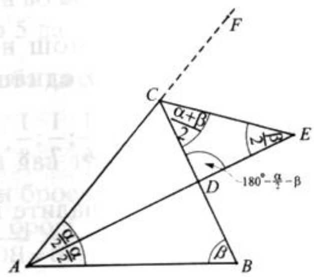
XXIX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Симетралата на аголот BAC во триаголникот ABC ја сече страната BC во точка D, а симетралата на надворешниот агол на аголот ACB ја сече правата AD во точка E. Докажи дека ако триаголникот CDE е правоаголен, тогаш триаголникот ABC е рамнокрак со основа BC.

Решение. Нека $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$ и $\angle ACB=\gamma$. (црт. 1) Тогаш имаме

$$\angle CDE=\angle ADB=180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\beta,\quad \angle DCE=\frac{1}{2}BCF=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$



црт.1

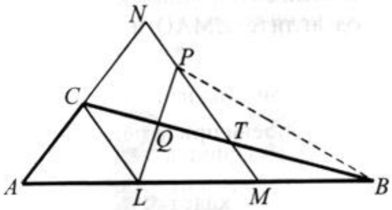
Од ΔCDE следува дека $\angle CED=\frac{\beta}{2}$. Од условот на задачата триаголникот CDE е правоаголен, па останува да откриеме кој од неговите агли е прав. Заради $\frac{\beta}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90^\circ$, добиваме $180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\beta=90^\circ$ т.е. $\alpha+2\beta=180^0=\alpha+\beta+\gamma$ од каде што следува дека $\beta=\gamma$. Значи, ΔABC е рамнокрак со основа BC. ♦

2. Неколку браќа поделиле извесна количина златници. Првиот брат зел 100 златници и $\frac{1}{6}$ од остатокот. Вториот брат зел 200 златници и $\frac{1}{6}$ од новиот остаток итн. Последниот брат зел с што останало. Се покажало дека секој брат зел еднаков број на златници. Колку браќа учествувале во поделбата?

Решение. Првиот брат зел $100+\frac{1}{6}(x-100)$ златници, а вториот брат зел: $200+\frac{1}{6}(x-200-100-\frac{1}{6}(x-100))$ златници. Бидејќи сите браќа добиле еднаков број златници, имаме $100+\frac{1}{6}(x-100)=200+\frac{1}{6}(x-200-100-\frac{1}{6}(x-100))$ од каде што следува дека x=2500. Според тоа првиот брат добил 500 златници. Значи, биле 2500:500=5 браќа. ♦

3. Нека должината на страната AB во триаголникот ABC е три пати поголема од должината на страната AC и нека $\angle BAC=60^0$. На отсечката AB избрани се точки L, M така што $\overline{AL}=\overline{LM}=\overline{MB}$, на правата AC избрана е точка N така што $\overline{AC}=\overline{NC}$, а на отсечката MN избрана е точка P така што $\overline{MP}=3\overline{NP}$. Докажи дека пресечната точка на отсечките BC и MN е тежиште на триаголникот LBP.

Решение. Нека Q е пресечната точка на отсечките LP и BC, а T на отсечките MN и BC (црт. 2). Од условот на задачата $\overline{LM}=\overline{MB}$, па според тоа PM е тежишна линија во ΔLBP. Бидејќи $\overline{AM}=\overline{AN}$ и $\angle MAN=60^0$ добиваме дека триаголникот AMN е рамностран. Понатаму, од $\overline{AL}=\overline{AC}$ и $\angle LAC=60^0$ следува дека триаголникот ALC, е исто така, рамностран. Од условот во задачата добиваме дека CL е средна линија во триаголникот AMN, што значи дека CL||PM, од каде следува дека $\angle CLQ=\angle TPQ$, $\angle QCL=\angle QTP$. (1)



црт.2

Од MT||CL и M е средина на страната LB следува дека MT е средна линија во триаголникот LBC. Тогаш $\overline{MT}=\frac{1}{2}\overline{LC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{4}\overline{AN}=\frac{1}{4}\overline{MN}$. Сега,

$\overline{NP}=\overline{MN}-\overline{MP}=\overline{MN}-3\overline{NP}=\frac{1}{4}\overline{MN}$, и $\overline{PT}=\frac{1}{2}\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AN}=\overline{CL}$. (2)

Од равенствата (1) и (2) добиваме дека $\Delta LQC\cong\Delta PQT$, што значи дека $\overline{LQ}=\overline{PQ}$. Значи, BQ и PM се тежишни линии на триаголникот LBP, па нивната пресечна точка T е тежиштe на триаголникот LBP. ♦

4. Во еден рибник има 25 гладни штуки. За една штука да се засити треба да изеде три други штуки. Колку најмногу штуки може да останат во рибникот, а сите да бидат сити?

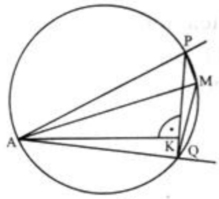
Решение. Најмалиот број на штуки што можат да се заситат јадејќи по три гладни штуки е пет. На тој начин остануваат пет сити и четири гладни штуки. Од четирите гладни штуки, ако една изеде друга, а потоа биде изедена, ќе остане една сита штука. Значи, остануваат шест сити штуки. За да останат барем седум сити штуки, секоја од нив мора да изеде по три штуки, што значи дека вкупно треба да изедат 21 штука за што на почетокот ќе биде потребно да има барем 21+7=28 штуки, а тоа не е случај. Значи, во рибникот може да останат најмногу шест сити штуки. ♦

VII одделение

1. Дали постојат двоцифрени броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ за кои важи $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{abcd}$?

Решение. За двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ важи

$\overline{ab}\cdot\overline{cd}\le\overline{ab}\cdot 99<\overline{ab}\cdot 100=\overline{ab00}<\overline{ab00}+\overline{cd}=\overline{abcd}$ т.е. $\overline{ab}\cdot\overline{cd}<\overline{abcd}$. Значи, такви броеви не постојат. ♦



црт.3

2. Во внатрешноста на аголот со теме во точката A избрана е точка M. Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од точката M на краците на аголот, а K е подножјето на нормалата од точката A на правата PQ. Докажи дека $\angle MAP=\angle QAK$.

Решение. Бидејќи аголот $\angle APM=90^0$ околу триаголникот AMP може да се опише кружница (црт. 3). Притоа точката Q

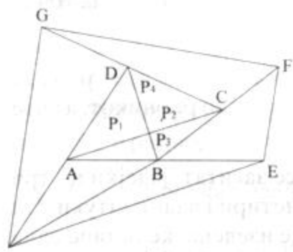
ќе лежи на кружницата затоа што $\angle AQM=90^0$. Според тоа $\angle MPQ=\angle MAQ$ како периферни над лакот MQ, и уште $\angle MPQ=\angle PAK$ како агли со нормални краци, т.е. $\angle MAQ=\angle PAK$. Аголот $\angle MAK$ е заеднички дел од аглите $\angle MAQ$ и $\angle PAK$, па $\angle MAP=\angle PAK-\angle MAK=\angle MAQ-\angle MAK=\angle QAK$ т.е.
$\angle MAP=\angle MAK+\angle KAP=\angle MAK+\angle MAQ=\angle QAK$.♦

3. Докажи дека збирот од квадратите на три цели броеви при делење со 8 не може да даде остаток 7.

Решение. Ако a е цел број кој не е делив со 8, тогаш $a=8k+r$, каде $r\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$ е остатокот при делење на бројот a со 8, т.е. $a^2=8(8k^2+2kr)+r^2$. Значи a^2 и r^2 имаат ист остаток при делење со 8, а бидејќи $r^2\in\{1,4,9,16,25,36,49\}$ следува дека a^2 има остаток 0, 1 или 4 при делење со 8. Според тоа збирот на квадратите на три цели броеви при делење со 8 не може да даде остаток 7.♦

4. Четириаголниците ABCD и EFGH го имаат својството точките B,C,D и A да се средини на отсечките AE,BF,CG и DH, соодветно. Пресметај ја плоштината на четириаголникот EFGH, ако плоштината на четириаголникот ABCD е $1cm^2$.

Решение. Нека P_1 е плоштина на триаголникот ABD, а P_2 е плоштина на триаголникот BCD (црт. 4). Триаголниците ABH и ABD имаат иста основа (AD=AH) и иста висина од темето B, па според тоа имаат иста плоштина. Триаголниците HBE и HAB имаат иста плоштина, бидејќи имаат иста основа (AB=BE) и иста висина од темето H. Значи триаголникот AHE има плоштина $2P_1$. Слично се покажува дека плоштината на триаголникот CFG е $2P_2$. Нека плоштината на триаголникот ABC ја означиме со P_3, а плоштината на триаголникот ACD со P_4. Тогаш плоштината на триаголникот BEF е еднаква на $2P_3$, а плоштината на триаголникот DGH е еднаква на $2P_4$. Плоштината на четириаголникот EFGH е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците AEH, BEF, CFG, DGH и четириаголникот ABCD т.е. $P=2P_1+2P_2+2P_3+2P_4+1=2(P_1+P_2+P_3+P_4)+1=2\cdot 2+1=5cm^2$, бидејќи од условот во задачата имаме $P_1+P_2+P_3+P_4=2cm^2$.♦



црт.4

VIII одделение

1. Дропката $\frac{44}{55}$ претстави ја како збир на две позитивни дропки чии именители се 13 и 5.

Решение. Од равенството $\frac{44}{55}=\frac{x}{13}+\frac{y}{5}$ ја добиваме равенката $5x+13y=44$, која треба да се реши во множеството на природните броеви. Од неа добиваме дека $x=\frac{44-13y}{5}=8-2y+\frac{4-3y}{5}$. Ако ставиме $u=\frac{4-3y}{5}$, u е цел број, добиваме дека $y=\frac{4-5u}{3}=1-2u+\frac{1+u}{3}$. Ако воведеме нова замена $v=\frac{1+u}{3}$, v е цел број, добиваме дека u=3v−1. Ако ги изразиме x и y со помош на v добиваме x=13v+1 и y=−5v+3. Единственото решение во множеството на природните броеви го добиваме за v=0, а тоа е x=1 и y=3.♦

2. Најди ги сите четирицифрени броеви A за кои се исполнети следните три услови:

а) првата цифра на A е два пати помала од последната;

б) втората и третата цифра на A се еднакви;

в) ако бројот A го намалиме за 2 се добива број делив со 143.♦

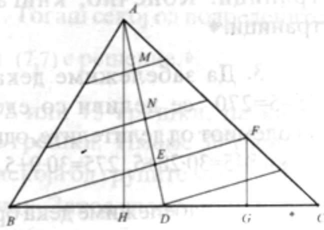
Решение. Нека $A=\overline{abbd}$. Тогаш $\overline{abbd}=1000a+110b+d$. Од условот а) имаме d=2a, па според тоа $\overline{abbd}=1002a+110b$. Затоа, A−2=1002a+110b−2=1001a+110b+a−2. Бидејќи $143=11\cdot 13$ имаме дека 11|(1001a+110b+a−2). Но, 11|1001, 11|110, па затоа 11|(a−2) т.е. a=2, па и d=2a=4. Сега, $A=\overline{2bb4}=2004+110b$. Затоа A−2=2002+110b. Бидејќи 13|2002, 13|(A−2) имаме дека 13|110b. Но, НЗД(13,110)=1 па мора 13|b. Бидејќи b е цифра, следува дека b=0. Конечно, бараниот број е A=2004.♦

3. Нека a и b се природни броеви за кои важи НЗД(a,b)+НЗС(a,b)=a+b. Докажи дека еден од броевите a и b го дели другиот.

Решение. Нека НЗД(a,b)=d. Тогаш постојат природни броеви m и n такви што a=md и b=nd. Тогаш НЗС(a,b)=mnd па, од условот на задачата, добиваме d+mnd=md+nd т.е. (m−1)(n−1)=0 од каде следува дека m=1 или n=1. Ако m=1, тогаш добиваме дека a=d и b=nd, што значи дека a го дели b. Ако n=1, тогаш добиваме дека a=md и b=d, што значи дека b го дели a.♦

4. Во триаголникот ABC точката D е средина на страната BC. За точката E на отсечката AD важи равенството $4\overline{AE}=3\overline{AD}$. Правата BE ја сече страната AC во точката F. Најди го односот на плоштините на триаголниците ABF и BCF.

Решение. Од равенството $4\overline{AE}=3\overline{AD}$ добиваме дека $\overline{AE}=\frac{3}{4}\overline{AD}$. Затоа може да определиме точки M и N на AE такви што $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NE}=\overline{ED}$ (црт. 5). Правите низ M, N и D паралелни со BF ја делат страната AC на пет еднакви дела, така што $\overline{CF}:\overline{CA}=2:5$. Ако е AH висина на триаголникот ABC, тогаш од сличноста на правоаголните триаголници ACH и FCG имаме $\overline{AH}:\overline{FG}=\overline{AC}:\overline{FC}=5:2$ односно $\overline{FG}=\frac{2}{5}\overline{AH}$. Оттука следува дека



црт.5

$$P_{\Delta BCF}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{FG}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{2}{5}P_{\Delta ABC}.$$

Значи $P_{\Delta ABF}=\frac{3}{5}P_{\Delta ABC}$ и $P_{\Delta BCF}=\frac{2}{5}P_{\Delta ABF}$.♦