако е* $(a + bi) \neq 0 + 0i$, *т.е. ако барем еден од броевите* a *и* b *е различен од нула, тогаш постои комплексен број* $(x + yi)$, *таков што да важи*:

$$(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i \tag{7}$$

Доказ: Врз основа на дефиницијата за производ на два комплексни броја, равенството (7) го добива видот:

$$(ax - by) + (ay + bx) i = 1 + 0i, \tag{7'}$$

а врз основа на дефиницијата за еднаквост на два комплексни броја од равенството (7'), следува системот равенки:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

При услов $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. $\Delta = a^2 + b^2 \neq 0$, горниот систем има единствено решение:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$

т.е. важи: $(a + bi)\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2} i\right) = 1 + 0i.$

Според тоа: *За секој комплексен број* $(a+bi)\neq 0+0i$ *постои единствен инверзен елемент во однос на множењето*

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\cdot i.$$

Бројот 0 во множеството $\mathbb{R}$ го има својството — за секој реален број a, да важи

$$a\cdot 0=0.$$

Не е тешко да се увериме дека бројот $0=0+0i$ и во множеството на комплексните броеви го задржува тоа својство, т.е.

За секој комплексен број $a+bi$ *важи*:

$$(a+bi)\cdot(0+0i)=0+0i.$$

3. 4. ДЕЛЕЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Операцијата делење на комплексни броеви ја дефинираме како обратна операција на множењето.

Дефиниција 2. *Да се подели комплексниот број* $z_1=a_1+b_1 i$ *со комплексниот број* $z_2=a_2+b_2 i\neq 0$, *значи да се одреди таков трет број* $x+yi$, *кој помножен со делителот, ќе го даде деленикот*, т.е.

$$\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}=x+yi, \text{ ако } (x+yi)\cdot(a_2+b_2 i)=a_1+b_1 i \tag{8}$$

Теорема 11. *Количникот на два комплексни броја* $\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}$, *при* a_2+ $+b_2 i\neq 0+0i$ *секогаш постои и е еднозначно определен со комплексниот број* $\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1 a_2-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}i$, т.е.

$$\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2 b_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}i \tag{9}$$

Доказ: Бараниот количник $\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}$, ако постои, согласно дефиниција 2, нека е бројот $x+yi$, таков што да важи равенството (8).

По извршување на множењето , равенството (8) го добива видот:

$$(a_2 x-b_2 y)+(a_2 y+b_2 x)i=a_1+b_1 i, \tag{8'}$$

а од него врз основа на дефиницијата за еднаквост на два комплексни броја, следува системот равенки:

$$\begin{cases} a_2 x-b_2 y=a_1 \\ b_2 x+a_2 y=b_1 \end{cases} \tag{10}$$

При услов $\triangle=\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}\neq 0$, т.е. ако е $a_2^2+b_2^2\neq 0$, тогаш системот (10) има единствено решение:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}; \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Според тоа, постои единствен пар реални броеви $\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2};\ \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$ што го задоволува равенството (8). Со тоа теоремата е докажана.

Од теорема 11. непосредно следува и следнава:

Теорема 12. *Множеството* $\mathbf{C}$ *на комплексните броеви е затворено по однос на операцијата делење (со исклучок на делењето со* $0+0i$), т.е.

$$(z_1\in\mathbf{C},\ z_2\in\mathbf{C}\ \text{ и }\ z_2\neq 0+0i)\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}\in\mathbf{C}.$$

Формулата (9) не е потребно да се помни, доволно е да се знае како таа се добива.

Пример: Да се одреди количникот $\frac{5-3i}{1+2i}$!

Решение: Нека $\frac{5-3i}{1+2i}=x+yi$. Тогаш $(1+2i)(x+yi)=5-3i$,

$$x+yi+2xi+2yi^2=5-3i; \quad (x-2y)+(2x+y)i=5-3i.$$

Оттука: $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{5-6}{1+4}=-\frac{1}{5}; \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{5}=\frac{-3-10}{5}=-\frac{13}{5}.$$

Бараниот количник е $-\frac{1}{5}-\frac{13}{5}i$.

3. 5. СТЕПЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Степенувањето на комплексни броеви, запишани во алгебарска форма, со показател природен број, го вршиме по правилото за степенување на бином, кога при тоа се земат предвид степените на имагинарната единица $i^2=-1$ и др.

Пример: $(a+bi)^2=a^2+b^2i^2+2abi=a^2-b^2+2abi.$

При степенувањето на комплексни броеви, како што се гледа, потребно е да се знаат и степените на имагинарната единица. Тие се:

$$i^1=i;\quad i^2=-1; \qquad i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i;$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1; \qquad i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i;$$
$$i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1; \qquad i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i;$$
$$i^8=(i^4)^2=1^2=1; \qquad i^9=i^{2\cdot 4+1}=i^{2\cdot 4}\cdot i=i.$$

Забележуваме дека постои периодичност кај вредностите на степените на бројот i, поточно, секој степен i^n $(n \in \mathbf{N})$ може да се сведе на една од следниве вредности: -1; 1; i; $-i$.

Тоа го постигнуваме со помош на формулите:

$$i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1;$$
$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Примери: $i^{127} = i^{4\cdot 31+3} = i^3 = -i$; $i^{52} = i^{4\cdot 13} = 1$; $i^{73} = i^{4\cdot 18+1} = i^1 = i$.

$$(2+5i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 5i + 3\cdot 2\cdot (5i)^2 + (5i)^3 = 8 + 60i + 150i^2 + 125i^3 =$$
$$= 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i.$$

ЗАДАЧИ

1. Одреди го збирот на броевите:

а) $2+4i$ и $1-i$; б) $1-2i$ и $3i$; в) 0 и $\sqrt{3}-i\sqrt{2}$;
г) $a-b+ci$ и $a+b+2ci$; д) $m-ni$ и $n+(m-n)i$!

2. Пресметај ги разликите:

а) $(-2+3i)-(1-5i)$; б) $(a-c+bi)-(a+c-2bi)$;
в) $(3\sqrt{2}-2i\sqrt{3})-(\sqrt{8}-i\sqrt{27})$; г) $(1+i)a-(1-i)\,в$!

3. Одреди го производот на броевите:

а) $-1+i$ и $2-i$; б) $m-i$ и $1+mi$; в) $1+i$ и $3-2i$;
г) 0 и $c-i$; д) $\sqrt{3}$ и $2-i\sqrt{3}$; ѓ) $m-n+mi$ и $m+n-ni$!

4. Пресметај ги количниците на броевите:

а) $\dfrac{1-2i}{1+2i}$; б) $\dfrac{3}{1+i}$; в) $\dfrac{2i}{1-i}$; г) $\dfrac{m^2-n^2+2mni}{m-n}$!

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $z^2-4i\cdot(z+1)-7$, ако е $z=2+3i$; б) $z(z-1)+2z$, ако е $z=1+i$!

6. Упрости ги изразите:

а) $\dfrac{x\sqrt{y}+yi\sqrt{x}}{y\sqrt{x}-xi\sqrt{y}}+(x+y+xyi)$; б) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1-i}{1+i}-\dfrac{1+i}{1-i}\right)$;

в) $\dfrac{(1-i)^2(1+i)}{(1+2i)^3}$; г) $\dfrac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(\sqrt{3}-i)^2}$!

7. Одреди ги реалните броеви x и y од равенствата:

а) $(3-2i)x+(1-i)y=2-5i$; б) $(x+y)(1+i)-(2-i)y=5-4i$!

8. Дадени се броевите: $z_1=3-2i$ и $z_2=1+3i$. Одреди ги изразите: а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) $z_1\cdot z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$; д) $z_1-z_2+z_1\cdot z_2$; ѓ) $(z_1+z_2)^2$!

9. Пресметај: а) $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7$; б) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5\cdot\ldots\cdot i^{50}$;

в) $i+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}$; г) $\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^6}+\dfrac{1}{i^{15}}-\dfrac{1}{i^{30}}$!

10. Пресметај: $(-i)^{4n+1}$; $i^{-(4n+2)}$; $(-i)^{-(4n+3)}$; $(1-i)^3$; $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$!

11. Што можеш да заклучиш за бројот n од релацијата: а) $i^n=1$; б) $i^n=-1$; в) $i^n=i$; г) $i^n=-i$?

12. Провери ги идентитетите: $(1+i)^2+(1-i)^2=0$; $(1+i)^3+(1-i)^3=4i$!

§ 4. КОНЈУГИРАНО КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Дефиниција: *Два комплексни броја, кои имаат еднакви реални делови, а имагинарните делови им се спротивни броеви, се викаат конјугирано комплексни броеви.*

Конјугирано комплексниот број за бројот $z=a+bi$ го означуваме со $\bar{z}$, т.е.

$$\bar{z}=a-bi.$$

Пример: $3-5i$ и $3+5i$ се конјугирано комплексни броеви.

Од самата дефиниција следува дека:

За секој комплексен број z постои еден и само еден нему конјугиран комплексен број $\bar{z}$, т.е.

$$z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi.$$

Лесно може да се уочи дека: *Секој реален број е еднаков на својот конјугиран број*, т.е.

$$a=a+0i=a-0i.$$

Но точно е и обратното тврдење:

Ако комплексниот број $z=a+bi$ е еднаков на својот конјугиран број $\bar{z}=a-bi$, тогаш тој е реален број.

Навистина, од $a+bi=a-bi$ следува дека $b=-b$ или $b=0$. Значи:

$$a+0i=a-0i=a.$$

Следствено, релацијата $z=\bar{z}$ е точна (вистинита) тогаш и само тогаш, ако z е реален број.

Конјугирано комплексните броеви ги имаат следниве својства:

Теорема 1. *Збирот и производот на два конјугирано комплексни броја се реални броеви.*

Доказ: Нека е $z=a+bi$, тогаш имаме:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a+0i=2a,$$
$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

Ова својство на производот на два конјугирано комплексни броја наоѓа практична примена при делењето на комплексните броеви.

Практично (по едноставно) количникот на два комплексни броја $\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$ $(a_2+b_2i\neq$ $\neq 0)$ го одредуваме кога деленикот и делителот ги помножиме со конјугираниот број на делителот (т.е. со a_2-b_2i), па добиваме:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Забележуваме: го добиваме истиот резултат како и кога делењето го извршуваме според формулата (9).

Примери:

а) $\frac{2+i}{3-5i}=\frac{(2+i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}=\frac{6+10i+3i+5i^2}{9-(5i)^2}=\frac{1+13i}{14}=\frac{1}{14}+\frac{13}{14}i;$

б) $\frac{1}{i}=\frac{1}{0+i}=\frac{1\cdot(0-i)}{(0+i)(0-i)}=\frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1}=-i.$

За бројот $i=0+i$, конјугиран му е бројот $-i=0-i$.

Теорема 2. *За кои да било комплексни броеви z_1 и z_2 важат равенствата*:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2 \tag{1}$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \tag{2}$$

$$\overline{(\bar{z}_1)}=z_1 \tag{3}$$

Доказ: Нека е $z_1=a+bi$; $z_2=c+di$. Тогаш:

а) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=$

$=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\bar{z}_1+\bar{z}_2;$

б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a+bi)\cdot(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i=(a-bi)(c-di)=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2;$

в) $\overline{(\bar{z}_1)}=\overline{\overline{(a+bi)}}=\overline{(a-bi)}=a+bi=z_1.$

Покажете дека од равенството (2) следува и:

$$\overline{z^n}=(\bar{z})^n \tag{4}$$

ЗАДАЧИ

1. За кои вредности на реалните броеви x и y комплексните броеви $x+y+5i$ и $7-(2x-y)i$ ќе бидат конјугирано комплексни?

2. Да се разложат на множители изразите:

а) a^2+1; б) x^2+y^2; в) $16c^2+9$!

3. Докажи дека: ако збирот и производот на два комплексни броја се реални броеви, тогаш тие се конјугирано комплексни!

4. Бројот 5 претстави го како производ на два конјугирано комплексни броја!

5. Одреди го имагинарниот дел на бројот z, ако е $z=\bar{z}$.

6. Каква зависност постои меѓу a, b, c, d, ако е $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a-bi}{c-di}$?

7. Упрости го изразот: а) $\dfrac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\dfrac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$;

б) $\dfrac{m+ni}{m-ni}+\dfrac{m-ni}{m+ni}$!

8. За кои вредности на реалните броеви x и y важи равенството:

$$\frac{x-3+(y-5)i}{1+i}=2-7i?$$

9. Провери ги идентитетите:

а) $x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$; б) $\dfrac{1}{1+i}-\dfrac{1}{1-i}=-i$!

Глава II

КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

§ 5. ДЕФИНИЦИЈА И ВИДОВИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Дефиниција 1. *Равенката од видот*

$$Ax^2+Bx+C=0, \tag{1}$$

каде што x е непознатата, а $A \neq 0$, B и C се дадени реални броеви или изрази кои не зависат од непознатата, се вика квадратна равенка со една непозната.

Овој вид на равенката (1) се вика *општ вид* на квадратната равенка со една непозната. Броевите, односно изразите A, B и C, се викаат коефициенти на квадратната равенка и тоа A е коефициент на квадратниот член (Ax^2), B — коефициент на линеарниот член (Bx), а C — слободен член. Условот $A \neq 0$ има суштинска природа, бидејќи во спротивен случај равенката (1) нема да биде квадратна, туку линеарна.

Квадратната равенка (1) според горната дефиниција ќе ја разгледуваме само за реални вредности на коефициентите A, B и C, па затоа ја викаме уште и *квадратна равенка со реални коефициенти.*

По однос на коефициентите B и C, дефиницијата 1. не прави никакви ограничувања, според тоа тие можат да бидат и еднакви на нула.

Дефиниција 2. *Квадратна равенка на која сите коефициенти се различни од нула, се вика полна квадратна равенка.*

Пример: $3x^2-5x+2=0$; $x^2+4x-3=0$ се полни квадратни равенки.

Дефиниција 3. *Квадратна равенка, кај која барем еден од коефициентите B, C се еднакви на нула, се вика неполна квадратна равенка.*

Во зависност од тоа, кој од коефициентите, B или C, е еднаков на нула, или и двата се еднакви на нула, се разликуваат три вида неполни квадратни равенки:

1°. Ако $C=0$, равенката (1) го добива видот

$$Ax^2+Bx=0, \ (A \neq 0; \ B \neq 0) \tag{2}$$

2°. Ако $B=0$, равенката (1) го добива видот

$$Ax^2+C=0,\ (A\neq 0;\ C\neq 0) \tag{3}$$

3°. Ако, пак, $B=C=0$, тогаш равенката (1) го добива видот

$$Ax^2=0,\ (A\neq 0) \tag{4}$$

Пример: $2x^2-5x=0$; $3x^2-4=0$; $7x^2=0$ се неполни квадратни равенки.

Ако коефициентот A на квадратниот член на равенката (1) е еднаков на 1, тогаш велиме дека квадратната равенка има *сведен вид* и, обично, ја запишуваме вака:

$$x^2+px+q=0 \tag{5}$$

каде што p и q се кои да било реални броеви.

И секоја квадратна равенка од општ вид може да се доведе во сведен вид, кога двете нејзини страни ќе се поделат со коефициентот $A\,(A\neq 0)$:

$$x^2+\frac{B}{A}\cdot x+\frac{C}{A}=0,$$

а коефициентите $\frac{B}{A}$ и $\frac{C}{A}$ соодветно ќе се означат со p и q.

Коефициентите A, B и C на равенката (1) можат да бидат и функции (изрази) од некои параметри. Во тој случај велиме дека квадратната равенка (1) е *со параметри* или *со општи коефициенти*.

Пример: Во равенката $(k-5)x^2-(2k-1)x+3-k=0$ $(k\neq 5)$, коефициентите $A=k-5\neq 0$, $B=-(2k-1)$, $C=3-k$ се функции од параметарот k.

Ако за бројот $x=x_0$, равенката (1) премине во вистинито бројно равенство:

$$Ax_0^2+Bx_0+C=0,\ \text{т.е.}\ \ 0=0.$$

велиме дека бројот x_0 е *корен* (*решение*) на квадратната равенка (1).

Коренот x_0 на равенката (1) може да биде и комплексен број што не е реален.

Да се реши дадена квадратна равенка со една непозната во множеството $\mathbf{R}$ на реалните броеви, значи да се одреди множеството на сите нејзини корени во множеството $\mathbf{R}$.

ЗАДАЧИ

1. За кои вредности на k равенката $(k-1)x^2+(k+2)x+k-3=0$ е а) квадратна; б) линеарна; в) од видот: $Ax^2+Bx=0$; г) од видот $Ax^2+C=0$?

2. Доведи ги равенките во општ вид: а) $(2x-3)^2-(x-1)^2=(x+3)^2$;

б) $(x-2)(x+5)+(x-1)(x+2)+12=0$; в) $\frac{x^2-4}{8}-\frac{2x+3}{5}=1$!

3. Дадена е равенката $3x^2-2x-1=0$. Испитај кои од броевите: -2; -1; $-\frac{1}{3}$; 0; $\frac{1}{3}$; 1; 3; 4 се корени на дадената равенка!

4. Да се одреди вредноста на параметарот k во равенката $(2k-1)x^2+kx-2=0$, ако се знае дека таа има еден корен $x=-2$!

5. За која вредност на параметарот p, квадратната равенка $(p-2)x^2-(p-1)x+$ $+5=0$ ќе има корен $x=1$?

6. Дадена е равенката $ax^2-bx+a+3=0$. Да се одредат вредностите на параметрите a и b, ако се знае дека таа има корени $x_1=1$ и $x_2=-2$!

§ 6. РЕШАВАЊЕ НА НЕПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

6. 1. РАВЕНКИ ОД ВИДОТ $Ax^2+Bx=0$ и $Ax^2=0$

Дадена е равенката

$$Ax^2+Bx=0 \quad (A\neq 0,\ B\neq 0) \tag{1}$$

Левата страна на равенката (1) ја разложуваме на множители:

$$x(Ax+B)=0 \tag{2}$$

Ако бројот $x=x_0$ е корен (решение) на равенката (2), тогаш ќе важи бројното равенство:

$$x_0(Ax_0+B)=0 \tag{2'}$$

Бидејќи производот на два реални броја е еднаков на нула, ако и само ако барем еден од множителите е еднаков на нула, тогаш од равенството (2')следува дека: или $x_0=0$, или $Ax_0+B=0$.

Ако е $x_0=0$, тогаш бројот 0 е корен на равенката (2). Ако е, пак, $Ax_0+B=0$, тогаш x_0 е решение на линеарната равенка $Ax+B=0$, односно $x_0=-\frac{B}{A}$ е корен и на равенката (2).

Од ова се гледа дека ако $B\neq 0$, тогаш равенката (2) има два корена: $x_1=0$ и $x_2=-\frac{B}{A}$. Други корени таа не може да има. (Зошто?).

Бидејќи равенката (2) е еквивалентна на равенката (1), тоа $x_1=0$ и $x_2=-\frac{B}{A}$ се корени и на дадената равенка (1).

Ако, пак, $B=0$, тогаш равенката (1) го добива видот

$$Ax^2=0 \quad (A\neq 0) \tag{3}$$

Очигледно е дека во тој случај и другиот корен $x_2=-\frac{B}{A}$ на равенката (1) е еднаков на нула.

Според тоа, квадратната равенка (3) има два корени еднакви на нула: $x_1=0$ и $x_2=0$. Велиме дека квадратната равенка (3) има еден *двоен* (*двократен*) *корен* $x_{1,2}=0$.

Пример: Да се реши равенката $2x^2 + 5x = 0$!

Левата страна на равенката ја разложуваме на множители со извлекување на заедничкиот множител x пред заграда: $x(2x+5) = 0$. Потоа, ги приравнуваме двата множитела на нула и ги добиваме равенките: $x = 0$ и $2x + 5 = 0$.

Од првата равенка добиваме $x_1 = 0$, а од втората, $x_2 = -\frac{5}{2}$.

Значи, дадената равенка има корени $x_1 = 0$ и $x_2 = -2{,}5$.

6. 2. РАВЕНКИ ОД ВИДОТ $Ax^2 + C = 0$

Да ја разгледаме равенката

$$Ax^2 + C = 0 \quad (A \neq 0,\ C \neq 0) \tag{4}$$

При претпоставка дека $A > 0$, можни се два случаја: или $C > 0$, или $C < 0$.

1°. Ако е $C > 0$, тогаш за кои да било реални вредности на x, ќе биде:

$$Ax^2 + C > 0.$$

Според тоа ни за една реална вредност на x не може да биде $Ax^2 + C = 0$. Следствено на тоа, ако се интересираме само за реалните корени на равенката (4), тогаш, врз основа на горното, заклучуваме дека:

При $C > 0$ равенкаша (4) нема корени во множесшвошо на реалнише броеви. Меѓутоа, во множеството на комплексните броеви равенката (4) има два корена, кои ги одредуваме на следниов начин:

Левата страна на равенката (4) ја разложуваме на множители:

$$(\sqrt{A}\,x - i\sqrt{C}) \cdot (\sqrt{A}\,x + i\sqrt{C}) = 0, \tag{4'}$$

а оттука, приравнувајќи ги двата множитела на нула, ги добиваме равенките:

$$\sqrt{A}\,x - i\sqrt{C} = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{A}\,x + i\sqrt{C} = 0$$

Од првата равенка имаме:

$$x_1 = i\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \quad \text{или} \quad x_1 = i\sqrt{\frac{C}{A}},$$

а од втората:

$$x_2 = -i\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \quad \text{или} \quad x_2 = -i\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Според тоа *џри $C > 0$ равенкаша (4) во множесшвошо на комџлекснише броеви има два корена*:

$$x_1 = i\sqrt{\frac{C}{A}} \quad \text{и} \quad x_2 = -i\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

2°. Ако $C < 0$, тогаш $-C > 0$, па равенката (4) може да се запише вака:

$$Ax^2 - (-C) = 0 \tag{4}$$

или $$(\sqrt{A}x-\sqrt{-C})\cdot(\sqrt{A}x+\sqrt{-C}=0 \tag{4'}$$

Приравнувајќи ги двата множитела на нула, ги добиваме равенките:

$$\sqrt{A}x-\sqrt{-C}=0 \text{ и } \sqrt{A}x+\sqrt{-C}=0,$$

кои имаат по еден единствен корен:

$$x_1=\sqrt{-\frac{C}{A}} \text{ и } x_2=-\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Тоа се корени и на равенката (4).

Според тоа, *при* $C<0$ *равенката* (4) *има два различни реални корени*:

$$x_1=\sqrt{-\frac{C}{A}} \text{ и } x_2=-\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Пример 1. Да се реши равенката $4x^2+1=0$.

Левата страна на равенката ја разложуваме на множители, па добиваме:

$$(2x-i)(2x+i)=0,$$

а од тука следуваат равенките: $2x-i=0$ и $2x+i=0$.

Тие имаат корени: $x_1=\frac{i}{2}$ и $x_2=-\frac{i}{2}$.

Значи, дадената равенка нема реални корени, но во множеството на комплексните броеви има два корена: $x_1=\frac{i}{2}$ и $x_2=-\frac{i}{2}$.

Пример 2. Да се реши равенката $3x^2-4=0$.

Дадената равенка е еквивалентна на: $(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)=0$, а таа на вкупноста од равенките: $\sqrt{3}x-2=0$ и $\sqrt{3}x+2=0$ или на $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Значи, равенката има два реални корени:

$$x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ и } x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 3. За кои вредности на параметарот k равенката

$$(k-4)x^2+k+1=0$$

ќе има реални корени?

Од предходната дискусија видовме дека равенката $Ax^2+C=0$ ќе има реални корени само ако $A>0$, $C<0$, или ако $A<0$, $C>0$; т.е. ако коефициентите A и C имаат различни знаци.

Во нашиот пример е $A=k-4$, $C=k+1$.

Според тоа, параметарот k треба да ги исполнува условите:

$$\text{или } \begin{cases} k-4>0 \\ k+1<0 \end{cases} \qquad \text{или } \begin{cases} k-4<0 \\ k+1>0 \end{cases}$$

Првиот систем неравенки $\begin{cases} k>4 \\ k<-1 \end{cases}$ нема решение, бидејќи нема такви броеви кои истовремено се поголеми од 4 и помали од -1.

Решенија на вториот систем $\begin{cases} k < 4 \\ k > -1 \end{cases}$ се сите реални броеви од интервалот $(-1; 4)$, т.е. $-1 < k < 4$.

Според тоа, дадената равенка ќе има реални корени за секоја вредност на параметарот k од интервалот $(-1; 4)$, т.е. ако $k \in (-1; 4)$.

ЗАДАЧИ

Реши ги следниве неполни квадратни равенки:

1. а) $x^2 - 4x = 0$; б) $3x^2 + 2x = 0$; в) $2x^2 - 7x = 0$!

2. а) $x(2x - 1) = 2x$; б) $4x^2 - x\sqrt{2} = 0$; в) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 5$!

3. а) $5x^2 + 3x = -2x$; б) $8x - 3x^2 = 2x - 3x^2$; в) $(x - 3)^2 = 2x^2 + 9$!

4. а) $nx^2 - n^2x = 0$; б) $x^2 + nx = 0$; в) $(x + a)^2 + (x + b)^2 = a^2 + b^2$!

5. а) $x(x + a) - a(x + 1) = a(a - 1)$; б) $a^2x^2 - b^2 = 0$; в) $k^2x^2 - k^2 + 2k - 1 = 0$!

6. а) $x^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$; б) $x^2 + a^2 = 0$; в) $(1 - x)(2 - x) + (1 + x)(2 + x) = 5$!

7. а) $x^2 - 4kx = 4k(k - x)$; б) $(x + a)^2 + (x - a)^2 = 4a^2$; в) $a^2x^2 + 1 = 0$!

8. Реши ги следниве равенки не доведувајќи ги претходно во општ вид:
а) $(x - 2)^2 - 9 = 0$; б) $3(x - 2)^2 = 12$; в) $(3x - 2)^2 = 25$!

9. Да се одреди вредноста на параметарот λ во равенката $(\lambda^2 - 1)x^2 + \lambda x + 4 = 0$, ако таа има еден корен $x = 2$!

10. Одреди го параметарот k во равенката $(k + 1)x^2 + (k + 3)(k - 3) = 0$, ако се знае дека таа има еден корен $x = 3$!

11. За кои вредности на параметарот k равенката $x^2 + (k^2 - 1)x - k^2 = 0$ има корени, што се еднакви по апсолутната вредност, а спротивни по знакот?

12. За кои вредности на параметарот m квадратната равенка: а) $(m - 2)x^2 + 3 = 0$; б) $2x^2 + m + 1 = 0$; в) $(m - 1)x^2 - (m + 3) = 0$, ќе има реални корени?

§ 7. РЕШАВАЊЕ НА ПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Видовме дека неполните квадратни равенки ги решаваме по пат на разложување на нивната лева страна на два множитела, т.е. нивното решавање го сведуваме на решавање на две линеарни равенки со една непозната.

На тој начин можат да се решаваат и полните квадратни равенки:

Пример: Да се реши равенката $x^2 - 6x + 5 = 0$!

Ако слободниот член 5 го замениме со разликата $5 = 9 - 4$, дадената равенка ќе го добие видот: $x^2 - 6x + 9 - 4 = 0$.

Бидејќи е $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, таа е еквивалентна на равенката: $(x - 3)^2 - 2^2 = 0$, односно на $(x - 3 - 2)\cdot(x - 3 + 2) = 0$, или на

$$(x - 5)\cdot(x - 1) = 0.$$

Очигледно е дека последната равенка има два реални корени: $x_1 = 5$ и $x_2 = 1$. Тоа се корени и на дадената равенка. (Зошто?).

Може да се покаже дека секоја квадратна равенка може да се реши на горниов начин, кој бара извршување на одредени трансформации, што се различни за секоја квадратна равенка.

Меѓутоа, корените на полната квадратна равенка многу полесно ги одредуваме кога истите ги изразиме како функција од коефициентите на крадратната равенка.

Лесно уочуваме дека изразот x^2+2kx, со додавање кон него квадратот на половината од коефициентот пред непознатата x, може да се претстави како точен квадрат на биномот $x+k$, т.е. дека е

$$x^2+2kx+k^2=(x+k)^2.$$

Со примена на кажаното, полната квадратна равенка

$$Ax^2+Bx+C=0, \ (A\neq 0) \tag{1}$$

ја решаваме на следниов начин:

Ако ја поделиме левата и десната страна на равенката (1) со коефициентот $A\neq 0$, добиваме:

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0.$$

Потоа кон изразот на левата страна го додаваме и го одземаме од него бројот $\frac{B^2}{4A^2}$, којшто претставува квадрат на половината од коефициентот $\left(\frac{B}{A}\right)$ пред непознатата x, па добиваме:

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}=0$$

Така ја добиваме равенката:

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2-4AC}{4A^2}=0 \tag{2}$$

којашто е еквивалентна на полната квадратна равенка (1).

Дали равенката (2) ќе има реални корени или нема да има такви, при претпоставка дека е $A>0$, ќе зависи од знакот на изразот B^2-4AC. Поради таквата негова важна улога, тој израз добил посебно име — *дискриминанта на квадратната равенка* (1) и се означува со буквата D, т.е.

$$D=B^2-4AC.$$

Значи, равенката (2) може да се запише и вака:

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{D}{4A^2}=0 \tag{2'}$$

Во зависност од знакот на дискриминантата, ќе ги разликуваме следниве случаи:

1°. Ако $D > 0$, тогаш равенката (2′) е еквивалентна на равенката:

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2A}\right)^2=0,$$

односно на

$$\left(x+\frac{B}{2A}-\frac{\sqrt{D}}{2A}\right)\cdot\left(x+\frac{B}{2A}+\frac{\sqrt{D}}{2A}\right)=0 \tag{3}$$

Последнава равенка е еквивалентна, пак, на вкупноста од две линеарни равенки:

$$x+\frac{B}{2A}-\frac{\sqrt{D}}{2A}=0 \quad \text{и} \quad x+\frac{B}{2A}+\frac{\sqrt{D}}{2A}=0,$$

чии корени

$$x_1=\frac{-B+\sqrt{D}}{2A} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-B-\sqrt{D}}{2A} \tag{3′}$$

се корени и на равенката (1) при услов $D > 0$.

Според тоа, *ако* $D > 0$, *квадратната равенка* (1) *има два различни реални корени, кои се одредени со формулата*:

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{D}}{2A}, \tag{4}$$

или

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

2°. Ако $D=0$, тогаш равенката (2′) го добива видот

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=0$$

и има еден двоен корен

$$x_{1,2}=-\frac{B}{2A}.$$

Значи, *ако* $D=0$, *квадратната равенка* (1) *има еден двоен реален корен*

$$x_{1,2}=-\frac{B}{2A}.$$

Забележуваме дека формулата (4) можеме да ја користиме и кога $D=0$. Навистина, при $D=0$, од формулата (4) добиваме:

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{0}}{2A}=-\frac{B}{2A}; \quad \text{т.е.} \quad x_{1,2}=-\frac{B}{2A}.$$

3°. Ако $D < 0$, тогаш $-D > 0$, па левата страна на равенката (2′) може да се запише и како збир на два квадрата:

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{2A}\right)^2 = 0 \tag{5}$$

Тој збир на квадрати за кои да било реални вредности на x секогаш е позитивен број, па, според тоа, равенката (5), односно равенката (1), нема реални корени.

Меѓутоа во множеството на комплексните броеви, левата страна на равенката (5) може да се разложи на множители и равенката (3) е еквивалентна на

$$\left(x + \frac{B}{2A} - i\frac{\sqrt{-D}}{2A}\right)\left(x + \frac{B}{2A} + i\frac{\sqrt{-D}}{2A}\right) = 0, \tag{5′}$$

од која се добива:

$$x_1 = -\frac{B}{2A} + i \cdot \frac{\sqrt{-D}}{2A} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{B}{2A} - i \cdot \frac{\sqrt{-D}}{2A} \tag{5″}$$

Тоа се решенија и на равенката (1), при услов $D < 0$.

Според тоа, *ако* $D < 0$, *тогаш квадратната равенка* (1) *има два конјугирано комплексни корена, кои се определуваат според формулата*:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm i\sqrt{-D}}{2A} \tag{6}$$

Пример 1. Да се реши равенката $3x^2 - 5x - 2 = 0$!

Дискриминантата на дадената равенка е

$$D = B^2 - 4AC = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49, \text{ т.е. } D > 0.$$

Равенката има два различни реални корена, кои ги одредуваме според формулата (4):

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}, \quad \text{т.е.} \quad x_1 = \frac{5+7}{6} = 2 \text{ и } x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Да се реши равенката $4x^2 - 12x + 9 = 0$!

Дискриминантата на равенката е $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$.

Дадената равенка има еден двоен реален корен еднаков на:

$$x_{1,2} = -\frac{B}{2A} = -\frac{-12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Да се реши равенката $-x^2 + 2x - 6 = 0$!

Двете страни на равенката ги множиме со (-1), па добиваме еквивалентна на неа равенка:

$$x^2 - 2x + 6 = 0$$

Дискриминантата е еднаква на $D = (-2)^2 - 4 \cdot 6 = 4 - 24 = -20$, т.е. $D < 0$.

Значи, дадената равенка нема реални корени, односно нејзините корени се конјугирано комплексни броеви, кои ги одредуваме според формулата (6):

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{5}}{2} = 1 \pm i\sqrt{5}.$$

Пример 4. Да се реши равенката $(4x+1)^2-(2x+1)^2=(3x+1)^2$!

Дадената равенка, по извршувањето на неколку трансформации, се сведува на следниве еквивалентни равенки:

$$16x^2+8x+1-(4x^2+4x+1)=9x^2+6x+1,$$
$$16x^2+8x+1-4x^2-4x-1-9x^2-6x-1=0,$$
$$3x^2-2x-1=0.$$

Добиената квадратна равенка има дискриминанта

$$D=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=4+12=16, \text{ т.е. } D>0.$$

Значи, таа има два различни реални корени:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{2\pm 4}{6}, \text{ т.е. } x_1=1; \; x_2=-\frac{1}{3}.$$

Тоа се корени и на дадената равенка.

Забелешка: Добиените формули за решавање на полните квадратни равенки можат да се применуваат и за решавање на сите видови неполни квадратни равенки. Затоа велиме дека тоа се општи формули за решавање на квадратните равенки со една непозната. Покажете го тоа самите!

ЗАДАЧИ

Да се решат следниве полни квадратни равенки:

1. а) $2x^2-3x-5=0$; б) $12x^2+x-1=0$; в) $10x^2-3x-1=0$!

2. а) $\sqrt{2}x^2-3x+\sqrt{2}=0$; б) $x^2-(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}=0$;
в) $2x^2+\sqrt{2}x-2=0$!

3. а) $x^2-3x-(1+\sqrt{3})=0$; б) $x^2-\sqrt{3}x-6=0$;
в) $x^2-(3-\sqrt{5})x-3\sqrt{5}=0$!

4. а) $(x+1)^2+(x+3)^2=(3x-5)^2$; б) $(x-1)(x+1)+(x+1)^2=(x+4)^2$!

5. а) $\dfrac{x+1}{3}-(x-3)^2=\dfrac{7-3x}{4}$; б) $\dfrac{x(2x-3)}{2}=1+\dfrac{(x+3)^2-(3x-1)^2}{5}$!

6. За кои вредности на x, триномот $\frac{1}{2}\cdot x^2-3x+\frac{3}{2}$ ја добива вредноста: а) -1; б) 0; в) $4\frac{1}{2}$?

7. За кои вредности на x, триномот x^2-7x+9 и биномот $2x-5$ имаат еднакви вредности?

8. За кои вредности на p, равенката $x^2-2kx+k^2+2k-3=0$ ќе има еден корен еднаков на нула?

9. Дадена е равенката $x^2-2(k-1)x=k^2-5k+2$. За кои вредности на параметарот k, таа ќе има еден двоен корен?

10. За кои вредности на k, корените на квадратната равенка $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$ се рационални?

11. За кои вредности на променливата x, триномот $2x^2+3x-2$ добива вредност: а) 0; б) 3; в) три пати поголема од вредноста на x?

12. Дадени се триномите: x^2-x-6 и $2x^2+x-9$. За кои вредности на променливата x, тие добиваат еднакви вредности?

§ 8. УПРОСТУВАЊЕ НА ФОРМУЛАТА НА КОРЕНИТЕ ЗА СПЕЦИЈАЛНИ ВИДОВИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Ќе покажеме дека формулата за решавање на полните квадратни равенки може да се упрости за некои специјални случаи на коефициентите на квадратната равенка. Тука ќе разгледаме два такви случаи, кои почесто се среќаваат во практиката.

8. 1. РАВЕНКИ ОД ВИДОТ $Ax^2+2rx+C=0$

Тоа се полни квадратни равенки, кај кои коефициентот пред непознатата x е парен број, т.е. $B=2r$.

Во тој случај, општата формула за одредување на нејзините корени:

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \qquad (1)$$

ќе се упрости, и за $B=2r$ ќе го добие видот:

$$x_{1,2}=\frac{-2r\pm\sqrt{4r^2-4AC}}{2A},$$

односно

$$x_{1,2}=\frac{-r\pm\sqrt{r^2-AC}}{A}, \text{ при } r^2-AC\geqslant 0, \qquad (2)$$

каде што r е половина на коефициентот пред x.

Пример: Да се реши равенката $5x^2-24x-5=0$.

Корените на дадената равенка можат да се одредат со помош на општата формула (1); но во овој случај предност и даваме на формулата (2), врз основа на која добиваме:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2+5\cdot 5}}{5}=\frac{12\pm\sqrt{144+25}}{5}=\frac{12\pm 13}{5}, \text{ т.е. } x_1=5 \text{ и } x_2=-\frac{1}{5}.$$

8. 2. РАВЕНКИ ОД ВИДОТ $x^2+px+q=0$

Тоа е сведен вид на квадратните равенки, кај кои коефициентот на квадратниот член е единица ($A=1$), а другите два коефициента, B и C, се означени соодветно со буквите p и q.

Ако во општата формула (1) за корените на квадратната равенка ставиме $A=1$, $B=p$ и $C=q$, таа ќе го добие видот:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

т.е.

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad (3)$$

Формулата (3) е многу погодна, особено во случаите кога коефициентот p има облик $2k$.

Пример: Да се реши равенката $x^2 - 14x + 45 = 0$!

Корените на дадената равенка лесно ги одредуваме користејќи ја формулата (3). Така добиваме:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{7^2 - 45} = 7 \pm \sqrt{49 - 45} = 7 \pm \sqrt{4} = 7 \pm 2, \text{ т.е. } x_1 = 9 \text{ и } x_2 = 5.$$

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките:

1. а) $3x^2 - 16x - 64 = 0$, б) $9x^2 - 36x + 35 = 0$, в) $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

2. а) $-x^2 - 5x + 14 = 0$, б) $x^2 + 12x - 13 = 0$, в) $x^2 + 2x + 4 = 0$.

3. а) $x^2 - 4x + 3 = 0$, б) $x^2 - 7x + 12 = 0$, в) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

§ 9. ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ, КОИ СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Дробно рационални равенки со една непозната се такви равенки, кои во едната или во двете страни содржат дробни рационални изрази по однос на непознатата, т.е. во кои непознатата x се содржи и во именител.

Таквите равенки ги решаваме кога претходно истите ги сведеме на некоја цела рационална равенка, која може да биде линеарна, квадратна или од повисок степен по однос на непознатата. Тоа го постигнуваме на два начина.

I начин. Ги пренесуваме сите членови (изрази) на дробната рационална равенка од десната на левата страна на равенката, потоа со помош на познатите трансформации на дробни рационални изрази, левата страна на равенката ја доведуваме во вид на количник (дропка) од два полинома, т.е. во видот

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \tag{1}$$

каде што $f(x)$ и $\varphi(x)$ се полиноми по однос на непознатата x.

Корен (решение) на равенката (1) е секој број $x = x_0$, за кој е $f(x_0) = 0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

Ако двете страни на равенката (1) ги помножиме со $\varphi(x)$, ќе добиеме нова равенка

$$f(x) = 0, \tag{2}$$

којашто може и да не биде еквивалентна на дадената. Или, поточно, добиената равенка (2) ќе ги содржи сите решенија на дадената, но таа може да придобие и други корени, за кои именителот $\varphi(x)$ се анулира.

Според тоа, множеството на корените на дадената дробно рационална равенка (1) ќе го добиеме кога од множеството на корените на равенката (2) се исклучат сите оние корени за кои именителот $\varphi(x)$ станува еднаков на нула.

Пример: Да се реши равенката $\frac{x^2-4x}{x-2}+\frac{4}{x-2}=3$!

Таа е еквивалентна на равенките: $\frac{x^2-4x}{x-2}+\frac{4}{x-2}-3=0$,

$\frac{x^2-4x+4-3(x-2)}{x-2}=0$, односно на равенката $\frac{x^2-7x+10}{x-2}=0$.

Ако последната равенка ја помножиме со изразот $x-2$, за кој претпоставуваме дека е различен од нула; ќе ја добиеме квадратната равенка

$$x^2-7x+10=0.$$

Добиената равенка ја решаваме: $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm3}{2}$ и наоѓаме дека таа има два корена: $x_1=5$ и $x_2=2$.

Коренот $x_1=5$ е корен и на дадената равенка, но $x_2=2$ не е нејзин корен. (Зошто?).

II начин. Ги множиме двете страни на дробно рационалната равенка со најмалиот заеднички содржател на сите именители на дробно рационалните изрази во равенката. Притоа ќе добиеме една цела рационална равенка (линеарна, квадратна или од повисок степен), која може, но не мора да е еквивалентна на дадената дробно рационална равенка. Ја решаваме добиената цела равенка и вршиме проверка: за кои од нејзините корени *нзс* станува еднаков на нула. Ако има такви, тие се исклучуваат од множеството на корените на добиената линеарна или квадратна равенка.

Пример: Да се реши равенката $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{x^2-2}{x^2-4}$!

Ги множиме двете страни на равенката со изразот x^2-4, — *нзс* на сите именители, па ги добиваме равенките:

$$2(x+2)-3(x-2)=x^2-2;\quad 2x+4-3x+6-x^2+2=0;$$

$$-x^2-x+12=0 \text{ или } x^2+x-12=0.$$

Последната равенка ја решаваме: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}$ и наоѓаме дека таа има два корена: $x_1=3$ и $x_2=-4$.

Заменувајќи ги тие вредности во дадената дробна рационална равенка ќе се увериме дека $x_1=3$ и $x_2=-4$ се и нејзини корени.

Тоа може да се утврди и од таму што изразот x^2-4, со кои ги помноживме двете страни на дадената равенка, за $x=3$ и $x=-4$ е различен од нула.

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките:

1. а) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{x+4}{x+1}=\frac{2x+1}{x-1}$; б) $\frac{24}{x-7}+x+7=0$!

2. а) $\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x^2}{1-x^2}$; б) $\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=7$!

3. а) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5}{x^2-4}+1$; б) $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{x+1}$!

4. а) $\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x-2}{x+1}$; б) $\dfrac{30}{x-5}-\dfrac{30}{x}=1$!

5. а) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)}=0$; б) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x+4}=1$!

§ 10. КВАДРАТНИ И ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ СО ПАРАМЕТРИ

Формулите за решавање на полните квадратни равенки со посебни коефициенти важат и при решавањето на квадратните равенки со параметри, само што нивните решенија (корени) се некои функции од параметрите. При тоа треба да се испита под какви услови и за кои вредности на параметрите равенката има два различни реални корени, за кои — еден реален корен, а за кои вредности на параметрите таа нема реални корени.

Пример 1. Да се реши равенката $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0$, каде што x е непозната, а a и b се параметри!

Равенката има смисла за сите реални вредности на параметрите a и b; но коефициентот на квадратниот член за да биде различен од нула, параметрите a и b треба да го задоволуваат условот $a^2-b^2\neq 0$, односно $(a-b)(a+b)\neq 0$, или $a-b\neq 0$ и $a+b\neq 0$.

Дискриминантата на дадената равенка е: $D=(-2a)^2-4(a^2-b^2)=4a^2-4a^2+4b^2=4b^2$. Според тоа:

1°. Ако е $b\neq 0$, тогаш $D>0$. Во тој случај равенката ќе има два различни корени:

$$x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{4b^2}}{2(a^2-b^2)}=\frac{2a\pm 2b}{2(a-b)(a+b)},\text{ т.е.}$$

$$x_1=\frac{1}{a-b}\quad\text{и}\quad x_2=\frac{1}{a+b}.$$

2°. Ако $b=0$, тогаш $D=0$. Равенката ќе има еден корен:

$$x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{0}}{2(a^2-0^2)}=\frac{2a}{2a^2}=\frac{1}{a},\text{ при } a\neq 0.$$

Пример 2. Да се реши равенката $(x+a)^2+(x+b)^2=5(a-b)^2$!
Равенката е еквивалентна последователно на секоја од равенките:

$$x^2+2ax+a^2+x^2+2bx+b^2=5a^2-10ab+5b^2;$$
$$2x^2+2(a+b)x-4a^2-4b^2+10ab=0;$$
$$x^2+(a+b)x-(2a^2+2b^2-5ab)=0.$$

Дискриминантата на добиената квадратна равенка е:

$$D=(a+b)^2+4(2a^2+2b^2-5ab)=a^2+2ab+b^2+8a^2+8b^2-20ab=$$
$$=9a^2-18ab+9b^2=9(a^2-2ab+b^2)=9(a-b)^2.$$

1°. Ако $a\neq b$, тогаш $D>0$. Во тој случај равенката ќе има два различни корени:

$$x_{1,2}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{9(a-b)^2}}{2}=\frac{-(a+b)\pm 3(a-b)}{2},\text{ т.е.}$$

$$x_1 = \frac{-a - b + 3a - 3b}{2} = \frac{2a - 4b}{2} = a - 2\,b \text{ и } x_2 = \frac{-a - b - 3a + 3b}{2} =$$

$$= \frac{-4a + 2b}{2} = -2a + b.$$

2°. Ако $a = b$, тогаш $D = 0$. Во тој случај равенката ќе има еден корен. Ако во равенката ставиме $b = a$, таа ќе го добие видот:

$$(x + a)^2 + (x + a)^2 = 5\,(a - a)^2, \text{ односно } 2\,(x + a)^2 = 0.$$

Оттука наоѓаме дека нејзино решение е $x = -a$.

Пример 3. Да се реши равенката: $\dfrac{a}{x-b} + \dfrac{b}{x-a} = 2$, каде што a и b се параметри.

Ако двете страни на дадената равенка ги помножиме со $(x - a)(x - b) \neq 0$, т.е. $x \neq a$ и $x \neq b$, и ги извршиме потребните трансформации, последователно ќе ги добиеме равенките:

$$a\,(x - a) + b\,(x - b) = 2\,(x - a)(x - b);$$

$$ax - a^2 + bx - b^2 = 2x^2 - 2ax - 2bx + 2ab;$$

$$2x^2 - 3\,(a + b)\,x + (a + b)^2 = 0, \tag{1}$$

кои се еквивалентни на дадената равенка, при услов да е $x \neq a$ и $x \neq b$.

Дискриминантата на равенката (1) е: $D = 9\,(a + b)^2 - 8\,(a + b)^2 = (a + b)^2$.

1°. Ако е $(a + b) \neq 0$, а тоа ќе биде ако е $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $b \neq -a$, тогаш $D > 0$. Во тој случај равенката (1) има два корена:

$$x_{1,2} = \frac{3\,(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2}}{4} = \frac{3\,(a + b) \pm (a + b)}{4}, \text{ т.е.}$$

$$x_1 = a + b \text{ и } x_2 = \frac{a + b}{2}.$$

Добиените корени $x_1 = a + b$ и $x_2 = \dfrac{a + b}{2}$ се корени и на дадената равенка, но при услов $x \neq a$ и $x \neq b$.

Првиот корен $x = a + b$ ќе биде различен од a, односно различен од b, ако е $a \neq 0$, односно $b \neq 0$. Вториот корен $x_2 = \dfrac{a + b}{2}$ ќе биде различен од a, односно различен од b, ако е $a \neq b$.

Според тоа, при $a + b \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \neq b$, дадената равенка има два корена:

$$x_1 = a + b \text{ и } x_2 = \frac{a + b}{2}.$$

Но, при $a = 0$, $b = 0$, $a = b$, не може да се заклучи дека дадената равенка нема смисла. Затоа, при $a = 0$, $b = 0$, $a = b$, дадената равенка треба да се испита одделно за секој случај.

а) При $a = 0$, дадената равенка го добива видот $\dfrac{b}{x} = 2$.

Оваа равенка при $b \neq 0$ има решение $x = \dfrac{b}{2}$.

б) При $b = 0$, дадената равенка го добива видот $\dfrac{a}{x} = 2$, која при $a \neq 0$ има решение $x = \dfrac{a}{2}$.

в) При $a = b$, дадената равенка го добива видот $\frac{a}{x - a} = 1$.

Оваа равенка при $a \neq 0$, има решение $x = 2a$.

2°. Ако е $a + b = 0$, а тоа ќе биде само ако е $a = b = 0$ или $b = -a$, тогаш $D = 0$. Овие случаи посебно ќе ги испитаме:

а) При $a = b = 0$, равенката (1) има еден корен, $x = 0$, но тој не е корен на дадената равенка. (Зошто?)

б) При $b = -a$, равенката (1), исто така има само еден корен, $x = 0$. Во тој случај, бидејќи $b = -a \neq 0$, задоволени се условите $x \neq a$ и $x \neq b$, па, според тоа, коренот $x = 0$ е корен и на дадената равенка.

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките:

1. а) $ax^2 - (a - b)x - b = 0$; б) $(a + b)x^2 + 2ax + a - b = 0$!

2. а) $3a^2x^2 - 2ax - 5 = 0$; б) $x^2 - 2(k + p)x + (k - p)^2 = 0$!

3. а) $(k - 1)x^2 + 2kx + k + 1 = 0$; б) $kpx^2 - (k^2 + p^2)x + kp = 0$!

4. а) $x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 = 0$; б) $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$!

5. а) $2kx^2 + (k + 2)x + 1 = 0$; б) $ax^2 + (b + c)x - (a + b + c) = 0$!

6. а) $\frac{a}{a + x} + \frac{b}{b + x} = \frac{(a + b)^2}{ab}$; б) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - b} = 1 + \frac{1}{b}$!

7. а) $\frac{a - x}{a + x} - \frac{a + x}{a - x} = \frac{2x^2}{a^2 - x^2}$; б) $x + \frac{1}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$!

8. а) $\frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$; б) $\frac{x + a}{x - a} - \frac{x - a}{x + a} = \frac{1}{a}$!

9. а) $\frac{1}{a + b + x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$; б) $\frac{a}{x - a} + \frac{b}{x - b} + \frac{c}{x - c} = 0$!

10. а) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a + x} + \frac{1}{a + 2x} = 0$; б) $\frac{x - a}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - a} = 2$!

11. Дадена е равенката $x^2 - 2k^2x + k^2(k^2 - 1) = 0$, каде што $k \in \mathbf{N}$. Покажи дека двата нејзини корени се парни броеви и при тоа едниот од нив е делив со 3!

12. Докажи дека равенката $\frac{1}{x - 1} + \frac{a^2}{x} = 1$ има два различни реални корени за секоја вредност на параметарот $a \neq 0$!

13. Покажи дека равенката $\frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q} = 1$ има реални корени за кои да било вредности на параметрите p и q!

14. За која вредност на параметарот k триномот $x^2 + k(k - 1)x + 9$ е полн квадрат?

15. Дадени се равенките $x^2 + kx + 1 = 0$ и $x^2 + x + k = 0$. За кои вредности на k тие имаат еден заеднички корен?

§ 11. ВИЕТОВА ТЕОРЕМА

Видовме дека квадратната равенка

$$Ax^2+Bx+C=0, \tag{1}$$

при $D>0$, има два реални корени: x_1 и x_2, кои ги одредуваме со помош на формулите:

$$x_1=\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}; \quad x_2=\frac{-B-\sqrt{D}}{2A}; \ (D=B^2-4AC) \tag{2}$$

Формулите (2) покажуваат дека помеѓу корените и коефициентите на квадратната равенка (1) постои одредена зависност. Таа зависност поодредено е формулирана со следнава:

Виетова теорема: *Збирот од корените на квадратната равенка е еднаков на количникот од коефициентот на линеарниот член земен со спротивен знак и коефициентот на квадратниот член; а производот од корените е еднаков на количникот од слободниот член и коефициентот на квадратниот член*, т.е.

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}; \quad x_1\cdot x_2=\frac{C}{A} \tag{3}$$

Доказ: Ако ги собереме, односно помножиме соодветните леви и десни страни на равенствата (2), добиваме:

$$x_1+x_2=\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}+\frac{-B-\sqrt{D}}{2A}=\frac{-B+\sqrt{D}-B-\sqrt{D}}{2A}=\frac{-2B}{2A}=-\frac{B}{A};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}\cdot\frac{-B-\sqrt{D}}{2A}=\frac{(-B)^2-(\sqrt{D})^2}{4A^2}=\frac{B^2-D}{4A^2}=$$

$$=\frac{B^2-(B^2-4AC)}{4A^2}=\frac{4AC}{4A^2}=\frac{C}{A}.$$

Ако квадратната равенка е зададена во сведен вид:

$$x^2+px+q=0, \tag{4}$$

тогаш релациите помеѓу нејзините корени и коефициенти добиваат попроста форма:

$$x_1+x_2=-p; \quad x_1\cdot x_2=q, \tag{5}$$

т.е.

Збирот од корените на квадратната равенка во сведен вид е еднаков на коефициентот на линеарниот член земен со спротивен знак, а производот на корените е еднаков на слободниот член.

Може да се докаже дека Виетовата теорема важи и во случаите кога $D=0$ и $D<0$, т. е. таа важи и кога квадратната равенка (1) има еден двоен реален корен, а исто и кога нејзините корени се комплексни броеви.

Ќе докажеме дека важи и:

Обратна Виетова теорема: *Ако постојат два броја* x_1 и x_2, *такви што*

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}\ ;\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A},$$

тогаш тие броеви се корени на квадратната равенка $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Доказ: Нека броевите x_1 и x_2 ги задоволуваат равенствата

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}.$$

Од првото равенство следува дека $x_2 = -\frac{B}{A} - x_1$. Заменувајќи го x_2 во второто равенство со $-\frac{B}{A} - x_1$, ќе се добие:

$$x_1\left(-\frac{B}{A} - x_1\right) = \frac{C}{A}; \quad -x_1^2 - \frac{B}{A}\cdot x_1 - \frac{C}{A} = 0,$$

односно:

$$Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0.$$

Според тоа, бројот x_1 е корен на равенката $Ax^2 + Bx + C = 0$.
На ист начин се уверуваме дека и x_2 е корен на истата равенка.

Обратната Виетова теорема може да се формулира и вака:

Ако броевите x_1 *и* x_2 *ги задоволуваат релациите*: $x_1 + x_2 = -p$ *и* $x_1 \cdot x_2 = q$, *тогаш тие се корени на квадратната равенка во сведен вид* $x^2 + px + q = 0$.

Врз основа на обратната Виетова теорема, коефициентите p и q на квадратната равенка во сведен вид секогаш можеме да ги изразиме преку нејзините корени x_1 и x_2, вака:

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ и } q = x_1 \cdot x_2.$$

Значи, квадратната равенка во сведен вид, чии корени се x_1 и x_2, може да се запише во следнава форма:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0. \tag{6}$$

Пример 1. Да се состави квадратна равенка со корени

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ и } x_2 = 2 - \sqrt{3}!$$

Тоа ќе биде равенката:

$$x^2 - [(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})]\cdot x + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 0,$$

односно:

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Пример 2. Да се состави квадратна равенка со корени:

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}!$$

Бараната квадратна равенка ќе има коефициенти:

$$p = -(x_1 + x_2) = -\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{-2}{2} = 1,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{(-1)^2 - (i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1-(-3)}{4} = 1.$$

Значи, тоа е квадратната равенка $x^2 + x + 1 = 0$.

Овој пример покажува дека, ако корените на квадратната равенка со реални коефициенти се комплексни броеви, тогаш тие мораат да бидат конјугирано комплексни, зашто збирот и производот само на два конјугирано комплексни броеви се реални броеви.

Со други зборови, тоа значи: *Ако дадена квадратна равенка со реални коефициенти има еден корен* $x_1 = \alpha + \beta i$, *тогаш таа има и друг корен* $x_2 = \alpha - \beta i$.

Пример 3. Да се докаже дека: ако квадратната равенка има корени од видот $x_1 = a + b\cdot\sqrt{c}$ и $x_2 = a - b\cdot\sqrt{c}$, каде што a, b, $c > 0$ се рационални броеви, тогаш таа има рационални коефициенти.

Доказ: Нека равенката $x^2 + px + q = 0$ има корени $x_1 = a + b\cdot\sqrt{c}$ и $x_2 = a - b\cdot\sqrt{c}$, тогаш врз основа на Виетовата теорема, имаме:

$$p = -(x_1 + x_2) = -(a + b\cdot\sqrt{c} + a - b\cdot\sqrt{c}) = -2a,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (a + b\cdot\sqrt{c})(a - b\cdot\sqrt{c}) = a^2 - b^2 c.$$

Но, бидејќи:

$$(a \in Q,\ b \in Q,\ c \in Q) \Rightarrow (-2a) \in Q \text{ и } (a^2 - b^2 c) \in Q,$$

тогаш квадратната равенка $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 c = 0$ има рационални коефициенти, што требаше да се докаже.

Пример 4. Да се одреди вредноста на изразот $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, ако x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 + px + q = 0$.

Врз основа на равенствата (5) и идентитетот $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$, имаме:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(-p)^2 - 2q}{q^2} = \frac{p^2 - 2q}{q^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Да се состави квадратна равенка која ќе има корени:

а) $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 3$; б) $x_1 = -4$ и $x_2 = -1$; в) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$!

2. Состави квадратна равенка, која ќе ги има следниве корени:

а) $x_1 = a + b$; $x_2 = a - b$; б) $x_1 = 2a - b$; $x_2 = -b$; в) $x_1 = a$; $x_2 = \frac{1}{a}$;

г) $x_1 = \frac{1}{a+b}$; $x_2 = \frac{1}{a-b}$!

3. Да се состави квадратна равенка со рационални коефициенти, која има еден корен: а) $3-\sqrt{2}$; б) $1+2\sqrt{3}$; в) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$!

4. Да се состави квадратна равенка со реални коефициенти, која има еден корен: а) $2-3i$; б) $1+i\sqrt{2}$; в) $\frac{2-i}{3}$; г) $\frac{1}{1-i}$!

5. Да се докаже дека: ако x_1 и x_2 се корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$, тогаш важат релациите: а) $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$; б) $x_1^3+x_2^3=3pq-p^3$; в) $x_1-x_2=\sqrt{p^2-4q}$!

6. Не решавајќи ја равенката $3x^2-7x-6=0$, да се одреди вредноста на изразот: а) $x_1^2+x_2^2$; б) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$; в) x_1-x_2!

7. Не решавајќи ја равенката $2x^2-x-3=0$, да се одреди вредноста на изразите: а) $x_1^3+x_2^3$; б) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; в) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$!

8. Во равенката $x^2+px+q=0$, да се одредат p и q така, што нејзините корени да ги задоволуваат релациите: $2x_1+x_2=5$ и $x_1-x_2=4$.

9. За кои вредности на p и q корените на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ се броевите p и q?

10. Да се состави квадратна равенка, чии корени се еднакви соодветно на збирот и производот на корените на равенката $x^2+px+q=0$!

11. Во равенката $4x^2-8x+q=0$, да се одреди q така, што нејзините корени ја задоволуваат релацијата $x_1=3x_2$!

12. Да се реши равенката $x^2-5x+k=0$, ако нејзините корени ја задоволуваат релацијата $x_1+x_2=x_1x_2$!

§ 12. ИСПИТУВАЊЕ КОРЕНИТЕ НА КВАДРАТНАТА РАВЕНКА

Виетовата теорема ни дава можност врз основа на коефициентите на квадратната равенка да ги утврдиме и знаците на нејзините корени, без да ја решаваме истата.

За знаците на корените има смисла да се говори само ако тие се реални, т.е. ако $D \geqslant 0$.

Бидејќи секоја квадратна равенка може да се доведе (со делење на двете нејзини страни со $A \neq 0$) во сведен вид

$$x^2+px+q=0, \tag{1}$$

тоа испитувањето на нејзините корени ќе го вршиме со помош на коефициентите p и q, кои можат да бидат кои да било реални броеви.

Знаеме дека врз основа на Виетовата теорема:

$$x_1+x_2=-p; \quad x_1x_2=q. \tag{2}$$

Во зависност од знаците на коефициентите p и q, ќе ги разликуваме следниве случаи:

1°. Нека е $q < 0$. Во тој случај дискриминантата на равенката (1) $D = p^2 - 4q$ ќе биде позитивен број (Зошто?), па според тоа, квадратната равенка ќе има два различни реални корени x_1 и x_2. Бидејќи $x_1 x_2 = q < 0$, тоа корените имаат спротивни знаци, т.е. едниот е позитивен, а другиот — негативен.

Овие заклучоци ги направивме само врз основа на претпоставката ако слободниот член q е негативен број. Да гоземеме во разгледување и коефициентот p. За него постојат следниве три можности:

$$\text{или } p > 0, \text{ или } p = 0, \text{ или } p < 0.$$

а) Ако $p > 0$, тогаш $x_1 + x_2 = -p < 0$. Тоа означува дека негативниот корен има поголема апсолутна вредност, отколку позитивниот корен, т.е. ако е $x_1 < 0$, а $x_2 > 0$, тогаш $|x_1| > |x_2|$.

б) Ако $p = 0$, тогаш $x_1 + x_2 = 0$, или $x_1 = -x_2$. Во тој случај корените имаат еднакви апсолутни вредности, а спротивни знаци, т.е. тие се два спротивни реални броеви.

в) Ако $p < 0$, тогаш $x_1 + x_2 = -p > 0$. Тоа е можно само кога позитивниот корен има поголема апсолутна вредност, отколку негативниот, т.е. ако е $x_1 < 0$, а $x_2 > 0$, тогаш $|x_1| < |x_2|$.

2°. Нека е $q > 0$. Во тој случај прво треба да се види каква е дискриминантата $D = p^2 - 4q$. Таа може да биде позитивна, еднаква на нула, или негативна. Ако $D \geqslant 0$, тогаш квадратната равенка има реални корени — различни или еднакви, па испитувањето има смисла да продолжи. Бидејќи $x_1 x_2 = q > 0$, тоа значи дека корените x_1 и x_2 имаат исти знаци, т.е. тие се или и двата позитивни, или и двата негативни. А во зависност од коефициентот p, имаме:

а) Ако $p > 0$, тогаш од $x_1 + x_2 = -p < 0$ следува дека и двата корени се негативни.

б) Ако $p < 0$, тогаш $x_1 + x_2 = -p > 0$. Тоа значи дека и двата корени се позитивни.

в) Ако $p = 0$, тогаш квадратната равенка нема реални корени, бидејќи збирот на два позитивни или на два негативни броја не може да биде еднаков на нула ($x_1 + x_2 = -p = 0$). Тоа се гледа и оттаму што, при $p = 0$, $q > 0$; дискриминантата ($D = p^2 - 4q = -4q < 0$) е негативна, па според тоа, квадратната равенка нема реални корени.

3°. Нека е $q = 0$. Тогаш дискриминантата $D = p^2 - 4q = p^2 \geqslant 0$ не е негативен број, па, според тоа, квадратната равенка има реални корени — различни или еднакви. Од $x_1 x_2 = q = 0$, следува дека барем еден корен е еднаков на нула. Нека е, на пример, $x_1 = 0$. Вториот корен го одредуваме од равенството $x_1 + x_2 = -p$, од каде $x_2 = -p$. Според тоа, вториот корен ќе биде број што е спротивен на коефициентот p. Ако и $p = 0$, тогаш и двата корена на равенката се еднакви на нула, т.е. $x_1 = x_2 = 0$.

Резултатите од направеното испитување можат прегледно да се покажат со следнава таблица:

$q < 0$	$p > 0$	$D > 0$	$x_1 < 0;\ \ x_2 > 0;\ \ \lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
	$p < 0$		$x_1 < 0;\ \ x_2 > 0;\ \ \lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert$
	$p = 0$		$x_1 < 0;\ \ x_2 > 0;\ \ \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert\ \ (x_1 = -x_2)$
$q > 0$	$p > 0$	$D > 0$	$x_1 < 0;\ \ x_2 < 0$
		$D = 0$	$x_1 < 0;\ \ x_2 < 0;\ \ x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
		$D < 0$	Корените не се реални
	$p < 0$	$D > 0$	$x_1 > 0;\ \ x_2 > 0$
		$D = 0$	$x_1 > 0;\ \ x_2 > 0;\ \ x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
		$D < 0$	Корените не се реални
	$p = 0$	$D < 0$	Корените не се реални
$q = 0$	$p > 0$	$D > 0$	$x_1 = 0;\ \ x_2 < 0;\ \ x_2 = -p$
	$p < 0$		$x_1 = 0;\ \ x_2 > 0;\ \ x_2 = -p$
	$p = 0$	$D = 0$	$x_1 = x_2 = 0$

Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Да се одредат знаците на корените на равенката

$$x^2 + 9x + 20 = 0!$$

Тука $D = 81 - 4 \cdot 20 = 1 > 0$. Значи, равенката има два различни реални корени. Бидејќи $q > 0$; $p > 0$, тоа и двата корена се негативни.

Пример 2. Да се испитаат корените на квадратната равенка $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k - 3 = 0$, $(k \neq 1)$, во зависност од промената на параметарот k.

Дискриминантата на дадената равенка изнесува:

$$D = 4(k+1)^2 - 4(k-1)(k-3) = 4(k^2 + 2k + 1 - k^2 + k + 3k - 3) = \\ = 4(6k - 2) = 8(3k - 1).$$

Ако квадратната равенка ја доведеме во сведен вид

$$x^2 - 2 \cdot \frac{k+1}{k-1} x + \frac{k-3}{k-1} = 0,$$

гледаме дека нејзините коефициенти p и q се:

$$p = -2 \cdot \frac{k+1}{k-1} \quad \text{и} \quad q = \frac{k-3}{k-1}.$$

Потоа, треба да одредиме како се менуваат знаците на D, p и q во зависност од промената на параметарот k.

а) Дискриминантата добива вредност нула, т.е. $D = 8(3k - 1) = 0$, за $k = \frac{1}{3}$. Таа добива позитивни вредности ($D = 8(3k - 1) > 0$) за $k > \frac{1}{3}$; а негативни вредности за $k < \frac{1}{3}$.

б) Коефициентот $p = -2 \cdot \frac{k+1}{k-1}$ добива вредност нула за $k = -1$. За кои вредности на k коефициентот p добива позитивни, односно негативни вредности ќе одредиме кога ќе ја решиме неравенката $-2 \cdot \frac{k+1}{k-1} > 0$, односно неравенката $-2 \cdot \frac{k+1}{k-1} < 0$, при услов $k \neq 1$.

Првата од тие неравенки е еквивалентна на неравенката $\frac{k+1}{k-1} < 0$, а која, пак, е еквивалентна на вкупноста од системите неравенки:

$$\begin{cases} k+1 > 0 \\ k-1 < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k+1 < 0 \\ k-1 > 0 \end{cases}$$

Првиот систем има решение $-1 < k < 1$, а вториот систем нема решение.

Според тоа, коефициентот p е позитивен за $-1 < k < 1$.

Неравенката $-2 \cdot \frac{k+1}{k-1} < 0$ е еквивалентна на $\frac{k+1}{k-1} > 0$, а таа, пак, на вкупноста од системите неравенки:

$$\begin{cases} k+1 > 0 \\ k-1 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k+1 < 0 \\ k-1 < 0 \end{cases}$$

Првиот систем има решение $k > 1$; а вториот $k < -1$.

Според тоа, коефициентот p е негативен за $k < -1$ и за $k > 1$.

в) На сличен начин ги испитуваме и знаците на слободниот член $q = \frac{k-3}{k-1}$. При тоа добиваме: $q = 0$ за $k = 3$; $q > 0$ за $k > 3$ и $k < 1$, $q < 0$ за $1 < k < 3$.

Потоа промената на знаците на D, p и q, во зависност од промената на параметарот k од $-\infty$ до ∞ можеме да ја претставиме шематски со следнава табела:

k	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		1		3		$+\infty$
D		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
p		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$-$	|	$-$	
q		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$-$	0	$+$	

Оттука следува:

а) $k \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow D < 0$. Тогаш квадратната равенка нема реални корени, односно нејзините корени се конјугирано комплексни.

б) $k = \frac{1}{3} \Rightarrow (D = 0,\ p > 0,\ q > 0)$. Тогаш (види ја табелата) квадратната равенка има два еднакви негативни реални корени: $x_1 = x_2 = -2$.

в) $k \in \left(\frac{1}{3};\ 1\right) \Rightarrow (D > 0,\ p > 0,\ q > 0)$. Во тој случај квадратната равенка има два различни негативни реални корени: $x_1 < 0$, $x_2 < 0$.

г) $k \in (1;\ 3) \Rightarrow (D > 0,\ p < 0,\ q < 0)$. Тогаш квадратната равенка има два различни реални корени, еден позитивен, а друг негативен и тоа позитивниот корен има поголема апсолутна вредност, т.е. ако $x_1 < 0$, а $x_2 > 0$, тогаш $|x_1| < |x_2|$.

д) $k = 3 \Rightarrow (D > 0,\ p < 0,\ q = 0)$. Тогаш $x_1 = 0,\ x_2 = -p = 4$.

ѓ) $k \in (3;\ \infty) \Rightarrow (D > 0,\ p < 0,\ q > 0)$. Во тој случај квадратната равенка има два различни позитивни реални корени: $x_1 > 0,\ x_2 > 0$.

Со тоа испитувањето на корените на дадената квадратна равенка од промената на параметарот k е потполно извршено.

ЗАДАЧИ

Не решавајќи ги долунаведените равенки, да се утврдат знаците на нивните реални корени:

1. а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; в) $4x^2 - 12x + 9 = 0$!

2. а) $3x^2 - 7x - 6 = 0$; б) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; в) $2x^2 + x - 3 = 0$!

3. а) $3x^2 - 5x + 1 = 0$; б) $3x^2 - 18x + 25 = 0$; в) $8x^2 + 2x - 1 = 0$!

4. За кои вредности на параметарот k, квадратните равенки:
а) $(k-2)x^2 - (k+1)x - k = 0$; б) $kx^2 - 6x + k = 0$; в) $x^2 - 2kx + 9 = 0$, ќе имаат секоја по два еднакви реални корени?

5. За кои вредности на k, равенката $kx^2 - 2(k+1)x + k - 3 = 0$, ќе има два различни реални корени?

6. За кои вредности на a, равенката $(a-1)x^2 + 2ax + a - 2 = 0$, ќе нема реални корени?

7. За кои вредности на k, равенката $kx^2 + 2(k-4)x + k = 0$, ќе има два позитивни: а) еднакви, б) нееднакви реални корени?

8. За кои вредности на c, равенката $(c-4)x^2 + 2(c-2)x + c = 0$, ќе има два негативни: а) еднакви, б) нееднакви реални корени?

9. За кои вредности на k, равенката $(k-2)x^2 + 2(k-3)x + k - 5 = 0$, ќе има два реални корени со различен знак, при што позитивниот корен да има: а) поголема, б) помала апсолутна вредност од другиот?

10. Да се испитаат корените на квадратната равенка $(k-3)x^2 - 2(k-2)x + k = 0$ $(k \neq 3)$, во зависност од промената на параметарот k!

§ 13. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА КВАДРАТНИОТ ТРИНОМ НА ЛИНЕАРНИ МНОЖИТЕЛИ

Дефиниција 1. *Алгебарскиот израз*

$$Ax^2 + Bx + C,\ (A \neq 0) \tag{1}$$

каде што A, B и C се дадени реални броеви или изрази, а x променлива (аргумент), се вика квадратен трином по однос на променливата x.

Броевите, односно изразите $A \neq 0$, B и C се викаат *коефициенти* на квадратниот трином и тоа A — коефициент на квадратниот член, B — коефициент на линеарниот член, а C — слободен член.

Изразот $D = B^2 - 4AC$ се вика *дискриминанта на* квадратниот трином.

Дефиниција 2. *Вредностите на аргументот x, за кои квадратниот трином добива вредност нула, се викаат негови корени или нули.*

Јасно е дека корените (нулите) на квадратниот трином (1) претставуваат и корени на квадратната равенка

$$Ax^2+Bx+C=0 \tag{2}$$

Значи за да ги одредиме корените на квадратниот трином (1), треба да ја решиме квадратната равенка (2).

Пример 1. Да се одредат корените на квадратниот трином $2x^2+15x+7$!

Го приравнуваме квадратниот трином на нула и ја решаваме равенката $2x^2+5x+7=0$, која има два различни реални корени $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=-7$. Тоа се бараните корени и на дадениот квадратен трином.

Често се јавува потреба квадратниот трином да се разложи на линеарни множители. Тоа лесно го постигнуваме кога ги знаеме корените на квадратниот трином. Ќе докажеме дека важи следнава:

Теорема: *Ако е $D \geqslant 0$, тогаш квадратнот трином може да се разложи на два линеарни множители со реални коефициенти*:

$$Ax^2+Bx+C=A(x-x_1)(x-x_2), \tag{3}$$

каде што x_1 и x_2 се корени (нули) на квадратниот трином.

Доказ: Нека е даден квадратниот трином Ax^2+Bx+C, $A \neq 0$, $D \geqslant 0$ со корени x_1 и x_2. Ако коефициентот A го извлечеме пред заграда, ќе добиеме:

$$Ax^2+Bx+C=A\left(x^2+\frac{B}{A}\cdot x+\frac{C}{A}\right).$$

Врз основа на Виетовата теорема, коефициентите на триномот во заградата $\frac{B}{A}$ и $\frac{C}{A}$ можеме да ги изразиме со помош на корените x_1 и x_2 на квадратниот трином, т.е. $\frac{B}{A}=-(x_1+x_2)$; $\frac{C}{A}=x_1x_2$, па добиваме: $Ax^2+Bx+C=A\left(x^2+\frac{B}{A}\cdot x+\frac{C}{A}\right)=$

$$=A[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=A[x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2]=A[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=$$
$$=A(x-x_1)(x-x_2).$$

При $D=B^2-4AC=0$, корените x_1 и x_2 се еднакви, па равенството (3) го добива видот:

$$Ax^2+Bx+C=A(x-x_1)^2 \tag{4}$$

Пример 2. Да се разложи на линеарни множители триномот

$$x^2+kx-2k^2!$$

Од равенката $x^2+kx-2k^2=0$, ги наоѓаме корените на квадратниот трином $x_1=k$ и $x_2=-2k$.

Според равенството (3), се добива: $x^2+kx-2k^2=(x-k)(x+2k)$.

Пример 3. Да се разложи на множители триномот x^2-2x-1!

Дадениот трином има два корена: $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$!

Според тоа имаме: $x^2-2x-1=(x-1-\sqrt{2})\,(x-1+\sqrt{2})$.

Ако квадратниот трином има негативна дискриминанта, тогаш тој не може да се разложи на линеарни множители со реални коефициенти.

Равенството (3) го користиме уште и при скратувањето на алгебарските дропки и за составување на квадратната равенка кога се познати нејзините корени.

Навистина, од равенството (3) следува дека квадратната равенка $Ax^2+Bx+C=0$ $(A \neq 0)$ може да се запише и вака:

$$A(x-x_1)(x-x_2)=0, \quad (A \neq 0) \tag{5}$$

Ако, пак, квадратната равенка е дадена во формата (5), тогаш таа може да се реши и директно, без да ја доведуваме во нејзиниот општ вид. И, навистина, квадратната равенка (5) е еквивалентна на вкупноста од две линеарни равенки $x-x_1=0$ и $x-x_2=0$, кои ни ги даваат и корените на равенката (5).

Пример 4. Да се скрати дропката $\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$!

Дадената алгебарска дропка има смисла само за оние вредности на аргументот x, за кои изразот во именителот е различен од нула, т.е. за $x^2+3x-10 \neq 0$.

Ги разложуваме броителот и именителот на линеарни множители, па добиваме:

$$\frac{x^2-4}{x^2+3x-10}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x+2}{x+5}, \text{ при } x-2 \neq 0$$

Пример 5. Да се состави квадратна равенка со рационални коефициенти, ако е познат еден од нејзините корени $x_1=2+\sqrt{3}$!

Знаеме дека, ако квадратната равенка со рационални коефициенти има еден ирационален корен $x_1=2+\sqrt{3}$, тогаш другиот нејзин корен ќе биде $x_2=2-\sqrt{3}$.

Сите квадратни равенки со корени $x_1=2+\sqrt{3}$ и $x_2=2-\sqrt{3}$ ќе го имаат видот

$$A(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0, \quad A \neq 0,$$

кои се еквивалентни на равенката

$$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0, \text{ односно на } x^2-4x+1=0.$$

ЗАДАЧИ

Да се разложат триномите на линеарни множители:

1. а) $3x^2-10x+3$; б) $2x^2-7x-4$; в) $4x^2-12x+9$!

2. а) x^2-5x+6; б) $8x^2-2x-1$; в) $5x^2+17x-126$!

3. а) $x^2+px-2p^2$; б) $x^2-2ax+a^2-b^2$; в) $x^2-ax-6a^2$!

4. Да се скратат дропките: а) $\dfrac{x^2-16}{x^2-x-12}$; б) $\dfrac{x^2-13x+12}{x^2+2x-3}$!

5. Скрати ги дропките: а) $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2+2a}$; б) $\dfrac{a^2-a-6}{a^2+a-2}$!

6. Скрати ги дропките: а) $\dfrac{x^2+kx-2k^2}{x^2-2kx+k^2}$; б) $\dfrac{2x+c}{2x^2-3cx-2c^2}$!

7. Без користење на Виетовата теорема состави квадратна равенка, која ќе има корени: а) $x_1=3$, $x_2=-5$; б) $x_1=2a$, $x_2=-\dfrac{1}{a}$; в) $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=-2\sqrt{2}$; г) $x_1=\dfrac{m}{n}$, $x_2=\dfrac{n}{m}$!

§ 14. РАВЕНКИ ВО КОИ НЕПОЗНАТАТА СЕ НАОЃА ПОД ЗНАКОТ НА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

Во алгебрата често се среќаваме и со равенки во кои непознатата се наоѓа под знакот на апсолутна вредност.

Такви се, на пример, равенките:

$$x^2-3|x|=0 \tag{1}$$

$$x^2-|x|=x|x-1| \tag{2}$$

$$|3x-|x-1||=-c^2x \tag{3}$$

$$|x^2-3x-4|+2|x-1|-3x=0 \tag{4}$$

Ваквите равенки не е коректно да се викаат квадратни, иако тие се сведуваат на решавање на квадратни равенки. Некои од нив можат да имаат и повеќе од два корена, па дури и бесконечно множество корени, што не е случај со квадратните равенки.

Овие равенки можат да содржат еден, два или повеќе изрази под знакот на апсолутна вредност, а во кои се среќава непознатата x. Ние ќе се задржиме само на равенките во кои изразите под знакот на апсолутна вредност се полиноми од прв степен по однос на непознатата x, или полиноми кои можат да се разложат на линеарни множители. На пример, во равенката (4) под знакот на апсолутна вредност се наоѓаат два израза: полиномот од прв степен $x-1$ и квадратниот трином x^2-3x-4. Меѓутоа, ако квадратниот трином x^2-3x-4 го разложиме на линеарни множители: $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$, а потоа ја примениме теоремата за апсолутна вредност на производ на два броја, т.е. $|(x+1)(x-4)|=|x+1|\cdot|x-4|$, ќе ја добиеме равенката:

$$|x+1|\cdot|x-4|+2|x-1|-3x=0,$$

која е еквивалентна на равенката (4).

Овие равенки ги решаваме врз основа на дефиницијата и својствата на апсолутната вредност на реалните броеви, што ни се познати од минатата година.

Задача 1. Да се реши равенката $x^2-3\cdot|x|=0$!

Решение: Дадената равенка е еквивалентна на равенката $|x|=\frac{x^2}{3}$, а оваа, пак, врз основа дефиницијата на апсолутна вредност, е еквивалентна на вкупноста равенки:

$$x=\frac{x^2}{3} \text{ и } x=-\frac{x^2}{3} \tag{1}$$

Првата равенка од вкупноста (1) има множество решенија $M_1=\{0;\ 3\}$, а втората — $M_2=\{0;\ -3\}$.

Множеството решенија, пак, на вкупноста равенки (1) ќе биде унијата $M=M_1\cup M_2=\{-3;\ 0;\ 3\}$. Тоа е и бараното множество решенија на дадената равенка.

Задача 2. Да се реши и да се дискутира равенката $|3x-|x-1||=-c^2x$!

Решение: Забележуваме дека левата страна на равенката е ненегативен број. Според тоа, равенката ќе има решенија само ако е $x\leqslant 0$.

Во тој случај ќе биде $x-1<0$, односно $|x-1|=-(x-1)$, а $3x-|x-1|=3x+x-1=4x-1$.

За $x\leqslant 0$ јасно е дека $4x-1<0$, односно $|3x-|x-1||=1-4x$.

Следствено на тоа, дадената равенка е еквивалентна на системот:

$$\begin{cases}1-4x=-c^2x\\ x\leqslant 0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(4-c^2)x=1\\ x\leqslant 0\end{cases}$$

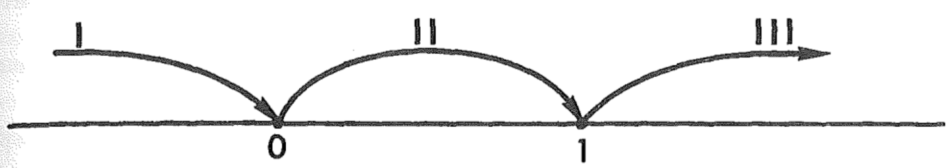
Ако $c = \pm 2$, тогаш системот нема решение (Зошто?)

Ако $c \neq \pm 2$, тогаш равенката во системот ќе има решение $x = \frac{1}{4 - c^2}$, но со оглед на неравенката $x \leqslant 0$ треба да биде $4 - c^2 < 0$, односно $c < -2$ или $c > 2$, односно $c \in (-\infty, -2) \cup (2; \infty)$.

Според тоа, ако $c \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, дадената равенка има решение $x = \frac{1}{4 - c^2}$.

Задача 3. Да се реши равенката: $x^2 - |x| = x|x - 1|$!

Решение: Оваа равенка ќе ја решиме по таканаречениот *метод на интервали.* Според него: Прво ги одредуваме вредностите на непознатата x за кои изразите под знакот на апсолутна вредност добиваат вредност нула. Тоа се броевите 0 и -1, кои бројната оска (црт. 2) ја разбиваат на три интервали: $(-\infty; 0)$, $[0; 1)$ и $[1; \infty)$.



Црт. 2

Потоа, дадената равенка ја разгледуваме поодделно во секој од горните три интервали. Според тоа, ќе разликуваме три случаи:

1°. $x \in [1; \infty) \Rightarrow (|x| = x;\ |x - 1| = (x - 1)$. Во тој случај дадената равенка го добива видот $x^2 - x = x(x - 1)$ или $x^2 - x = x^2 - x$.

Гледаме дека таа е задоволена за секоја реална вредност на x (Зошто?), па според тоа и за сите оние од интервалот $[1, \infty)$, т.е. за $x \geqslant 1$.

2°. $x \in [0; 1) \Rightarrow (|x| = x;\ |x - 1| = -(x - 1))$. Во тој случај дадената равенка го добива видот $x^2 - x = -x(x - 1)$ или $2x^2 - 2x = 0$, која има два корена: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Бидејќи $0 \in [0; 1)$, а $1 \notin [0; 1)$, затоа дадената равенка во овој интервал има само еден корен: $x_1 = 0$.

3°. $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow (|x| = -x;\ |x - 1| = -(x - 1))$.

Тогаш дадената равенка ќе гласи $x^2 + x = -x(x - 1)$ или $2x^2 = 0$.

Добиената равенка $2x^2 = 0$ има еден корен $x = 0 \notin (-\infty; 0)$, кој, покрај тоа, влезе како корен на дадената равенка во претходниот интервал.

Според тоа, множеството од сите корени на дадената равенка е

$$M = \{0\} \cup [1; \infty).$$

З А Д А Ч И

Да се решат равенките:

1. а) $x^2 + 8|x| - 9 = 0$; б) $x^2 - 6x - |x - 6| = 0$!

2. а) $2x^2 + |x + 1| - 2 = 0$; б) $x^2 + |x + 2| + |x - 1| = 0$!

3. а) $x|x - 3| + 2|x + 1| = 0$; б) $3x|x - 1| - |x + 2| = x^2 - 4$!

4. а) $|x + 3| \cdot |x - 2| = 6$; б) $|x^2 - 3x + 4| + x|x - 2| + 1 = 0$!

5. а) $|x^2 - 4x - 5| = x^2 - 4x - 5$; б) $|x(x - 3)| - 4|x + 1| = 3$!

6. а) $3x^2 - 2|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$; б) $|4x^2 + x - 3| + |x^2 + 5x - 6| = 9$!

7. а) $|x(x + 3)| + |x^2 - 4| = 5$; б) $x|x - 1| + 2x|x - 2| + 3x|x - 3| = 8$!

§ 15. ПРИМЕНА НА КВАДРАТНИТЕ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Во алгебрата, геометријата, физиката, техниката, како и во секојдневната практика, многу често се среќаваме со задачи, кои бараат составување и решавање на квадратни равенки со една непозната.

Минатата година разгледувавме слични такви задачи кои доведуваа до составување на линеарни равенки со една непозната и системи линеарни равенки со две и три непознати. Тие задачи можевме да ги решаваме и по чисто аритметички пат, иако многу потешко отколку со помош на равенките и системите равенки од прв степен.

За разлика од нив, задачите, пак, кои доведуваат до составување на квадратни равенки, по правило, не можат да бидат решавани по аритметички пат.

Примената на квадратните равенки при решавањето на задачи од овој вид ќе ја илустрираме на следниве неколку примери:

Пример 1. Цифрата на единиците на еден двоцифрен број е за 2 помала од цифрата на десетките. Производот од тој број и збирот на неговите цифри изнесува 900. Кој е тој број?

Решение: Цифрата на десетките на бараниот двоцифрен број ќе ја означеме со x, каде што $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Според условот на задачата, цифрата на единиците ќе биде $x-2$. Тогаш, двоцифрениот број ќе биде $10x+(x-2)$, а збирот од неговите цифри: $x+(x-2)$.

Според условот на задачата, ја составуваме равенката

$$[10x+(x-2)]\cdot[x+(x-2)]=900,$$

која е еквивалентна на $11x^2-13x-448=0$. Добиената равенка има два корена: $x_1=7$, $x_2=-\frac{64}{11}$.

Според тоа, цифрата на десетките на бараниот двоцифрен број е 7, цифрата на единиците е $7-2=5$, а двоцифрениот број е 75. Но, другиот корен на равенката не е решение на задачата. (Зошто?).

Пример 2. Еден базен се наполнува од славината за полнење за 4 часа побргу отколку што полниот базен ќе се испразни од славината за празнење. Ако едновремено се отворат двете славини, празниот базен ќе се наполни за 15 часа. За колку часа ќе се наполни базенот, ако славината за празнење е затворена, а за колку часа полниот базен ќе се испразни, ако е отворена само славината за празнење?

Решение: Ако славината за полнење го наполнува целиот базен за x часа, тогаш славината за празнење полниот базен ќе го испразни, според условот на задачата, за $x+4$ часа.

Бидејќи славината за полнење го полни базенот за x часа, тоа за 1 час таа ќе наполни $\frac{1}{x}$ (дела) од целиот базен. Слично наоѓаме дека славината за празнење за еден час испразнува $\frac{1}{x+4}$ (дел од базенот).

Од $x<x+4$, каде што $x>0$ следува дека $\frac{1}{x}>\frac{1}{x+4}$. Тоа значи дека наполнетиот дел $\left(\frac{1}{x}\right)$ за 1 час од славината за полнење е поголем од испразнетиот дел $\left(\frac{1}{x+4}\right)$ од славината за празнење за 1 час.

Ако двете славини едновремено се отворат, јасно е дека ќе се наполни некој дел од базенот. Тој дел ќе биде еднаков на $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}$. Но, според условот на задачата, тој дел е еднаков на $\frac{1}{15}$ од целиот базен, бидејќи ако двете славини едновремено се отворат, целиот базен се наполнува за 15 часа.

Оттука ја добиваме равенката: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{15}$.

Потоа, добиената дробно рационална равенка ја решаваме.

Бидејќи е $x > 0$, двете страни на равенката можеме да ги помножиме со $15x(x+4)$ па ја добиваме еквивалентната равенка

$$15(x+4) - 15x = x(x+4) \quad \text{или} \quad x^2 + 4x - 60 = 0,$$

која има два корена $x_1 = 6$ и $x_2 = -10$.

Бидејќи е $x > 0$, тоа само коренот $x_1 = 6$ дава одговор на нашата задача, а имено: ако славината за празнење е затворена, тогаш славината за полнење го наполнува празниот базен за 6 часа, а ако славината за полнење се затвори, тогаш полниот базен славината за празнење ќе го испразни за $6 + 4 = 10$ часа.

Пример 3. Моторен чамец по текот на една река поминал s *км*, а потоа се вратил назад. На целиот пат се задржал t часа. Да се одреди сопствената брзина на чамецот, ако брзината на течењето на реката е $V \frac{км}{час}$.

Решение: За составување на равенката можеме да се послужиме со следнава шема. Нека сопствената брзина на чамецот во мирна вода е $x \frac{км}{час}$. Тогаш:

	Пат	Брзина	Време
По течењето на реката	s	$x + V$	$\frac{s}{x+V}$
Спроти течењето на реката	s	$x - V$	$\frac{s}{x-V}$

Според условот на задачата, имаме: $\frac{s}{x+V} + \frac{s}{x-V} = t$,

каде што $s > 0$, $V > 0$, $t > 0$, $x > 0$ и $x > V$.

Ги множиме двете страни на дробно рационалната равенка со $(x+V)(x-V) > 0$, па ја добиваме равенката:

$$s(x-V) + s(x+V) = t \cdot (x+V)(x-V),$$

која, по упростувањето ја доведуваме во видот:

$$tx^2 - 2sx - V^2t = 0$$

Ако ја решиме добиената равенка, наоѓаме дека:

$$x_{1,2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + V^2 t^2}}{t}.$$

Бидејќи е $s^2 + V^2t^2 > 0$, тоа составената равенка секогаш има два корена, од кои едниот е позитивен, а другиот — негативен.

Решение на задачата е само позитивниот корен.

Пример 4. Периметарот на еден правоаголник е s *см*, а плоштината му е еднаква на P *см*^{2}. Да се одредат должините на страните на тој правоаголник.

Решение: Нека една страна на правоаголникот има должина x *см*, тогаш другата страна ќе има должина $\left(\frac{s}{2} - x\right)$ *см*, а плоштината на правоаголникот ќе биде $x\left(\frac{s}{2} - x\right)$ *см*^{2}. Но, според условот на задачата, плоштината на правоаголникот е еднаква на P *см*^{2}, па затоа пишуваме: $x\left(\frac{s}{2} - x\right) = P$, каде што $s > 0$ и $P > 0$.

Ја средуваме добиената равенка, па добиваме: $2x^2 - sx + 2P = 0$.

За равенката да има реални корени, треба $D \geqslant 0$, или $s^2 - 16P \geqslant 0$, т.е. $s^2 \geqslant 16P$. Ако параметрите s и P го задоволуваат условот $s^2 > 16P$, тогаш квадратната равенка ќе има два корена: $x_1 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 16P}}{4}$ и $x_2 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 16P}}{4}$.

Лесно се уверуваме дека двата корена се решение на задачата, едниот ни ја дава должината на едната страна, а другиот — должината на другата страна на правоаголникот. Навистина, $x_1 + x_2 = \frac{s}{2}$, т.е. збирот од должините на двете страни на правоаголникот е еднаков на неговиот полупериметар.

Останува уште да докажеме дека важи $\frac{s}{2} - x_1 > 0$, односно $x_1 < \frac{s}{2}$, т.е.

$$\frac{s + \sqrt{s^2 - 16P}}{4} < \frac{s}{2}, \text{ од каде } s + \sqrt{s^2 - 16P} < 2s \quad \text{или} \quad \sqrt{s^2 - 16P} < s.$$

Бидејќи коренот е аритметички, а $s > 0$, тогаш од последново неравенство следува: $s^2 - 16P < s^2$ или $-16P < 0$, кое е вистинито, бидејќи $P > 0$.

Според тоа, задачата ќе има решение ако е $s^2 > 16P$.

ЗАДАЧИ

1. Производот на два едноподруги позитивни цели броја е 255. Кои се тие броеви?

2. Ако од квадратот на еден број го извадиме самиот број, добиваме 210. Кој е тој број?

3. Кој број, зголемен за својата реципрочна вредност, го дава бројот 2?

4. Бројот 144 разложи го на два множитела, чиј збир ќе биде еднаков на 30!

5. Збирот од цифрите на еден двоцифрен број е еднаков на 7, а нивниот производ е 12. Кој е тој број?

6. Разликата на два броја е d, а нивниот производ е p. Кои се тие броеви?

7. Производот од броителот и именителот на една дропка изнесува 63. Ако броителот го зголемиме за 1, а именителот го намалиме за 1, дропката ќе стане еднаква на 1. Која е таа дропка?

8. Да се одреди двоцифрен број, ако е познато дека цифрата на десетките му е за 2 поголема од цифрата на единиците. Ако тој број го помножиме со бројот што е напишан со истите цифри, но во обратен ред, ќе се добие производ еднаков на p ($p = 223$)!

9. Да се одредат должините на основата и кракот на рамнокрак триаголник, ако се знае дека кракот за 1 *см* е подолг од основата, а висината е долга 4 *см*.

10. Кој многуаголник има вкупно 44 дијагонали?

11. Должините на катетите на еден правоаголен триаголник се разликуваат за m *см*, а должината на хипотенузата е еднаква на c *см*. Да се одредат катетите на тој триаголник!

12. Периметарот на еден правоаголник е 20 *см*, а неговата плоштина е 21 *см*^{2}. Одреди ги должините на страните на правоаголникот!

13. Дијагоналата на еден правоаголник е за 1 *см* подолга од едната негова страна. Да се одредат должините на дијагоналата и таа страна на правоаголникот, ако другата страна е долга 5 *см*!

14. Две сили $P_1 = 12$ *kp* и $P_2 = 9$ *kp* дејствуваат врз една точка под прав агол. Да се одреди резултантата на тие сили!

15. Одреди ги катетите на правоаголен триаголник, ако е познат нивниот збир s и хипотенузата c!

16. Поголемата основа на еден рамнокрак трапез е долга 11 *см*, а помалата основа му е еднаква на кракот. Да се одреди кракот на трапезот, ако висината му е 4 *см*!

17. Училишниот двор, со плоштина 36 ари, има форма на правоаголник, чија една страна е подолга за 50 *м* од другата. Одреди ги должините на страните на дворот!

18. Едната славина сама наполнува еден базен за 5 часа побрзо, отколку другата. Двете славини заедно го наполнуваат базенот за 6 часа. За колку часа секоја славина сама ќе го наполни базенот?

19. Една дактилографка отчукала 500 страници, кога секојдневно отчукувала ист број страници. Ако секој ден би отчукувала по 5 страници повеќе, работата би ја завршила за 5 дена порано. За колку дена таа ќе ја заврши работата?

20. Двајца работника заедно можат да свршат една работа за 4 дена. Ако едната половина од работата ја сврши едниот работник, а другата половина — другиот работник, целата работа ќе биде свршена за 9 дена. За колку дена секој работник сам може да ја сврши работата?

21. Еден моторен чамец по течењето на една река изминал 20 *км* кога брзината на течењето е 2,5 *км* на час. При враќањето назад, тој се задржал 2 часа повеќе отколку при спуштањето. Да се одреди брзината на чамецот во мирна вода!

22. Два камиона превезле секој по 60 тони јаглен на одредена релација. Едниот камион при секоја тура товарал по 1 тон јаглен повеќе отколку другиот, па затоа тој својата задача ја извршил со 2 тури помалку отколку другиот. Да се одреди колку тури направил секој камион!

23. Предното тркало на една кола прави 5 завртувања повеќе од задното на изминат пат s *м*. Да се одреди должината на обиколката на секое тркало, ако се знае дека задното тркало има 0,2 *м* подолга обиколка отколку предното тркало!

24. Една кола изминала s *км* за неколку часа. Да се одреди за колку часа го изминала тој пат, кога се знае дека ако се движеше по 2 *км* помалку на час, ќе го поминеше истиот пат за 1 час повеќе!

25. Од градот A за градот B тргнале две коли. Првата кола тргнала 1 час порано, а стигнала во B половина час покасно од другата кола. Да се одредат брзините на колите, ако се знае дека првата кола се движела со 30 *км* на час побавно од втората, а растојанието AB е 440 *км*!

26. Личниот доход на еден работник, по две едноподруги еднакви зголемувања, од 2 000 дин. достигнал 2645 дин. месечно. Со колку проценти се извршени зголемувањата?

27. Колку учесници имало на еден шаховски натпревар, ако секој учесник одиграл само по еден меч со секој од другите, а биле одиграни вкупно 120 меча.

Глава III

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

§ 16. НЕКОИ СВОЈСТВА НА ФУНКЦИИТЕ (повторување)

Минатата година при разгледувањето на тригонометриските функции, линеарната функција и функцијата $y = \frac{a}{x}$, се запознавме и со некои нивни општи својства: парност и непарност, растење и опаѓање, екстремни вредности и др.

Да се потсетиме накратко на тие својства, кои се неопходни за целосното испитување и цртање графиците и на квадратната функција.

16. 1. ПАРНОСТ И НЕПАРНОСТ НА ФУНКЦИИТЕ

Дефиниција 1. *Функцијата $f(x)$ се вика парна, ако за секоја вредност на аргументот x од дефиниционата област на функцијата, важи релацијата*

$$f(-x) = f(x) \tag{1}$$

Пример: Функциите $y = |x|$, $y = x^2$, $y = \cos x$ се парни. Дефинициона област на секоја од тие функции е множеството на сите реални броеви, т.е. $D = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$. Навистина, за секоја вредност на аргументот $x = x_0\,(x_0 \in D)$, важат релациите: $|-x_0| = |x_0|$; $(-x_0)^2 = x_0^2$; $\cos(-x_0) = \cos x_0$, т.е. важи:

$$f(-x) = f(x)$$

Врз основа на дефиницијата 1 за кои да било две симетрични (спротивни) вредности на аргументот x (спрема координантниот почеток), секоја парна функција добива еднакви вредности. Оттука следува дека:

Графикот на парната функција е симетричен спрема ординатната оска (црт. 3).

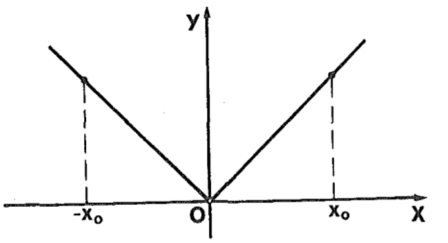
Дефиниција 2. *Функцијата $f(x)$ се вика непарна, ако за секоја вредност на аргументот x од дефиниционата област на функцијата важи релацијата*

$$f(-x) = -f(x) \tag{2}$$

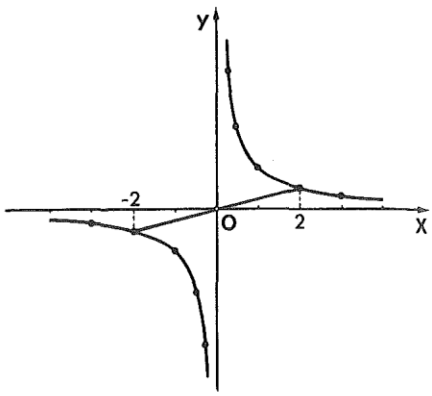
Пример: Такви се функциите: $y = \frac{1}{x}$; $y = 2x$; $y = x^3$; $y = \sin x$. Навистина, за секоја вредност $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, имаме: $\frac{1}{-x_0} = -\left(\frac{1}{x_0}\right)$; $2(-x_0) = -2x_0$; $(-x_0)^3 = -x_0^3$; $\sin(-x_0) = -\sin x_0$, т.е. $f(-x_0) = -f(x_0)$.

Ако имаме предвид дека: за кои и да било две симетрични вредности на аргументот x (спрема координантниот почеток), секоја непарна функција добива спротивни вредности, тогаш заклучуваме дека:

Графикот на секоја непарна функција е симетрично расположен спрема координантниот почеток (црт. 4).



Црт. 3



Црт. 4

Забелешка: Секоја функција не мора да биде парна или непарна. Постојат многу функции, кои не се ниту парни, ниту непарни. Такви се, на пример функциите: $y = x + 1$, $y = x^2 + x$, $y = \sqrt{x}$, кои не се ниту парни, ниту непарни.

16. 2. РАСТЕЊЕ И ОПАЃАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ

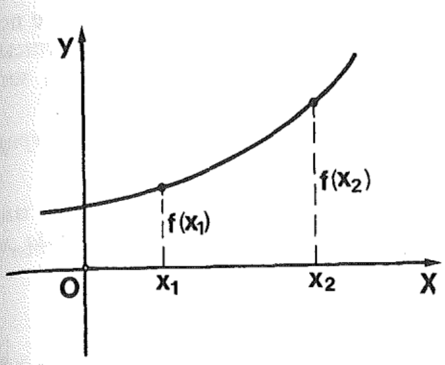
Дефиниција 3. *Функцијата $f(x)$ во интервалот (a, b) од нејзината дефинициона област, се вика растечка, ако за секои две различни вредности на аргументот x од тој интервал, на поголемата вредност на аргументот ѝ одговара и поголема вредност на функцијата* (црт. 5), т.е.

$$a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{3}$$

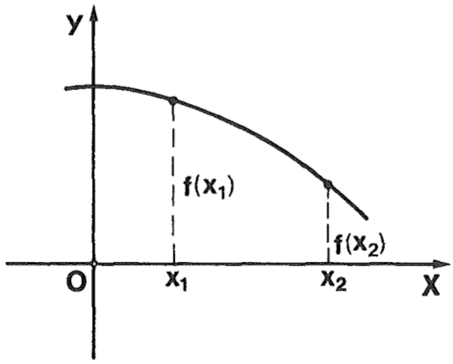
Дефиниција 4. *Функцијата $f(x)$ во интервалот (a, b) од нејзината дефинициона област, се вика опаѓачка (намалувачка), ако за секои две различни вредности на аргументот x од тој интервал, на поголемата вредност на аргументот ѝ одговара помала вредност на функцијата* (црт. 6) т.е.

$$a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \tag{4}$$

Горниве две дефиниции не ги исклучуваат можностите: една функција во целата своја дефинициона област да биде само растечка или само опаѓачка, а друга функција во некои интервали од дефиниционата област да биде растечка, а во други — опаѓачка.



Црт. 5



Црт. 6

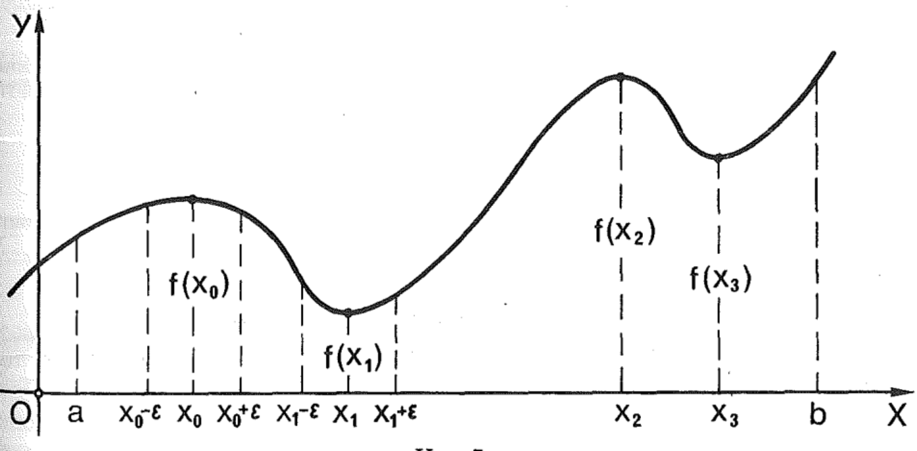
Примери: 1. Функцијата $y = 3x - 2$ во целата дефинициона област $(-\infty; \infty)$ е растечка, а функцијата $y = -2x + 1$ во целата дефинициона област е опаѓачка.

2. Функцијата $y = \cos x$ во интервалот $(0; \pi)$ опаѓа, а во интервалот $(\pi; 2\pi)$ расте.

16. 3. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИТЕ. МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Нека функцијата $y = f(x)$ во интервалот (a, b) од нејзината дефинициона област има график како на цртежот 7.

Од графикот гледаме дека во интервалите (a, x_0); $(x_1; x_2)$; $(x_3; b)$ функцијата расте, а во интервалите $(x_0; x_1)$ $(x_2; x_3)$ таа опаѓа. Во точките, пак, со апсциси x_0 и x_2 функцијата преминува од растење во опаѓање, а во точ-



Црт. 7

ките со апсциси x_1 и x_3 таа преминува од опаѓање во растење. Точките x_0, x_1, x_2, x_3 се карактеристични за функцијата по тоа што, на пример, вредноста на функцијата $f(x_0)$ во точката x_0 е поголема од вредностите на функцијата во која и да било точка од блиската околина* $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ на точката x_0. Во таков случај велиме дека функцијата $f(x)$ во точката $x = x_0$ има максимум еднаков на $f(x_0)$.

Слично на тоа вредноста на функцијата $f(x_1)$ во точката $x = x_1$ е помала од вредностите на $f(x)$ во која и да било точка од нејзината блиска околина. Во тој случај велиме дека функцијата $f(x)$ во точката $x = x_1$ има *минимум* еднаков на $f(x_1)$.

Максимумот и минимумот со заедничко име се викаат *екстремни вредности* на функцијата. Нив ги дефинираме вака:

Дефиниција 5. *Функцијата $f(x)$ во точката $x = x_0$ велиме дека има максимум $f(x_0)$, ако за секоја вредност на x од околината на точката x_0 важи релацијата*

$$f(x_0) > f(x).$$

Дефиниција 6. *Функцијата $f(x)$ во точката $x = x_1$ велиме дека има минимум $f(x_1)$, ако за секоја вредност на x од блиската околина на точката x_1 важи релацијата*

$$f(x_1) < f(x).$$

Пример: Познато ни е дека функцијата $y = \sin x$ во точките $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ има максимум $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, а во точките $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ има минимум еднаков на $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$.

Во општ случај, дадена функција $y = f(x)$ во својата дефинициона област може да нема ниту една екстремна вредност (максимум или минимум), а, исто така, таа може да има и повеќе максимуми и минимуми. Освен тоа, можен е случајот максимумот на функцијата во некоја точка да биде помал од некој минимум во друга точка. На пример, максимумот на функцијата, чиј график е нацртан на црт. 7, во точката x_0 е помал од минимумот на истата функција во точката x_3. Тоа е така бидејќи поимите максимум и минимум на функцијата во некоја точка x_0 се врзани само со вредностите на функцијата од блиската околина на таа точка. Затоа велиме дека тоа се *локални максимуми и минимуми* на функцијата.

Забелешка: Познавањето на погоре изложените својства на функциите во многу го олеснува испитувањето и цртањето на графиците на функциите. Испитувањето на функциите го вршиме по следнава шема:

1. Одредување на дефиниционата област на функцијата,

2. Утврдување дали функцијата е парна или непарна,

3. Одредување нулите на функцијата и интервалите во кои таа добива позитивни, односно негативни вредности,

4. Одредување интервалите на растењето и опаѓањето на функцијата,

5. Одредување максимумите и минимумите на функцијата,

6. Испитување на однесувањето на функцијата при $x \to \pm\infty$.

Горново испитување треба да биде придружено и со постепено цртање на графикот на функцијата.

---

*) Поимот *околина на точка* познат ни е од минатата година.

ЗАДАЧИ

1. Дадена е функцијата $f(x) = 2x - 3$. Да се одреди:

$$f(-2),\ f(0),\ f(1),\ f\left(-\frac{1}{2}\right),\ f(a+1),\ f(a-1)!$$

2. Ако $f(x) = \cos 3x$, одреди: $f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$!

3. Ако $f(x) = x^2 + x + c$, покажи дека: $f(c-1) = c^2$!

4. За кои природни броеви n, функцијата $f(x) = x^n$ е парна, а за кои — непарна?

5. Дадени се функциите: а) $y = 3x$; б) $y = -5x^2$; в) $y = 2x^3$; г) $y = x^3 + x$; д) $y = \cos 3x$; ѓ) $y = \sin 2x$; е) $y = 2\cos x$; ж) $y = \frac{5}{x}$. Одреди кои од нив се парни, а кои непарни!

6. Да се одреди кои од функциите: а) $x|x|$; б) $x^2 + |x|$; в) $x + \operatorname{tg} x$; г) $\frac{1}{x^2}$; д) $\frac{1}{1-x^2}$ се парни, а кои — непарни!

7. Одреди ги нулите на функциите: а) $y = 2x - 5$; б) $y = x^2 + x - 2$!

§ 17. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Општиот вид на полином од втор степен со една променлива, гласи:

$$ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \tag{1}$$

каде што a, b, и c се реални броеви (при што $a \neq 0$), а x — аргумент.

Бидејќи полиномот од втор степен (1) во општ случај содржи три члена, тој се вика уште и *квадратен трином*.

Јасно е дека со промената на променливата x се менува и вредноста на полиномот — квадратниот трином (1). При тоа, за секоја дадена вредност на променливата $x = x_0$ соодветствува една и само една точно определена вредност на квадратниот трином $ax_0^2 + bx_0 + c$.

Според тоа, квадратниот трином (1) е функција на променливата x.
Ако за произволни вредности на променливата x, вредноста на квадратниот трином (1) ја означиме со y, ја добиваме функцијата $y = ax^2 + bx + c$, која се вика *квадратна функција*. Неа ја дефинираме:

Дефиниција: *Функцијата од видот* $f\colon x \to ax^2 + bx + c$, *односно*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ или } y = ax^2 + bx + c, \tag{2}$$

каде што $a \neq 0$, b *и* c *се кои и да било реални броеви, а* x *— аргумент (променлива), се вика квадратна функција.*

Броевите $a \neq 0$, b и c се викаат коефициенти на квадратната функција и тоа: a — коефициент на квадратниот член, b — коефициент на линеарниот член, а c — слободен член.

Условот $a \neq 0$ има суштинска природа, бидејќи во спротивен случај функцијата (2) не би била квадратна, туку линеарна. По однос на коефициентите b и c, дозволено е тие да можат да бидат и еднакви на 0.

Ако $b = c = 0$, квадратната функција го добива видот $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Ако $b = 0$, $c \neq 0$, тогаш функцијата (2) го добива видот $y = ax^2 + c$.

Ако, пак, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$, велиме дека функцијата (2) е во општ вид.

Изразот $D = b^2 - 4ac$ се вика *дискриминанта* на квадратниот трином.

Вредностите на аргументот x, за кои квадратната функција добива вредност нула, се викаат нејзини нули или корени.

Јасно е дека нулите на квадратната функција (2), односно триномот (1) претставуваат корени на квадратната равенка

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3}$$

§ 18. НЕПОЛНИ ВИДОВИ НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

18. 1. ГРАФИК И СВОЈСТВА НА ФУНКЦИЈАТА $y = x^2$

Да го конструираме графикот на функцијата

$$y = x^2 \tag{1}$$

За таа цел ја составуваме следнава таблица на соодветните вредности на аргументот x и функцијата y:

x	-3	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	2,5	3	...
$y = x^2$	9	6,25	4	1	0,25	0	$\frac{1}{4}$	1	4	6,25	9	...

Ако секоја двојка соодветни вредности на аргументот и функцијата од таблицата ги земеме за координати на точка, ќе ги добиеме точките:

$$O(0;\ 0),\quad M_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right),\ M_2(1;\ 1),\ M_3(2;\ 4),\ M_4(2{,}5;\ 6{,}25),$$

$$M_5(3;\ 9), \ldots,\ N_1\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right),\quad N_2(-1;\ 1),\quad N_3(-2;\ 4),\quad N_4(-2{,}5;\ 6{,}25),$$

$N_5(-3; 9)$ итн. Ако овие точки ги конструираме во рамнината xOy и ги сврземе со полна линија, ќе го добиеме графикот на квадратната функција $y = x^2$ (црт. 8).

Гледаме дека нејзиниот график е една крива отворена линија.

Од графикот на функцијата (1) можат да се откријат низа нејзини својства, до кои можеме да дојдеме и по чисто аналитички пат. Тие својства се следниве:

1°. *Функцијата $y = x^2$ е дефинирана за секој реален број, т.е. нејзина дефинициона област е множеството на сите реални броеви*

$$(-\infty;\ \infty).$$

Оттука следува дека, графикот на функцијата (1) се простира неограничено на лево и на десно од ординантната оска, т.е. за која и да било вредност на аргументот $x = x_0$ секогаш соодветствува точка од графикот $M(x_0; x_0^2)$.

2°. *Област на променаша на функцијата* $y = x^2$ *е множеството на сите ненегативни реални броеви*, т.е.

$$0 \leqslant y < \infty.$$

Навистина: квадратот на кој да било реален број не може да биде негативен број. Тоа се гледа и оттаму, што ни една точка од графикот не лежи под апсцисната оска (црт. 8)

3°. $x = 0$ *е единствена нула на функцијата* $y = x^2$, бидејќи $x^2 = 0$ е само за $x = 0$.

Тоа значи дека координантниот почеток $0(0; 0)$ е единствена точка од графикот на функцијата што лежи на апсцисната оска.

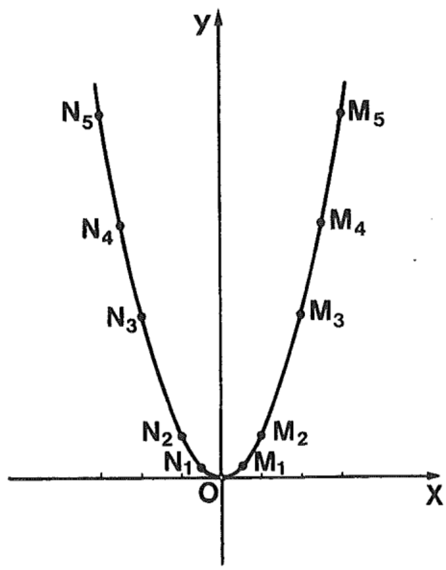
4°. *Функцијата* $y = x^2$ *е парна функција.*

Навистина: во целата дефинициона област таа го задоволува условот

$$(-x)^2 = x^2.$$

Оттука следува дека графикот на функцијата (3) е симетричен во однос на ординантната оска.

5°. *Во интервалот* $(-\infty; 0)$ *функцијата* $y = x^2$ *опаѓа, а во интервалот* $(0; \infty)$ *таа расте.*



Црт. 8

Доказ: Нека x_1 и x_2 се две произволни вредности на аргументот x од интервалот $(-\infty; 0)$ и нека е $x_1 < x_2$. Тогаш е $|x_1| > |x_2|$, па, според тоа, ќе важи релацијата $x_1^2 > x_2^2$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$. А тоа значи дека, функцијата во интервалот $(-\infty; 0)$ опаѓа.

Аналогно, ако x_1 и x_2 се две произволни вредности на аргументот x од интервалот $(0; \infty)$ и $x_1 < x_2$; тогаш, според својството на степените на позитивни реални броеви, ќе биде и $x_1^2 < x_2^2$, односно $f(x_1) < f(x_2)$. А тоа значи дека, функцијата во интервалот $(0; \infty)$ расте.

Ако аргументот x по апсолутна вредност неограничено расте (велиме „се стреми во бесконечност"), тогаш и функцијата $y = x^2$, исто така, неограничено расте („се стреми во бесконечност"). Тоа симболички го запишуваме:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty; \; x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to \infty.$$

6°. За $x = 0$, *функцијата добива минимум* $y = 0$, бидејќи во точката $x = 0$ функцијата преминува од опаѓање во растење.

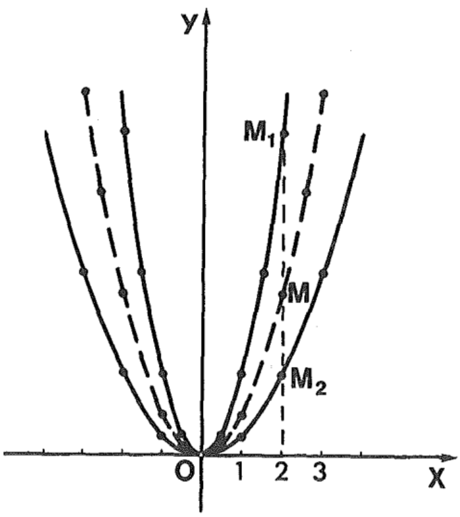
18. 2. ГРАФИК И СВОЈСТВА НА ФУНКЦИЈАТА $y = ax^2$

Во зависност од знакот на коефициентот a ќе разликуваме два случаја:

I. $a > 0$. Очигледно е дека: ако $a > 0$, тогаш за да го добиеме графикот на функцијата

$$y = ax^2, \tag{2}$$

потребно е сите ординати на графикот на функцијата $y = x^2$ да ги помножиме со реалниот број a.



Црт. 9

Влијанието на коефициентот a на формата на графикот на функцијата (2) може да се види и на црт. 9 на кој се нацртани графиците на функциите:

$$y = 2x^2, \quad (a = 2); \quad y = x^2, \quad (a = 1)$$

$$\text{и} \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad \left(a = \frac{1}{2}\right).$$

Од цртежот гледаме дека за иста вредност на аргументот $x = 2$: ординатата на точката M_1 (од графикот на $y = 2x^2$) е 2 пати поголема од ординатата на точката M (од графикот на функцијата $y = x^2$), а ординатата, пак, на точката M_2 $\left(\text{од графикот на } y = \frac{1}{2} \cdot x^2\right)$ е 2 пати помала од соодветната ордината на точката M.

Според тоа, графикот на функцијата $y = ax^2$ го добиваме кога ординатата на секоја точка од графикот на функцијата $y = x^2$, ја зголемиме a пати при $a > 1$, или ја намалиме $\frac{1}{a}$ пати при $0 < a < 1$.

Очигледно е дека при ваквата трансформација на графикот на функцијата $y = x^2$, нејзините основни својства ќе важат и за функцијата $y = ax^2$ при $a > 0$.

II. $a < 0$. Нека е $a = -k$, каде што $k > 0$. Тогаш ќе биде

$$y = -kx^2, \quad k > 0 \tag{3}$$

Очигледно е дека за секоја вредност на аргументот $x = x_0$ функциите $y = kx^2$ и $y = -kx^2$ добиваат вредности kx_0^2 и $-kx_0^2$ што се еднакви по апсолутна вредност, но спротивни по знак.

Според тоа, соодветните точки на графиците на тие функции $M_1(x_0; kx_0^2)$ и $M_2(x_0; -kx_0^2)$ се симетрични по однос на x-оската (црт. 10).

Тој факт покажува дека графикот на функцијата $y = -kx^2$ можеме да го добиеме со симетрично пресликување на графикот на функцијата $y = kx^2$ во однос на x-оската.

Врз основа на сето тоа, лесно се уверуваме дека функцијата (3) ги има следниве основни својства:

1°. *Дефинициона област на функцијата* $y = -kx^2$ $(k > 0)$ *е множеството на сите реални броеви* $(-\infty; \infty)$.

2°. *Нејзината област на промената е множеството на сите непозитивни реални броеви* $(-\infty; 0]$, т.е. $-\infty < y \leqslant 0$.

Тоа покажува дека функцијата $y = ax^2$ при $a < 0$ е ограничена од горе, т.е. целиот нејзин график, со исклучок на точката $0(0; 0)$, е расположен под x-оската.

3°. $x = 0$ *е единствена нула на функцијата.* (Зошто?)

4°. *Функцијата* $y = -kx^2$ $(k > 0)$ *е парна.* (Зошто?)

5°. *Во интервалот* $(-\infty; 0)$ *функцијата расте, а во интервалот* $(0; \infty)$, *таа опаѓа.*

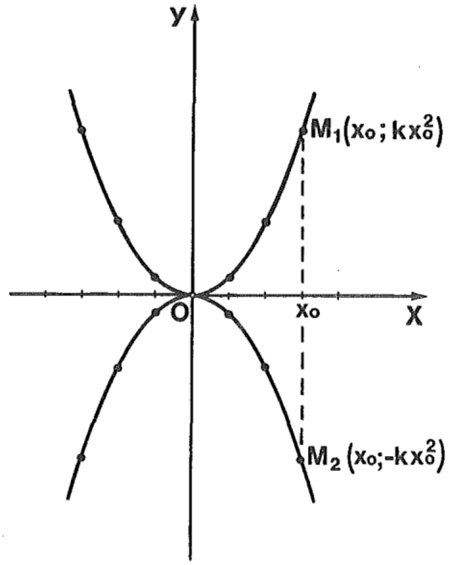
Доказ: Нека x_1 и x_2 се две произволни вредности на аргументот од интервалот $(-\infty; 0)$ и $a < 0$. Тогаш:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| > |x_2| \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow ax_1^2 < ax_2^2,$$

$$\text{т.е. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогно се докажува дека во интервалот $(0; \infty)$ функцијата (3) опаѓа.

6°. *За* $x = 0$ *функцијата има максимум* $y = 0$. (Зошто?)



Црт. 10

Забележуваме дека графикот на функцијата $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ секогаш претставува една крива отворена линија, која во зависност од $|a|$ е позатворена при $|a| > 1$, или поотворена при $|a| < 1$; а во зависност од знакот на коефициентот a нејзината *вдлабната страна* (*конкавноста*) е свртена нагоре при $a > 0$, или таа е свртена надолу при $a < 0$.

Таа крива линија во математиката, поради нејзината голема и разновидна примена, добила посебно име и се вика *парабола*. Затоа заради пократко искажување наместо „график на функцијата $y = ax^2$, $(a \neq 0)$" често велиме „парабола $y = ax^2$, $(a \neq 0)$".

$У$-оската се вика *оска на симетријата на параболата* $y = ax^2$, или пократко, само *оска на параболата* $y = ax^2$, а нејзиниот пресек со параболата — *теме на параболата*.

Очигледно е дека за да го добиеме графикот на функцијата

$$y = ax^2 + c \tag{4}$$

потребно е сите ординати на графикот на функцијата $y = ax^2$ да ги зголемиме за $|c|$ единици при $c > 0$ или да ги намалиме за $|c|$ единици при $c < 0$.

Тоа може да се постигне на два начина: или графикот на функцијата (2) паралелно да го поместиме долж y-оската за $|c|$ единици нагоре (при $c > 0$) или надолу (при $c < 0$); или, пак, наместо графикот, координатниот систем паралелно да го поместиме за исто толку единици во спротивна насока.

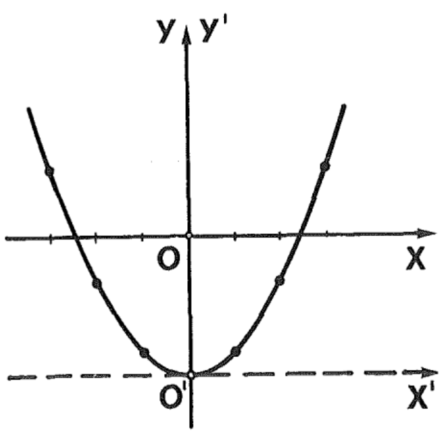
Ние ќе се одлучиме за вториот начин. (Зошто?).

Пример 1. Да се нацрта графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$!

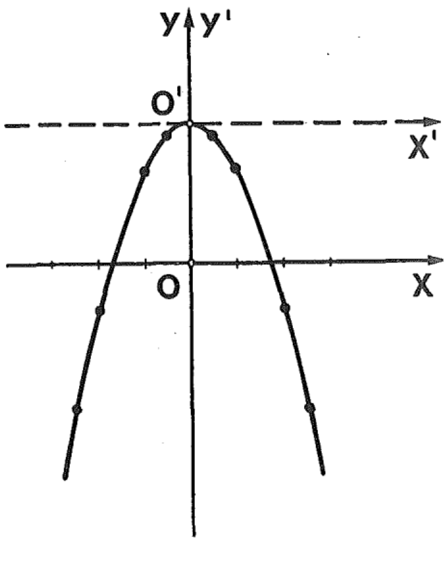
Го цртаме прво графикот на функцијата $y' = \frac{1}{2}x^2$ во помошниот координатен систем $x'O'y'$ (црт. 11). Потоа, апсцисната оска $O'x'$ паралелно ја поместуваме за 3 единици нагоре долж ординатната оска. Како резултат на тоа, ординатите на сите точки од графикот на функцијата $y' = \frac{1}{2}x^2$ ќе се намалат за 3 единици и ќе станат еднакви на

$$y = y' - 3 = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

Според тоа, нацртаниот график на функцијата $y' = \frac{1}{2}x^2$ во помошниот координатен систем $x'O'y'$ во новиот координатен систем xOy ќе претставува график на дадената функција $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ (црт. 11).



Црт. 11



Црт. 12

Пример 2. Да се нацрта графикот на функцијата $y = -x^2 + 3$.

Го цртаме прво графикот на функцијата $y' = -x^2$ во помошниот координатен систем $x' O' y'$ (црт. 12), потоа апсцисната оска $O' x'$ паралелно ја поместуваме за 3 единици надолу. Очигледно е дека при тоа ординатите на сите точки од графикот на функцијата $y' = -x^2$ ќе се зголемат за 3 единици и ќе станат еднакви на $y = y' + 3 = -x^2 + 3$.

Според тоа, нацртаниот график $y' = -x^2$ во помошниот координатен систем $x' O' y'$ во новиот координатен систем ќе претставува график на дадената функција $y = -x^2 + 3$ (црт. 12).

Од начинот на цртањето на графикот следуваат својствата:

1°. *Графикот на функцијата $y = ax^2 + c$ е конгруентен (складен) со графикот на функцијата $y = ax^2$.*

2°. *Графикот на функцијата $y = ax^2 + c$ е парабола, чија оска се совпаѓа со y-оската, а темето ѝ е во точката O' $(c; 0)$. При $a > 0$ параболата со вдлабнатата страна (конкавноста) е свртена нагоре, а при $a < 0$, таа е свртена надолу.*

Покрај горниве својства, функцијата (4) ги има и следниве основни својства:

1°. *Дефинициона област на функцијата $y = ax^2 + c$ е множеството на сите реални броеви* $(-\infty; \infty)$.

2°. *Област на промената на функцијата: при $a > 0$ е интервалот* $[c; \infty)$, т.е. $c \leqslant y < \infty$; *а при $a < 0$ — интервалот* $(-\infty; c]$, т.е. $-\infty < y \leqslant c$.

3°. а) *Ако $a > 0$ и $c > 0$, функцијата нема нули. Тогаш во целата дефинициона област функцијата е позитивна. А ако е $a > 0$, $c < 0$, тогаш функцијата има две нули* $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. *Во интервалите* $\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ и $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}; \infty\right)$ *таа е позитивна, а во интервалот* $\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}; \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ — *негативна.*

б) *Ако $a < 0$ и $c < 0$, функцијата нема нули и во целата дефинициона област таа е негативна. А ако е $a < 0$; $c > 0$, тогаш таа има две нули,* $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. *Во интервалите* $\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ и $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}; \infty\right)$, *таа е негативна; а во интервалот* $\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}; \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ — позитивна.

4°. *Функцијата $y = ax^2 + c$ е парна, па според тоа нејзиниот график е симетричен спрема ординантната оска.*

5°. *Ако $a > 0$, тогаш функцијата $y = ax^2 + c$ во интервалот $(-\infty; 0)$ опаѓа од ∞ до c; а во интервалот $(0; \infty)$ таа расте од c до ∞. Ако, пак, $a < 0$, тогаш функцијата во интервалот $(-\infty; 0)$ расте од $-\infty$ до c, а во интервалот $(0; \infty)$ таа опаѓа од c до $-\infty$.*

6°. *При $a > 0$ функцијата $y = ax^2 + c$ за $x = 0$ има минимум $y = c$, а при $a < 0$ функцијата за $x = 0$ има максимум $y = c$.*

Сите горе наведени својства непосредно следуваат од графикот на функцијата $y = ax^2 + c$; но секое од нив може да се докаже и без да се повикуваме на нејзиниот график.

§ 19. ГРАФИК НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА $y = ax^2 + bx + c$

Квадратната функција од општиот вид

$$y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0) \tag{1}$$

секогаш може да се трансформира во следниов вид:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \text{ т.е.}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \tag{2}$$

кој се вика *каноничен вид* на квадратната функција.

Заради краткост, ако ставиме дека е

$$\frac{b}{2a} = m \text{ и } \frac{b^2 - 4ac}{4a} = n, \tag{3}$$

тогаш каноничниот вид (2) на квадратната функција може да се запише и вака:

$$y = a(x + m)^2 - n \tag{4}$$

или

$$y + n = a(x + m)^2. \tag{5}$$

Ќе покажеме дека графикот на функцијата (5) може да се добие од графикот на функцијата $y = ax^2$.

Ако воведеме нови променливи, ставајќи дека е

$$y + n = y'; \; x + m = x' \tag{6}$$

функцијата (5) го добива видот

$$y' = ax'^2. \tag{7}$$

Графикот на функцијата (5) во координантниот систем $x' O' y'$ познато ни е дека претставува парабола со теме во координантниот почеток O' на тој систем и оска која се совпаѓа со $O' y'$-оската.

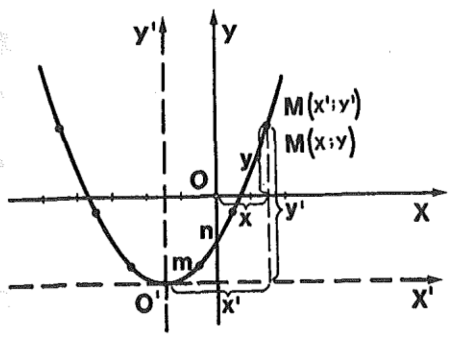
Ако $a > 0$, параболата (7) со конкавноста е свртена нагоре (црт. 13), а ако $a < 0$ со конкавноста таа е свртена надолу (црт. 14).

Ако која да било точка M од параболата (7) во координатниот систем $x' O' y'$ има координати x' и y', јасно е дека координатите на точката $M(x', y')$ ќе го задоволуваат равенството $y' = ax'^2$.

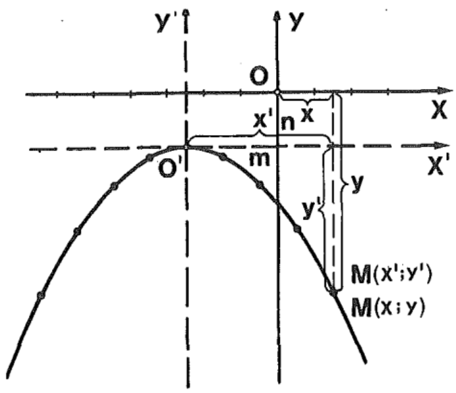
Сега да се вратиме на старите променливи x и y. Од релациите (6) имаме:

$$y = y' - n; \; x = x' - m \tag{6'}$$

Од равенствата ($6'$) гледаме дека: за да преминеме на старите променливи x и y, потребно е ординатите (y') на сите точки од нацртаната парабола (7) да ги намалиме за $|n|$единици при $n > 0$ или да ги зголемиме за $|n|$ единици при $n < 0$; а апсцисите (x'), пак, да ги намалиме за $|m|$ единици при $m > 0$, или да ги зголемиме за $|m|$ единици при $m < 0$. Тоа може да се постигне со транслаторно поместување на координантните оски $O'\,x'$ и $O'\,y'$, а имено:



Црт. 13



Црт. 14

1°. Апсцисната оска $O'\,x'$ транслаторно да ја поместиме нагоре за $|n|$ единици при $n > 0$, или надолу за $|n|$ единици при $n < 0$.

2°. Ординантната оска $O'\,y'$ транслаторно да ја поместиме надесно за $|m|$ единици при $m > 0$, или налево за $|m|$ единици при $m < 0$.

Со ваквото транслатарно поместување на оските $O'\,x' \| Ox$ и $O'\,y' \| Oy$ се добива нов координатен систем xOy, чиј почеток O секогаш ќе падне во точката со координати $(m\,;n)$ во однос на стариот координатен систем $x'\,O'\,y'$. Во тој случај, јасно е дека, координатниот почеток O' на стариот координатен систем $x'\,O'\,y'$, односно темето на нацртаната парабола $y' = ax'^2$ во однос на новиот координатен систем xOy ќе има координати $O'\ (-m;-n)$.

Лесно се уверуваме дека секоја точка M од нацртаната парабола $y' = ax'^2$, која во однос на стариот координатен систем имаше координати $M(x', y')$; во однос на новиот координатен систем xOy таа ќе има координати $M(x, y)$, кои ги задоволуваат релациите ($6'$), па затоа нацртаната парабола во однос на новиот координатен систем ќе претставува график на функцијата (5), односно график на квадратната функција во општ вид

$$y = ax^2 + bx + c.$$

На црт. 13 и 14 покажани се случаите кога m и n се позитивни броеви.

Од изложеното до тука следува следнава:

Теорема: а) *Графиците на функциите $y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^2$ при една иста вредност на $a \neq 0$ се конгруентни (складни) и постои трансформација (транслација), со чија помош графикот на функцијата $y = ax^2$ преминува во график на функцијата $y = ax^2 + bx + c$.*

б) *Графикот на функцијата $y = ax^2 + bx + c$ е парабола со теме во точката $O'\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Оска на таа парабола е правата $x = -\frac{b}{2a}$, која е паралелна со Oy оската и минува низ темето O'. При $a > 0$ параболата со својата конкавност е свртена нагоре, а при $a < 0$ — надолу.*

Пример 1. Да се нацрта графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$.

Според горнава теорема бараниот график ќе биде парабола со теме во точката $O'\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Да ги одредиме прво координатите на темето. Апсцисата на темето ќе биде $-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$. Ординатата на темето може да се одреди од изразот $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, но може и директно, како вредност на дадената функција за $x = 4$, т.е.

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 6 = 8 - 16 + 6 = -2.$$

Го конструираме темето $O'(4; -2)$ и низ него ја повлекуваме оската на параболата $O'y' \parallel 0y$ (црт. 15). Од тоа што $a = \frac{1}{2} > 0$, следува дека параболата со својата конкавност ќе биде свртена нагоре, па според тоа, нејзините гранки ќе ја сечат x-оската, а едната од нив ќе ја сече и y-оската. Апсцисите на пресечните точки на графикот со x-оската ќе ги одредиме кога ќе ја решиме равенката $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$, од која добиваме $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$. Значи, графикот (параболата) ја сече x-оската во точките $P(2; 0)$ и $P'(6; 0)$.

За $x = 0$, функцијата добива вредност $y = 6$. Значи, графикот ја сече y-оската во точката $Q(0; 6)$. Ја конструираме таа точка, а исто и симетричната точка Q' во однос на оската на параболата $O'y'$.

За конструкцијата на графикот потребно е да одредиме уште неколку негови точки, на пример: за $x = 1$, $y = 2\frac{1}{2}$; а за $x = 3$, $y = -1\frac{1}{2}$. Според тоа, точките $A\left(1;\ 2\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(3; -1\frac{1}{2}\right)$ му припаѓаат на бараниот график, но нему му припаѓаат и симетричните точки A' и B' во однос на оската на параболата $O'y'$. Потоа ги соединуваме со полна линија конструираните точки Q, A, P, B, O' B', P', A' и Q' и така го добиваме бараниот график на дадената функција во интервалот (0; 8) (црт. 15).

Пример 2. Да се нацрта графикот на функцијата $y = |-x^2 + 4x - 3|$!

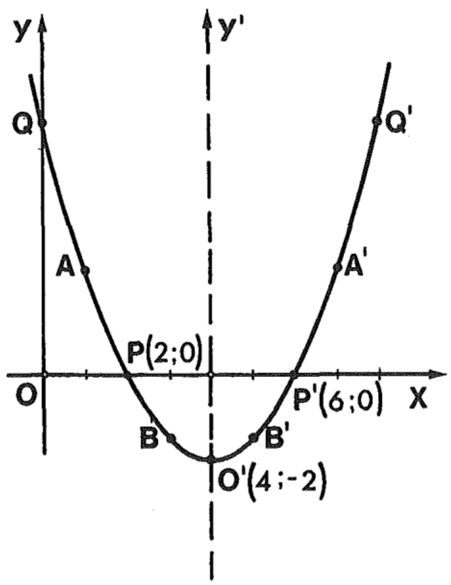
За да го нацртаме графикот на дадената функција потребно е прво да го нацртаме графикот на функцијата $y = -x^2 + 4x - 3$, а потоа оние делови од нацртаниот график (ако има такви), кои се наоѓаат под апсцисната оска, симетрично да ги пресликаме во однос на апсцисната оска. Така добиената крива која целата е расположена над x-оската, ќе биде бараниот график на дадената функција (црт. 16).

Пример 3. Да се нацрта графикот на функцијата $y = x^2 - 5|x| + 4$!

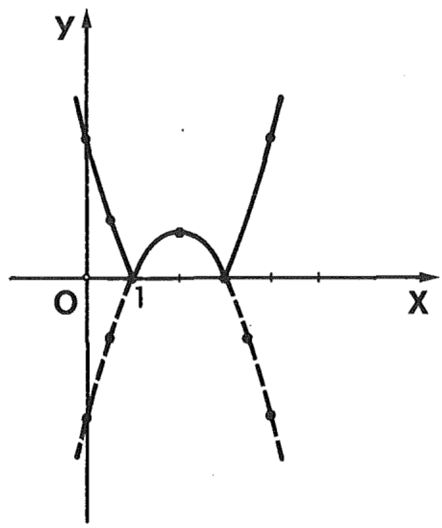
Гледаме дека дадената функција е парна, бидејќи

$$(-x)^2 - 5|-x| + 4 = x^2 - 5|x| + 4.$$

Значи нејзиниот график е симетричен спрема y-оската. Затоа, прво го цртаме делот од нејзиниот график во интервалот $x \geqslant 0$. Тогаш дадената функција го добива видот $y = x^2 - 5x + 4$ за $x \geqslant 0$.



Цр. 15



Цр. 16

Потоа, нацртаниот дел од графикот симетрично го пресликуваме во однос на y-оската. Така го добиваме и другиот дел од графикот на дадената парна функција во интервалот $x < 0$, а со тоа и целиот график на дадената функција (црт. 17).

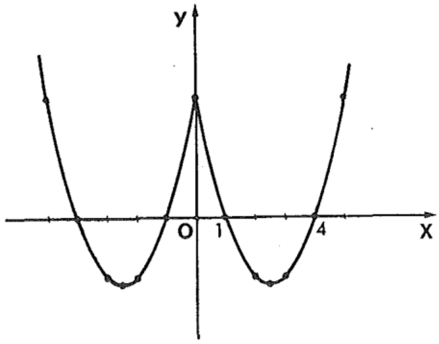
Пример 4. Да се нацрта графикот на функцијата $y = x|x - 2| - 1$!

Ако земеме предвид дека е $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{при} \quad x \geqslant 2 \\ -x + 2, & \text{при} \quad x < 2 \end{cases}$ дадената функција може да се запише во видот:

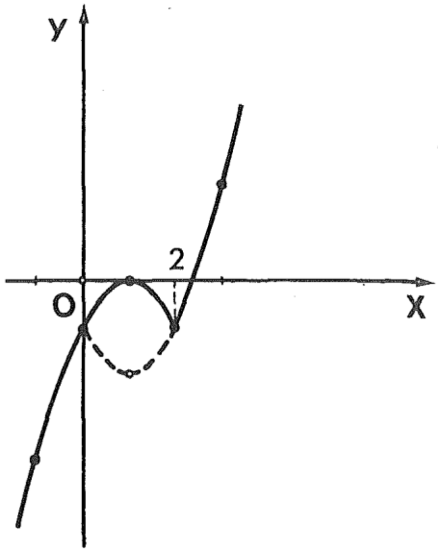
$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x - 1, & \text{при} \quad x < 2 \\ x^2 - 2x - 1, & \text{при} \quad x \geqslant 2 \end{cases} \tag{8}$$

Прво го цртаме делот од графикот на функцијата (8) во интервалот $(-\infty; 2)$. Тој дел од графикот, всушност, е дел од параболата $y = -x^2 + 2x - 1$ во тој интервал. Потоа, го цртаме и другиот дел од бараниот график на дадената функција (8). Тој дел, пак, е дел од параболата $y = x^2 - 2x - 1$ во интервалот $[2; \infty)$.

Така добиената крива (црт. 18) е график на дадената функција.



Црт. 17



Црт. 18

ЗАДАЧИ

1. Доведи ги функциите во канониченвид, а потоа нацртај ги нивните графици: а) $y = 2x^2 - 4x + 2$; б) $y = x^2 - 4x + 7$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$!

2. Нацртај ги графиците на функциите: а) $y = x^2 + 8x - 12$; б) $y = x^2 + x + 7$; в) $y = 2x^2 - 4x - 3$; г) $y = -x^2 + 4x + 5$!

3. Нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\cdot x^2 + 3x + 7$ и со помош на него одреди го текот на дадената функција!

4. Во која точка лежи темето на параболата $y = x^2 + 2kx + k^2$?

5. Во функцијата $y = x^2 - 3x + c$ да се одреди c така, што за $x = 2$ таа да има вредност $y = -3$!

6. За кои вредности на p и q темето на параболата $y = x^2 + px + q$ ќе лежи во точката $M(-2;5)$?

7. Да се одреди функцијата чиј график е парабола со оска на симетријата Оy оската и минува низ точките О $(0;0)$ и A $(4;12)$!

8. Дадена е функцијата: а) $y = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 3$; б) $y = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 2$; в) $y = x^2 + 6x + 11$. Одреди ги координатите на темето на секоја од тие параболи!

9. Нацртај ги графиците на функциите: а) $y = |x^2 - 4|$; б) $y = x|x - 2|$; в) $y = x^2 - |x|$; г) $y = |-2x^2 + 3x + 2|$!

10. Во кружница со радиус x впишан е квадрат. Плоштината на впишаниот квадрат изрази ја како функција од радиусот x и нацртај го графикот на таа функција!

11. Околу кружница со радиус x опишан е рамностран триаголник. Плоштината на тој триаголник изрази ја како функција од радиусот x!

12. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $y = x^2$ и $y = |x|$. Со помош на графиците одреди го множеството вредности на x, за кои ќе важи: а) $x^2 = |x|$; б) $x^2 > |x|$; в) $x^2 < |x|$!

§ 20. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

Да ја разгледаме квадратната функција во општиот вид

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \tag{1}$$

која, како што видовме, секогаш може да се доведе и во канонична форма:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{2}$$

Во §. 19. утврдивме дека нејзиниот график е парабола со теме во точката $O'\left(-\frac{b}{2a}; n\right)$, каде што $n = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Оска на параболата е правата $x = -\frac{b}{2a}$, што е паралелна на y—оската. При $a > 0$, параболата со својата конкавност е свртена нагоре, а при $a < 0$—надолу.

20. 1. ДЕФИНИЦИОНА ОБЛАСТ И ОБЛАСТ НА ПРОМЕНАТА НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

Квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, каде што $a \neq 0$, b, c се дадени реални броеви, за секоја реална вредност на аргументот $x = x_0$ и тој секогаш добива некоја точно одредена реална вредност $ax_0^2 + bx_0 + c$.

Теорема 1. *Дефинициона област на квадратната функција* (1) *е множеството на сите реални броеви* $(-\infty; \infty)$, т.е. $-\infty < x < \infty$.

Областа на промената, пак, односно множеството на вредностите на квадратната функција е утврдено со следнава:

Теорема 2. 1°. *Ако* $a > 0$, *тогаш областа на промената на квадратната функција е интервалот* $\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \infty\right)$, т.е. *ќе важи неравенството*

$$n \leqslant f(x) < \infty, \text{ каде што } n = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

2°. *Ако, пак, $a < 0$, тогаш областа на промената на квадратната функција е интервалот $(-\infty; n)$ т.е. ќе важи неравенството*

$$-\infty < f(x) \leqslant n, \text{каде што } n = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Доказ: Ако во каноничната форма на квадратната функција (2) означиме дека $-\frac{b^2-4ac}{4a} = n$, таа го добива видот

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+n \tag{2'}$$

или

$$y-n = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{2''}$$

1°. Ако $a > 0$, тогаш $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, за секоја вредност на x. Според тоа, од равенството (2″) следува $a > 0 \Rightarrow y-n \geqslant 0$, или $y \geqslant n$. Останува да покажеме дека во тој случај квадратната функција (1), односно (2″) може да добие која да било вредност поголема од n.

Нека е p кој да било реален број од интервалот $(n; \infty)$. Да одредиме за кои вредности на x, функцијата добива вредност $y = p$. За да го одредиме тоа ќе ја решиме равенката $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + n = p$.

Таа е еквивалентна на равенката $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{p-n}{a}$, каде што $\frac{p-n}{a} > 0$, бидејќи $p > n$.

Извлекуваме аритметички корен, и наоѓаме:

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{p-n}{a}}, \quad \text{или} \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{p-n}{a}}.$$

Така добиваме две вредности за x:

$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{p-n}{a}}$; $x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{p-n}{a}}$, од кои $x_1 > -\frac{b}{2a}$, а $x_2 < -\frac{b}{2a}$. Гледаме дека точките x_1 и x_2 на Ox оската се симетрично расположени по однос на точката $x = -\frac{b}{2a}$. Тоа покажува дека правата $y = p$ при $p > n$ го сече графикот на квадратната функција (1) во две точки $(x_1; p)$ и $(x_2; p)$ кои се симетрични во однос на оската на параболата $x = -\frac{b}{2a}$.

2°. Ако $a < 0$, тогаш $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$ за секоја вредност на x.

Според тоа, од равенството (2″) следува

$$a < 0 \Rightarrow y-n \leqslant 0, \text{ или } y \leqslant n.$$

Останува да покажеме дека и во овој случај квадратната функција може да добие која и да било вредност од интервалот $(-\infty; n)$.

Тоа се покажува аналогно како и во претходниот случај.

Со тоа теоремата е докажана.

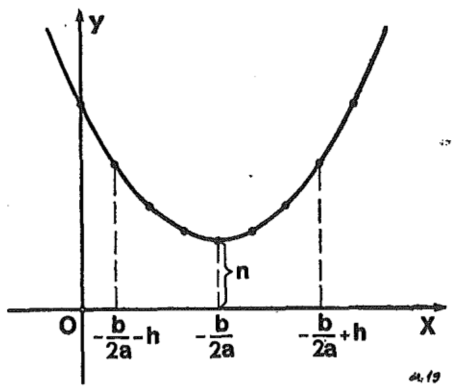
При докажувањето на последнава теорема дојдовме и до следново сознание: Во точките $x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{p-n}{a}}$ и $x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{p-n}{a}}$, кои на x—оската се симетрично расположени по однос на точката $x = -\frac{b}{2a}$, квадратната функција (1) добива еднакви вредности. Тоа важи и при $a > 0$, а исто и при $a < 0$.

Ако означиме $\sqrt{\frac{p-n}{a}} = h$, тогаш од горново произлегува следнава:

Теорема 3. *Во секои две точки, што се симетрично расположени по однос на точката* $x = -\frac{b}{2a}$, *квадратната фунција* (1) *добива еднакви вредности* т.е. *за секое* h *важи равенството*

$$f\left(-\frac{b}{2a} - h\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + h\right).$$

Ова значи дека графикот на квадратната функција (1) е симетричен во однос на правата $x = -\frac{b}{2a}$ (црт. 19).



Црт. 19

Лесно може да се покаже дека важи и следнава:

Теорема 4. *При* $b = 0$, *квадратната функција е парна, а ако* $b \neq 0$, *тогаш таа е ниту парна, ниту непарна.*

20. 2. ИНТЕРВАЛИ НА РАСТЕЊЕ И ОПАЃАЊЕ И ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

Интервалите во кои квадратната функција расте, а во кои опаѓа, ги утврдуваме согласно следнава:

Теорема 5. 1°. *Ако* $a > 0$, *тогаш квадратната функција* (1) *во интервалот* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ *опаѓа од* ∞ *до* n $\left(n = -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, *а во интервалот* $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ *таа расте од* n *до* ∞.

2°. *Ако, йак,* $a < 0$, *шогаш квадрашнаша функција во иншервалош* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ *расше од* $-\infty$ *до* n, *а во иншервалош* $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ *шаа ойаѓа од* n *до* $-\infty$.

Доказ: Теоремата ќе ја докажеме само за случајот кога $a > 0$.

Знаеме дека квадратната функција секогаш може да се доведе во својата канонична форма:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + n, \text{ каде што } \qquad n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{2'}$$

Нека x_1 и x_2 се две различни произволни вредности на аргументот x од интервалот $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ и нека е $x_1 < x_2$, т.е. $x_1 < x_2 < -\frac{b}{2a}$.

Ако кон секоја страна на тоа неравенство додадеме $\frac{b}{2a}$, ќе добиеме:

$$x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} < 0.$$

Гледаме дека двете страни на неравенството $x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}$ се негативни броеви. Ако ги квадрираме, ќе добиеме $\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Ако двете страни на добиеното неравенство ги помножиме со бројот $a > 0$, а потоа кон нив додадеме n, ќе добиеме:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + n > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + n, \text{ т.е.}$$

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ штд.}$$

Значи, при $a > 0$ квадратната функција (2′) во интервалот $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ опаѓа.

За да докажеме дека: при $a > 0$, функцијата (2′) во интервалот $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ расте, доволно е да покажеме дека:

$$-\frac{b}{2a} < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Нека е $-\frac{b}{2a} < x_1 < x_2$, тогаш со додавање кон секоја страна $\frac{b}{2a}$, добиваме:

$$0 < x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}.$$

Гледаме, дека двете страни на неравенството $x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}$ се позитивни броеви. Ако ги квадрираме, ќе добиеме: $\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Ако сега двете страни на тоа неравенство ги помножиме со бројот $a > 0$, а потоа кон нив додадеме n, ќе добиеме:

$$a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2+n < a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2+n, \text{ т.е. } f(x_1) < f(x_2), \text{ штд.}$$

Ако ја земеме предвид теоремата 2, според која: при $a > 0$ областа на промената на квадратната функција се сите вредности од интервалот $(n;\infty)$, т.е. важи $n \leqslant f(x) < \infty$, каде што $n = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, тогаш станува јасно дека: при $a > 0$ квадратната функција во интервалот $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ опаѓа од ∞ до n, а во интервалот $\left(-\frac{b}{2a};\infty\right)$ таа расте од n до ∞.

На сличен начин се докажува и другиот дел од теоремата кога $a < 0$. Тоа докажете го сами.

Теорема 6. 1°. *При $a > 0$, квадратната функција за $x = -\frac{b}{2a}$ има минимум:*

$$y_{min} = n = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

2°. *При $a < 0$, квадратната функција за $x = -\frac{b}{2a}$ има максимум:*

$$y_{max} = n = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Доказ: Од аналитичкиот израз на квадратната функција (2′) гледаме дека вредноста на функцијата претставува збир од два собирока, од кои вториот n не зависи од x, а првиот собирок $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, при $a > 0$, секогаш е ненегативен број; а при $a < 0$ — секогаш е непозитивен број.

1°. При $a > 0$, јасно е дека функцијата ќе добие најмала вредност за онаа вредност на аргументот x за која првиот собирок $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ќе добие најмала вредност.

Бидејќи најмал ненегативен број е бројот нула, тоа првиот собирок ќе добие најмала вредност за $x = -\frac{b}{2a}$, бидејќи само тогаш е $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Според тоа, при $a > 0$, квадратната функција за $x = -\frac{b}{2a}$ добива минимум

$$y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = n = -\frac{b^2-4ac}{4a}, \text{ штд.}$$

2°. При $a < 0$, функцијата (2′) ќе добие најголема вредност за онаа вредност на x за која првиот собирок $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ќе добие најголема вредност. Бидејќи најголем непозитивен број е бројот нула, тоа при $a < 0$, првиот собирок ќе добие најголема вредност за $x = -\frac{b}{2a}$, бидејќи само тогаш $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Според тоа, при $a < 0$, квадратната функција за $x = -\frac{b}{2a}$ добива максимум

$$y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \text{ штд.}$$

Со тоа теоремата е докажана.

Својствата на квадратната функција наоѓаат широка примена и во решавањето на задачи од геометријата, физиката и практиката.

Да го покажеме тоа на следниве примери.

Пример 1. Да се докаже дека од сите правоаголници со даден периметар p, квадратот има најголема плоштина.

Доказ: Нека должината на едната страна на правоаголникот е x. Другата страна на правоаголникот, согласно условот на задачата, ќе биде $\frac{p}{2} - x$, а неговата плоштина $P = x\left(\frac{p}{2} - x\right)$.

Гледаме, дека плоштината на правоаголникот

$$P = -x^2 + \frac{p}{2} \cdot x \tag{3}$$

претставува квадратна функција од должината x на едната негова страна, во која

$$a = -1 < 0,\ b = \frac{p}{2},\ c = 0.$$

Бидејќи $a < 0$, тоа квадратната функција (3) ќе има максимум за

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{p}{2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{p}{4}.$$

Според тоа, од сите правоаголници со периметар p, најголема плоштина ќе има правоаголникот со една страна $x = \frac{p}{4}$ и друга страна $\frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$, а тоа е квадратот што требаше да се докаже.

Пример 2. За која вредност на x, дропката $\frac{5}{x^2 - 4x + 7}$ ќе има најголема вредност и која е таа?

Дадената дропка ќе има најголема вредност за онаа вредност на x, за која нејзиниот именител ќе добие најмала вредност. Именителот на дропката е квадратна функција која за $x = 2$ има минимум $y = 3$.

Според тоа, дропката ќе има најголема вредност за $x = 2$ и таа ќе биде $\frac{5}{3}$.

ЗАДАЧИ

1. Дадена е функцијата $f(x) = x^2 + 6x + 4$. За кои вредности на x ќе важат релациите: а) $f(x) = 4$; б) $f(x) = 2$; в) $f(x) = x$?

2. Одреди ја областа на промената на функцијата: а) $y = (x - 2)^2 + 3$; б) $y = 3x^2 - 2x + 1$; в) $y = x^2 + 5x - 4$!

3. Одреди го множеството на вредностите на функцијата: а) $y = -x^2 + 2x - 1$; б) $y = x(x - 4) + 3$; в) $y = 4x^2 + 4x + 1$!

4. Одреди ги нулите на функциите: а) $y = 4x^2 + 7x - 2$; б) $y = -9x^2 + 12x - 4$; в) $y = 2x^2 + 3x + 5$; г) $y = x^2 - x - 2$!

5. За кои вредности на k, бројот $x = 3$ ќе биде нула на функцијата $y = (k-1)x^2 - 2kx + 3$?

6. Одреди ги интервалите на растење и опаѓање на функциите: а) $y = 3x^2 + 6x + 1$; б) $y = -2x^2 + x + 3$; в) $y = |x^2 + 2x - 3|$!

7. Одреди ги екстремните вредности на функциите: а) $y = 5x^2 - 3$; б) $y = x(2 - x) + 1$; в) $y = x^2 - 6x + 9$; г) $y = 3x^2 - 3x + 5$!

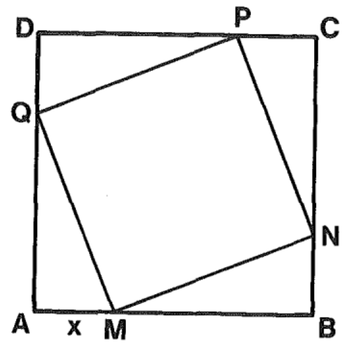
8. За кои вредности на k, функцијата $y = (k-1)x^2 - 2x + k$ има максимум еднаков на 1?

9. Одреди ги коефициентите на квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$ ако $x = -3$ е нејзина нула и ако за $x = 1$ таа има максимум $y = 8$!

10. За која вредност на x, дропката $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$ има најголема вредност и одреди ја таа вредност!

11. Во квадрат со страна a *см*, впишан е квадрат $MNPQ$ (црт. 20). За која вредност на $AM = x$ така впишаниот квадрат ќе има најмала плоштина?

12. Од сите двојки природни броеви, на кои збирот им е 24, да се одредат оние, кои имаат најголем производ!



Црт. 20

§ 21. ЗНАК НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

Квадратната функција во општ вид

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \ (a \neq 0) \tag{1}$$

да ја доведеме во нејзината канонична форма:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right], \tag{2}$$

каде што $D = b^2 - 4ac$ е дискриминанта на квадратната функција.

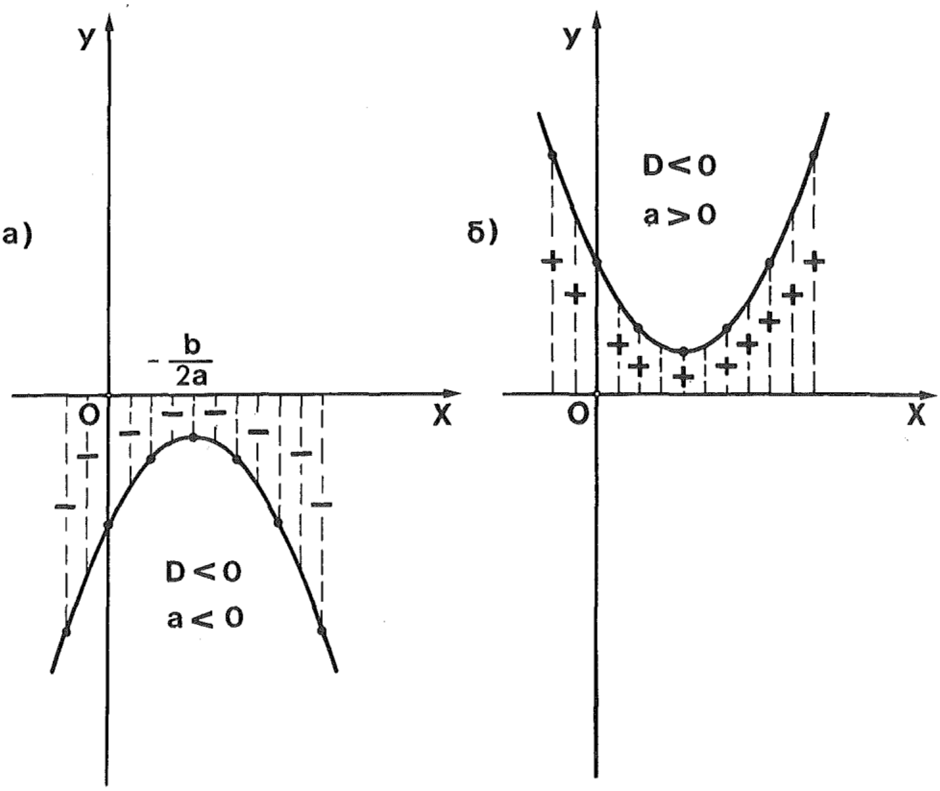
Ќе покажеме дека знакот на квадратната функција зависи од знаците на коефициентот a и дискриминантата D.

Теорема 1. *Ако дискриминантата на квадратниот трином е негативна, тогаш за секоја вредност на аргументот x квадратниот трином има ист знак како и коефициентот a, т.е.*

$$D < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ за секое } x \\ a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ за секое } x \end{cases}$$

Доказ: Нека $D = b^2 - 4ac < 0$. Тогаш $-\frac{D}{4a^2} > 0$, а исто и изразот во средната заграда на равенството (2) за секое x е позитивен. Согласно со равенството (2), бидејќи квадратниот трином $f(x)$ е еднаков на производот од изразот во средната заграда (кој е позитивен) и коефициентот a, тоа неговиот знак се совпаѓа со знакот на a за секоја вредност на аргументот x.

Со тоа теоремата е докажана, која може и геометриски да се интерпретира вака:



Црт. 21

Ако е $D < 0$, квадратната функција (1) нема нули и при $a < 0$ нејзиниот график е расположен под Ox оската (црт. 21-а) затоа таа добива само негативни вредности; а при $a > 0$ нејзиниот график е расположен под Ox оската (црт. 21-б) и тогаш таа добива само позитивни вредности. Значи, ако е $D < 0$, тогаш за секоја вредност на x, знакот на квадратната функција се совпаѓа со знакот на коефициентот a.

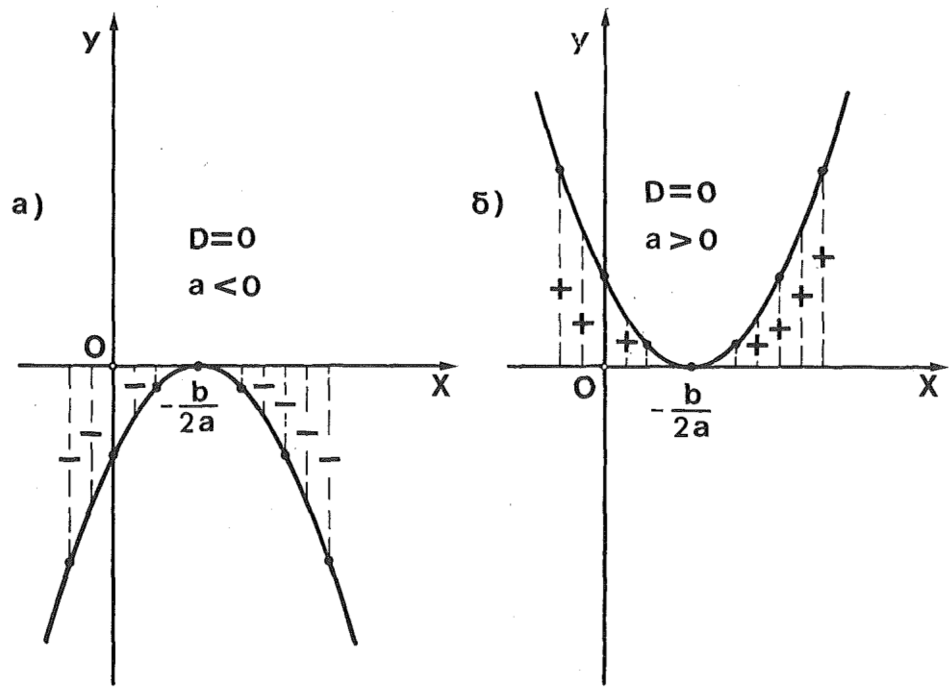
Теорема 2. *Ако дискриминантата на квадратниот трином е еднаква на нула, тогаш квадратниот трином е еднаков на нула за* $x = -\frac{b}{2a}$, *а за секоја друга вредност на аргументот* x *тој има ист знак како и коефициентот* a, т.е.

$$D = 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ за секое } x \neq -\dfrac{b}{2a} \\ a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ за секое } x \neq -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Доказ: Ако $D = 0$, тогаш равенството (2), го добива видот

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Гледаме дека множителот $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ е еднаков на 0 за $x = -\dfrac{b}{2a}$, а за секоја друга вредност на $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ тој е позитивен.



Црт. 22

Според тоа, знакот на квадратниот трином за секоја вредност на $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ се совпаѓа со знакот на коефициентот a. Со тоа теоремата 2 е докажана. Таа може геометриски да се интерпретира вака:

Ако $D = 0$, квадратната функција има еден двоен корен $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, т.е. нејзиниот график ја допира x-оската во точката $x = -\dfrac{b}{2a}$. При $a < 0$, графикот со конкавноста е свртен надолу и е расположен под Ox оската (црт. 22-а), а при $a > 0$ со конкавноста тој е свртен нагоре и е расположен над Ox оската (црт. 22-б). И во тој случај за секоја вредност на аргументот $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, знакот на квадратната функција се совпаѓа со знакот на коефициентот a.

Теорема 3. *Ако дискриминантата на квадратниот трином е позитивна* ($D > 0$), *тогаш тој има две различни реални нули* x_1 *и* x_2. *За сите вредности на аргументот* x *што се надвор од интервалот* $(x_1; x_2)$ *квадратниот трином има ист знак како и коефициентот* a; *а за сите вредности на* x *во интервалот* $(x_1; x_2)$ *тој има спротивен знак на знакот на коефициентот* a, т.е.

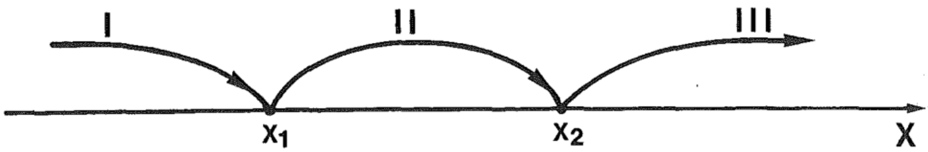
$$D > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{При } a < 0 \begin{cases} f(x) < 0 \text{ во интервалите } (-\infty; x_1) \text{ и } (x_2; \infty) \\ f(x) > 0 \text{ во интервалот } (x_1; x_2) \end{cases} \\ \text{При } a > 0 \begin{cases} f(x) > 0 \text{ во интервалите } (-\infty; x_1) \text{ и } (x_2; \infty) \\ f(x) < 0 \text{ во интервалот } (x_1; x_2) \end{cases} \end{cases}$$

Доказ: Нека $D > 0$. Тогаш квадратниот трином има две различни реални нули x_1 и x_2, и може да се претстави во видот

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (3)$$

Нека $x_1 < x_2$, тогаш тие две вредности го разбиваат множеството на сите реални броеви на три интервали $(-\infty; x_1), (x_1; x_2)$ и $(x_2; \infty)$ (црт. 23).

Да ги испитаме знаците на разликите $x - x_1$ и $x - x_2$ и нивниот производ $(x - x_1)(x - x_2)$ во секој од трите интервали.



Црт. 23

1°. $x \in (-\infty; x_1) \Rightarrow (x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0)$. Затоа, во тој случај ќе биде:
$$(x - x_2)(x - x_1) > 0.$$

2°. $x \in (x_1; x_2) \Rightarrow (x - x_1 > 0$, а $x - x_2 < 0)$.

Оттука следува дека: $(x - x_1)(x - x_2) < 0$.

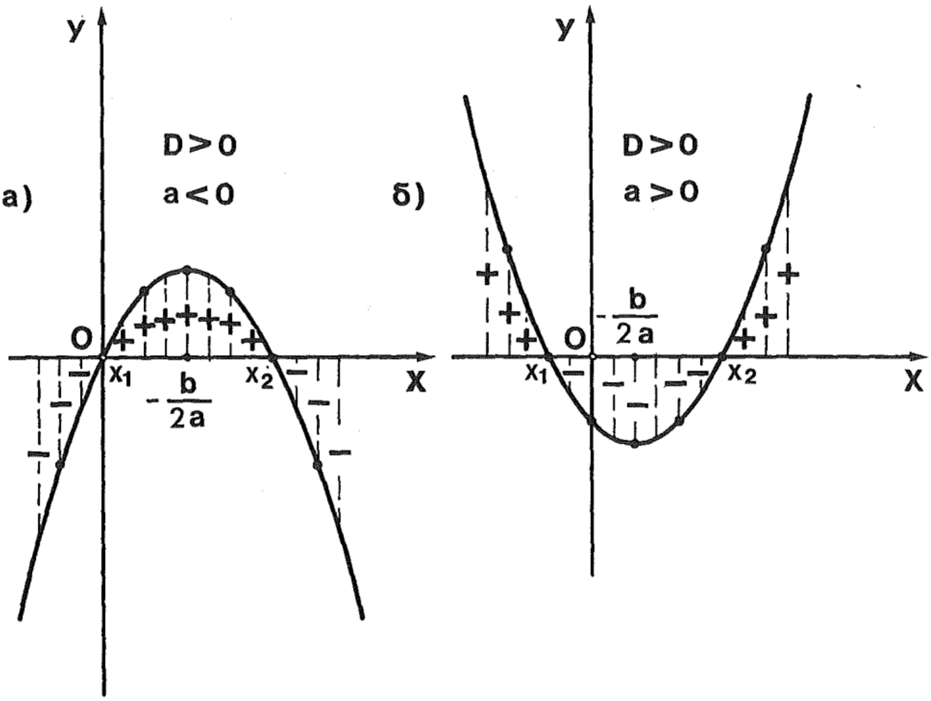
3°. $x \in (x_2; \infty) \Rightarrow (x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0)$.

Затоа, во тој случај ќе биде: $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Гледаме дека, во интервалите $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; \infty)$ производот е $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Според тоа, тогаш десната страна на равенството (3) ќе има ист знак, како и коефициентот a. Во интервалот $(x_1; x_2)$ производот е $(x - x_1)(x - x_2) < 0$, па затоа во тој случај десната страна на равенството (3) ќе има знак што е спротивен на знакот на коефициентот a.

Со тоа теоремата е докажана, која геометриски може да се интерпретира вака:

Ако $D > 0$, тогаш параболата $y = ax^2 + bx + c$ ја сече Ox оската во две точки: x_1 и x_2. При $a < 0$, конкавноста на параболата е свртена надолу (црт. 24-а), а при $a > 0$, таа е свртена нагоре (црт. 24-б). Од цртежите гледаме дека во тој случај квадратната функција ќе има ист знак како и коефициентот a за вредностите на аргументот што се надвор од интервалот $(x_1; x_2)$, т.е. во интервалите $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; \infty)$; а за вредностите на x во интервалот $(x_1; x_2)$ квадратната функција ќе има знак што е спротивен на знакот на коефициентот a (црт. 24).



Црт. 24

Пример 1. Да се одреди знакот на триномот $2x^2 - 3x + 5$!

Дискриминантата на дадениот трином е $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$, а коефициентот $a = 2 > 0$. Според тоа, согласно теорема 1, дадениот квадратен трином е позитивен за секое x.

Пример 2. Да се одреди знакот на триномот $-x^2 + 4x - 4$.

Неговата дискриминанта е $D = 4^2 - 4(-1) \cdot (-4) = 16 - 16 = 0$, а коефициентот $a = -1 < 0$. Значи, тој има една нула $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$.

Врз основа на теорема 2, дадениот трином за секоја вредност $x \neq 2$ добива негативни вредности.

Пример 3. За кои вредности на аргументот x квадратниот трином $6x^2 - 17x + 5$ добива негативни вредности?

Неговата дискриминанта е $D = (-17)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 289 - 120 = 169 > 0$, а и коефициентот $a = 6 > 0$. Според тоа, дадениот трином има две различни нули: $x_1 =$

$$= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{17 + \sqrt{169}}{12} = \frac{17 + 13}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}; \; x_2 = \frac{17 - 13}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Согласно со теорема 3, дадениот трином добива негативни вредности за секое x од интервалот $\left(\frac{1}{3}; 2\frac{1}{2}\right)$.

Пример 4. За кои вредности на параметрите k и p квадратниот трином $kx^2 + px - 3$ добива позитивни вредности само во интервалот $(1; 3)$.

Решение: Дадениот трином ќе добива позитивни вредности само во интервалот $(1; 3)$, ако $k < 0$ и ако тој има две различни нули и тоа еднакви на $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Значи, $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ треба да бидат корени на равенката

$$kx^2 + px - 3 = 0, \tag{4}$$

а $x = 1$ и $x = 3$ ќе бидат корени на равенката (4), ако тие ја задоволуваат равенката (4), т.е. ако е:

$$\begin{cases} k + p - 3 = 0 \\ 9k + 3p - 3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Ако го решиме системот (5), ќе најдеме дека тој има единствено решение $k = -1$; $p = 4$. Значи, дадениот трином го добива видот $-x^2 + 4x - 3$. Навистина, неговиот коефициент пред x^2 е негативен и има два реални корена: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Согласно со теорема 3, тој ќе добива позитивни вредности само во интервалот $(1; 3)$.

Според тоа, бараните вредности на параметрите k и p се: $k = -1$ и $p = 4$.

ЗАДАЧИ

1. За кои вредности на x, квадратниот трином добива позитивни вредности: а) $3x^2 - 5x - 2$; б) $16x^2 - 24x + 9$; в) $-x^2 + x + 6$?

2. За кои вредности на x, триномот има негативни вредности:

а) $4x^2 + 11x - 3$; б) $4x^2 - 4x + 1$; в) $-2x^2 + 5x + 3$?

3. Да се одреди за кои вредности на x, изразите:

а) $x^2 - 2x + 6$; б) $2x^2 - 5x - 3$; в) $-3x^2 + 13x + 10$

добиваат позитивни вредности, а за кои — негативни вредности!

4. За кои вредности на x, изразите се реални (имаат смисла):

а) $\sqrt{x^2 + 2x - 8}$; б) $\sqrt{x^2 - 9}$; в) $\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$?

5. Дадени се функциите: а) $y = 2x^2 - 9x + 7$; б) $y = -x^2 + 3x + 10$; в) $y = 5x^2 - 7x + 2$. Одреди ги интервалите во кои тие добиваат позитивни вредности и интервалите во кои тие имаат негативни вредности!

6. За кои вредности на параметарот k, квадратниот трином $x^2 + (k + 1)x + k + 1$ ќе добива позитивни вредности за секое x?

7. За кои вредности на параметарот p, изразот: а) $px^2 + 6x - 3$; б) $(p + 2)x^2 - 5x + 1$ добива негативни вредности за секоја вредност на x?

8. Дадена е функцијата $y = (k - 1)x^2 - 2kx + k + 3$. Да се одреди за кои вредности на k таа ќе има: а) само позитивни; б) само негативни; в) и позитивни и негативни вредности и нула!

9. За кои вредности на p и k изразот $x^2 - px - (k - 1)$ добива негативни вредности само во интервалот $(1; 2)$?

§ 22. КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Дефиниција 1. *Неравенкиѿе од видоѿ*

$$ax^2+bx+c>0 \tag{1}$$

и

$$ax^2+bx+c<0 \tag{2}$$

каде шѿо $a \neq 0$, b, c *се дадени реални броеви, се викааѿ квадраѿни неравенки со една неѿознаѿа.*

Дефиниција 2. *Решение на една квадраѿна неравенка со една неѿознаѿа се вика секоја вредносѿ на неѿознаѿаѿа* x *за која неравенкаѿа е задоволена,* т.е. *ѿаа ѿреминува во висѿиниѿо бројно неравенсѿво.*

Пример: $x=0$ е решение на квадратната неравенка $-3x^2+x-2<0$, бидејќи за $x=0$ таа преминува во вистинито бројно неравенство $-2<0$; но $x=0$ не е решение на квадратната неравенка $x^2+1<0$, бидејќи за $x=0$ таа преминува во невистинито бројно неравенство $1<0$.

Сите решенија на дадена квадратна неравенка со една непозната во дадена бројна област го образуваат *множесѿвоѿо решенија* на неравенката во таа бројна област. Во одредени случаи множеството решенија на квадратната неравенка може да биде и празно множество.

Пример: Множеството решенија на кадратната неравенка $x^2+1<0$ во областа на реалните броеви е празно множество (Зошто?).

Да се реши една квадратна неравенка со една непозната во дадена бројна област, значи да се одреди множеството од сите нејзини решенија во таа бројна област.

И за квадратните неравенки важат дефиницијата и теоремите за еквивалентност на неравенките, што ни се познати од минатата година.

Очигледно е дека квадратните неравенки (1) и (2) се во тесна врска

со квадратниот трином $\qquad ax^2+bx+c, \qquad (3)$

односно квадратната функција $y=f(x)=ax^2+bx+c$

и квадратната равенка $\qquad ax^2+bx+c=0 \qquad (4)$

При решавањето на квадратната равенка (4) бараме за кои вредности на променливата x, квадратниот трином (3) добива вредност нула. Тие вредности на x се викаат корени на квадратната равенка (4).

При разгледувањето на квадратната функција ги бараме вредностите на триномот и испитуваме како тие се менуваат кога променливата x зема најразлични вредности.

При решавањето, пак, на квадратната неравенка (1), односно (2) ги бараме оние вредности на променливата x, за кои квадратниот трином (3) добива позитивни, односно негативни вредности.

Според тоа, множеството решенија на неравенката (1) е интервалот или унијата од интервалите, во кои квадратниот трином (3) добива позитивни вредности; а множеството решенија на неравенката (2) е интервалот, односно унијата од интервалите, во кои триномот добива негативни вредности.

Видовме дека знакот на квадратниот трином зависи од дискриминантата D и знакот на коефициентот a. Врз основа на тоа, при решавањето на квадратните неравенки ќе ги разликуваме следниве случаи:

I случај. Нека $D < 0$. Тогаш квадратниот трином (3) има ист знак како и коефициентот a за секоја вредност на x. Според тоа:

1°. Ако $a < 0$, тогаш квадратната неравенка $ax^2 + bx + c < 0$ е задоволена за секое x, односно нејзиното множество решенија е множеството на сите реални броеви $(-\infty; \infty)$. Но, квадратната неравенка $ax^2 + bx + c > 0$ во тој случај нема ниту едно решение.

2°. Ако $a > 0$, тогаш квадратната неравенка (2) нема решенија, а квадратната неравенка (1) е задоволена за секое x, т.е. нејзиното множество решенија е $(-\infty; \infty)$.

II случај. Нека $D = 0$. Во тој случај квадратниот трином има две еднакви реални нули $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ и има ист знак како и коефициентот a за секое $x \neq -\frac{b}{2a}$. Според тоа:

1°. Ако $a < 0$, тогаш квадратната неравенка (2) има множество решенија $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$, или $(-\infty; \infty) \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; а квадратната неравенка (1) нема решенија (Зошто?).

2°. Ако, пак, $a > 0$, тогаш квадратната неравенка (2) нема решенија, т.е. нејзиното множество решенија е $\varnothing$; а квадратната неравенка (1) има множество решенија $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ или $(-\infty; \infty) \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

III случај. Нека $D > 0$. Во тој случај квадратниот трином (3) има две различни реални нули $x_1 \neq x_2$ и може да се претстави во видот

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \tag{5}$$

За x_1 и x_2 ќе претпоставиме дека $x_1 < x_2$. Тогаш квадратниот трином (3) за секое x во интервалите $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; \infty)$ има ист знак како и коефициентот a, а за секое x во интервалот $(x_1; x_2)$ тој има спротивен знак од знакот на коефициентот a. Според тоа:

1°. Ако $a < 0$, тогаш квадратната неравенка (2) има множество решенија $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$, а квадратната неравенка (1) има множество решенија $(x_1; x_2)$.

2°. Ако, пак, $a > 0$, тогаш квадратната неравенка (2) има множество решенија $(x_1; x_2)$, а квадратната неравенка (1) има множество решенија $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.

Множествата решенија на квадратнате неравенки (1) и (2) прегледно ги даваме со следнава таблица:

Таблица II

D	a	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$
$D < 0$	$a < 0$	$(-\infty; \infty)$	$\varnothing$
	$a > 0$	$\varnothing$	$(-\infty; \infty)$
$D = 0$	$a < 0$	$(-\infty; \infty) \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$
	$a > 0$	$\varnothing$	$(-\infty; \infty) \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$D > 0$	$a < 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$(x_1; x_2)$
	$a > 0$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

Пример 1. Да се реши квадратната неравенка $4x^2 - x + 24 > 0$!

Решение: Бидејќи $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot 24 < 0$, триномот $4x^2 - x + 24$ за секое x ќе биде позитивен како и коефициентот $a = 4 > 0$. Според тоа, и дадената неравенка ќе биде задоволена за секое x од множеството на реалните броеви $(-\infty; \infty)$.

Пример 2. Да се реши квадратната неравенка $-x^2 + 4x + 5 < 0$!

Решение: Ги помножуваме двете страни на неравенката со -1 и го менуваме знакот на неравенството, па така ја добиваме неравенката $x^2 - 4x - 5 > 0$, која е еквивалентна на дадената.

Гледаме дека: $D = 16 + 20 = 36 > 0$. Значи квадратниот трином $x^2 - 4x - 5$ има две нееднакви реални нули. Тоа се $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.

Бидејќи $a = 1 > 0$, тоа, добиената неравенка има множество решенија $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$. Тоа е и бараното множество решенија и на дадената квадратна неравенка.

Пример 3. Да се реши неравенката $x + (x + 2)^2 < 0$!

Решение: Ја трансформираме левата страна на неравенката, па ја добиваме квадратната неравенка $x^2 + 5x + 4 < 0$, која е еквивалентна на дадената.

Бидејќи $D = 25 - 16 = 9$; $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$, $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ и $a = 1 > 0$, тоа добиената и дадената неравенка имаат множество решенија $(-4; -1)$.

Пример 4. Да се реши квадратната неравенка $x^2 - (k + 1)x + k > 0$, каде што k е параметар.

Решение: Ја одредуваме дискриминантата

$D = (k + 1)^2 - 4k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$.

1°. Ако $k = 1$, тогаш квадратниот трином има една реална нула $x_{1,2} = \dfrac{k+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$, па, според тоа, дадената неравенка има множество решенија $(-\infty; \infty) \setminus \{1\}$.

2°. Ако $k \neq 1$, тогаш квадратниот трином има две различни реални нули: $x_{1,2} = \dfrac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2} = \dfrac{k+1 \pm (k-1)}{2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = k$.

Тука ќе разликуваме два случаја:

а) ако $1 < k$, тогаш квадратната неравенка има множество решенија $(-\infty; 1) \cup (k, \infty)$.

б) ако, пак, $k < 1$, тогаш таа има множество решенија

$$(\infty; k) \cup (1; \infty).$$

З А Д А Ч И

Да се решат следниве неравенки:

1. а) $x^2 - 5x + 6 < 0$; б) $2x^2 - x + 5 < 0$; в) $9x^2 - 3x + 1 > 0$!

2. а) $x^2 - x > 4(x - 1)$; б) $(x + 2)^2 + x > 0$; в) $(x - 1)(x - 3) < 15$!

3. а) $x^2 - 2x > 0$; б) $x^2 - 9 > 0$; в) $4x^2 - 25 < 0$!

4. За кои вредности на k, квадратната неравенка $(k - 4)x^2 + k + 4 > 0$ е задоволена за секое x?

5. Да се докаже дека квадратната равенка $x^2 + 2kx + k^2 - c^2 = 0$, има реални корени за кои да било вредности на параметрите k и c!

6. За кои вредности на параметарот k, квадратниот трином $x^2-(2k+1)x+k+6$ има реални корени?

7. Одреди ги целите вредности на непознатата x, кои ја задоволуваат неравенката $3x^2+7x+2<0$!

8. За кои вредности на параметарот k, квадратната равенка $(k-5)x^2-4kx+k-2=0$ ќе има нееднакви реални корени со различен знак?

9. За кои вредности на p, неравенката $x^2-(p+2)x+p<0$ нема ниту едно реално решение?

10. За кои вредности на k, множеството решенија на неравенката $kx^2+(k-1)x+3>0$ ќе ги содржи сите позитивни реални броеви?

11. За кои вредности на p, равенката $x^2-px+6=0$ ќе има реални корени, што се заклучени во интервалот $(1; 3)$?

12. За кои вредности на k, фукцијата $y=kx^2-kx+1$ добива само позитивни вредности?

13. Кои релации треба да ги задоволуваат коефициентите на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$, за таа: а) да има реални корени; б) да нема реални корени; в) да има еднакви реални корени; г) да има корени со еднаков знак; д) да има корени со различен знак?

14. Дадена е равенката $ax^2+(7-a)x+9=0$. За кои вредности на a таа ќе има два еднакви: а) позитивни; б) негативни корени?

§ 23. ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА КВАДРАТНИТЕ РАВЕНКИ

1. Видовме дека: нулите на квадратната функција

$$y=ax^2+bx+c \tag{1}$$

се корени на квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0 \tag{2}$$

Според тоа, за да се реши графички квадратната равенка (2) треба да се нацрта графикот на квадратната функција (1). Апсцисите на точките, во кои нацртаниот график ја сече или ја допира Ox-оската, се корени на квадратната равенка (2), бидејќи само за тие вредности на аргументот x функцијата има вредност нула $(y=0)$, т.е. само за нив е задоволена равенката $ax^2+bx+c=0$.

Познато е дека: графикот на квадратната функција (2) може да ја сече Ox-оската во две точки, да се допира до Ox-оската, или да нема ниту една заедничка точка со Ox-оската. Ако графикот нема заеднички точки со Ox-оската, тогаш квадратната функција (1) нема нули, односно квадратната равенка (2) нема реални корени.

Пример 1. Да се реши графички квадратната равенка $2x^2-5x-3=0$!

Решение: Го цртаме графикот на квадратната функција

$$y=2x^2-5x-3.$$

Од нацртаниот график (црт. 25) гледаме дека квадратната функција има две нули $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=3$.

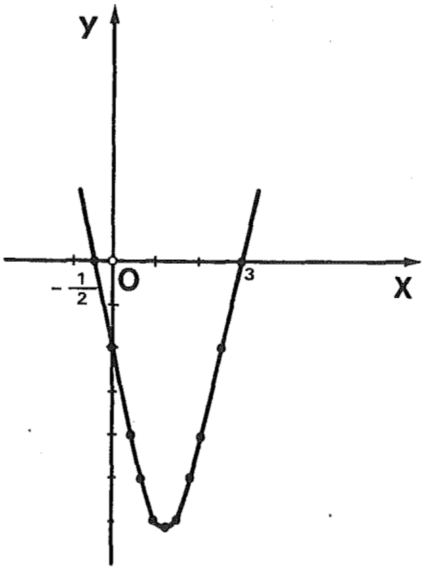
Според тоа, $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=3$ се бараните корени на дадената квадратна равенка.

Пример 2. Да се реши графички квадратната равенка $2x^2 - 4x + 3 = 0$!

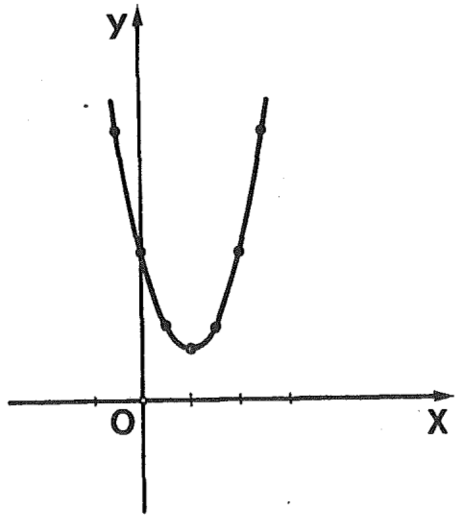
Решение: Го цртаме графикот на квадратната функција

$$y = 2x^2 - 4x + 3.$$

Гледаме дека тој не ја сече Ox-оската, ниту ја допира (црт. 26). Тоа значи дека квадратната функција нема нули, па, според тоа, и дадената квадратна равенка нема реални корени.



Црт. 25



Црт. 26

2. Квадратната равенка

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{2}$$

може да се реши графички и на следниов начин:

Членовите bx и c ги префрлуваме од левата на десната страна на равенката, потоа двете нејзини страни ги делиме со коефициентот $a \neq 0$. Така ја добиваме равенката

$$x^2 = -\frac{b}{a} \cdot x - \frac{c}{a}, \tag{3}$$

која е еквивалентна на дадената.

Гледаме дека левата страна на равенката (3) претставува квадратна функција $y = x^2$, чиј график е парабола со теме во координантниот почеток, а десната страна — линеарна функција $y = -\frac{b}{a} \cdot x - \frac{c}{a}$, чиј график е некоја права.

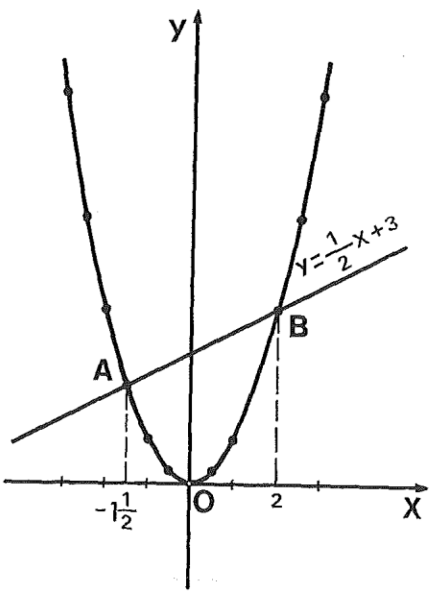
Очигледно е дека, корени на равенката (3) ќе бидат оние вредности на аргументот x, за кои функциите $y = x^2$ и $y = -\frac{b}{a} \cdot x - \frac{c}{a}$ добиваат еднакви вредности.

Графичкото решавање на квадратната равенка (3) ја добива следнава геометриска интерпретација:

Ако ги нацртаме графиците на функциите $y = x^2$ и $y = -\frac{b}{a} \cdot x - \frac{c}{a}$ во ист координатен систем, тогаш нивните графици $\left(\text{параболата } y = x^2 \text{ и правата } y = -\frac{b}{a} \cdot x - \frac{c}{a}\right)$ можат да се сечат во две точки, да се допираат во една точка или да немаат заеднички точки.

Апсцисите на заедничките (пресечни или допирни) точки на графиците на функциите $y = x^2$ и $y = -\frac{b}{a} \cdot x - \frac{c}{a}$, всушност, се оние вредности на аргументот x, за кои соодветните вредности на тие функции се еднакви. А тие вредности на аргументот x се токму бараните корени на равенката (3).

Ако нацртаните графици немаат заеднички точки, тогаш квадратната равенка (3) нема реални корени.



Црт. 27

Пример 3. Да се реши графички квадратната равенка $2x^2 - x - 6 = 0$!

Решение: Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^2 = \frac{1}{2} x + 3.$$

Ги цртаме графиците на функциите $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2} x + 3$ во ист координатен систем (црт. 27). Од цртежот гледаме дека: правата ја сече параболата во точките A и B. Апсцисите на тие точки $x_1 = -1\frac{1}{2}$ и $x_2 = 2$ се корени на дадената квадратна равенка. Проверете!

Графичкиот метод на решавање на квадратните равенки најчесто доведува само до приближно одредување на нејзините корени.

Точноста на одредувањето на корените, во прв ред, зависи од правилната конструкција на графиците, потоа, од дебелината на линиите, размерот на цртежот, видот на цртачката хартија, умешноста на цртачот и од други елементи.

З А Д А Ч И

Да се решат графички следниве квадратни равенки:

1. а) $x^2 - x - 6 = 0$; б) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; в) $2x^2 = x + 3$!

2. а) $x^2 = 2x + 3$; б) $3x^2 - 2x - 6 = 0$; в) $x^2 + x + 1 = 0$!

3. За кои вредности на аргументот x функциите $y = x^2 + 4x - 3$ и $y = 2x^2 - 5x + 5$ имаат исти вредности? Одреди го тоа графички!

4. Да се одреди графички за кои вредности на аргументот x функцијата $y = x^2 - 3x + 2$ има позитивни вредности, не поголеми од 6!

5. Дадени се функциите $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ и $g(x) = 2x + 1$. Нацртај ги нивните графици во ист координатен систем и одреди за кои вредности на аргументот x важат релациите:

а) $f(x) = g(x)$; б) $f(x) > g(x)$; в) $f(x) < g(x)$!

§ 24. ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ОД ЛИНЕАРНА И КВАДРАТНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Дефиниција 1. *Равенката од видот*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

каде што x и y се непознати, а A, B, C, D, E и F се дадени броеви, од кои барем еден од броевите A, B, C е различен од нула, се вика равенка од втор степен или квадратна равенка со две непознати.

Првите три члена во равенката (1) се од втор степен во однос на непознатите x и y, следниве два — од прв степен, а F — слободен член.

Решение на квадратната равенка со две непознати е секоја двојка вредности на непознатите (x_0, y_0), за која дадената равенка е задоволена.

Множеството од сите точки $M(x, y)$ во координантната рамнина xOy, што се решенија на равенката (1) обично, претставува некоја линија G, за која велиме дека е *график на равенката* (1).

Од сите квадратни равенки со две непознати, засега ќе се задржиме само на равенките од видот:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \ (A \neq 0, \ E \neq 0) \tag{2}$$

$$Bxy + F = 0, \ (B \neq 0, \ F \neq 0) \tag{3}$$

Равенките (2) и (3), ако ги решиме по непознатата y, го добиваат

видот:
$$y = -\frac{A}{E} \cdot x^2 - \frac{D}{E} x - \frac{F}{E} \tag{2'}$$

и
$$y = -\frac{F}{B} \cdot \frac{1}{x} \tag{3'}$$

Нивните графици добро ни се познати. Графикот на равенката (2′) е парабола, а графикот на равенката (3′) е равнострана хипербола.

Дефиниција 2. *Две равенки со две исти непознати, од кои барем едната равенка е од втор степен, а другата е од прв или втор степен, а се бараат нивните заеднички решенија, велиме дека образуваат систем равенки од втор степен со две непознати.*

Решение на системот равенки од втор степен со две непознати е секоја двојка вредности на непознатите (x_0, y_0), за која обете равенки од системот се задоволени.

Засега ќе се ограничиме само на графичкото решавање на следниве системи од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{cases} Ax^2+Dx+Ey+F=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases} \qquad (4)$$

и

$$\begin{cases} Bxy+F=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases} \qquad (5)$$

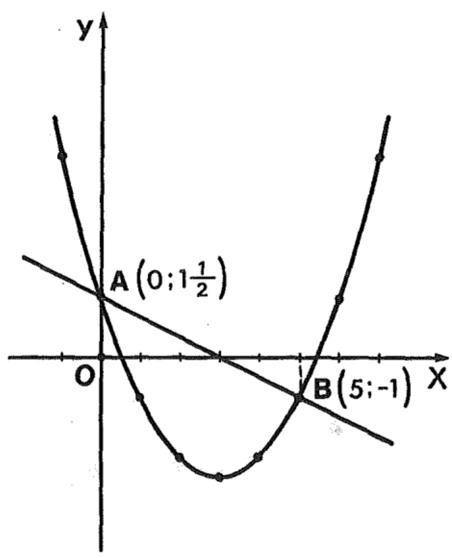
Графичкото решавање на горниве системи равенки со две непознати се состои во следново:

Ги конструираме одделно графиците и на двете равенки од системот во ист координатен систем. Потоа, ги одредуваме координатите на сите заеднички (пресечни и допирни) точки на тие графици. Бидејќи секоја таква точка лежи и на обата графика, тоа нејзините координати (x_0, y_0) ќе претставуваат по едно решение и на дадениот систем равенки. Бројот на заедничките точки на графиците е еднаков на бројот на решенијата на системот, а ако графиците немаат ниту една заедничка точка, тогаш велиме дека и системот равенки нема реални решенија.

Пример 1. Да се реши графички системот равенки:

$$\begin{cases} x^2-6x-2y+3=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$$

Решение: Дадениот систем е еквивалентен на системот равенки



Црт. 28

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ги цртаме поодделно графиците на секоја равенка во ист координатен систем (црт. 28). Гледаме, дека графикот на првата ревенка е парабола, а графикот на втората равенка — права.

Правата ја сече параболата во точките $A\left(0, 1\dfrac{1}{2}\right)$ и $B(5, -1)$.

Според тоа, дадениот систем има две решенија: $\left(0, 1\dfrac{1}{2}\right)$ и $(5, -1)$.

Пример 2. Да се реши графички системот равенки:

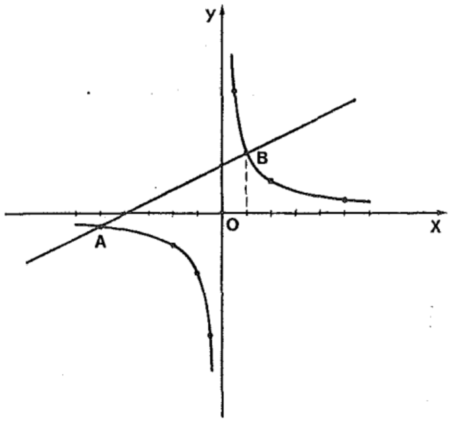
$$\begin{cases} 2xy-5=0 \\ 2x-6y+13=0 \end{cases}$$

Решение: Дадениот систем еквивалентен е на системот равенки:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} \\ y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{13}{6} \end{cases}$$

Графикот на првата равенка е равнострана хипербола, а графикот на втората равенка е права (црт. 29). Од цртежот гледаме дека правата ја сече хиперболата во две точки A и B со координати $A\left(-5, \frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.

Според тоа, дадениот систем равенки има две решенија: $\left(-5, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.



Црт. 29

ЗАДАЧИ

Графички да се решат системите равенки:

1. а) $\begin{cases} 2x^2 + y = 1 \\ x + y - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y - 18 = 0 \\ x - 2y = 0. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} y = 3x^2 - x + 2 \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 4x^2 - 2x - 2 \\ y = 2x + 1. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x^2 - 3x - y + 5 = 0 \\ y = 2x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 2x^2 + 5x - 1 \\ y = 2x + 1. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} xy = -3 \\ x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 2 \\ x - y = 1. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 2xy + 1 = 0 \\ y = 3x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 5y \\ 2y = x - 3. \end{cases}$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Одреди ги реалните броеви x и y, кои го задоволуваат равенството: а) $(3-2xi)(x-3yi)+xyi=7-2i$; б) $x^2-3x+3i=-2+yi$!

2. Да се одредат сите броеви z, кои ја задоволуваат релацијата: а) $z^2=2i$; б) $z^2=\bar{z}$!

3. Изврши ги назначените операции во изразот:

а) $(2k-5pi)-[(3k-pi)-(-3k+pi)+(k+2pi)]$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{2}+i}\right)^2$!

4. Упрости ги изразите:

а) $\left(\frac{1-i}{2+i}-\frac{2+i}{1-i}+\frac{3-i}{1+i}\right)\cdot\frac{7+41i}{5}$; б) $\frac{\sqrt{a-b}-i\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}+i\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a-b}+i\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}-i\sqrt{b}}$!

5. Да се скратат дропките:

а) $\frac{a^2+4b^2}{a-2bi}$; б) $\frac{m+1}{\sqrt{m}+i}$; в) $\frac{m+9n}{\sqrt{m}-3i\sqrt{n}}$!

6. Да се пресмета вредноста на полиномот:
$x^{75}-2x^{65}+3x^{55}-x^{45}+2x^{35}+x^{25}+x^{15}-3x^5+4$ за $x=i$!

7. За кои вредности на параметарот p, квадратната равенка $x^2-px+3=0$ има еден двоен корен?

8. За кои вредности на k, равенките $x^2+kx+1=0$ и $x^2+2x+k-1=0$ ќе имаат барем еден заеднички корен?

9. Квадратната равенка $x^2+px+q=0$ има еден двоен корен $x_1=x_2=1$. Одреди ги параметрите p и q!

10. За кои вредности на p, збирот од квадратите на корените на равенката $x^2+px+p=2$ ќе биде најмал?

11. Да се решат равенките: $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x-2=0$!

12. $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=0$!

13. $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$!

14. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0$!

15. Да се состави алгебарска равенка од најнизок степен со цели рационални коефициенти, која ќе има корени $1+\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$!

16. Да се упрости изразот: $\dfrac{1}{8a^2 - 10a +} - \dfrac{1-a}{12a^2 - 17a + 6} + \dfrac{a-1}{6a^2 - 7a + 2}$!

17. Да се реши равенката:

$$\frac{3}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{x^2 - x - 6}!$$

18. Реши ги равенките:

а) $|x^2 - 2 \cdot |x| - 5| = 2$; б) $||x - 2| - 3| + x^2 - 3x + 1 = 0$!

19. а) $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$; б) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$!

20. а) $|2x \cdot |x + 1| - |x - 1|| = 5$; б) $|x|x - 1| - 2|x - 3|| = 8$!

21. Во зависност од вредностите што може да ги добива параметарот p, одреди го множеството од решенијата на равенката

$$|x^2 + x - 2| - |x^2 - x - 2| = p!$$

22. Да се докаже дека: ако корените на равенката $x^2 + px + q = 0$ се разликуваат за 1, тогаш помеѓу p и q постои релацијата $p^2 = 4q + 1$!

23. Две цевки можат да наполнат еден празен базен за 12 часа. Ако првата цевка сама го полни базенот до половина, а втората цевка сама продолжува да ја дополнува втората половина од базенот, тогаш целиот базен ќе се наполни за 25 часа. За колку време секоја цевка сама може да го наполни базенот?

24. Ако радиусот на еден круг го зголемиме за 1 *см*, неговата плоштина ќе се зголеми 4 пати. Најди го радиусот на тој круг.

25. Збирот од квадратите на три едноподруги цели броја изнесува p. Кои се тие броеви?

26. Учениците од една паралелка, учествувајќи подеднакво, требало да соберат вкупно 420 дин. за купување книги — подарок на граничарите. Бидејќи 7 ученици отсуствувале, секој од останатите платил по 3 дин. повеќе за собирање на истата сума. Колку ученици имало во паралелката?

27. Од два града A и B, чие растојание е 900 *км*, тргнале две патнички коли и се сретнале на половина пат. Да се одреди со каква брзина се движеле колите, ако колата од A тргнала 1/2 час покасно, а се движела со 10 *км*/час побрзо отколку онаа од градот B!

28. Во кој многуаголник бројот на страните е еднаков на бројот на сите дијагонали во него?

29. Ако $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, покажи дека

$$f_1\left(\frac{a+1}{a}\right) + f_2\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2a, \text{ при } a > 1!$$

30. Докажи дека функцијата $F(x) = f(x) - f(-x)$ е непарна!

31. Во функцијата $y = ax^2 + bx + c$ да се одредат коефициентите a, b, c, така што нејзиниот график да минува низ точките: $A(0; 6)$, $B\left(3; -1\frac{1}{2}\right)$ и $C\left(7; 2\frac{1}{2}\right)$!

32. Во функцијата $y = 2x^2 + bx + 11$, одреди го b така, што за $x = -2$ таа да има минимум $y = 1{,}5$!

33. Дадена е параболата $y = -\frac{1}{2}x^2$. Како треба да се промени положбата на координантните оски, така што таа да претставува график на функцијава:

а) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$; в) $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$; г) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$;

д) $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 4$?

34. Да се одреди равенката на параболата, чие теме лежи во точката $T(2; -1)$ и минува низ точката $M(0; 3)$, а оската ѝ е паралелна со Oy оската.

35. Во рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза c, треба да се впише правоаголник со најголема плоштина. Колкава е висината на правоаголникот?

36. Даден е прав агол и точка M што лежи меѓу неговите краци. Низ точката M да се повлече права, која со краците на аголот ќе образува триаголник со најмала плоштина!

37. Да се одреди точка M од дадена отсечка AB, така што производот од растојанијата на таа точка до крајните точки на отсечката да биде еднаков на k^2.

38. Да се одреди параметарот p така, што збирот од квадратите на нулите на функцијата $y = x^2 + (3-p)x - p + 2$ да е најмал!

39. Докажи дека функциите $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ имаат две заеднички нули тогаш и само тогаш, ако $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$!

40. За кои вредности на p, функциите $y = x^2 + x + p$ и $y = x^2 + px + 1$ имаат: а) еднакви нули; б) само една заедничка нула?

41. За кои вредности на параметарот k, корените на равенката $2x^2 - (2k-5)x + (k-3) = 0$ се заклучени меѓу 0 и 1?

42. Точката $M(x, y)$ се движи во координатната рамнина така, што нејзините координати се менуваат по законот: $x = t - 1$, $y = 2t^2$. Конструирај ја траекторијата на движењето на точката M!

43. Да се решат неравенките: $(x+2)(x+3) > x + 3$!

44. а) $(x+2)^2 + x > 0$; б) $(x-1)(x+2) + (x-2)(x+1) < 0$!

45. Да се одреди параметарот c така, што корените x_1 и x_2 на равенката $x^2 + x + c = 0$ да ја задоволуваат неравенката

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geqslant 2!$$

46. За кои вредности на параметарот k и двата корени на равенката $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k - 2 = 0$ ќе лежат во интервалот $(-1, 5)$.

47. Да се докаже дека равенката $(x-1)(x-3) + p(x-2)(x-4) = 0$ има реални корени за секој реален број p!

48. Да се испитаат корените на квадратната равенка $x^2 - 2(k-3)x + k^2 - 7k + 6 = 0$ во зависност од промената на k!

49. За кои вредности на параметарот k, функцијата $y = kx^2 - kx + 1$ ќе добива само позитивни вредности?

50. За кои вредности на параметарот k, двете нули на функцијата $y = x^2 - 2kx + k^2 - 1$ ќе се наоѓаат во интервалот $(-2, 4)$?

СОДРЖИНА

Глава I

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Страна

Глава II

КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Глава III

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

РО за издавање на учебници и наставни средства „Просветно дело" – Скопје ул. „Иво Рибар Лола" б.б. Градски ѕид, блок 4

*

За издавачот
Никола Младеновски

*

Глигор Тренчевски

АЛГЕБРА
за II клас на средното образование
(по програма 5 + 3 часа)

*

Уредник
Кирил Милчев

*

Јазична редакција
Мира Николова

*

Илустрации
Томе Георгиевски

*

Технички уредник
Благоја Попантоски

*

Корицата ја илустрира
Трајче Димчевски

*

Коректор
Димитрие Ѓуровиќ

*

Ракописот е предаден во печат во октомври 1980 година. Печатењето е завршено во јануари 1981 година. Обем: 92 страни. Формат: 17 x 24 см. Тираж: 8 000 примероци. Книгава е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев" – Скопје (904/4990)

Цената е одобрена со решение на Републичкиот завод за цени

512(9

512(075.3)
ТРЕНЧЕВСКИ Глигор
Алгебра: за II клас на средното образование : (по програма 5 + 4 часа) / Глигор Тренчевски ; [илустрации Томе Георгиевски]. – 3. изд. – Скопје : Просветно дело, 1981. – 91 стр. : цртежи; 24 см
1. изд. 1975

НУБ „Кл. Охридски" – Ск