Vladimir Stojanović

1 MATHEMATISKOP 1

PRIRUČNIK ZA ŠAMPIONE

V i VI razreda OŠ

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA

MATEMATISKOP

MATEMATISKOP 2017

Vladimir Stojanović
MATHEMATISKOP 1
PRIRUČNIK ZA ŠAMPIONE
V i VI razreda

Recenzenti
Veličko Ilić, nastavnik OŠ
spec. Gordana Popović, nastavnik OŠ

Urednik
dr Predrag Cvetković

Tehnički urednik
Goran Nenin

Izdavač
MATEMATISKOP, Despota Olivera 6, Beograd
tel. (011)380-70-90, (011)2413-403, fax: (011)3087-958
www.matematiskop.co.rs
e-mail: office@matematiskop.co.rs

Za izdavača
Nada Stojanović, direktor

Priprema za štampu
Željko Hrček
zeljko.hrcek@gmail.com

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)(079.1)

СТОЈАНОВИЋ, Владимир, 1940-

Priručnik za šampione V i VI razreda OŠ : zbirka rešenih zadataka / Vladimir Stojanović ; [ilustracije Aleksandar Klas]. - Beograd : Matematiskop, 2017 (Kragujevac : Grafostil). - 279 str. : ilustr. ; 24 cm. - (Mathematiskop ; 1)

Tiraž 10.000.

ISBN 978-86-7076-078-3

COBISS.SR-ID 245306380

Štampa: Grafostil Kragujevac
Tiraž: 10.000

ŠAMPIONI

Jedna činjenica je nepobitna – mi živimo u svetu matematike!

Vekovima je MATEMATIKA nesporno nauka broj jedan.

Neki je nazivaju sluškinjom nauke, a ona je u stvari – **kraljica**!

MATEMATIKA je gotovo savršena!

Prvi naučnici bili su matematičari.

Najnovija, najsavršenija, najneverovatnija tehnologija današnjice je plod koji je oprašen na matematičkim granama – to je elektronski računar. Sve to, čemu se s pravom svi divimo, samo je proizvod maleckog napora **ljudskog uma**. To su samo mrvice, nedovoljno iskorišćenog, ogromnog potencijala ljudske pameti.

Taj **Tvorac**, taj BOG NAUKE – ljudski mozak, mora neprestano da se upotrebljava. Mora da se gimnasticira! A najbolja, idealna gimnastika uma je – **igranje matematikom**.

Kad pročitate ovu knjigu, najpažljivije, sa obraćanjem maksimalne pažnje i na naizgled sitne detalje, bićete kao sportista u punom treningu pred odlučujuće takmičenje. Rezultati koje postignete na predstojećim matematičkim takmičenjima pokazaće koliko ste se pripremili. Ako ste već postigli šampionski nivo – primite čestitke, a ako ste propustili jednu šansu, nemojte se predati! Pojačajte tempo rada i – uspeh neće izostati.

DANAŠNJE VREME JE ZLATNO DOBA MATEMATIKE
POZLATITE SE I VI!

Sadržaj

KAKO SE POSTAJE ŠAMPION

Treba biti šampion bez mane, a to zahteva dosta truda. Naravno, ne treba raditi "s brda, s dola", t.j. sve što ti padne (i kad ti padne) u ruke. Samo sistematski rad donosi zrele plodove, a najbolji su plodovi sopstvenog, samostalnog rada.

Prvo, treba temeljno obraditi gradivo iz aktuelnog školskog udžbenika i usvojiti s razumevanjem sve nove pojmove (uz pretpostavku da su pojmovi iz prethodnih razreda usvojeni). Sve to proverimo i utvrdimo rešavanjem zadataka iz ZBIRKE za redovnu nastavu. Pritom ne biramo lekcije i ne preskačemo zadatke (osim onih najjednostavnijih).

Pre nego što se upustite u produbljivanje i proširivanje novostečenog znanja, treba osvežiti staro znanje. Najkraći put za to je da proučite **dodatnu nastavu** za prethodne razrede. Učenici V razreda treba da temeljno pročešljaju knjige PLUS III i PLUS IV (izdanja MATEMATISKOP-a), a učenici VI razreda još i PLUS V.

Kad osvežite staro znanje, pređite na aktuelnu **dodatnu nastavu**. Petaci neka uzmu u ruke PLUS V, a šestaci PLUS VI. Odatle uradite sve zadatke. Ako neki zadatak ne možete rešiti sami, pogledajte REŠENJA ZADATAKA SA UPUTSTVIMA, jer su tamo data kompletna rešenja svih zadataka. U tom slučaju izvucite pouku: šta niste znali ili čega se niste setili. To će vam koristiti ubuduće kao važna iskustva. Zatim, uzmite ovu knjigu i proradite je do kraja.

Teme koje su ovde u SADRŽAJU označene crvenom bojom, predviđene su samo za učenike VI razreda, pa ih petaci preskaču.

Tekstovi zadataka koji su samo za šestake, odštampani su ljubičastom bojom.

Kad sve preporučeno uradite, možete znanje proveriti rešavanjem problema, "s brda, s dola". Međutim, dobro je i da nastavite sa sistematskim radom. Na primer, možete videti šta ima i u drugim knjigama, kao što su: INOSTRANA TAKMIČENJA OSNOVACA (izdanje MATEMATISKOP-a), MATHEMATISKOP 3, 1000 ZADATAKA (Društvo matematičara Srbije) i druge slične knjige, koje se bave matematičkim takmičenjima.

Posle ovakvog rada doživećete takmičenja kao rutinsko vežbanje i to bez treme.

Mojim Indijancima

U Beogradu, 2017. godine.

Vladimir Stojanović

Glava 1

CELI BROJEVI

- Zadaci za zagrevanje
- Elementarni problemi s brojevima
- Deljivost brojeva
- Prosti i složeni brojevi
- Par-nepar
- Dirihleov princip

Pomozite trojici dečaka sa slike da se rasporede tako da cifre na njihovim dresovima obrazuju broj deljiv sa 7.

Celi brojevi

1.1. Zadaci za zagrevanje

Prvih 30 zadataka, kao što kaže naslov, namenjeni su zagrevanju, pripremnom “razmrdavanju vijuga”. Za njihovo rešavanje nije neophodno neko posebno znanje iz matematike. Mnogo je više logike i kombinatorike, nego računanja. I to što treba računati, zahteva primenu osnovnih računskih operacija.

Dakle, osnovne su ideje, a ne račun!

Kad rešite ove zadatke bićete spremni da se uhvatite u koštac sa problemima iz narednih poglavlja.

1. Prazna polja u tabeli popuni brojevima, tako da zbir svaka tri susedna broja, kako u horizontalnim, tako i u vertikalnim redovima bude 15.

	6						
				2			
7							
		3					

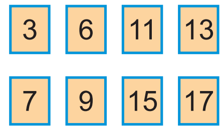
2. Kako ćemo 12 čunjeva rasporediti u 6 redova, a da u svakom redu budu po 4 čunja? Rešenje nacrtaj!

3. Zoran je u svom vrtu zasadio 19 ruža, rasporedivši ih u 9 redova, tako da u svakom redu bude 5 ruža. Kako je on to učinio?

4. Nikola je složio po krugu, jedan za drugim, 10 belih i 10 crnih kamenčića. Idući po krugu uvek u istom smeru, uzimao je svaki sedmi kamenčić. Posle izvesnog vremena svi crni kamenčići bili su pokupljeni, a svi beli su ostali. U kakvom su rasporedu ovi kamenčići bili složeni na početku?

5. Na stolu je 6 čaša i na početku sve su postavljene sa otvorom nagore. One se mogu prevrtati, tako da se u svakom koraku prevrne po 5 čaša. Da li je moguće postići da se svih 6 čaša u jednom momentu nađu sa dnom okrenutim nagore?

6. Pomoću tri kabla, sivog, crvenog i zelenog, poveži parove telefona iste boje, tako da ovi kablovi leže na stolu i ne ukrštaju se.



7. Razmesti u tri vrste kartice sa slike desno, tako da zbir brojeva u prvoj vrsti bude jednak zbiru brojeva u drugoj vrsti i zbiru brojeva u trećoj vrsti.

8. Mlekarica je imala u kanti 8 litara mleka. Jedan kupac sa balonom od 5 litara hteo je da kupi 4 litra mleka. Mlekarica je imala još jednu praznu kantu od 3 litra. Kako su oni kupcu nasuli 4 litra mleka?

9. Imamo dve posude. U prvoj je mleko, a u drugoj skuvana kafa. Iz druge posude zahvatimo punu šoljicu kafe, naspemo je u prvu posudu i sadržaj ove posude promešamo. Potom iz prve posude zahvatimo punu istu šoljicu dobijene “bele kafe” i saspemo je u posudu s kafom. Da li u prvoj posudi ima kafe više nego što u drugoj posudi ima mleka? Obrazloži!

10. Tri ortaka, Zoran, Dušan i Nikola, imaju zajedničku kasu, ali ne žele da bilo koji može sam da je otvori, nego bi hteli da to mogu da učine tek svaka dvojica od njih zajedno. Koliko brava treba da ima kasa i kako treba ortacima podeliti ključeve tih brava?

11. Jednom se vodio ovakav porodični razgovor.

Majka: Juče mi rekoše da je Milan, sin Nade Stojanović, završio drugi razred, iako mu je tek 8 godina.

Otac: Bojim se da grešiš. Sin Nade Stojanović zove se Dušan i tek mu je 5 godina.

Kći: Ja ne poznajem porodicu te Nada Stojanović, ali mi je nedavno drugarica pričala o njenom sinu i dobro se sećam da je rekla da on ima 10 godina, pri čemu je pomenula neko ime koje sigurno nije Milan.

Gost: Izvinite što se mešam, ali budući da dobro poznajem porodicu Stojanović, moram vam reći da je svako od vas napola u pravu. Naime, kada se radi o imenu sina i njegovim godinama, svako od vas izrekao je jedno tačno i jedno netačno tvrđenje.

Gost je bio u pravu. Kako se zove i koliko je star sin Nade Stojanović?

12. Na stolu su tri sveće jednakih dužina, ali nejednakih debljina. Goca je u 8 sati upalila prvu sveću, a posle jednog sata i ostale dve. Sat posle toga izjednačile su se po dužini prva i treća sveća. Kada će se izjednačiti po dužini prva i druga sveća, ako treća cela izgori za 8 sati, a druga cela izgori za 12 sati?

13. Bane i Mirjana, ljuti šahovski protivnici, igraju međusobno meč, menjajući naizmenično boju šahovskih figura. Oboje igraju veoma oštro i nijedna od 11 do sada odigranih partija nije završena remijem. Uvek je neizvesno ko će pobediti, čak ni bele figure nisu nikakva prednost. Naime, čak pet puta do sada pobedio je igrač sa crnim figurama. Ukupan rezultat je 7 : 4 za Baneta. Koji igrač ima bele figure u dvanaestoj partiji?

14. Na jednom teniskom turniru svaki igrač je odigrao po jedan meč sa svakim od ostalih učesnika. Na kraju se ispostavilo da je devet desetina učesnika ostvarilo bar po jednu pobedu. Koliko je igrača učestvovalo na ovom turniru?

15. Raspolažemo sa dva peščana sata. Kod prvog sav pesak iscuri iz jedne polovine u drugu za ravno 25 minuta, a kod drugog za 20 minuta. Kako ćemo pomoću ova dva peščana sata najjednostavnije izmeriti pola sata?

16. Raspolažemo sa 9 klikera, jednakih po izgledu i veličini, od kojih je jedan malo lakši od ostalih 8 koji imaju jednake mase. Kako ćemo sa dva merenja na osetljivim terazijama utvrditi koji je kliker najlakši?

17. Od 8 novčića jednakih po izgledu, jedan je neispravan (ne znamo da li je lakši ili teži od ostalih). Kako ćemo sa tri merenja na osetljivim terazijama utvrditi koji je novčić neispravan i da li je on teži ili lakši od ostalih?

18. U deset kutija spakovano je po 20 kesica napunjenih kafom. Bruto masa kesica (zajedno s kafom) iznosi 100 g za svaku kesicu iz devet kutija. U jednoj kutiji, ne znamo kojoj, upakovane su kesice mase 90 g. Kako ćemo samo jednim merenjem utvrditi u kojoj su kutiji kesice od 90 g?

19. Zbir četiri broja je 208. Ako se prvom broju doda 3, ili se drugom oduzme 3, ili se treći pomnoži sa 3, ili se četvrti podeli sa 3, uvek se dobije isti rezultat. Odredi ova četiri broja.

20. Jedna crkva ima dva različita zvona. Oba udaraju ravnomerno. Udari prvog zvona čuju se svake četvrte sekunde, a udari drugog svake treće sekunde. Istovremeni udari oba zvona čuju se kao jedan udar. Jednog dana su se oba zvona oglasila istovremeno. Neko je pažljivo brojao i izbrojao 20 udara zvona. Koliko je vremena proteklo od prvog do poslednjeg udara zvona?

21. Svaki čovek, od nastanka običaja rukovanja do danas, rukovao se određen broj puta. Dokaži da je parni broj onih ljudi, koji su se rukovali neparan broj puta.

22. Guska i po, za dan i po, snese jaje i po. Koliko jaja snese 9 gusaka za 9 dana?

23. Nadica je donela jaja na pijacu. Prvom kupcu prodala je polovinu od ukupnog broja jaja i još pola jajeta. Drugom kupcu prodala je polovinu od preostalih jaja i još pola jajeta. Tako je bio uslužen i treći kupac, a zatim četvrti i peti. Kada je peti kupac otišao, korpa je ostala prazna. Koliko je jaja donela ova seljanka?

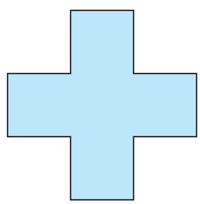
24. Obrćući se na vrhu klizaljke Irena se za 10 sekundi 20 puta našla licem prema svom partneru Dušanu, koji je nju za to vreme obišao dva puta. Koliko obrta u sekundi napravi Irena? Razmotri oba slučaja: kada se partneri obrću u istom smeru, ili u suprotnim smerovima.

25. Nađi najmanji prirodni broj koji počinje cifrom 1 i koji postaje tri puta veći kada mu se prva cifra prebaci na poslednje mesto.

26. Da li je moguće na šahovskoj tabli od 64 polja dospeti konjem iz levog donjeg ugla u desni gornji ugao, tako da konj prethodno skoči po jednom na svako od ostalih polja šahovske table?

27. Na šahovskoj tabli od 64 polja rasporedi pet kraljica (dama) tako da sva polja na tabli budu zauzeta tim damama, ili su od njih tučena.

28. Koliko se najviše dama može postaviti na šahovsku tablu od 64 polja, tako da one ne tuku jedna drugu?



29. Figuru na slici podeli sa dva reza na delove od kojih se može sastaviti kvadrat.

30. Dešifruj mozaik, tj. slova zameni odgovarajućim ciframa, tako da budu ispunjene sve operacije, horizontalno i vertikalno. Zatim dobijene cifre poređaj u rastući niz sleva udesno. Ako ispod svake cifre napišeš odgovarajuće slovo, dobićeš reč čiji smisao je istaknut ispod svakog mozaika.

a)
$$\begin{array}{ccccc} EDE & - & AR & = & EBA \\ : & & - & & - \\ G & \cdot & EO & = & DE \\ \hline AO & + & RE & = & BER \end{array}$$
(grad u Srbiji)

b)
$$\begin{array}{ccccc} IRE & : & RA & = & RE \\ - & & \cdot & & + \\ UNC & - & UT & = & UEE \\ \hline EEI & - & TII & = & UCM \end{array}$$
(planina u Srbiji)

1.2. Elementarni problemi s brojevima

Poznavanje strukture brojeva i osobina osnovnih računskih operacija olakšava razumevanje i rešavanje problema o brojevima. Sledeća grupa od 40 zadataka takve je prirode, da za njihovo rešavanje treba samo dobro razmisliti, nekad manje, a nekad dublje. Od "velike matematike" ovde vam je potrebno samo poznavanje osnovnih računskih operacija i bistra glava.

Svi zadaci se odnose na dekadni zapis broja.

31. Broj zapisujemo tako što prirodne brojeve $1, 2, 3, \ldots$ dopisujemo redom jedan za drugim. Tako dobijemo: 123456789101112... Koja se cifra nalazi na 2017-om mestu?

32. Koliko se cifara upotrebi za numerisanje strana enciklopedije, ako su označene sve strane ove knjige, od prve do dvehiljadite?

33. U broju 275486392 Milica je izbrisala tri cifre, tako da je preostali broj:

a) najmanji, b) najveći.

Koji je broj ostao?

34. Nađi najmanji prirodni broj koji ima zbir cifara 100.

35. Kako se broj 121 može dobiti kao rezultat množenja dva broja koji nisu veći od 10?

36. Kojom se cifrom završava proizvod prvih 2017 neparnih brojeva?

37. Koja se peta cifra zdesna (cifra desetina hiljada) dobija u rezultatu sledećeg množenja (proizvoda): $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 28 \cdot 29$?

38. Brojeve, $25, 26, 27, \ldots, 55, 56$ podeli u četiri grupe, tako da su zbirovi brojeva u svim grupama jednaki među sobom.

39. U kvadratiće upiši devet različitih cifara: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tako da budu tačne jednakosti:

$$\square \cdot \square\,\square = \square\,\square\,\square = \square\,\square \cdot \square$$

(Imamo dva jednocifrena, dva dvocifrena i jedan trocifreni broj.) Pokušajte da nađete dva (nesimetrična) rešenja.

40. Data je sledeća tabela:

	1	2	3	4	5
1	$\mathbf{1 \cdot 1}$	$\mathbf{1 \cdot 2}$	$\mathbf{1 \cdot 3}$	$\mathbf{1 \cdot 4}$	$\mathbf{1 \cdot 5}$
2	$\mathbf{2 \cdot 1}$	$\mathbf{2 \cdot 2}$			
3					
4	$\mathbf{4 \cdot 1}$	$\mathbf{4 \cdot 2}$	$\mathbf{4 \cdot 3}$		
5					

U polja roze obojenog pravougaonika upisuju se proizvodi brojeva prve kolone, redom sa odgovarajućim brojevima prve vrste, kao što je na slici delimično zapisano.

Pokušaj napamet (bez zapisivanja) da izračunaš zbir svih proizvoda iz roze obojenog pravougaonika. Koliki je taj zbir, ako obojeni pravougaonik ima 10×10 polja?

41. Na školskoj tabli napisano je nekoliko znakova minusa i nekoliko pluseva. Svaki učenik može izbrisati dva znaka, bilo koja, ali mora umesto dva izbrisana upisati jedan novi znak. Ako izbriše dva plusa ili dva minusa, upisuje novi plus, a ako izbriše jedan plus i jedan minus, upisuje novi minus. Ovaj postupak ponavlja se dotle dok na tabli ne ostane samo jedan znak.

Možemo li redosled brisanja znakova podesiti tako da na kraju ostane znak koji želimo?

42. Dva časovnika sa kazaljkama navijena su 1. aprila 2017. godine u podne. Jedan od njih radi tačno, a drugi napreduje po 45 sekundi za jedan sat. Kog će dana i u koliko sati oba časovnika prvi put ponovo pokazivati isto vreme?

43. Deda i unuk imaju zajedno 65 godina. Koliko godina ima svaki od njih, ako unuk ima onoliko meseci koliko deda ima godina?

44. Moj pradeda je rođen u XIX veku. Koje je godine on slavio šezdeseti rođendan, ako je u XX veku imao x godina one kalendarske godine koja se zapisuje brojem x^2?

45. Aca i Nemanja su pošli u kupovinu. Aca je od svog oca dobio 350 dinara, a Nemanja od svog oca 150 dinara. Tada su Aca i Nemanja zaključili da imaju 350 dinara vise nego pre polaska u kupovinu.

Da li su dobro izračunali?

46. “Deda Vlada i unuk Luka imaju danas rođendan. Godine jednog i drugog pišu se istim ciframa. Razlika njihovih godina jednaka je tvom kućnom broju”, reče Lana Ivoni.

Ivona je vrlo brzo izračunala koliko godina imaju Vlada i Luka. Koliko su stari deda i unuk?

47. Filip i Luka reše da kupe po jednu zbirku zadataka. Filipu nedostaje 16 dinara za tu zbirku, a Luki nedostaje 5 dinara. Zbog toga odluče da zajedno kupe jednu knjigu. Međutim, ni tada nisu imali dovoljno novca. Nedostajala su im još 2 dinara. Koliko staje ta zbirka zadataka? Koliko je dinara imao svaki od ova dva dečaka?

48. Uroš i Stefan imaju nešto novca i reše da kupe po jednu zbirku zadataka. Prvom nedostaje 7 dinara, a drugom 2 dinara. Zbog toga reše da kupe jednu zbirku zajednički. Međutim, ni tada nisu imali dovoljno novca. Kolika je cena ove zbirke zadataka i koliko je novca imao svaki od ovih dečaka, ako je cena izražena celim brojem dinara?

49. Za dve olovke i pet svezaka treba platiti 110 dinara, a za osam olovki i dve sveske 80 dinara. Odredi cene olovke i sveske.

50. Za pola sveske treba platiti 10 dinara više nego za pola olovke, a za tri olovke treba 10 dinara više nego za dve sveske. Koliko treba platiti za olovku, a koliko za svesku?

51. U dvorištu su kokoške i ovce. Ima svega 40 glava i 130 nogu. (Sve kokoške i ovce su zdrave i čitave.) Koliko ima kokošaka, a koliko ovaca?

52. U jednoj školi na dva dečaka dolaze tri devojčice, a na deset dečaka ima jedan nastavnik. Koliko je u školi dečaka i devojčica, ako ima ukupno 936 učenika i nastavnika?

53. Bračni parovi Stepanović, Cvetković i Šelmić takmičili su se u streljaštvu. Na kraju su imali ukupno 1000 poena. Muževi su bili precizniji i postigli su 604 poena. Cvetković (Predrag) imao je isti broj poena kao i njegova žena. Stepanović (Aca) imao je jedan i po puta više pogodaka od svoje žene, a Šelmić (Ratko) postigao je dva puta više poena od svoje žene. Od žena Ljuba je bila najbolja i za 10 poena je pobedila Sanju, koja je takođe za 10 poena bila bolja od Vanje. Odredi koliko su poena imali poimenično i ko je kome muž, odnosno žena.

54. Nakon određenog broja radnih dana, pri izgradnji nekog industrijskog postrojenja, brigada je počela raditi udarnički, pa je svaka 3 dana posla skratila na 2 dana. Ako je celi posao završen za 70 umesto za 90 dana, koliko se dana radilo udarnički?

55. Na udaljenosti od 125 metara pas je spazio zeca i pojurio za njim. Istog trenutka zec se dao u beg. Jednim skokom zec preskače pola metra, a pas 2 metra. Osim toga, dok zec skoči sedam puta, pas skoči dva puta. Koliko je metara pretrčao pas od trenutka kada je spazio zeca, do trenutka kad ga je ulovio?

56. U trci kornjača pobedila je favorit Željka, koja je za 5 minuta prešla 8 metara. Svaki od sudija pratio je trku tačno po jedan minut i svaki je tvrdio da je za to vreme Željka prešla tačno jedan metar. Kako je to moguće, ako je u svakom trenutku bar jedan od sudija pratio trku?

57. Putnički voz se kreće brzinom od 48 km na sat i mimoilazi se sa brzim vozom koji se kreće u suprotnom smeru brzinom od 72 km na sat. Mašinovođa putničkog voza utvrdio je da je brzi voz pored njega prolazio tačno 6 sekundi. Kolika je dužina kompozicije brzog voza?

58. Puž se kreće po ravnom stolu konstantnom brzinom i posle svakih 15 sekundi okrene se za 90°, a u intervalima između okretanja kreće se pravolinijski. Dokaži da se puž može vratiti u početni položaj samo posle celog broja minuta.

59. Pomoću tri tega moguće je na terazijama izmeriti bilo koju masu izraženu prirodnim brojem manjim od 14. Kolike su mase tih tegova?

60. Promućurni trgovac ima u jednom džaku 80 kg šećera, koji prodaje samo na celi broj kilograma i raspolaže terazijama (sa dva tasa). Odredi koji je najmanji broj tegova koje treba nabaviti da bi za svakog kupca bilo dovoljno samo jedno merenje. Kolike su mase tih tegova?

61. Dat je lanac od 60 karika, od kojih svaka ima masu 1 g. Koliko najmanje karika treba raseći da se od lanca dobiju delovi, od kojih se kombinovanjem mogu načiniti "tegovi" pomoću kojih se na terazijama jednim merenjem može izmeriti svaka celobrojna masa od: 1 g, 2 g, 3 g, $\ldots$, 60 g?

62. Odredi najveći prirodni broj kod kojeg bilo koje dve uzastopne cifre određuju broj deljiv sa 23.

63. Od tri broja, a, b, c, sabiranjem po dva dobili smo: 332, 408, 466. Odredi brojeve a, b, c.

64. Na jednom listu napisan je niz od pet celih brojeva, a na drugom listu su svi mogući zbirovi od po dva člana prvog niza. Na drugom listu piše: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Šta piše na prvom listu?

65. Zbir jednog dvocifrenog i jednog trocifrenog broja je četvorocifreni broj. Svaki od ta tri broja jednako se čita, kako sleva udesno, tako i zdesna ulevo, tj. u svim brojevima su cifre simetrično raspoređene. Nađi te brojeve.

66. Između dva naselja, na svakom kilometru puta postavljen je stub sa dve table. Na jednoj piše rastojanje u kilometrima od prvog naselja, a na drugoj rastojanje od drugog naselja. Zanimljivo je da ukupni zbir cifara oba broja na svakom stubu iznosi 14. Koliko je rastojanje između ova dva naselja?

67. Branki je saopšten zbir dva jednocifrena (prirodna) broja, a Valentini je poznat zbir njihovih kvadrata. Između ovih devojčica vodio se sledeći razgovor:

Valentina: "Ja ne znam koji su to brojevi".

Branka: "Njihov zbir je dvocifren".

Valentina: "Sada znam koji su to brojevi".

Koja su ta dva broja?

68. Nađi najmanji prirodni broj koji se završava cifrom 6, a uvećava se četiri puta ako mu se poslednja cifra premesti na prvo mesto.

69. Odredi šestocifreni broj, čiji su proizvodi sa 2, sa 3, sa 4, sa 5 i sa 6, takođe šestocifreni brojevi, koji se pišu istim ciframa kao i traženi broj, samo u različitim rasporedima.

70. Dve prijateljice, Vera i Nada, koje su zajedno išle u osnovnu školu i učestvovale na matematičkim takmičenjima, srele su se u Nišu pred školom u kojoj su učila njihova deca. Vera se setila da je Nadi danas rođendan i poljubila je uz čestitku. Nada se zahvali i reče:

"Interesantno je da i sve tri moje ćerke danas slave rođendan".

"Zaista", začudi se Vera, "a koliko su stare?"

"Proizvod brojeva njihovih godina je 36, a zbir tih brojeva jednak je broju na školi", reče Nada i pokaza kućni broj na školskoj zgradi.

Vera pogleda broj i sleže ramenima, jer na osnovu onoga što je čula i videla nije mogla odrediti starost devojčica.

"Najstarija, Milena, obožava matematiku", dodade Nada.

"Divno", uzvrati Vera, "sad znam koliko su stare tvoje ćerke".

Kako je Vera izračunala starost devojčica?

1.3. Deljivost brojeva

Pored bitnih činjenica koje smo naučili na časovima redovne nastave, ističemo još neke osobine.

Ako je a deljivo sa b, onda je a^2 deljivo sa b^2.

Nijedan broj nije deljiv nulom. (Deljenje nulom nije mogućno.)

Nula je deljiva svakim brojem različitim od nule.

Definicija količnika i ostatka deljenja u skupu celih brojeva zahteva pažljiv rad sa negativnim brojevima. Tako, na primer, iz $58 = -9 \cdot (-6) + 4$ i $-58 = 9 \cdot (-7) + 5$, sledi da deljenja $58 : (-9)$ i $-58 : 9$ nemaju jednake količnike, ni jednake ostatke.

Broj je deljiv sa 6, ako je deljiv sa 2 i sa 3.

Broj je deljiv sa 11, ako se zbirovi cifara na parnim mestima i na neparnim mestima razlikuju za broj koji je deljiv sa 11.

71. Miša je kupio nekoliko olovki po 12 dinara i nekoliko svezaka po 60 dinara. Prodavac mu je naplatio 1240 dinara. Miša se pobunio. Kako je Miša odmah znao da je prodavac pogrešio?

72. Nađi četvorocifreni broj koji pri deljenju sa 131 daje ostatak 112, a pri deljenju sa 132 daje ostatak 98.

73. Kad se prirodni broj n podeli sa 3 ostatak je 1, a ako ga podelimo sa 37 ostatak je 33. Koliki je ostatak pri deljenju broja n sa 111?

74. Dokaži da broj čije su sve cifre četvorke nije deljiv sa 8.

75. Nasumice je odabran broj zapisan sa 2017 cifara, koji je deljiv sa 9. Označimo sa m zbir cifara odabranog broja, a sa n zbir cifara broja m. Koliki je zbir cifara broja n?

76. Odredi najmanji šestocifreni broj sa različitim ciframa, tako da bude deljiv sa 9.

77. Odredi najmanji četvorocifreni broj koji je deljiv sa 9 i kome je proizvod cifara jednak 180.

78. Dokaži da je $10^{2017} - 7$ deljivo sa 3, ali nije deljivo sa 27.

79. Odredi najmanji osmocifreni broj čije su sve cifre međusobno različite i koji je deljiv sa 33.

80. Niz brojeva formira se na sledeći način: prvi član niza je 3^{1999}, a svaki sledeći član, počev od drugog, jednak je zbiru cifara prethodnog. Nađi broj koji je na 2000-tom mestu.

81. Nađi sve prirodne brojeve n za koje je $10^{2n} - 1$ deljivo sa 3^4.

82. Nađi najveći zajednički delitelj svih šestocifrenih brojeva koji se pišu pomoću cifara: 1, 2, 3, 4, 5, 6, pri čemu su u svakom broju sve cifre različite.

83. Izračunaj prirodni broj n, tako da je $*71* : 36 = n$.

84. Dešifruj množenje: $*8 * * \cdot 45 = 26 * 17*$.

85. Nađi sve šestocifrene brojeve oblika $\overline{A1996B}$, deljive sa 72.

86. U broju $\overline{199AA6B}$ odredi nepoznate cifre, tako da dobijeni broj bude deljiv sa 12.

87. Odredi cifre A i B, tako da broj $\overline{A2016B}$ bude deljiv sa 36.

88. Odredi cifre M i N, tako da broj n, $n = \overline{M1995} + \overline{1996N}$ bude deljiv sa 44, $M \neq 0$.

89. U broju $1996 * * * *$ zvezdice zameni ciframa, tako da se dobije osmocifreni broj deljiv sa 5, 7, 8 i 9.

90. Broju 623 dopiši zdesna trocifreni broj, tako da se dobije šestocifreni broj koji ima sledeće osobine: ako mu oduzmemo 9, dobićemo broj deljiv sa 9, ako mu dodamo 8, dobićemo broj deljiv sa 8 i ako mu oduzmemo 7, dobićemo broj deljiv sa 7.

91. Zvezdice u broju $123 * **$ zameni ciframa, tako da dobijeni šestocifreni broj pri deljenju sa 7, 8 i 11 daje ostatak:

a) 0; b) 5.

92. Odredi nepoznatu cifru jedinica broja $401512*$, tako da ostaci deljenja ovog broja sa 3 i sa 5 budu jednaki.

93. Pravougaonu ploču dimenzija 462 cm i 726 cm treba razrezati na najveće međusobno jednake kvadrate. Dužine stranica ovih kvadrata iznose celi broj centimetara. Koliko smo kvadrata dobili?

94. Četvorica biciklista kreću se po zatvorenim stazama koje su postavljene tako da imaju zajednički početak i formiraju figuru koja liči na detelinu sa četiri lista. Dužina svake staze iznosi trećinu kilometra. Biciklisti istovremeno krenu iz zajedničke početne tačke u 12 sati i svaki vozi svojom stazom, ravnomernom brzinom. Brzine kretanja su: prvi 6 km/h, drugi 9 km/h, treći 12 km/h i četvrti 15 km/h. Posle koliko vremena će svi zajedno biti prvi put ponovo u polaznoj tački?

95. U 6 časova izjutra tri autobusa istovremeno su krenula sa stanice u tri različita pravca. Prvi autobus vratio se u stanicu posle 1 sata i 5 minuta i posle 10 minuta ponovo krenuo istom trasom; drugi se vratio posle 56 minuta i krenuo na istu liniju posle 4 minuta odmora; treći se vratio posle 48 minuta i posle zadržavanja od samo 2 minuta vratio se u redovnu vožnju.

Za koje će najkraće vreme sva tri autobusa ponovo istovremeno krenuti sa stanice?

96. Vozeći paralelno sa gradskom autobuskom linijom između dva dela grada, biciklista je primetio da ga je svakih 9 minuta stizao, a svakih 6 minuta susretao po jedan autobus s te linije. U kojim vremenskim intervalima autobusi te linije kreću sa polazne stanice? (Autobusi sa polazne stanice kreću u jednakim razmacima vremena i kreću se približno jednakim brzinama. Biciklista se takođe kreće ravnomernom brzinom.)

97. Deda i unuk imaju rođendan istog dana. Prilikom proslave jednog rođendana deda je konstatovao da je broj njegovih godina deljiv brojem godina unuka i da će to važiti i za tačno pet sledećih rođendana. Koliko su godina imali deda i unuk kada je deda to primetio?

98. Odredi broj veći od 100 i manji od 200, koji pri deljenju sa 2 daje ostatak 1, pri deljenju sa 3 daje ostatak 2, pri deljenju sa 4 daje ostatak 3 i pri deljenju sa 5 daje ostatak 4.

99. Odredi najmanji broj koji pri deljenju sa 4 daje ostatak 2, pri deljenju sa 5 daje ostatak 3, pri deljenju sa 6 daje ostatak 4.

100. Nađi najveći četvorocifreni broj koji pri deljenju sa 3, 4, 5, 6 i 7 daje ostatak 2.

101. Odredi sve trocifrene brojeve koji pri deljenju sa 7 daju ostatak 2, pri deljenju sa 9 daju ostatak 4 i pri deljenju sa 12 daju ostatak 7.

102. Na stolu su knjige koje treba spakovati. Ako bismo ih pakovali po 4, po 5 ili po 6, svaki put bi ostale po dve knjige, a ako ih pakujemo po 7, sve će biti spakovane. Koliko najmanje knjiga može biti na stolu?

103. Ako su u šestocifrenom broju prva i četvrta cifra jednake, druga i peta cifra jednake, treća i šesta cifra jednake, dokaži da je taj broj deljiv sa 7, 11 i 13.

104. Dokaži da je šestocifreni broj čije su sve cifre jednake deljiv sa 3, 7, 11, 13 i 37.

105. Nađi najmanji broj, zapisan samo jedinicama, koji je deljiv sa 33.

106. Odredi sve trocifrene brojeve koji imaju zbir cifara 10 i deljivi su sa 11.

107. Broj n dobijamo tako što dopisujemo redom prirodne brojeve od 1 do 101, tj. $n = 1234567891011\ldots99100101$.

a) Koliko cifara ima broj n?

b) Koliko je puta upotrebljena cifra 5?

c) Dokaži da je $n = a \cdot b$, gde su a i b prirodni brojevi veći od 1.

d) Dokaži da n nije kvadrat nekog prirodnog broja.

108. Od pet uzastopnih neparnih brojeva postoji jedan koji nije deljiv ni sa 3, ni sa 5, ni sa 7. Dokaži.

109. Ako su u trocifrenom broju deljivom sa 7 dve poslednje cifre jednake, dokaži da je zbir cifara tog broja deljiv sa 7.

110. Odredi prirodni broj koji ima tačno četiri različita delioca, uključujući 1 i samog sebe, takav da je zbir svih delilaca za 2000 veći od tog broja.

1.4. Prosti i složeni brojevi

Prirodni broj p je *prost* ako ima tačno dva različita delioca. To su 1 i p.

Prirodni broj je *složen* ako ima vise od dva različita delioca. Složeni broj s, dakle, može da se predstavi u vidu proizvoda dva prirodna broja veća od 1: $s = a \cdot b$, $a > 1$ i $b > 1$.

*Broj **1** nije ni prost, ni složen.*

Svaki prosti broj veći od 3 može se predstaviti u obliku: $6k + 1$ ili $6k - 1$, $k \in N$.

Ako dva prirodna broja a i b imaju najveći zajednički delilac broj 1, tj. $D(a, b) = 1$, tada su a i b *uzajamno prosti brojevi*. Za uzajamno proste brojeve a i b važi: $S(a, b) = a \cdot b$.

Ako su a i b uzajamno prosti brojevi i broj n je deljiv i sa a i sa b, tada je n deljivo sa $a \cdot b$.

Ako je broj n deljiv sa a i b, onda je n deljiv i sa $S(a, b)$.

111. Reši jednačinu: $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 3024$ u skupu celih brojeva.

112. Ako je p prost broj, dokaži da je broj $1995p + 1$ složen.

113. Ako je p prost broj veći od 2, dokaži da je $p^{1998} + 1999$ složeni broj.

114. Odredi sve proste brojeve p, takve da su brojevi $p + 8$ i $p + 10$ prosti.

115. Odredi prosti broj p, takav da je prost i broj $3^p + p^3$.

116. Ako je p prost broj, dokaži da je broj $p^{1995} + p^{1996}$ složen.

117. Ako je p prost broj, dokaži da su brojevi $p^2 + 71$ i $p^3 + 17$ složeni.

118. Koliko ima prirodnih brojeva koji su manji od 3000, a proizvod cifara im je 210?

119. Odredi sve prirodne brojeve kod kojih je proizvod cifara jednak 528.

120. Napiši najmanji prirodni broj kod kojeg je proizvod cifara jednak 5040.

121. Odredi najmanji prirodni broj kod kojeg je proizvod cifara jednak 453600. Da li postoji najveći takav broj?

122. Odredi najmanji prirodni broj kojim treba pomnožiti broj 8316 da se dobije kvadrat jednog prirodnog broja. Kojeg broja?

123. Nađi najmanji prirodni broj kojim treba pomnožiti broj 21168 da bi se dobio kub nekog prirodnog broja.

124. Nađi najmanji prirodni broj, koji pomnožen sa 2 postaje kvadrat nekog prirodnog broja, a pomnožen sa 3 postaje kub nekog drugog prirodnog broja.

125. Nađi najmanji prirodni broj kome je:

a) polovina potpuni kub, a trećina potpuni kvadrat;

b) polovina potpuni kvadrat, a trećina potpuni kub.

126. Dat je prosti broj p čije su sve cifre jedinice. Dokaži da je zbir cifara ovog broja prost broj. Važi li obrnuto?

127. Dešifruj množenje: $A \cdot B \cdot \overline{AB} = \overline{BBB}$.

128. Odredi tri uzastopna prosta broja p, q, r, takva da je
$p \cdot q \cdot r = \overline{ABBA}$.

129. Napiši milijardu u obliku proizvoda dva broja, tako da u zapisima ova dva broja nema cifre 0.

130. Proizvod dva dvocifrena broja je broj koji je zapisan samo četvorkama. Koji su to brojevi?

131. Proizvod jednog dvocifrenog i jednog trocifrenog broja je broj koji se zapisuje samo dvojkama. O kojim brojevima je reč?

132. Proizvod dva trocifrena broja zapisuje se samo ciframa 7. Odredi ove trocifrene brojeve.

133. Data su dva prosta broja različita od 3. Dokaži da je zbir ili razlika datih brojeva deljiva sa 3.

134. Dati su pozitivni jednocifreni brojevi a, b, c, d, koji nisu svi jednaki među sobom. Uzimajući date brojeve za cifre, možemo napisati neke četvorocifrene brojeve. Dokaži da je razlika najvećeg i najmanjeg među ovim četvorocifrenim brojevima uvek složeni broj.

135. Dokaži da ne postoji najveći prosti broj.

136. Odredi prirodne brojeve $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $k > 1$, koji ne moraju biti različiti, tako da bude $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 1996$ i $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 1996$. Nađi rešenja i ako umesto 1996 stoji broj 1995.

137. Elementi tročlanog skupa $A = \{a,\ b,\ c\}$ jesu ma koji stepeni nekih (ma kojih) prostih dvocifrenih brojeva manjih od 20. Dokaži da među elementima skupa A postoje dva broja, takva da je zbir ili razlika ta dva broja deljiva sa 5.

138. Zbir dva trocifrena broja deljiv je sa 37. Dokaži da je šestocifreni broj, koji se dobija dopisivanjem jednog broja iza drugog (nije važno kojim redom), takođe deljiv sa 37.

139. Na školskoj tabli napisan je trocifreni broj $**8$. Tri učenika su pogađala osobine ovog broja.

Zoran: Sve su mu cifre parne i deljiv je sa 32.

Dušan: Deljiv je sa 9 i predstavlja kvadrat nekog prirodnog broja.

Nikola: Manji je od 400 i 13 puta je veći od kvadrata jednog prirodnog broja.

Ispostavilo se da je svaki od ovih učenika pogodio samo po jednu osobinu napisanog broja.

Koje cifre stoje umesto zvezdica?

140. Dokaži da postoji 15 uzastopnih prirodnih brojeva, takvih da su svi oni složeni brojevi.

1.5. Par-nepar

Parni broj je nenegativan celi broj deljiv sa 2.

Neparni broj je prirodni broj koji nije deljiv sa 2.

Parne brojeve označavamo sa 2k, $k \in N_0$, a neparne sa $2k-1$, $k \in N$, ili sa $2k+1$, gde je $k=0$ ili $k \in N$, odnosno $k \in N_0$.

Zbir (razlika) dva prirodna broja je neparan samo ako je jedan parni, a drugi neparni broj (tj. ako sabiramo dva broja različite parnosti).

Proizvod dva prirodna broja je neparan samo ako su oba broja neparna.

Ako je zbir dva prirodna broja parni broj, tada je i razlika ova dva broja parni broj.

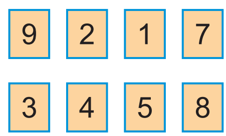
Ako je zbir dva prirodna broja neparni broj, onda je neparna i razlika ta dva broja.

Definicije i osobine parnih i neparnih brojeva su veoma jednostavne i lako uočljive. Međutim, ima i veoma teških zadataka, koji se rešavaju korišćenjem samo pojma par-nepar.

141. Turistički brod ima 29 kabina sa ukupno 86 ležajeva. Kabine imaju 2, ili 3, ili 4 ležaja. Dokaži da je broj trokrevetnih soba paran.

142. Na proslavi rođendana kod Maje skupilo se 9 gostiju. Da li je moguće da se svaki od 9 gostiju odranije poznaje sa Majom i sa tačno troje od njenih gostiju?

143. Razmesti kartice sa slike, tako da zbir brojeva u prvoj vrsti bude jednak zbiru brojeva u drugoj vrsti.



144. Mogu li se 2015 telefona vezati međusobno tako da svaki ima direktnu vezu sa tačno 13 drugih telefona? Zašto?

145. U jednom redu stoji 100 učenika. Dozvoljeno je da svoja mesta u redu zamene samo oni učenici (tj. parovi učenika) koji imaju zajedničkog suseda. Da li je ovakvim promenama mesta moguće da učenik, koji stoji na kraju reda, dospe na drugi kraj?

146. Na školskoj tabli redom su zapisani prirodni brojevi: $1, 2, 3, \ldots,$ $1995, 1996$. Brišemo ma koja dva broja i umesto njih upisujemo njihovu nenegativnu razliku. Taj postupak se ponavlja dotle, dok na tabli ne ostane samo jedan broj. Može li taj poslednji broj biti:

a) nula; b) 1995?

147. Dušan sa sinom i Vlada sa sinom bili su u ribolovu. Dušan je ulovio toliko riba koliko i njegov sin, a Vlada trostruko više od svog sina. Svega je bilo ulovljeno 25 riba. Dušanov sin zove se Lazar. Kako se zove Vladin sin?

148. Na kružnici u proizvoljnom poretku napisane su četiri jedinice i pet nula. Zatim se između jednakih cifara napiše nula, a između različitih jedinica, pa se prvobitne cifre izbrišu. Dokaži, ma koliko puta se ponovio ovaj postupak, ne može se dobiti devet nula.

149. Dato je n brojeva: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, od kojih je svaki jednak $+1$ ili -1. Ako je $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$, dokaži da je broj n deljiv sa 4.

150. Prva četiri člana jednog niza su: 1, 2, 3, 5. Svaki sledeći član ovog niza je cifra jedinica zbira prethodna četiri člana. Dokaži da se u ovom nizu ne može pojaviti četvorka sa redosledom: 1, 2, 3, 4.

1.6. Dirihleov princip

Dirihleov princip je jednostavan, kao i princip par-nepar. Kada utvrdimo da se zadatak može rešiti ovim principom, dalji postupak uglavnom nije komplikovan. Dirihleov princip glasi:

Ako $(nk + 1)$ predmeta treba rasporediti u n kutija, tada bar u jednu kutiju moramo staviti najmanje $(k + 1)$ predmeta.

Primer A) U jednoj školi uči 1100 učenika. Dokaži da u toj školi postoje bar dva učenika koji imaju identične inicijale i da bar četiri učenika slave rođendan istog dana.

Dokaz. Od 30 slova azbuke ima $30 \cdot 30 = 900$ različitih inicijala, a učenika ima za 200 više, pa bar dva imaju jednake inicijale.

Godina ima najviše 366 dana i toliko ima različitih rođendana. Kako je $1100 = 3 \cdot 366 + 2$, to znači da bar četiri učenika imaju rođendan istog dana.

Primer B) Neko je po beloj ravni prosuo crni tuš. Dokaži da u ovoj ravni postoje dve tačke iste boje, udaljene 2016 m jedna od druge.

Dokaz. Konstruisaćemo u ovoj ravni jednakostranični trougao sa stranicom dužine 2016 m. Od tri temena ovog trougla, dva moraju biti bela, ili je jedno belo, a dva su crna. Dva temena iste boje su tražene tačke.

Primer C) Na terenu dimenzija 20 metara sa 50 metara zasađeno je 48 čokota vinove loze. Da li je moguće na tom terenu ograditi baštu dužine 5 metara i širine 4 metra za gajenje šargarepe, tako da u toj bašti nema vinove loze?

Rešenje. Ako dati teren izdelimo na parcele dimenzija 4 m sa 5 m, dobićemo 50 takvih parcela. Ma kako rasporedili 48 čokota loze, dve parcele dimenzija 4 m sa 5 m biće slobodne.

151. Dokaži da se od 1996 bilo kojih prirodnih brojeva mogu izabrati 20 takvih da razlika između svaka dva od njih bude deljiva sa 101.

152. U šesti razred jedne škole upisalo se 110 učenika. Svaki od njih odranije poznaje bar 11 učenika. Dokaži da svaki učenik šestog razreda ima bar dva poznanika kojima on nije jedini zajednički poznanik.

153. U odeljenju od 30 učenika jedan učenik je na testu načinio 13 grešaka, dok je svaki od ostalih učenika ili tačno uradio test, ili je načinio manje od 13 grešaka. Dokaži da postoje tri učenika koji su načinili isti broj grešaka (ili su tačno uradili test).

154. Dato je 2007 različitih prostih brojeva. Dokaži da se bar 502 od tih brojeva završavaju istom cifrom.

155. Grupa od 64 dečaka treba da podeli 2015 klikera. Dokaži da će se u svakom slučaju naći dva dečaka koji su dobili jednak broj klikera (ili nisu dobili nijedan).

156. Dokaži da postoji broj oblika $11\ldots100\ldots0$ (zapisan pomoću izvesnog broja jedinica, a zatim izvesnog broja nula), koji je deljiv sa 1999.

157. Tablica sa 5×5 polja popuni se na proizvoljan način brojevima: $-1, 0, 1$. Zatim se izračunaju zbirovi brojeva u pojedinim vrstama i kolonama i u obe dijagonale. Dokaži da se među ovim zbirovima moraju naći bar dva jednaka.

158. Dokaži da se među deset uzastopnih prirodnih brojeva uvek može naći jedan koji je uzajamno prost sa svakim od ostalih devet.

159. Dokaži da se od 1000 celih brojeva može odabrati nekoliko brojeva, tako da njihov zbir bude deljiv sa 1000, ili je neki od njih deljiv sa 1000.

160. Dokaži da se među $(n+1)$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$, mogu izabrati tri takva broja, da jedan od njih bude jednak zbiru druga dva.

161. Učenik je u toku godine rešavao zadatke iz matematike. On svakog dana reši bar jedan zadatak, ali, da se ne bi premorio, u toku jedne sedmice reši najviše 12 zadataka. Dokaži da postoji nekoliko uzastopnih dana, u toku kojih će rešiti 20 zadataka (ukupno).

162. Stranice i dijagonale konveksnog šestougla obojene su ili plavom, ili crvenom bojom. Dokaži da se može uočiti bar jedan trougao kome su sve stranice obojene jednom bojom.

163. Gradovi A, B, C, D, E, F, povezani su svaki sa svakim jednom direktnom linijom: ili autobusom, ili železnicom (ali ne obema). Dokaži da među njima postoje tri grada koji su međusobno povezani direktnim linijama iste vrste.

164. U takmičenju učestvuje 35 učenika. Dokaži da među njima postoje bar 2 koji među prisutnim imaju jednak broj poznanika. Da li isto važi i za 7 učesnika na takmičenju?

165. Ma kako izabrali 501 različitih neparnih prirodnih brojeva manjih od 1996, dokaži da je zbir neka dva od njih jednak 1998.

Glava 2

SKUPOVI I KOMBINATORIKA

- Skupovi
- Kombinatorika – prebrojavanje
- Okrugli sto

Skupovi i kombinatorika

2.1. Skupovi

Prikazivanjem skupova pomoću Ojler-Venovih dijagrama možemo neke relativno apstraktne probleme prikazati "plastično" i postići očiglednost, koja nam izuzetno olakšava rešavanje zadatka.

Primer A) Poznati dečji pisac *Lewis Caroll* (Luis Kerol), čije je pravo ime *Dodgsn* (Dodžsn), po zanimanju matematičar, u jednoj knjizi daje ovakav zadatak:

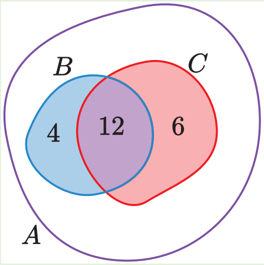
"U žestokoj borbi 70 od 100 gusara izgubilo je jedno oko, 75 jedno uho, 80 jednu ruku i 85 jednu nogu. Koliko je najmanje gusara izgubilo i oko, i uho, i ruku, i nogu istovremeno?"

Odgovorite na ovo pitanje.

Rešenje. Jedno oko i jedno uho izgubilo je najmanje $70+75-100 = 45$ gusara. Jedno oko i jedno uho i jednu ruku izgubilo je najmanje $45 + 80 - 100 = 25$ gusara. Jedno oko, jedno uho, jednu ruku i jednu nogu izgubilo je najmanje $25 + 85 - 100 = 10$ gusara.

Primer B) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000, koji nisu deljivi ni sa 4, ni sa 6?

Rešenje. Predstavimo Ojler-Venovim dijagramima skupove: $A = \{1, 2, 3, \ldots, 999\}$, $B = \{4, 8, 12, \ldots, 996\}$ i $C = \{6, 12, 18, \ldots, 996\}$ (slika desno). Elemeni skupa B su brojevi deljivi sa 4, a elementi skupa C su brojevi deljivi sa 6. Ljubičasto obojen deo na slici je presek: $B \cap C$, koji sadrži brojeve deljive sa 4 i sa 6. To su brojevi deljivi sa 12. Skup A sadrži 999 elemenata, skup B ima 249 elemenata $(999 : 4 = 249, \ldots)$,



a skup C ima 166 elemenata. Skup $B \cap C$ čine 83 broja deljiva sa 12 (jer je $999 : 12 = 83, \ldots$). (Svaki četvrti broj deljiv je sa 4, svaki šesti sa 6 i svaki dvanaesti sa 12.)

Tražene brojeve (koji nisu deljivi ni sa 4, ni sa 6) sadrži skup $A \backslash (B \cup C)$, i ima ih $999 - 249 - (166 - 83) = 667$.

166. Dati su skupovi: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ i $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$. Odredi skup X koji zadovoljava uslove:

$A \cap X = \{3, 4\}$ i $B \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

167. Odredi elemente skupova A, B, C, ako je:

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing$, $A \backslash B = \{1, 3, 5\}$, $C \backslash B = \{2, 4\}$ i $(A \cap B) \backslash C = \{6\}$.

168. Neka je dato: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{1, 4\}$, $B \backslash C = \{2, 5, 6\}$, $C \backslash A = \varnothing$. Odredi skup C.

169. Neka su dati skupovi:

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d, f\}$, $C = \{b, e, f, g\}$ i $D = \{a, f, g, h\}$.

Odredi skup S, ako se zna:

$S \subset A$, $S \cap (B \cup D) = \varnothing$, $(A \cap C) \backslash S = \varnothing$, $\{c\} \backslash S = \{c\}$.

170. Napisano je prvih 1200 prirodnih brojeva. Prvo su izbrisani svi koji se završavaju nulom. Zatim su izbrisani svi brojevi koji su deljivi sa 6, a na kraju su izbrisani svi brojevi kojima je zbir cifara deljiv sa 9. Koliko je brojeva ostalo neizbrisano?

171. U školi ima 60 nastavnika. Od tog broja njih 39 pije kafu, 28 pije čaj, 16 pije i čaj i kafu. Ima li nastavnika koji ne piju ni čaj, ni kafu?

172. Na pismenoj vežbi iz matematike postavljena su tri zadatka. Svaki učenik je rešio bar jedan zadatak, a niko nije rešio treći zadatak. Prvi zadatak je rešilo 25 učenika, drugi zadatak je rešilo 27 učenika, a 20 učenika je tačno izradilo i prvi i drugi zadatak.

a) Koliko je učenika radilo pismenu vežbu?

b) Koliko je učenika rešilo samo prvi zadatak?

173. Na Kongresu matematičara svaki od 100 učesnika govori bar jedan od stranih jezika: engleski, francuski ili ruski. Ruski jezik govori 57 učesnika, ruski i francuski 28, engleski i francuski 34, a 5 učesnika govori samo francuski. Samo dva strana jezika govori 49 učesnika, a sva tri 11 učesnika.

a) Koliko učesnika govori francuski jezik?

b) Koliko učesnika govori samo engleski jezik?

c) Koliko učesnika govori samo jedan strani jezik?

174. U školskom izveštaju dati su podaci o sportskim aktivnostima učenika: 50% igra košarku, a 40% rukomet. Svaki deseti učenik bavi se rukometom i fudbalom, a 5% se bavi sa sva tri sporta. Za fudbal nije zainteresovano 40% učenika. Ističe se da 30% učenika igra fudbal, a ne igra košarku, da 20% igra rukomet, a za košarku se ne interesuje.

a) Koliko procenata učenika ove škole ne upražnjava nijedan od navedenih sportova?

b) Koliko procenata učenika upražnjava samo jedan od navedenih sportova?

175. U letnjoj školi mladih matematičara svaki učesnik se bavio bar jednim od sportova: košarkom, fudbalom, rukometom ili odbojkom. Znamo:

a) Onaj koji igra košarku ili odbojku, igra i fudbal.

b) Onaj koji igra rukomet, igra i odbojku.

c) Onaj koji igra fudbal i rukomet, igra i košarku.

Kojim od ovih sportova se bavi najviše, a kojim najmanje učesnika letnje škole?

2.2. Kombinatorika – prebrojavanje

Problemi iz kombinatorike mogu da budu veoma složeni. Ovim problemima bavili su se mnogi matematičari i otkrili mnoge veoma komplikovane principe i teoreme. Međutim, poznavanje ovih principa i odgovarajućih formula nije dovoljno za uspešno rešavanje zadataka iz kombinatorike. Potrebno je često veoma duboko razmišljanje i proučavanje nematematičke strane problema. Treba, ustvari, osetiti logiku zadatka.

Ovde se nećemo baviti mnogo komplikovanom kombinatorikom. Za rešavanje narednih zadataka nije potrebno znati komplikovane formule. Dovoljno je udubiti se u probleme i vešto prebrojati ono što se zahteva. Navodimo nekoliko karakterističnih primera.

Primer A) Koliko ima neparnih četvorocifrenih brojeva koji nisu veći od 6000, ako:

a) sve cifre su različite;

b) cifre mogu da se ponavljaju.

Rešenje. a) Zamislićemo da su četiri mesta na koja treba upisati cifre, četiri stolice, a cifre su određene osobe, koje treba rasporediti na ove četiri stolice.

Najpre ćemo popuniti prvu i četvrtu "stolicu" jer za njih postoje čvrsta ograničenja. One čine neparan broj između 13 i 59, ne uzimajući u obzir 33 i 55. Takvih brojeva ima 22. Sada za popunjavanje druge "stolice" ostaju 8 mogućnosti (već su dve cifre potrošene), a za popunjavanje treće "stolice" preostaje još 7 mogućnosti. Dakle, traženih brojeva ima $22 \cdot 8 \cdot 7$, odnosno 1232.

b) Za četvrtu "stolicu" ima 5 kandidata (5 neparnih cifara), za prvu "stolicu" takođe 5 kandidata (cifre 1, 2, 3, 4, 5), a za drugu i treću "stolicu" konkurišu sve cifre. Traženih brojeva, kod kojih se cifre mogu ponavljati, ima $5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 2500$.

Primer B) Koliko se "reči" od 5 slova može načiniti razmeštanjem slova reči OLOVO? Dobijene "reči" ne moraju imati nekakvo jezičko značenje.

Rešenje. Kad bi sva slova bila različita, onda bismo, slično prethodnom primeru a), imali $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mogućnosti. Međutim, svaki raspored tri slova O, ma kako ih premeštali, imaju samo jedno značenje. To znači da svakih $3 \cdot 2 \cdot 1$ rasporeda slova O predstavljaju jednu mogućnost. Dakle, broj različitih "reči" je $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

(Slično, od reči TRAJATI možemo načiniti ukupno $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 1260$ reči koje imaju po sedam slova, pri čemu se T i A pojavljuju po dva puta.)

Primer C) Sedam ljudi treba rasporediti u tri grupe, tako da u jednoj budu troje, a u druge dve po dvoje. Na koliko načina to možemo učiniti?

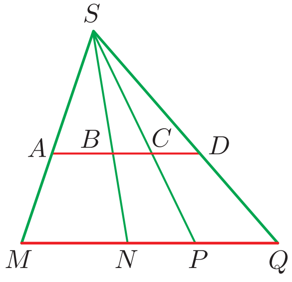
Rešenje. Ako sa A označimo pripadnost prvoj grupi, sa B drugoj i sa C trećoj, tada će jedan od mogućih izbora biti $BAACBAC$. Praktično tražimo broj različitih reči, kao u prethodnom primeru. Dakle, imamo ukupno: $\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(2\cdot1)\cdot(2\cdot1)}$, odnosno 210 načina.

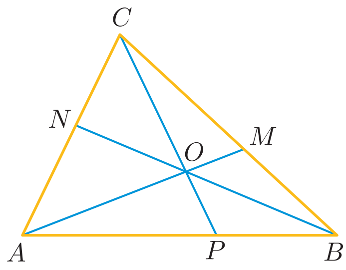
Primer D) U lift ulaze jedan dečak i jedna devojčica. Lift polazi iz prizemlja, a zgrada ima 5 spratova. Na koliko se različitih načina može isprazniti lift?

Rešenje. Dečak i devojčica mogu izaći na istom spratu, ili na različitim spratovima. U prvom slučaju imamo 5 različitih načina. (Dečak i devojčica izlaze na jednom od 5 spratova.) U drugom slučaju, lift će se zaustaviti dva puta. To može da se učini na $5\cdot4$ načina. U svakom od ovih slučajeva lift se može isprazniti na 2 načina (prvo izađe dečak, pa devojčica, ili obrnuto). U drugom slučaju imamo $(5\cdot4)\cdot2$, tj. 40 načina.

Dakle, lift se može isprazniti na 45 načina $(5+40)$.

176. Koliko je na slici dole levo nacrtano duži čiji su krajevi tačke označene slovima S, A, B, C, D, M, N, P, Q? Koliko je nacrtano trouglova čija su temena ove tačke?

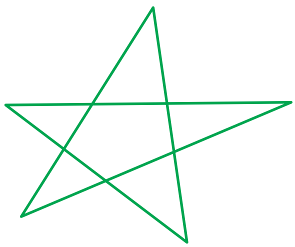
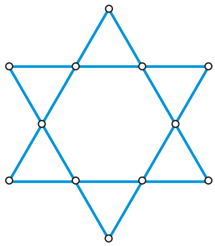
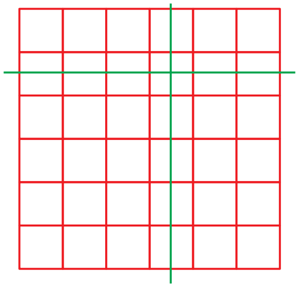




177. Na slici gore desno prebroj nacrtane duži, trouglove i četvorouglove, određene kao u prethodnom zadatku.

178. Koliko je trouglova nacrtano na sledećoj slici levo?

179. Koliko je duži i koliko rombova nacrtano na slici u sredini, tako da su im krajevi (temena) praznim kružićima označene tačke? (Figura na slici dobija se presecanjem dvaju podudarnih jednakostraničnih trouglova.)

180. Koliko se nacrtanih kvadrata može uočiti na šahovskoj tabli sa 64 polja?

181. Paralelogram je presečen sa tri prave koje su paralelne jednom paru njegovih stranica i sa četiri prave paralelne drugom paru stranica tog paralelograma. Koliko se paralelograma može uočiti na dobijenoj slici?

182. Koliko je pravougaonika kvadratne mreže 7×7 na poslednjoj slici presečeno sa obe zelene linije?

183. Iz grada A u grad B vode 5 puteva, a iz grada B u grad C vode 3 puta. Iz grada A u grad C može se stići samo kroz grad B. Jedan stanovnik grada A treba da ode autom u grad C i da se vrati u grad A. Na koliko načina on to može učiniti, ako je jedan od puteva iz A u B jednosmeran?

184. Koliko se trocifrenih brojeva završava cifrom 4?

185. Koliko šestocifrenih brojeva počinje cifrom 7 i završava cifrom 2?

186. Koliko ima četvorocifrenih brojeva kojima su dve cifre parne?

187. Na koliko načina 6 lica mogu istovremeno da se smeste na 6 od 9 pričvršćenih i numerisanih stolica?

188. Za ispisivanje četvorocifrenih brojeva koristimo samo cifre 1, 2 i 3. Koliko ima takvih brojeva deljivih sa 9?

189. Koliko ima petocifrenih brojeva zapisanih ciframa 0, 1, 2, takvih da su im bar neke dve susedne cifre iste?

190. Četiri učenika VI razreda treba rasporediti u tri odeljenja. Na koliko načina to možemo učiniti?

191. Nikola je slavio rođendan i pozvao drugove i drugarice. Svi gosti su se rukovali sa Nikolom i međusobno. Jedan od gostiju je prebrojao koliko je bilo rukovanja. Utvrdio je da ih je bilo tačno 120. Koliko je gostiju imao Nikola?

192. Na polici su složene knjige: 4 plave, 2 žute i 3 crvene, i to tako da su knjige iste boje jedna do druge. Na koliko se načina mogu rasporediti ove knjige?

193. Na teren istrčavaju prve postave dveju košarkaških ekipa (po 5 igrača svake ekipe). Igrači izlaze u jednoj koloni, naizmenično "plavi", pa "crveni", ili obrnuto: "crveni", pa "plavi", tako da dva susedna igrača nisu iz iste ekipe. Na koliko se načina može formirati ova kolona igrača?

194. U stroju su raspoređena 4 dečaka i 3 devojčice, ali tako da devojčice ne budu jedna do druge. Koliko se različitih rasporeda može izabrati?

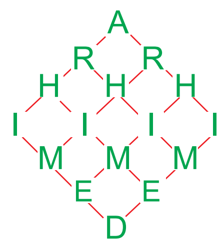
195. Na zidu je u jednom nizu okačeno 8 slika. Treba skinuti 3 slike, vodeći računa da se ne uzimaju dve susedne. Na koliko se načina to može učiniti?

196. Devet različitih predmeta treba podeliti na tri lica, i to jednom dva predmeta, drugom tri predmeta i trećem četiri predmeta. Na koliko načina to možemo učiniti?

197. Osam dečaka reše da igraju basket. Na koliko se načina mogu podeliti u dve ekipe po četiri igrača?

198. Nada želi da kupi 3 kifle. Nude joj "prazne", sa sirom i sa džemom. Nada je u dilemi. Na koliko raznih načina Nada može rešiti ovu dilemu?

199. Zoran i Maja organizuju žurku. Oboje će pozvati po troje prijatelja, ali tako da bude ukupno jednak broj dečaka i devojčica. Zoran ima na spisku imena četiri dečaka i dve devojčice iz VI razreda, a Maja će odabrati između dva dečaka i četiri drugarice iz VII razreda. Na koliko se načina može formirati društvo za njihovu žurku?



200. Na koliko se načina može pročitati reč ARHIMED, idući odozgo nadole prema nacrtanoj skici? (U svakom koraku biramo susedno slovo iz sledećeg reda, bez preskakanja redova.)

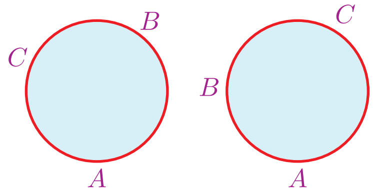
2.3. Okrugli sto

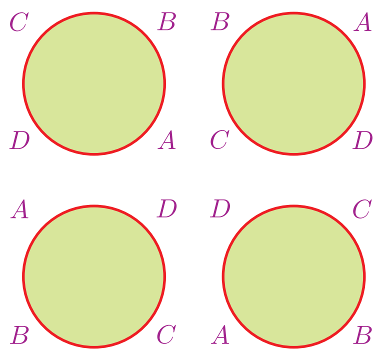
Pod **okruglim stolom** podrazumevamo sto koji je "idealno okrugao", orijentisan, sa neobeleženim mestima za sedenje. Na primer, ako za okrugli sto zasedne više osoba, tada su njihova mesta ravnopravna, nema prvog mesta, zadnjeg mesta i sl. Ako za okruglim stolom sede najmanje tri osobe, tada svaka ima levog i desnog suseda.

Dva rasporeda za okruglim stolom razlikuju se, ako bar jedna osoba ima bar jednog (levog ili desnog) različitog suseda.

Jedna osoba, ili dve osobe, za okruglim stolom imaju samo po jednu mogućnost raspoređivanja.

Tri osobe mogu se samo na dva načina rasporediti za okruglim stolom. To su rasporedi prikazani na slici dole levo. U prvom rasporedu B je desni sused osobi A, a u drugom slučaju C je desni sused istoj osobi.





Za okruglim stolom, t.zv. ciklične permutacije nisu različiti rasporedi. Na slici desno vidimo ciklične permutacije osoba $ABCD$. (Ako brojimo od "donjeg desnog sedišta", imamo ciklične permutacije: $ABCD$, $DABC$, $CDAB$ i $BCDA$.) U sva četiri slučaja ovde sve osobe imaju iste leve i iste desne susede.

Drugim rečima, ako se rotiranjem okruglog stola dva nacrtana rasporeda mogu poklopiti, oni su jedan isti raspored. To znači da rotiranjem stola, sa osobama koje sede okolo, ili bez njih, ne dobijamo nov raspored.

Primer A) Za okruglim stolom treba rasporediti 9 ljudi: 3 nastavnika, 3 roditelja i 3 učenika, tako da su među bilo koje tri uzastopno izabrane osobe: po jedan nastavnik, roditelj i učenik (ne mora ovim redom). Na koliko se načina to može učiniti?

Rešenje. Očigledno je, između bilo koja dva nastavnika su jedan roditelj i jedan učenik (odnosno jedan učenik i jedan roditelj), a takođe, između bilo koja dva učenika su jedan roditelj i jedan nastavnik, itd. Rasporedimo najpre tri nastavnika. To je moguće učiniti na 2 načina, kao što je prikazano na slici gore levo. Zatim, na tri mesta, između nastavnika, rasporedimo tri roditelja. To možemo učiniti na 6 načina. (Slično **primeru A)** a) iz odeljka 2.2.) Sada tri učenika možemo rasporediti tako da svaki sedi između nastavnika i roditelja, ili (idući u istom smeru) između roditelja i sledećeg nastavnika. To je 6 mogućnosti u prvom i 6 mogućnosti u drugom slučaju.

Ukupan broj mogućih rasporeda je $2 \cdot 6 \cdot 12$, odnosno 144.

Ogrlica je specifična vrsta "okruglog stola" jer nju možemo rotirati u prostoru, tako da "gornja" strana postane "donja" i obrnuto. Na primer, ako tri perle ABC čine ogrlicu, obrtanjem dobijamo ogrlicu ACB i ona je ta ista, dakle, jedna ogrlica.

Ovo se ne može primeniti i na okrugli sto, jer na primer, ne možemo okrenuti sto na poslednjoj slici levo, jer bi se osobe A, B, C, okrenule naglavačke, sa nogama uvis. Zato su za okruglim stolom ABC i ACB različiti rasporedi. U slučaju četiri osobe, rasporedi $ABCD$ i $DCBA$ su različiti, a u slučaju četiri perle, ogrlice $ABCD$ i $DCBA$ su samo jedna ogrlica.

Dakle, ogrlica se može opisati kao neorijentisani okrugli sto.

Primer B) Ogrlica je načinjena od 20 po obliku i veličini jednakih perli, i to 5 belih, 5 žutih, 5 plavih i 5 crvenih, tako da su svake četiri uzastopne perle različito obojene. (Znači, perle se razlikuju samo po boji.)

a) Koliko se različitih ogrlica može načiniti od ovih 20 perli?

b) Koliko se različitih ogrlica, pet puta većih, može načiniti pod istim uslovima, od 100 perli (po 25 od svake boje)?

Rešenje. a) Rasporedimo najpre bele perle. One su sve iste pa postoji samo jedan raspored. Sada između dve bele, možemo rasporediti po jednu žutu, plavu i crvenu, menjajući redosled boja, na 6 načina. Zbog uslova, da su svake četiri uzastopne perle različito obojene, ovaj redosled je istovetan za sve ostale trojke žutih, plavih i crvenih perli. Zbog mogućnosti obrtanja ogrlice za 180°, broj različitih ogrlica je $6 : 2$, tj. 3.

b) Rešenje je isto kao a), jer broj uzastopnih četvorki perli ne povećava broj različitih mogućnosti.

Primer C) Na četiri mesta za okruglim stolom treba rasporediti četiri dečaka. Međutim, za ta četiri mesta konkuriše šest dečaka. Na koliko načina možemo popuniti ovaj okrugli sto?

Rešenje. Najpre od šest dečaka odaberemo četvoricu. To je moguće na $\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15$ načina, tj. možemo izabrati 15 različitih četvorki dečaka. Svaka od ovih četvorki može se, kao što znamo, rasporediti na 6 načina. Dakle, postoji $6\cdot15$, tj. 90 različitih mogućnosti.

Radi lakšeg prebrojavanja rasporeda, možemo zamisliti da smo okrugli sto "rasekli" kod jedne osobe i "ispravili ga u niz". Ta osoba, kod koje je napravljen rez, fiksira se na početak niza, a ostali se razmeštaju. Na primer, u slučaju raspoređivanja tri osobe A, B, C "rasecimo" sto kod osobe A. Dobijamo niz "na desno" koji počinje sa A: A.. (Osobe B i C raspoređujemo umesto tačkica). Ove osobe mogu formirati dva rasporeda: BC ili CB, što znači da se osobe A, B i C mogu rasporediti za okruglim stolom na dva načina. (Levo od A "nema ništa".)

201. Za okrugli sto seli su 1. januara pet državnika iz pet zemalja. Dogovarali su se o važnim stvarima i zasedali su svakog dana, ali svaki put u drugom rasporedu. Savetovanje je završeno onog dana kada su iscrpene sve mogućnosti različitog raspoređivanja državnika. Kada je to bilo?

202. Na nekoj večeri šef sale je dobio zadatak da oko jednog okruglog stola rasporedi četiri muškarca i izvestan broj žena, i to na taj način da ni jedna žena ne sedi pored druge žene, i da se nasuprot svake osobe nalazi osoba suprotnog pola. Da li je šef sale uspeo da načini takav raspored?

203. Oko okruglog stola treba rasporediti tročlane porodice (muž, žena, dete), tako da budu ispunjeni uslovi:

1) Na krajevima istog prečnika sede ili dva muža, ili dve žene, ili dva deteta.

2) Članovi svake porodice sede na tri susedna mesta.

3) Dve osobe istog pola (dve muške ili dve ženske), ne mogu sedeti jedna do druge.

Nacrtaj traženi raspored sa najmanje osoba.

204. Na koliko načina možemo za okrugli sto postaviti 4 dečaka i 2 devojčice, tako da devojčice ne sede jedna do druge?

205. Oko okruglog stola treba rasporediti tri nastavnika, tri dečaka i tri devojčice, tako da između svaka dva nastavnika bude jedan dečak i jedna devojčica. Na koliko se načina to može učiniti?

206. Narukvica u obliku zatvorenog lanca, načinjena je od numerisanih alki, i to 5 srebrnih i 5 platinskih. Alke su povezane, tako da su svake dve uzastopne od različitih metala. Na koliko načina možemo sastaviti ovu ogrlicu?

207. U grupi od 100 ljudi svaki se poznaje sa najmanje 50 ostalih. Dokaži da se iz te grupe mogu izdvojiti 4 čoveka i postaviti za okrugli sto, tako da svaki od njih sedi između svojih poznanika.

208. Dvanaest vitezova okruglog stola treba da izaberu dvočlanu delegaciju za posetu kralju Arturu. Na koliko je načina to moguće učiniti, ako u delegaciji ne mogu biti dva viteza koji su susedi za okruglim stolom?

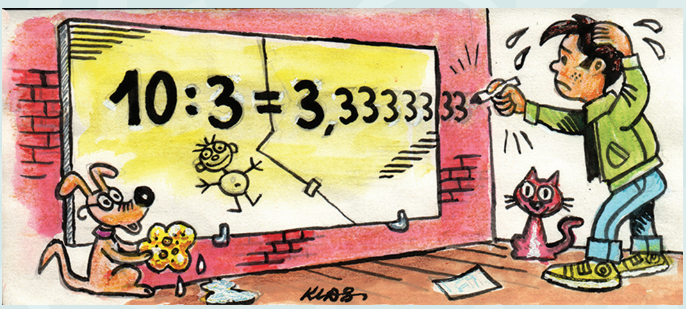
209. Za okruglim stolom kralja Artura sede dvanaest vitezova. Svaki od njih je u svađi sa svojim susedom. Treba izabrati tri viteza da oslobode zarobljenu princezu. Na koliko se načina to može učiniti, a da su među izabranim vitezovima svi među sobom u slozi?

210. Za okruglim stolom sedi kralj Artur i dvanaest vitezova. Svi oni su se zakleli da će ili uvek govoriti istinu ili će uvek lagati. Sede oni tako, kad stiže jedan stranac i svakog viteza upita šta misli o svom susedu s desne strane. Svi su odgovorili da je taj njihov sused lažov, samo je kraljev savetnik Merlin, koji je sedeo levo od kralja Artura, rekao da kralj nikad nije slagao u životu. Na pitanje došljaka, da li za stolom ima više lažova, ili onih koji govore istinu, kralj odgovori da vise ima onih koji ne lažu, a njegov savetnik je još rekao da istinoljubivih ima za tri više. Koliko ima lažova među vitezovima? Da li su među njima kralj Artur i njegov savetnik?

Glava 3

RACIONALNI BROJEVI

- Razlomci
- Problemi sa razlomcima
- Procenti



Racionalni brojevi

Racionalni broj r je količnik celog broja m i prirodnog broja n, t.j. $r = \frac{m}{n}$. Broj n nazivamo *imeniocem*, a broj m *brojiocem*. Ako m nije deljivo sa n, tada broj r nazivamo *razlomkom*. Racionalni broj zapisuje se najčešće u obliku razlomka, npr. $\frac{13}{4}$, ili u decimalnom obliku: $\frac{13}{4} = 3,25$. Decimalni zapis racionalnog broja često se naziva *vrednošću razlomka*.

Decimalni zapis razlomka ne menja se, ako brojilac i imenilac razlomka istovremeno pomnožimo (podelimo) prirodnim brojem koji je veći od 1. To je tzv. *proširivanje (skraćivanje)* razlomka. Prirodni oblik razlomka je količnik dva uzajamno prosta broja (koji se ne mogu skratiti). To je najjedostavniji ili neskrativi oblik razlomka.

Zapamtimo: po definiciji, *imenilac razlomka ne može biti nula.*

3.1. Razlomci

211. Odredi vrednost razlomka $\frac{A\cdot R\cdot H\cdot I\cdot M\cdot E\cdot D}{E\cdot U\cdot K\cdot L\cdot I\cdot D}$. Brojilac i imenilac su proizvodi jednocifrenih brojeva. Različita slova predstavljaju različite jednocifrene brojeve.

212. Vrednosti brojeva $\frac{3*5*}{36}$ i $\frac{4*7*}{45}$ su celi brojevi. Odredi te brojeve.

213. Šta je veće:

a) $\frac{13}{17}$ ili $\frac{117}{154}$; b) $\frac{1}{81}$ ili $\frac{11}{1996}$; c) $\frac{1994}{1995}$ ili $\frac{1995}{1996}$?

214. Poređaj po veličini brojeve: $\frac{19}{96}$, $\frac{1919}{9696}$ i $\frac{191919}{969696}$.

215. Odredi najmanji broj koji je deljiv razlomcima: $\frac{35}{396}$ i $\frac{28}{297}$ (količnik je celi broj).

216. Nađi najveći broj kojim su deljivi razlomci: $\frac{8}{15}$, $\frac{12}{35}$ i $\frac{20}{21}$.

217. Nađi pet racionalnih brojeva, većih od $\frac{3}{4}$, a manjih od $\frac{4}{5}$.

218. Odredi razlomke a, b, c i d, sa jednocifrenim imeniocima, tako da važi: $\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9}$.

219. Odredi sve cele brojeve n, za koje je $\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{11}{12}$.

220. Odredi sve proste brojeve p, koji zadovoljavaju nejednakosti: $\frac{2}{145} < \frac{1}{p} < \frac{3}{194}$.

221. Nađi sve jednocifrene prirodne brojeve a, b i c, takve da je $\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}$.

222. Odredi sve uređene parove (x, y) celih brojeva x i y, takvih da je $x^2 + \frac{6}{y} = 10$.

223. Izračunaj: $B = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \cdots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \cdots + 100 \cdot 300 \cdot 900}$.

224. Dokaži da je: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, a zatim izračunaj:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100}$;

b) $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$.

225. Dokaži: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

3.2. Problemi sa razlomcima

226. Na proslavi rođendana Radmila je poslužila tortu. Prvo je Novica dobio $\frac{1}{10}$ torte. Zatim je Ilija dobio $\frac{1}{9}$ ostatka, pa je Milica dobila $\frac{1}{8}$ onoga što je ostalo posle Ilije. Dara je dobila $\frac{1}{7}$ ostatka i na kraju je Milan dobio $\frac{1}{6}$ poslednjeg ostatka. Koliki je deo torte ostao za Radmilu i njenu decu?

227. Gumena lopta koja slobodno pada, svaki put odskoči od zemlje do visine za $\frac{1}{4}$ manje od visine sa koje pada. Izračunaj sa koje je visine puštena ta lopta, ako je u trećem odskoku dostigla visinu od 648 mm. Do koje će visine lopta odskočiti u petom skoku?

228. Odredi brojeve a, b, c, ako se zna da je njihov zbir veći od broja a za $\frac{5}{2}$, od broja b za $\frac{59}{6}$ i od broja c za $\frac{5}{3}$.

229. Razlika između $\frac{5}{12}$ prvog i $\frac{5}{12}$ drugog broja je $\frac{3}{8}$. Čemu je jednaka razlika $\frac{4}{7}$ prvog i $\frac{4}{7}$ drugog broja?

230. Jedna cev puni bazen za 15 minuta, druga za 20, a treća za 30 minuta. Za koje će vreme bazen napuniti sve tri cevi, ako ga pune istovremeno?

231. Učenik je potrošio izvesnu sumu novca pri kupovini tašne, knjige i olovke. Ako bi tašna bila 5 puta jeftinija, olovka upola jeftinija, a knjiga 2,5 puta jeftinija od stvarne cene, tada bi tašna, knjiga i olovka bile plaćene 1600 dinara. Ako bi tašna bila upola jeftinija, olovka 4 puta jeftinija, a knjiga 3 puta jeftinija, učenik bi na ovu kupovinu potrošio 2400 dinara. Koliko je novca učenik potrošio?

232. Dat je razlomak $\frac{1997}{1998}$. Koji broj treba oduzeti brojiocu i dodati imeniocu, da bi se posle skraćivanja dobio razlomak $\frac{2}{3}$?

233. Koji broj treba oduzeti od brojioca i od imenioca razlomka $\frac{25*3}{6776}$, da bi se posle skraćivanja dobio razlomak $\frac{4}{13}$?

234. Duško je otpio $\frac{1}{6}$ pune šoljice crne kafe i dopunio je mlekom, napravivši belu kafu. Zatim je otpio $\frac{1}{3}$ te šoljice i ponovo je dopunio mlekom. Onda je otpio $\frac{1}{2}$ šoljice i dolio mlekom do vrha. Najzad je popio sve iz šoljice. Čega je Duško više popio: kafe ili mleka?

235. Nikola je popio $\frac{1}{5}$ mleka iz pune šolje i šolju dopunio kafom. Zatim je opet popio $\frac{1}{5}$ sadržine šolje i dopunio je kafom. Kada je i treći put popio $\frac{1}{5}$ sadržaja šolje, u šolji je ostalo za 28 cm^3 više mleka nego kafe. Izračunaj zapreminu te šolje.

236. Trideset litara soka pretočeno je u 39 boca, i to od $\frac{4}{5}$ litra i $\frac{3}{4}$ litra. Koliko ima boca od $\frac{3}{4}$ litra?

237. Zaboravni profesor je otvorio slavinu za vodu nad kadom i zaboravio da začepi kadu. Poznato je da se ova kada prazna puni za 20 minuta, a puna prazni za 30 minuta. Profesor se setio čepa tek posle 48 minuta. Da li se kada prelila?

238. Kad se iz jedne pune cisterne prelije u drugu praznu cisternu, najpre $\frac{1}{8}$ tečnosti, a zatim još $\frac{1}{3}$ preostale tečnosti, onda u drugu cisternu može stati još 24 litra tečnosti. Koliko litara zahvata svaka od ovih cisterni, ako u prvu može stati dva puta više tečnosti nego u drugu?

239. U tri gajbe nalazi se ukupno 300 jabuka. Ako iz prve uzmemo $\frac{1}{3}$, iz druge $\frac{3}{5}$ i iz treće $\frac{3}{4}$, onda ćemo uzeti ukupno 160 jabuka. Koliko bismo imali jabuka da smo uzeli $\frac{2}{5}$ iz druge i $\frac{5}{8}$ iz treće gajbe?

240. Sud i voda u njemu imaju masu ukupno 1 kg. Ako se odlije $\frac{2}{7}$ tečnosti, ukupna masa se smanji za $\frac{1}{4}$ kg. Izračunaj masu suda.

241. U sudu A pomešano je 8 litara vina i 7 litara vode. U sudu B pomešano je 11 litara vina i 9 litara vode. Iz oba suda izvadimo po 7 litara. Zatim je 7 litara iz suda A sipano u sud B, a 7 litara iz suda B sipano je u sud A. Izračunaj koliko će posle toga biti vode u sudu A i koliko u sudu B.

242. U prodavnici je bilo ukupno 180 kg jabuka i krušaka. Prodato je $\frac{3}{8}$ jabuka i $\frac{3}{10}$ krušaka, što iznosi $\frac{1}{3}$ ukupne količine jabuka i krušaka. Koliko je u prodavnici bilo jabuka?

243. Vlada i Lazar međusobno podele 816 dinara. Kad Vlada potroši $\frac{3}{5}$ svog dela, a Lazar $\frac{3}{7}$ svog dela, ostanu im jednake sume novca. Koliko je novca dobio svaki od njih?

244. Zoran, Dušan i Nikola poneli su na ekskurziju ukupno 2220 dinara. Zoran je potrošio $\frac{1}{3}$ svoje sume, Dušan $\frac{1}{5}$ svoje sume, a Nikola $\frac{7}{15}$ svoje sume. Posle toga ostale su im jednake sume novca. Koliko je novca svaki od njih poneo na ekskurziju?

245. Luka može na računaru otkucati izvestan broj stranica za 5 sati i 20 minuta, a Filip isti posao obavi za 4 sata i 40 minuta. Kad su kucali jedan tekst zajedno, Filip je otkucao tri stranice više od Luke. Koliko stranica ima dati tekst?

246. Kako podeliti sedam jabuka na dvanaest učenika ako:

a) samo jednu jabuku smemo raseći na vise od dva dela;

b) svaka se jabuka može iseći na najviše četiri dela?

247. Raspolažemo sa tri posude ukupne zapremine 120 litara. Ako prvi sud napunimo vodom, pa ga prelijemo u druga dva, ili će drugi biti pun do vrha i treći do svoje trećine, ili će treći biti pun do vrha, a drugi do polovine. Odredi kapacitete ovih posuda.

248. Odrediti x, y i z ako je: $\dfrac{37}{13} = 2 + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}}$.

249. Četiri gusara su zaplenili kutiju sa zlatnicima. Najjači je uzeo 33 zlatnika, a trojica su podelili ostale zlatnike, srazmerno svojoj snazi. Tada je vođa naredio da najjači svakom od ostalih gusara da onoliko zlatnika koliko ih oni već imaju. Sada je drugi imao najviše, pa je morao po naređenju ostaloj trojici dati onoliko zlatnika koliko ih svaki već ima. Zatim je tako morao postupiti treći, pa četvrti. Posle toga se ispostavilo da svi imaju isti broj zlatnika. Koliko je svaki gusar prigrabio na početku?

250. Pešak se kreće po uskom mostu između njegovih krajnjih tačaka A i B. Prešavši $\frac{3}{8}$ dužine mosta, čuje iza sebe sirenu automobila koji mu se približava konstantnom brzinom od 60 km/h. Ako pešak potrči nazad, susrešće se sa automobilom na početku mosta (u tački A). Ako potrči napred, automobil će ga sustići na kraju mosta (u tački B). Kojom brzinom trči pešak?

3.3. Procenti

Procenat je razlomak: $\frac{1}{100} = 0,01 = 1\ \%$ (*jedan stoti deo*, a uobičajeno je da se kaže “jedan (deo) od 100”). Za obračunavanje procenata često se koristi proporcija $G : P = 100 : p$ (Sa G je označena veličina od koje se računa p procenata.) Mnogo jednostavnije se računa sa decimalnim zapisima. Npr. 15% od 340 je $0,15 \cdot 340 = 51$. Broj m smanjen za 10% daje $0,9 \cdot m$. Cena x, povećana za 7%, je $1,07 \cdot x$ i sl.

Dobro je prepoznati sledeće vrednosti:

$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$ $\quad \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$ $\quad \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$

$\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$ $\quad \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$ $\quad \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$

251. Ako se brzina na nekom putu poveća za 50%, za koliko će se procenata smanjiti vreme putovanja?

252. Nikola i Nemanja istovremeno su pošli u školu. Nikolin korak je za 10% kraći od Nemanjinog, ali je Nikola za isto vreme načinio koraka za 10% više od Nemanje. Koji je dečak pre stigao u školu?

253. Šestina od ukupne količine neke robe prodata je sa zaradom od 20%, a polovina je prodata sa gubitkom od 10%. Sa koliko procenata zarade treba prodati ostatak robe da bi se pokrio gubitak?

254. Na početku školske godine u jednoj školi bio je jednak broj dečaka i devojčica. Na polugodinštu dođe još 15 devojčica i 5 dečaka. Posle toga broj devojčica predstavlja 51% od ukupnog broja učenika te škole. Koliko je bilo dečaka, a koliko devojčica na početku školske godine?

255. Morska voda sadrži 5% soli. Koliko litara obične vode treba dodati u 40 litara morske vode, da bi u vodi bilo 2% soli?

256. U posudi je bilo 420 g dvadesetprocentnog rastvora soli u vodi. Posle izvesnog vremena, usled isparavanja, količina rastvora se smanjila na 300 g. Koliki je sada procenat soli u vodi?

257. Sveže grožđe sadrži 80% vode, a suvo sadrži 12% vode. Koliko kilograma svežeg grožđa treba da bi se dobilo 16 kilograma suvog grožđa?

258. U magacinu je bilo 100 kg jagoda, koje sadrže 91% vode. Posle izvesnog vremena količina vode se smanjila na 90%. Kolika je sada masa jagoda?

259. Ivan je dobio novac da zajedno sa trojicom drugova kupi fudbalsku loptu, tako da svako plati jednaki deo. Onda je došao Marko, pa su platili svako po petinu cene. Koliko je procenata dobijenog novca Ivan uštedeo?

260. Aca i Nemanja, učenici VII razreda, članovi su matematičke sekcije, koju čine "sedmaci" i "osmaci". U grupi je više od 70% "osmaka". Koliko je najmanje članova u grupi?

261. Cena ulaznice za utakmicu je 180 dinara. Kada je cena ulaznice smanjena, broj posetilaca se povećao za 50%, a prihod je porastao za 25%. Kolika je nova cena ulaznice?

262. Poznato je da je cena dijamanta proporcionalna kvadratu njegove mase. Prilikom brušenja nekog dijamanta otpao je komadić, tako da se cena smanjila za 36%. Koliko je procenata od ukupne mase iznosio odlomljeni komadić?

263. Ukupna masa posude napunjene vodom iznosi 2000 g. Odlijemo li 20% vode, ukupna masa će se smanjiti na 88% prvobitne mase. Odredi masu prazne posude i masu vode.

264. U nepunoj posudi je 85-procentni rastvor alkohola. Ako je dopunimo do vrha 21-procentnim rastvorom alkohola, promešamo, pa odlijemo onoliko tečnosti koliko smo i dolili, pa opet dopunimo do vrha 21-procentnim rastvorom alkohola, dobićemo rastvor koji sadrži 70% alkohola. Koliki je deo posude bio ispunjen pre dolivanja?

265. U jednoj školi ima manje od 400 učenika. Šest odeljenja imaju jednak broj učenika i u tih šest odeljenja ima više od 150 učenika. U ostalim odeljenjima ima ukupno za 15% učenika više nego u ovih šest odeljenja. Koliko je ukupno učenika u ovoj školi?

Glava 4

PRE UPOTREBE PROMUĆKATI

- Za bistre glave
- Mačke i miševi
- Merenja

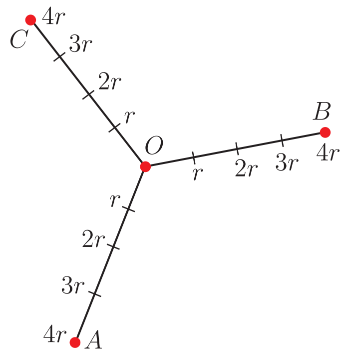
Pre upotrebe promućkati

Zadaci iz ove glave u najvećem broju pripadaju tzv. rekreativnoj matematici. Za njihovo rešavanje najbolje uputstvo je naslov glave. Pojedini zadaci su iz one grupe problema koji se rešavaju na žurkama, na putovanjima, u svim prilikama u kojim treba "ubiti vreme".

Primer A) U tri korpe nalaze se redom 6, 7 i 11 jabuka. Treba sa tri prebacivanja izjednačiti broj jabuka u korpama, pri čemu se iz jedne korpe u drugu može prebaciti tačno onoliko jabuka koliko u toj drugoj korpi već ima. Kako se to može učiniti?

Rešenje. Najpre iz treće korpe prebacimo u drugu 7 jabuka. Sada imamo u prvoj korpi 6 jabuka, a u drugoj $7 + 7 = 14$ jabuka i u trećoj $11 - 7 = 4$ jabuke. Onda, iz druge u prvu korpu prebacimo 6 jabuka, pa je u prvoj $6 + 6 = 12$ jabuka, a u drugoj $14 - 6 = 8$ jabuka i u trećoj 4 jabuke. Na kraju, iz prve korpe prebacimo 4 jabuke u treću korpu. Tada se u svakoj korpi nalazi po 8 jabuka.

Primer B) Iz jedne raskrsnice polaze tri ulice, na slici označene sa $OA = OB = OC$, iz kojih su svi izlazi zatvoreni. Inspektor je u raskrsnici (u tački O) i on juri prestupnika, koji se nalazi u jednoj od ulica. Inspektor može da vidi prestupnika samo ako njihovo međusobno rastojanje nije veće od r. Maksimalna brzina inspektora dva puta je veća od brzine prestupnika. U početnom momentu inspektor ne vidi prestupnika.



Dokaži da inspektor može uhvatiti prestupnika.

Dokaz. Inspektor ide najpre do položaja $3r$ u ulici OC. Ako je prestupnik u toj ulici uhvatiće ga sigurno, a ako nije, inspektor se maksimalnom brzinom vraća u O. Onda traži prestupnika u ulicama OA i OB, vodeći računa da ovaj ne umakne u ulicu OC. Prestupnik je u ulici OA ili OB, udaljen od O za više od r (inače bi ga inspektor video i uhvatio. Krećući se stalno maksimalnom brzinom, inspektor ulazi u ulicu OA do tačke $2r$ i odmah se vraća u O. On zna, ako je prestupnik u ulici OA, nalazi se između tačaka $3r$ i $4r$ (inače bi ga video). Dok se inspektor vrati u O, prestupnik (ako je u ulici OB) ne može pobeći u OC dalje od tačke r. Ako inspektor ne vidi prestupnika u OC, on produžava u ulicu OB do tačke $3r$. Ako je prestupnik u OB inspektor će ga uhvatiti, a ako nije, inspektor se vraća u ulicu OA do kraja i tu hvata prestupnika.

4.1. Za bistre glave

266. Učenici: A (Andrija), B (Bora), C (Cvetko) i D (Dušan) takmičili su se na školskom krosu. Oni su bili neprikosnoveni favoriti i osvojili su prva četiri mesta. Pre trke svaki od njih prognozirao je redosled prvih četiri na cilju. Andrija: $ABDC$; Bora: $BACD$; Cvetko: $CBDA$; Dušan: $DCBA$. Pokazalo se da niko nije tačno prognozirao redosled svih takmičara na cilju, već je samo jedan od njih pogodio plasman samo jednog od takmičara.

Kakav je bio redosled na cilju trke?

267. Od tri olovke, označimo ih sa A, B, C, jedna je crvena, jedna bela i jedna plava. Odredi koje boje imaju ove olovke, ako je samo jedno od tri tvrdenja tačno: "A je crvena", "B nije crvena", "C nije plava."

268. U svakoj od tri kutije nalazi se po jedna kuglica: ili bela, ili crna, ili zelena. Na prvoj kutiji piše "bela", na drugoj "crna" i na trećoj "bela ili zelena." Međutim, nijedan od natpisa ne odgovara istini. Odredi gde je koja kuglica.

269. Na stolu su tri istovetne kutije, različite samo po boji: crna, bela i siva. U jednoj od njih nalaze se dve crne kuglice, u drugoj jedna crna i jedna bela i u trećoj dve bele kuglice. Na crnoj kutiji piše "2 crne", na beloj "2 bele" i na sivoj "crna i bela". Međutim, zna se da nijedan od ovih natpisa ne odgovara istini. Može li se, bez gledanja u kutiju, izvući samo jedna kuglica, pa na osnovu njene boje odrediti koje su kuglice u crnoj, beloj i sivoj kutiji?

270. Vera, Lidija i Nada su predsednice matematičke, hemijske i sportske sekcije u svojim odeljenjima. Sportistkinja je najmlađa i nema ni brata, ni sestru u školi. Vera, koja sedi u klupi sa Lidijinim bratom, starija je od članice hemijske sekcije.

Odredi imena predsednica matematičke, hemijske i sportske sekcije.

271. Jedan miš gricka parče sira u obliku kocke ivice 3. Kocka sira je sastavljena od 27 kockica ivice 1. Miš gricka sir na taj način što počinje sa kockicom u jednom od temena. Pojevši celu kockicu, prelazi na susednu, koja sa tek pojedenom ima zajedničku stranu. Da li miš može pojesti celo parče sira, tako da poslednja kockica koju pojede bude ona iz centra kocke?

272. Na času fizičkog vaspitanja 40 učenika se postroji u jednu vrstu i svi imaju na leđima okačene redom brojeve: $1, 2, 3, \ldots, 38, 39, 40$. Na zvižduk nastavnika svaki učenik može da zameni mesto sa drugim učenikom, ili da ostane na mestu. Da li je moguće da posle drugog zvižduka nastavnika učenici budu postrojeni u redosledu: $40, 1, 2, 3, \ldots, 38, 39$?

273. U jednoj kutiji ima 1996 belih, 1997 crvenih i 1998 plavih kuglica. Koliki je najmanji broj kuglica koje moramo uzeti, bez gledanja i bez vraćanja u kutiju, da bi među izvučenim bile sigurno tri kuglice:

a) iste boje; b) bele boje; c) različitih boja?

274. U centru sobe je mačka i oko nje 10 miševa, i to 9 crnih označenih brojevima od 1 do 9, i jedan beli miš označen brojem 10. Miševi trče ukrug, stalno u istom smeru, ne menjajući međusobni redosled $(1, 2, 3, \ldots, 9, 10)$. Mačka ih lovi jednog po jednog i, svaki put kad ulovi jednog miša, dok ga pojede, ispred nje protrče četiri miša. Petog mačka ulovi, dok ostali trče ukrug, bez prestanka. Dok mačka jede miša, četiri opet protrče, a petog mačka ulovi, itd.

Ispostavilo se da je beli miš poslednji ulovljen. Koji je miš prvi pojeden?

275. Dva ribara su pošla zajedno u ribolov. Nenad je ulovio 3 ribe, a Predrag 5 riba. Kada su počeli da ih peku, naiđe Marko i sedne da doručkuje sa njima. Pojeli su sve ribe, tako da su sva trojica dobili jednake porcije. Posle doručka Marko plati svoju porciju 8 dinara. Kako će Predrag i Nenad pravedno podeliti taj novac?

276. Jedne godine su 1. januar i 1. april pali u četvrtak. Koliko u toj godini ima meseci sa pet petaka?

277. U nekom mesecu tri subote su pale na parni datum. Koji je dan u nedelji bio 25. dan u tom mesecu?

278. Ciframa 4, 5, 6, 7, 8, 9 je napisan jedan šestocifren broj. Zoran, Maja i Milica pogađali su taj broj. *Zoran*: 574698, *Maja*: 786945, *Milica*: 456789. Ispostavilo se da je Zoran pogodio tačna mesta za tri cifre. Isto toliko je pogodila i Maja, dok je Milica pogodila mesto samo jedne cifre. Koji je taj šestocifreni broj?

279. Koliko prababa imaju sve Oljine prababe?

280. U kvadratnoj mreži 100 puta 100 upisano je bilo kojih 10000 brojeva. Označimo sa a_1 zbir prve vrste, sa a_2 zbir druge vrste, itd, sa a_{100} zbir stote vrste. Dalje, sa b_1 označimo zbir prve kolone, sa b_2 zbir druge kolone, itd, sa b_{100} zbir stote kolone. Odredi maksimalnu vrednost izraza:

$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_{100} - b_{100})$.

281. Testirana su 22 učenika iz osam škola. Oni su tačno rešili ukupno 50 zadataka. Svaki učenik iz iste škole rešio je jednak broj zadataka, a učenici iz raznih škola rešili su različiti broj zadataka. Svaki je rešio bar jedan zadatak. Koliko je ukupno učenika rešilo samo po jedan zadatak?

282. U tri kutije A, B i C nalaze se kuglice: u kutiji A su 2, u kutiji B su 3 i u kutiji C su 4 kuglice. Dva igrača igraju sledeću igru: naizmenično uzimaju iz proizvoljne kutije proizvoljni broj kuglica. Pobednik je onaj igrač, posle čijeg poteza sve kutije ostaju prazne. Kako treba da igra prvi igrač da bi sigurno pobedio svog protivnika?

283. Da bi oslobodio zarobljenu princezu, Carević mora proći šest kapija zamka. Na svakoj kapiji oduzimaju mu polovinu zlatnika koje ima u tom trenutku i još jedan zlatnik. Kada je konačno ušao u zamak, ostao mu je jedan zlatnik. Koliko je zlatnika imao pre prolaska kroz prvu kapiju?

284. Mići su javili lepu vest i on je rešio da to proslavi. Ušao je u jedan restoran, platio garderobu 1 dinar, potrošio polovinu preostalog novca i na kraju častio konobara 1 dinar. Zatim je otišao u drugi restoran. Na ulazu je ponovo platio garderobu 1 dinar. Opet je potrošio polovinu preostalog novca i častio konobara 1 dinar. Tako je postupio u trećem restoranu, pa u četvrtom. Kad je želeo da uđe u peti restoran, utvrdio je da nema više novaca. Sa koliko je dinara Mića krenuo u veselje?

285. Suzana je prvi utorak u mesecu provela u Parizu, a prvi utorak posle prvog ponedeljka istog meseca boravila je na Floridi. Sledećeg meseca Suzana je prvu sredu provela u Beogradu, a prvu sredu posle prvog utorka u Ulcinju. Gde je Suzana te godine proslavila 8. mart?

286. Mika ugovori posao: pokosiće livadu, a kao nadoknadu dobiće kosu kojom je kosio livadu i 1000 dinara. Međutim, Mika je pokosio pola livade i dobio kosu i 300 dinara. Koliko vredi kosa?

287. Na šahovskom turniru Fića i Šonsi odigrali su sve partije iz prvih pet kola, a onda su napustili turnir. Zbog toga je na turniru odigrano svega 38 partija, a bilo je predviđeno da igra svako sa svakim po jednu partiju. Da li su Fića i Šonsi odigrali partiju jedan sa drugim?

288. Na jednokružnom šahovskom turniru (svako sa svakim igra jednu partiju) učestvovalo je 8 igrača i na kraju je svaki osvojio različit broj poena. Drugoplasirani je imao toliko poena, koliko četiri poslednja zajedno. Kako je završena partija između igrača koji su osvojili treće i sedmo mesto?

289. Za bojenje jedne strane kocke treba 5 sekundi. Koliko je najkraće vreme u toku kojeg tri čoveka mogu obojiti 188 kocki, ako ne mogu dva čoveka istovremeno bojiti istu kocku?

290. Potkivač postavi jednu potkovicu na kopito konja za tačno 5 minuta. Koliko najmanje vremena treba da 48 potkivača potkuju 60 konja? Treba voditi računa da tokom potkivanja jednog kopita konj mora stajati na tri noge, pa nije moguće da jednog konja istovremeno potkivaju dva potkivača.

291. U ribnjak je pušteno 25 gladnih štuka. Jedna štuka, da bi se zasitila, mora da pojede tri štuke (bilo koje – gladne ili site). Koliko najviše štuka može da ostane u ribnjaku (da sve budu site)?

292. Prošle godine u ribnjak je ubačena mlađ šarana. Kako se ove godine može približno izračunati koliko u ovom ribnjaku ima odraslih šarana starih godinu dana?

293. Da bi se ispržila jedna prženica, potrebno je dva minuta. (Svaka strana se prži po jedan minut.) Koliko je najmanje vremena potrebno da se isprže 3 prženice, ako je u tiganju moguće pržiti odjednom najviše dve prženice?

294. Jedan hirurg u ratnoj bolnici treba da operiše tri pacijenta. Svaki od pacijenata je zaražen veoma opasnim virusom (od tri različite bolesti). Kako će hirurg obaviti ove operacije sa samo dva para gumenih rukavica, a da pri tome ni sebe, ni pacijente ne inficira novim virusom? (Možda je i hirurg zaražen nekim virusom.)

295. Trava na livadi raste svuda jednako brzo i jednako gusto. Znamo da bi 70 krava popaslo livadu za 24 dana, a 30 krava za 60 dana. Koliko bi krava popaslo tu livadu za 96 dana?

296. U tabelu 10 puta 10 upisani su redom prirodni brojevi od 1 do 100, i to u prvoj vrsti od 1 do 10, u drugoj od 11 do 20, itd. Zatim je polovina upisanih brojeva dobila znak “minus”, bez utvrđenog reda, ali tako da je u svakoj vrsti i u svakoj koloni po pet brojeva negativno. Dokaži da je zbir svih brojeva u tabeli jednak nuli.

297. Voja, Ratko i Mile su rešavali zadatke. Da je Voja rešio 5 zadataka više nego što je uspeo, tada bi imao rešenih zadataka koliko Ratko i Mile zajedno. Da je Ratko rešio 9 zadataka više nego što jeste, tada bi on imao rešenih zadataka koliko su zajedno rešili Voja i Mile. Prezimena ovih dečaka su: Milovanović. Tošić i Petrović. Odredi svakom dečaku ime i prezime i koliko je zadataka rešio, ako je broj zadataka koje je rešio Tošić deljiv sa 3, a Petrović je rešio 11 zadataka.

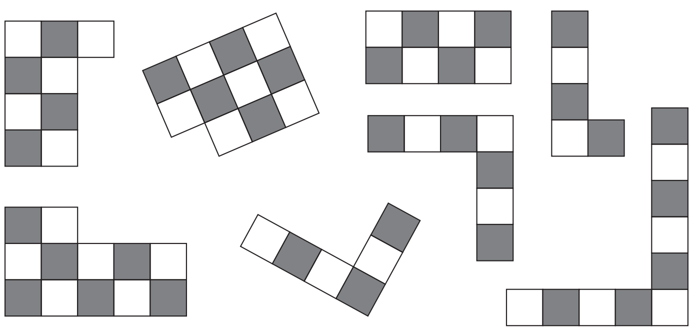
298. Na izletu su bili 4 dečaka i 4 devojčice, i to četiri para brat-sestra, iz četiri porodice. Pili su coca colu i popili ukupno 32 čaše. Devojčice su popile: Iva jednu čašu, Maja dve čaše, Suzana tri čaše i Jela četiri čaše. Dečaci su popili: Kahari jednako kao njegova sestra, Jerotić dva puta više od svoje sestre, Babić tri puta više od svoje sestre i Ćamilović četiri puta više od svoje sestre.

Kako glase imena i prezimena devojčica?

299. Na jednom takmičenju iz matematike, učenici su sedeli po dva u klupi. Na svaku klupu je postavljena boca mineralne vode. Zatim su učenici, za vreme pauze, razvrstani u grupe od po tri učenika, i svakoj je grupi poslužena po jedna boca limunade. Za vreme ručka, za svakim stolom su sedela po četiri učenika i na svaki sto je postavljena boca voćnog soka. Pored toga, svaki učenik je popio po jednu bočicu pepsi cole.

Posle takmičenja pokupljeno je ukupno 50 praznih boca. Poznato je da su sva poslužena pića popijena i sve su boce ostale na mestu posluženja. Koliko je učenika učestvovalo na takmičenju?

300. Pošto je načinio grubu grešku i zbog toga bio matiran, temperamentni šahista je tresnuo šahovsku tablu o pod. Tabla se raspukla na osam delova, prikazanih na slici. Preslikaj ovih osam delova na jači karton, iseci ih i pomozi nervoznom šahisti da sklopi šahovsku tablu. (Postoje dva nepodudarna rešenja.)



4.2. Mačke i miševi

301. Četiri mačke za četiri dana ulove četiri miša. Za koliko će dana 100 mačaka uloviti 100 miševa?

302. Mačka i po za dan i po ulovi miša i po. Koliko miševa ulovi 9 mačaka za 6 dana?

303. Tri mačke za tri i po dana smažu tri i po miša. Za koliko će dana 12 mačaka smazati 28 miševa?

304. Mačka i po za tri i po dana ulovi četiri i po miša. Koliko će miševa uloviti pet i po mačaka za 21 dan?

305. Mačka i po za dan i po ulovi jednog miša. Koliko će miševa uloviti 60 mačaka za 36 dana?

306. Dve i po mačke za dva i po dana smažu tri i po miša. Koliko će miševa smazati 100 mačaka za 45 dana?

307. Deset mačaka za pet minuta smažu deset miševa. Za koje će vreme dvadeset mačaka smazati četrdeset miševa?

308. Tri mačke za četiri dana ulove pet miševa. Koliko treba mačaka da bi za sedam dana potamanile svih 140 miševa iz podruma?

309. Da bi se najele, dve i po mačke za dan i po moraju da smažu deset i po miševa. U podrumu ima 168 miševa. Za koliko dana deset mačaka imaju obezbeđen pansion?

310. Nekoliko mačaka ulovilo je i smazalo sve miševe iz podruma. Prva mačka je smazala jednog miša i sedminu preostalih miševa i najela se. Posle je došla druga mačka, koja se zasitila tako što je smazala dva miša i sedminu preostalih miševa. Zatim je treća mačka smazala tri miša i sedminu preostalih miševa, itd. Kad se tako zasitila i poslednja mačka u podrumu više nije bilo miševa.

Koliko se mačaka zasitilo i koja je mačka smazala najviše miševa?

4.3. Merenja

311. Raspolažemo sa 9 kg brašna, terazijama i tegom od 250 grama. Kako ćemo sa tri merenja odmeriti tačno 2 kg brašna?

312. Trgovac treba da prepakuje 20 kg šećera u kese od 2 kilograma. Međutim, kada je trebalo da započne pakovanje, utvrdio je da nema odgovarajući teg. Zapravo, imao je samo jedan teg od 3 kilograma i jedan teg od 7 kilograma. Međutim, snašao se i sa 9 merenja prepakovao šećer u 10 paketa po 2 kilograma. Kako je to učinio?

313. U vreći se nalazi šećer u prahu. Raspolažemo terazijama sa dva tasa i samo jednim tegom od 1 gram. Kako ćemo sa deset merenja izmeriti 1 kilogram šećera?

314. Od 3 naizgled potpuno jednake kuglice, jedna je malo teža od ostalih. Ova razlika se može otkriti upoređivanjem na terazijama bez tegova. Pokaži kako se samo jednim merenjem na ovim terazijama otkriva koja je kuglica najteža.

315. Od 9 po izgledu jednakih žetona, jedan je neispravan, malo je lakši od ostalih. Kako ćemo sa dva merenja na terazijama bez tegova otkriti koji je žeton neispravan?

316. Pokaži da se sa 5 merenja na terazijama bez tegova, od 100 po izgledu jednakih žetona, može otkriti žeton, koji je malo lakši od ostalih 99 (ispravnih i jednakih po masi).

317. Od 4 medaljona, potpuno jednakog izgleda, 3 su zlatna i 1 pozlaćen. Pozlaćeni se razlikuje od zlatnih samo u masi. Sa koliko se najmanje merenja na terazijama bez tegova može otkriti pozlaćeni medaljon i da se još utvrdi da li je lakši ili teži od ostalih?

318. Između četiri naizgled jednaka novčića jedan je neispravan, tj. razlikuje se po masi od ostalih, ali nije poznato da li je nešto lakši ili teži od ispravnih novčića. Pored toga, imamo na raspolaganju još jedan novčić, za koji sigurno znamo da je ispravan. Pomoću najviše dva merenja na terazijama sa dva tasa treba pronaći neispravni novčić i utvrditi da li je teži ili lakši od ispravnog.

319. Između četiri naizgled jednaka novčića, dva su neispravna, a dva ispravna. Ispravni novčići su jednake mase, a neispravni su takođe jednake mase među sobom, ali nešto lakši od ispravnih. Kako ćemo sa dva merenja na terazijama sa dva tasa utvrditi koji su novčići ispravni, a koji neispravni?

320. Od 8 novčića, jednakih po izgledu, jedan je neispravan (lakši ili teži). Kako ćemo sa 3 merenja na terazijama bez tegova utvrditi koji je novčić neispravan, kao i da li je lakši ili teži?

321. Reši prethodni zadatak sa 12 novčića, od kojih je 1 neispravan, takođe sa samo 3 merenja.

322. Između sedam naizgled jednakih novčića dva su neispravna. Svi ispravni novčići su iste mase, a neispravni su nešto lakši od ispravnih, a jednake mase između sebe. Pomoću tri merenja na terazijama treba pronaći neispravne novčiće.

323. Imamo 10 gomilica novčića, potpuno jednakih po izgledu. U svakoj gomilici ima bar po 9 moneta. Jedna gomilica sadrži samo neispravne monete, mase po 11 grama. Ostali novčići su ispravni, sa masom od 10 grama. Raspolažemo preciznom vagom, baždarenom na grame. Koliko je najmanje merenja potrebno izvršiti da bi se otkrila gomilica sa neispravnim monetama?

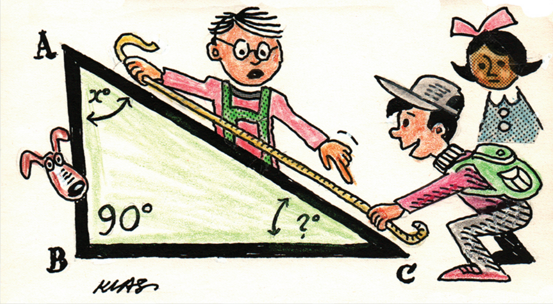
324. U pet ćupova nalaze se zlatnici. Svi zlatnici koji se nalaze u istom ćupu imaju istu masu. Po izgledu, zlatnici se ne razlikuju. Znamo da svaki zlatnik ima masu od 5 grama ili od 6 grama. Niko ne zna da li postoje zlatnici od obe vrste, ili možda samo od jedne vrste. Kako ćemo jednim merenjem, koristeći vagu iz prethodnog zadatka utvrditi mase svih novčića (iz svih ćupova)?

325. Imamo pet ćupova i u svakom po 100 zlatnika. Poznato nam je da su u svakom ćupu svih 100 zlatnika iste mase. Znamo da su moguće mase zlatnika 9 grama, 10 grama i 11 grama. Da li je moguće samo jednim merenjem na vagi iz **zadatka 323** utvrditi mase zlatnika u svih pet ćupova?

Glava 5

TROUGAO

- Duži i uglovi
- Uglovi trougla
- Nejednakosti trougla
- Jednakokraki trougao
- Razni trouglovi
- Značajne tačke trougla



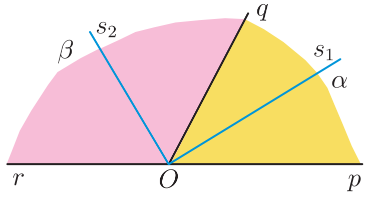
Trougao

Proučavanje osobina trougla izuzetno je značajno, jer ako to učinimo kvalitetno, složenije geometrijske figure neće nam predstavljati krupan problem. Zbog toga ovoj glavi posvetićemo najveću pažnju. Trougao se pažljivo proučava i u redovnoj nastavi. Iz tog razloga ovde ćemo rešavati veći broj zadataka tzv. takmičarskog tipa. U svakom odeljku počinjemo sa jednostavnijim zadacima, koji su po sadržaju i težini bliski tipičnim školskim zadacima, a onda pojačavamo tempo, tako da su po pravilu najteži zadaci na kraju odeljka.

5.1. Duži i uglovi

Primer A) Duž AB ima dužinu m. Neka je C proizvoljna tačka duži AB. Ako je M središte duži AC i N središte duži BC, odredi dužinu duži MN.

Rešenje. Na slici levo vidimo da je $MN = MC + CN$. Kako je $MC = \frac{1}{2}AC$ i $CN = \frac{1}{2}CB$, to je $MC + CN = \frac{1}{2}(AC + BC)$. Međutim, kako je $AC + BC = AB$, to je $MN = MC + CN = \frac{1}{2}AB$. Prema tome, dužina duži MN je $\frac{m}{2}$.



Primer B) Dokaži da simetrale uporednih uglova obrazuju prav ugao. Da li važi obrnuto: ako su simetrale dva susedna ugla normalne među sobom, onda su ta dva ugla uporedna?

Dokaz. Neka su α i β uporedni uglovi. Tada je $\alpha+\beta=180^\circ$. Ugao koji određuju simetrale s_1 i s_2 ovih uglova, vidi poslednju sliku desno, iznosi:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ.$$

Time smo dokazali prvo tvrđenje.

Obrnuto, neka je $\alpha=Opq$, $\beta=Oqr$ i $Os_1s_2=90^\circ$. Pri tome je

$$Os_1s_2=Os_1q+Oqs_2=\frac{1}{2}Opq+\frac{1}{2}Oqr.$$

Budući da je $Os_1s_2=90^\circ$, to je $\frac{1}{2}Opq+\frac{1}{2}Oqr=90^\circ$. Međutim:

$$\frac{1}{2}Opq+\frac{1}{2}Oqr=\frac{1}{2}(Opq+Oqr)=\frac{1}{2}Opr=90^\circ,$$

pa je $Opr=180^\circ$. Otuda zaključujemo da su uglovi Opq i Oqr uporedni.

Dakle, važi i obrnuto tvrđenje.

Primer C) Ugao α je suplementan sa uglom β, a komplementan sa trećinom ugla β. Odredi uglove α i β.

Rešenje. Iz datih uslova zaključujemo da je $\frac{2}{3}\beta$ prav ugao (višak od komplementa), tj. $\frac{2}{3}\beta=90^\circ$. Dakle, $\beta=135^\circ$, a $\alpha=45^\circ$.

326. Date su redom tačke A, B, C jedne prave. Ako je M središte duži AB i N središte duži AC, dokaži da je $BC=2MN$.

327. Na duži AB dužine k data je tačka C, tako da rastojanje od središta duži AB do središta duži BC iznosi $\frac{2}{5}k$. Izračunaj dužinu duži AC.

328. Duž AB tačkom C je podeljena na delove čije se dužine razlikuju za 1 cm. Izračunaj dužinu duži AB, ako je središte manjeg dela pet puta bliže tački A nego tački B.

329. Tačke A i B dele duž MN na tri odsečka čije se dužine odnose kao 2 : 3 : 4. Rastojanje između središta krajnjih delova je 30 cm. Kolika je dužina duži MN?

330. Tri tačke dele datu duž AB na četiri dela. Rastojanje između središta unutrašnjih delova je 6 cm, a između središta krajnjih delova 16 cm. Kolika je dužina duži AB?

331. Date su tačke A, B, C jedne prave, navedenim redom, tako da dužina duži AB iznosi 3 cm, a dužina duži BC je 2 cm. Neka su M, N, P redom središta duži AB, AC, BC. Kolike su dužine duži NP, AP i MN?

332. Na duži AB, čija je dužina 40 cm, uzete su tri tačke, tako da je rastojanje između središta krajnjih delova 33 cm. Koliko je rastojanje između središta unutrašnjih delova?

333. Na duži MN su redom tačke A, B, C i D, tako da je $AB = BC = CD$. Rastojanje između središta duži AB i CD je 28 cm, a rastojanje između središta duži AM i DN je 51 cm. Kolika je dužina duži MN?

334. Na pravoj a dat je niz tačaka: $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, tim redom, a na pravoj b redom niz tačaka $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$. Rastojanje između svake dve susedne tačke na pravoj a jednako je rastojanju između ma koje dve susedne tačke prave b. Ako dužina duži B_1B_{10} iznosi 10 cm, kolika je dužina duži A_1A_{100}?

335. Na duži AB dato je 10 tačaka, koje su dve po dve simetrične u odnosu na središte duži AB. Bilo kojih 5 od ovih tačaka označimo sa C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, a ostale sa D_1, D_2, D_3, D_4, D_5. Dokaži da je zbir rastojanja tačaka C_1, C_2, C_3, C_4 i C_5 od A jednak zbiru rastojanja tačaka D_1, D_2, D_3, D_4 i D_5 od B.

336. Ako tri prave neke ravni imaju jednu zajedničku tačku, tada je zbir tri nesusedna ugla koji su određeni ovim pravim, jednak opruženom uglu. Dokaži.

337. Zbir ugla α i njemu uporednih uglova je 325°. Odredi ugao α i njemu uporedni ugao.

338. Simetrale susednih uglova α i β normalne su jedna na drugu. Izračunaj α i β, ako je $\alpha - \beta = 30^\circ 10' 20''$.

339. Oštar ugao α i šestina njemu uporednog ugla komplementni su. Odredi ugao α.

340. Razlika ugla α i njemu uporednog ugla β je 56°. Izračunaj ugao γ koji je komplementan uglu β.

341. Petina ugla α jednaka je sedmini njemu suplementnog ugla β. Koliki je ugao koji je komplementan sa α?

342. Koji je ugao za 1° veći od svog suplementnog ugla?

343. Koliki je zbir dva ugla koji su suplementni sa dva komplementna ugla?

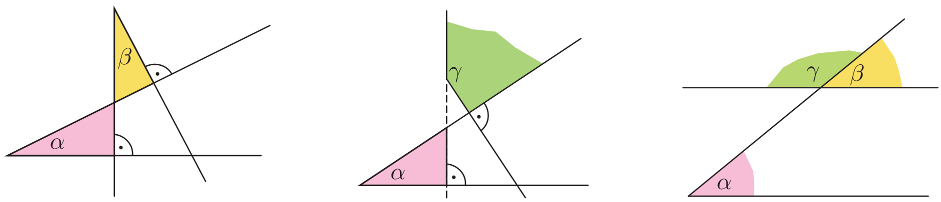
344. Uglovi α i β su komplementni sa dva suplementna ugla φ i θ. Izračunaj uglove α, β, φ i θ.

345. Odredi ugao α koji je od svog suplementnog ugla manji tačno za onoliko za koliko je veći od svog komplementnog ugla.

5.2. Uglovi trougla

Koristićemo sledeće osobine uglova.

Uglovi sa normalnim kracima jednaki su, slika dole levo, ili suplementni, slika u sredini.



Uglovi sa paralelnim kracima, slika gore desno, jednaki su ($\alpha = \beta$) ili suplementni ($\alpha + \gamma = 180°$).

Zbir unutrašnjih uglova trougla jednak je opruženom uglu:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Zbir spoljašnjih uglova trougla jednak je punom uglu:

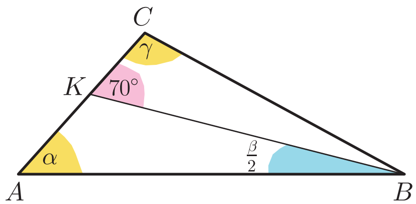
$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$.

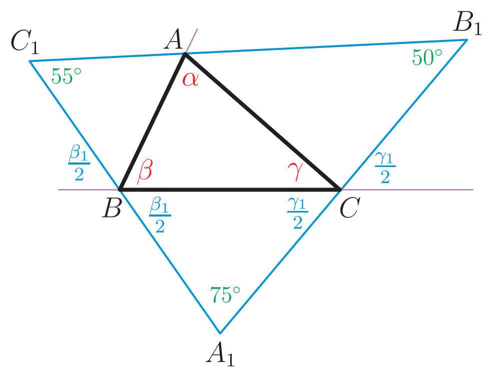
Spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva nesusedna unutrašnja ugla, na primer: $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

Primer A) Na stranici AC trougla ABC data je tačka K, tako da je prava BK simetrala unutrašnjeg ugla β. Ako je $\sphericalangle BKC = 70°$ izračunaj razliku uglova: $\sphericalangle ACB = \gamma$ i $\sphericalangle CAB = \alpha$.

Rešenje. Ugao BKA je uporedan sa datim uglom, pa prema tome je $\sphericalangle BKA = 110°$. Ugao BKC je spoljašnji ugao trougla ABK (sledeća slika). Zbog toga je $\sphericalangle BKC = 70^\circ = \alpha + \frac{\beta}{2}$, odakle je $\alpha = 70^\circ - \frac{\beta}{2}$. Slično, ugao AKB je spoljašnji ugao trougla BCK, pa je $\gamma = 110^\circ - \frac{\beta}{2}$. Prema tome, imamo:

$$\gamma - \alpha = 110^\circ - \frac{\beta}{2} - \left(70^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 40^\circ.$$





Primer B) Dokaži da je trougao pravougli ako i samo ako je jedan njegov ugao jednak zbiru ili razlici druga dva ugla.

Dokaz. Ako je trougao pravougli, tada je zbir oštrih uglova jednak trećem, pravom uglu, odnosno, jedan oštar ugao je jednak razlici pravog ugla i drugog oštrog ugla.

Obrnuto, neka je $\alpha = \beta + \gamma$. Kako je $\alpha + (\beta + \gamma) = 180^\circ$, sledi da je $\alpha + \alpha = 180^\circ$, tj. $\alpha = 90^\circ$. Sledi da je trougao pravougli. Ako je, pak, $\alpha = \beta - \gamma$, onda je $\alpha + \gamma = \beta$, pa kao u prethodnom slučaju dokazujemo da je $\beta = 90^\circ$.

Primer C) Simetrale spoljašnjih uglova α_1, β_1 i γ_1 trougla ABC seku se u tačkama A_1, B_1 i C_1, tako da je $\sphericalangle AC_1B = 55^\circ$, $\sphericalangle BA_1C = 75^\circ$ i $\sphericalangle CB_1A = 50^\circ$. Odredi unutrašenje uglove trougla ABC.

Rešenje. Neka se, na primer, simetrale uglova β_1 i γ_1 seku u tački A_1, kao na slici gore. U trouglu BA_1C unutrašnji uglovi su $\frac{\beta_1}{2}$, $\frac{\gamma_1}{2}$ i

$\sphericalangle BA_1C = 75^\circ$. Pritom je $\sphericalangle BA_1C = 180^\circ - \frac{\beta_1}{2} - \frac{\gamma_1}{2}$. Znamo da je $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$, odnosno $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = 180^\circ$. Onda je $\sphericalangle BA_1C = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \frac{\gamma_1}{2} = \frac{\alpha_1}{2}$. Sledi da je $\sphericalangle BA_1C = \frac{\alpha_1}{2}$, pa je $\frac{\alpha_1}{2} = 75^\circ$, a $\alpha_1 = 150^\circ$. Onda je $\alpha = 180^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, Slično odredimo da je $\beta_1 = 100^\circ$ i $\gamma_1 = 110^\circ$, pa je $\beta = 80^\circ$ i $\gamma = 70^\circ$.

346. Ako je zbir dva spoljašnja ugla trougla jednak 270°, dokaži da je taj trougao pravougli.

347. Simetrale dvaju unutrašnjih uglova trougla seku se pod uglom koji je jednak trećem unutrašnjem uglu. Izračunaj taj treći ugao trougla.

348. U trouglu ABC simetrale uglova γ i β_1 imaju zajedničku tačku D. Dokaži da je $\sphericalangle BDC = \frac{\alpha}{2}$.

349. Ako se simetrale dvaju unutrašnjih uglova trougla seku pod uglom od 135°, dokaži da je taj trougao pravougli.

350. U trouglu ABC za unutrašnje uglove važi relacija: $\alpha - \beta = 3\gamma$. Dokaži da je tada $\alpha - \gamma = 90^\circ$.

351. Spoljašnji uglovi trougla odnose se kao $9 : 16 : 20$. Neka su s_A i h_A simetrala ugla i visina povučene iz temena najvećeg unutrašnjeg ugla trougla. Odredi ugao između s_A i h_A.

352. Ako se spoljašnji ugao kod temena A poveća za 45°, a spoljašnji ugao kod temena B smanji za 35°, tada se unutrašnji ugao kod temena C trougla ABC poveća za svoju petinu. Izračunaj $\sphericalangle ACB$.

353. Duži AA_1 i CC_1 su visine oštrouglog trougla ABC. Dokaži da je unutrašnji ugao β trougla jednak zbiru uglova CAA_1 i ACC_1.

354. Izračunaj ugao koji obrazuju visina i simetrala ugla iz temena C trougla ABC, ako su poznati i uglovi α i β i $\alpha > \beta$.

355. U oštrouglom trouglu ABC $(AC < BC)$ visina $h_c = CC_1$ i simetrala $s_c = CM$ ugla γ seku se pod uglom od 9°, a simetrale spoljašnjih uglova kod temena A i B seku se pod uglom od 61°. Odredi unutrašnje uglove tog trougla.

5.3. Nejednakosti trougla

Među elementima trougla uočimo sledeće nejednakosti:

- Zbir dve stranice trougla veći je od treće stranice.

  (Najkraće rastojanje između dve tačke je duž čiji su krajevi te tačke.)

- Razlika dve stranice trougla manja je od treće stranice.

- U svakom trouglu važi sledeći odnos između stranica i uglova:

  1° Naspram veće stranice veći je ugao i obrnuto;

  2° Naspram manje stranice manji je ugao i obrnuto.

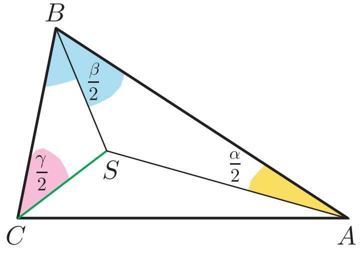
- Hipotenuza je najduža stranica pravouglog trougla.

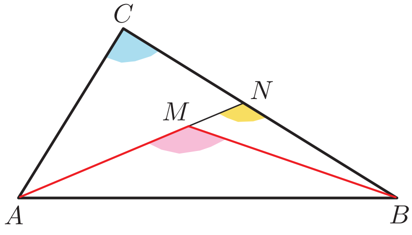
- Spoljašnji ugao trougla veći je od nesusednog unutrašnjeg ugla.

  (Na primer: $\alpha_1 = \beta + \gamma$, odakle je $\alpha_1 > \beta$ i $\alpha_1 > \gamma$.)

Primer A) Centar upisanog kruga trougla najbliži je temenu najvećeg ugla. Dokaži.

Dokaz. Neka je S centar kruga upisanog u trougao ABC u kojem je $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, sledeća slika. Tačka S je presek simetrala uglova. U trouglu ABS za unutrašnje uglove važi: $\dfrac{\alpha}{2} \leqslant \dfrac{\beta}{2}$, odakle sledi da je $BS \leqslant AS$. Slično, iz trougla BCS nalazimo: $\dfrac{\beta}{2} \leqslant \dfrac{\gamma}{2}$, odakle sledi da je $CS \leqslant BS$. Konačno je $CS \leqslant BS \leqslant AS$, što je i trebalo dokazati.





Primer B) U unutrašnjosti trougla ABC izabrana je proizvoljna tačka M. Dokaži da je:

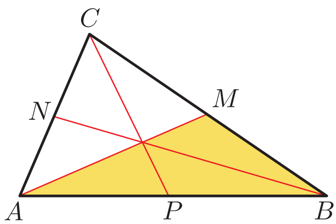
a) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$; b) $AC + CB > AM + MB$.

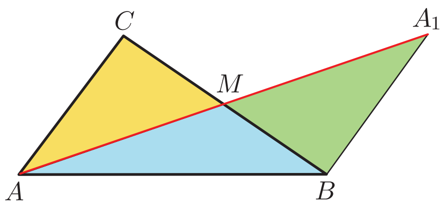
Dokaz. a) Neka je N presečna tačka pravih AM i BC (vidi poslednju sliku desno). Ugao AMB je spoljašnji ugao trougla BMN, pa je $\sphericalangle AMB > \sphericalangle MNB$. Slično, u trouglu ANC važi nejednakost: $\sphericalangle MNB > \sphericalangle ACN$. Otuda sledi da je $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$.

b) U trouglu BMN je $MN + NB > MB$. Dodajmo na obe strane nejednakosti duž AM i imaćemo: $AM + MN + NB > AM + MB$, odnosno $AN + NB > AM + MB$. U trouglu ACN važi: $AC + CN > AN$, pa kad na obe strane nejednakosti dodamo duž NB, dobićemo: $AC + CN + NB > AN + NB$, tj. $AC + CB > AN + NB$. Sada iz: $AC + CB > AN + NB$ i $AN + NB > AM + MB$, sledi: $AC + CB > AM + MB$.

Primer C) Dokaži da je zbir težišnih linija trougla veći od poluobima tog trougla.

Dokaz. Neka su AM, BN i CP težišne linije trougla ABC, sledeća slika levo. U trouglu ABM je $AM > AB - BM$, tj. $AM > AB - \frac{1}{2}BC$. Slično iz trougla BCN dobijamo: $BN > BC - \frac{1}{2}CA$ i iz trougla CAP je: $CP > CA - \frac{1}{2}AB$. Sabiranjem ove tri nejednakosti dobijamo traženi uslov: $AM + BN + CP > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$.



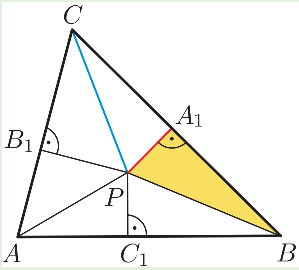


Primer D) Dokaži da je težišna linija, koja odgovara jednoj stranici trougla, manja od poluzbira drugih dveju stranica.

Dokaz. Neka je AM data težišna linija trougla ABC i A_1 tačka, takva da je M središte duži AA_1, poslednja slika. Trouglovi ACM i A_1BM podudarni su po stavu SUS ($MC = MB$, $AM = A_1M$ i $\sphericalangle AMC = \sphericalangle A_1MB$, kao unakrsni). Otuda sledi da je $AC = BA_1$. Međutim, u trouglu ABA_1 je $AA_1 < AB + BA_1$. Kako je $AA_1 = 2AM$, to je $2AM < AB + AC$, odnosno $AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$, što se i tvrdi.

Primer E) Neka je P tačka u oštrouglom trouglu ABC. Posmatrajmo rastojanja tačke P od tačaka na obimu trougla. Označimo sa d najmanje i sa D najveće rastojanje.

Dokaži da je $2d < D$. Kada važi znak jednakosti?



Dokaz. Najkraća rastojanja od stranica su, očigledno normale PA_1, PB_1 ili PC_1 (vidi sliku). Dakle, d je najmanja od ove tri duži. Slično, D je najveća od duži PA, PB, PC. Od šest uglova sa zajedničkim temenom P ne mogu svi biti manji od $60°$. Neka je, npr. $\sphericalangle A_1PB \geqslant 60°$. Tada je $PB \geqslant 2PA_1$. (Ako je $\sphericalangle BPA_1 = 60°$, onda je trougao A_1PB polovina jednakostraničnog trougla i $BP = 2A_1P$.) Budući da je $D \geqslant PB$ i $PA_1 \geqslant d$, sledi da je $D \geqslant 2d$.

Znak jednakosti važi ako su svi uglovi sa zajedničkim temenom P jednaki $60°$. Tada je ABC jednakostranični trougao, a P je njegov centar.

356. U trouglu ABC je $AB = AC$. Na pravoj BC izabrana je tačka D, iza C u odnosu na B. Dokaži da je

a) $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$; b) $AD > AC$.

357. Dokaži da je svaka stranica trougla manja od poluobima tog trougla.

358. U ravni trougla ABC izabrana je proizvoljna tačka P, koja je izvan trougla. Dokaži da je zbir duži PA, PB i PC veći od poluobima trougla ABC.

359. Neka je M proizvoljna tačka u trouglu ABC. Dokaži da je zbir duži AM, BM i CM manji od obima, a veći od poluobima trougla ABC.

360. Simetrala unutrašnjeg ugla trougla deli naspramnu stranicu na dva dela, tako da je svaki od njih manji od susedne stranice. Dokaži.

361. U trouglu ABC iz temena C ugla između dve nepodudarne stranice, date su simetrala CD ugla i težišna linija CM. Dokaži da je $CM > CD$.

362. Na simetrali spoljašnjeg ugla kod temena C trougla ABC izabrana je proizvoljna tačka M. Dokaži da je $AM + BM > AC + BC$.

363. U trouglu ABC tačka M je središte stranice AB. Dokaži tvrđenje: ako je $BC > AC$, onda je $\sphericalangle ACM > \sphericalangle BCM$.

364. Dokaži da u svakom trouglu većoj stranici odgovara manja težišna linija, a manjoj stranici odgovara veća težišna linija.

365. U jednakokrakom trouglu ABC tačka C_1 je središte osnovice AB i A_1 je središte stranice BC. Duži AA_1 i CC_1 seku se u O. Ako je $\sphericalangle A_1OC_1 = 121^\circ$, utvrdi da li je osnovica veća od kraka.

5.4. Jednakokraki trougao

Pored stavova o podudarnosti trouglova (stavovi: SSS, SUS, USU i SSU), podsećamo se na još neke važne osobine.

Duž čiji su krajevi središta dveju stranica trougla, tzv. *srednja linija trougla*, jednaka je polovini naspramne stranice trougla i paralelna je toj stranici, na primer: $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ i $A_1B_1 \| AB$, gde su A_1 i B_1 središta stranica BC i AC.

U trouglu naspram jednakih stranica jednaki su uglovi, i obrnuto: naspram jednakih uglova jednake su stranice. Dakle, u trouglu ABC, ako je $AC = BC$ (u *jednakokrakom trouglu*), važi: $\beta = \alpha$.

Obrnuto, ako trougao ABC ima jednaka dva ugla, onda je on *jednakokraki*. (Iz $\alpha = \beta$, sledi $BC = AC$.) AC i BC su *kraci*, a AB je *osnovica* jednakokrakog trougla ABC. Teme naspram osnovice AB je *vrh* C.

U jednakokrakom trouglu ABC, gde je $AC = BC$, spoljašnji ugao kod vrha dva puta je veći od unutrašnjeg ugla na osnovici: $\gamma_1 = 2\alpha$.

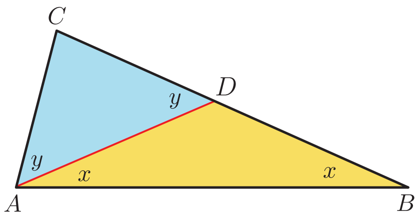
Visina koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla ujedno je i simetrala ugla kod vrha i simetrala osnovice i težišna linija.

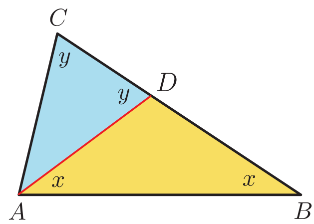
Ako trougao ABC ima jednake sve stranice ($AB = BC = AC$), onda je on tzv. *jednakostranični* i ima jednake uglove: $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Primer A) Jedan od unutrašnjih uglova trougla je 75°. Koliki su ostali unutrašnji uglovi datog trougla, ako postoji prava koja sadrži jedno teme i deli dati trougao na dva jednakokraka trougla?

Rešenje. Neka je ABC dati trougao sa uglom $\alpha = 75^\circ$. Na stranici BC odredimo tačku D, tako da su trouglovi ABD i ACD jednakokraki.

Moguća su dva slučaja: $AD = BD$ i $AC = CD$, slika levo, ili $AC = AD = BD$, slika desno.

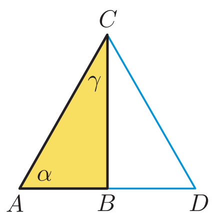


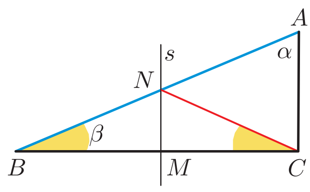


Označimo sa x i sa y jednake uglove jednakokrakih trouglova. U oba slučaja je y spoljašnji ugao kod vrha jednakokrakog trougla ABD, pa je $y = 2x$. U prvom slučaju je $x + y = 75^\circ$, tj. $3x = 75^\circ$, pa je $x = 25^\circ$. Tada su uglovi trougla ABC: $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 25^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. U drugom slučaju je $x + y + 75^\circ = 180^\circ$, tj. $3x = 105^\circ$, pa je $x = 35^\circ$. Tada su uglovi trougla ABC: $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 35^\circ$, $\gamma = 70^\circ$.

Primer B) Hipotenuza je dva puta veća od katete pravouglog trougla. Izračunaj unutrašnje uglove ovog trougla.

Rešenje. Neka je $AC = 2AB$ i $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Odredimo tačku D na produžetku katete AB, tako da je B središte duži AD, slika dole levo. Lako se dokazuje da su trouglovi ABC i DBC podudarni (stav SUS). Otuda sledi da je $DC = AC$. Kako je $AD = 2AB$, to je i $AD = AC$, pa je trougao ADC jednakostraničan. Zbog toga su uglovi datog trougla: $\alpha = 60^\circ$ i $\gamma = 30^\circ$.



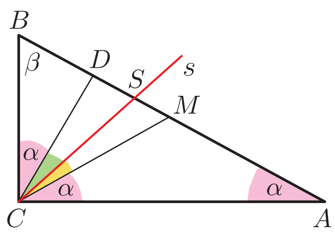


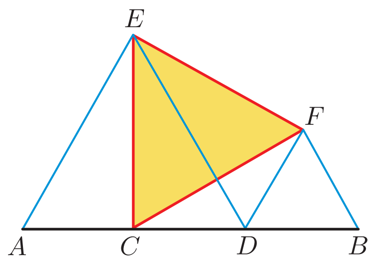
Primer C) Dokaži da je u svakom pravouglom trouglu hipotenuzina težišna linija jednaka polovini hipotenuze.

Dokaz. Neka je M središte katete BC i s simetrala duži BC (vidi poslednju sliku desno). Simetrala seče hipotenuzu AB u tački N. Na osnovu osobina simetrale duži, sledi da je $BN = NC$, tj. trougao BCN je jednakokraki, pa je $\sphericalangle BCN = \beta$. Kod pravouglog trougla ABC je $\alpha = 90^\circ - \beta$, pa kako je i $\sphericalangle ACN = 90^\circ - \beta$, to je $\sphericalangle ACN = \sphericalangle CAN = \alpha$. Zbog toga je i $AN = CN$. Prema tome: $BN = AN$, pa je tačka N središte hipotenuze AB i težišna linija CN jednaka je polovini hipotenuze.

Primer D) Simetrala pravog ugla proizvoljnog pravouglog trougla polovi ugao kojeg obrazuju visina i težišna linija iz temena pravog ugla. Dokaži.

Dokaz. Neka su CD i CM visina i težišna linija, a CS simetrala pravog ugla ACB, slika levo. Na osnovu prethodnog primera je $\sphericalangle ACM = \alpha$. Trougao BCD je pravougli, pa je $\sphericalangle BCD = 90^\circ - \beta = \alpha$. Zbog toga je $\sphericalangle MCS = 45^\circ - \alpha = \sphericalangle SCD$, što se i tvrdilo.



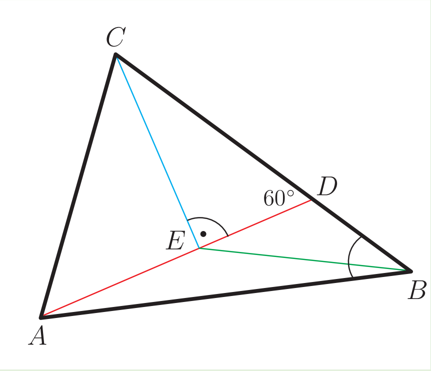


Primer E) Neka su C i D tačke duži AB, takve da je $AC = CD = DB$ i neka su E i F tačke sa iste strane prave AB, takve da su trouglovi ADE i DBF jednakostranični. Dokaži da je trougao CEF jednakostranični.

Dokaz. Lako se dokazuje da su trouglovi CDE i FDE podudarni, po stavu SUS ($CD = DF = DB$, $DE = DE$ i $\sphericalangle CDE = \sphericalangle FDE = 60^\circ$). Otuda sledi da je $CE = FE$ i $\sphericalangle CED = \sphericalangle FED$. Kako je $\sphericalangle CED = \frac{1}{2}\sphericalangle AED = 30^\circ$, to je $\sphericalangle CEF = 60^\circ$, pa je trougao CEF jednakostranični (slika gore desno).

Primer F) Neka je D tačka na stranici BC datog trougla ABC, takva da je $DC = 2 \cdot BD$. Pritom je $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ i $\sphericalangle ADC = 60^\circ$. Odredi unutrašnje uglove trougla ABC.

Rešenje. Neka je E podnožje normale iz C na AD. Tada je CDE polovina jednakostraničnog trougla stranice CD, pa je $CD = 2DE$. Sledi da je $BD = DE$ i trougao BDE je jednakokraki sa spoljašnjim uglom kod vrha: $\sphericalangle CDE = 60^\circ$. Sledi da je $\sphericalangle DBE = 30^\circ = \sphericalangle DEB$, pa je $\sphericalangle ABE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Iz trougla ABD, sa spoljašnjim uglom $\sphericalangle ADC = 60^\circ$, dobijamo: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC - \sphericalangle ABD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Dakle, i trougao ABD je jednakokraki i $AE = BE$. Trougao BCE je sa uglovima $\sphericalangle EBC = 30^\circ = \sphericalangle ECB$, pa je i on jednakokraki: $BE = CE$. Konačno je i trougao ACE jednakokraki, ali i pravougli, pa je $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ACE = 45^\circ$. Sada lako izračunamo uglove trougla ABC: $\alpha = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$, $\gamma = \sphericalangle ACB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ i dato je $\beta = \sphericalangle ABC = 45^\circ$.



366. Na produžetku kraka AC jednakokrakog trougla ABC, $AC = BC$, iza tačke C data je tačka D, takva daje $CD = AC$. Dokaži da je trougao ABD pravougli.

367. U trouglu ABC tačka D pripada stranici AB. Ako je $AC = CD$ i $\sphericalangle BAC - \sphericalangle ABC = 37^\circ$, izračunaj $\sphericalangle BCD$.

368. Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod temena C. Ako hipotenuzu AB produžimo preko temena A za duž AM i preko temena B za duž BN, tako da je $AM = AC$ i $BN = BC$, dokaži da je $\sphericalangle MCN = 135^\circ$.

369. U trouglu ABC je $AB = AC$ i $\sphericalangle CAB > 30^\circ$. Na stranici BC data je tačka M i na stanici AC tačka N, tako da je $\sphericalangle BAM = 30^\circ$ i $AM = AN$. Izračunaj $\sphericalangle CMN$.

370. U trouglu ABC je $AC = BC$. Na stranici BC date su tačke M, N, tako da je $AM = MN$, a raspored tačaka je: $B - M - N - C$ i $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$. Odredi $\sphericalangle BAN$.

371. Dat je trougao ABC, takav da je $AC = BC$. Kroz vrh C je povučena prava p koja seče osnovicu AB u tački D, tako da su trouglovi ACD i BCD jednakokraki, ali ne i podudarni među sobom. Odredi uglove trougla ABC.

372. U trouglu ABC je $AC = BC$ i H je tačka u kojoj se seku visine povučene iz A i B na stranice BC i AC. Neka je H_1 tačka simetrična sa H u odnosu na pravu AB. Izračunaj $\sphericalangle CAH_1$.

373. Simetrale uglova ABC i ACB trougla ABC seku se u tački O. Prava p, koja sadrži tačku O i paralelna je sa BC, seče stranicu AB u tački P i stranicu AC u tački Q. Dokaži da je $PQ = BP + CQ$.

374. Na stranici AB trougla ABC izabrana je tačka S, takva da prava CS polovi ugao ACB. Neka je P proizvoljna tačka duži AB, različita od S. Prava p, koja sadrži tačku P i paralelna je pravoj CS, seče pravu AC u M i pravu BC u N. Dokaži da je trougao CMN jednakokraki.

375. U trouglu ABC je $AC = BC$, a visina AD i simetrala ugla BAC seku se pod uglom od $15°$. Izračunaj uglove trougla ABC.

376. Ugao između hipotenuzine visine i simetrale pravog ugla je $12°$. Izračunaj oštre uglove datog pravouglog trougla.

377. Odredi oštre uglove α i β pravouglog trougla ABC, ako je ugao između simetrale pravog ugla i hipotenuzine težišne linije jednak petini tupog ugla, koji obrazuju simetrale tih oštrih uglova.

378. Data je tačka N na osnovici AB jednakokrakog trougla ABC. Prava n, koja sadrži tačku N i normalna je na osnovicu, seče pravu BC u P i pravu AC u Q. Dokaži da je zbir $NP + NQ$ konstantna veličina, koja ne zavisi od položaja tačke N.

379. Visine AD i CE trougla ABC seku se u tački H, tako da je $AB = CH$. Izračunaj ugao ACB.

380. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC date su tačke M i N, takve da je $AM = AC$ i $BN = BC$. Izračunaj ugao MCN.

381. Na najvećoj stranici BC tupouglog trougla ABC date su tačke D i E, takve da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ABC$. Dokaži da je trougao ADE jednakokraki.

382. U trouglu ABC data je visina CE. Simetrala spoljašnjeg ugla kod temena C seče pravu AB u tački D. Ako je $CE = \dfrac{1}{2}CD$, dokaži da je $\alpha - \beta = 60°$.

383. U pravouglom trouglu hipotenuzina visina deli hipotenuzu na dva odsečka čija je razlika jednaka dužini jedne katete. Odredi uglove trougla.

384. Dat je trougao ABC, takav da je $AC = BC$. Na pravoj AC, po redosledu: C, A, D, uzeta je tačka D, a na kraku BC tačka E, tako da je $AD = BE$. Dokaži da osnovica AB polovi duž DE.

385. U trouglu ABC je $\beta = 15^\circ$ i $\gamma = 30^\circ$. Prava koja sadrži teme A i normalna je na AB, seče stranicu BC u tački D. Dokaži da je $BD = 2AC$.

386. Jedan ugao jednakokrakog trougla je od 108°. Dokaži da je odsečak simetrale ugla na osnovici, od temena do preseka sa krakom, dva puta duži od visine koja odgovara osnovici.

387. U trouglu ABC stranica AB je najduža. Na stranici AB odabrane su tačke D i E, takve da je $AD = AC$ i $BE = BC$. Odredi $\sphericalangle ACB$, ako je $\sphericalangle ECD = 20^\circ$.

388. U trouglu ABC u kojem je $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 70^\circ$, data je tačka P, takva da je $\sphericalangle BAP = 5^\circ$ i $\sphericalangle ABP = 30^\circ$. Izračunaj $\sphericalangle BPC$.

389. Data je tačka D na stranici BC trougla ABC, takva da je $DC = 2BD$, $\sphericalangle ADC = 60^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 45^\circ$. Izračunaj ostale unutrašnje uglove trougla ABC.

390. Dat je trougao ABC, takav da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 40^\circ$. Na pravoj AB iza B u odnosu na A data je tačka D, takva da je $AD = BC$. Odredi uglove trougla ADC.

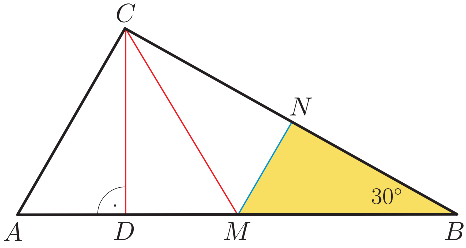
5.5. Razni trouglovi

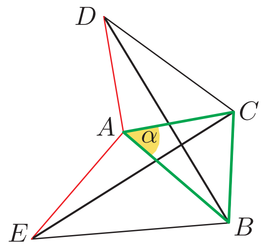
Posebne osobine trouglova (jednakokrakih, pravouglih, itd.) koristimo prilikom rešavanja problema vezanih za proizvoljne trouglove.

Primer A) Izračunaj uglove trougla ABC, ako visina i težišna linija iz temena C dele ugao ACB na tri jednaka dela.

Rešenje. Neka je CD visina, CM težišna linija i N podnožje normale iz M na BC, sledeća slika levo. Pravougli trouglovi CDA i CDM podudarni su (zajednička kateta i jednak oštar ugao kod temena C), pa je $AD = DM$. Podudarni su i pravougli trouglovi CMD i CMN (zajednička hipotenuza i jednak oštar ugao kod temena C), pa je $DM = MN$.

Zaključujemo da je $AM = 2MN$, a kako je $AM = MB$, sledi da je $MB = 2MN$. Dakle, u pravouglom trouglu BMN hipotenuza BM je dva puta veća od katete MN. Prema rešenju **primera** B iz **prethodnog odeljka**, sledi da je $\beta = \sphericalangle MBN = 30^\circ$. Zbog toga je u pravouglom trouglu BCD drugi oštar ugao $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Konačno je $\sphericalangle MCN = 30^\circ = \sphericalangle MCD = \sphericalangle ACD$. Uglovi trougla ABC su: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.



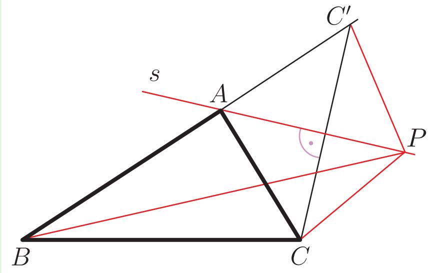


Primer B) Dat je trougao ABC. Iz temena A je konstruisana duž AD normalna na AC i duž AE normalna na AB, tako da je $AD = AC$ i $AE = AB$. Tačke B i D su sa raznih strana prave AC, a tačke C i E su sa raznih strana prave AB. Dokaži da je $BD = CE$.

Dokaz. Trouglovi ABD i AEC su podudarni, po stavu SUS. (Ovde je: $AD = AC$, $AB = AE$ i $\sphericalangle BAD = \alpha + 90^\circ = \sphericalangle CAE$.) Otuda sledi da je $BD = CE$, slika gore.

Primer C) Na simetrali spoljašnjeg ugla α_1 trougla ABC odredi tačku P, takvu da zbir duži $CP + BP$ bude najmanji mogući.

Dokaz. Neka je P bilo koja tačka date simetrale s spoljašnjeg ugla α_1 i neka je C' tačka simetrična sa C u odnosu na s. Tačka C' pripada pravoj AB. Tada je $PC' = PC$, pa je $BP + CP = BP + C'P$, a na osnovu nejednakosti trougla biće: $BP + PC' \geqslant BC'$, gde je duž BC' fiksirana. Znak jednakosti važi samo



ako je $P \in BC'$, a to će biti kada je $P = A$. Prema tome, tražena je tačka $A \equiv P$.

391. U jednakokrakom trouglu ABC ugao između krakova AC i BC je 30°. Neka je D podnožje visine iz temena A.

a) Izračunaj uglove trougla ABD.

b) Dokaži da je $BC = 2AD$.

392. U pravouglom trouglu ABC duž CD je hipotenuzina visina. Ako su M i N središta kateta, dokaži da je ugao MDN prav.

393. Prave p i q su simetrale spoljašnjih uglova β_1 i γ_1, trougla ABC. Iz temena A konstruisane su prave m i n, takve da je $m \perp p$ i m seče pravu BC u tački M, a $n \perp q$ i n seče pravu BC u tački N. Dokaži da je obim trougla ABC jednak duži MN.

394. Na stranici AB trougla ABC određena je tačka D, tako da su obimi trouglova ACD i BCD redom 45 cm i 35 cm. Ako je obim trougla ABC 50 cm, kolika je dužina duži CD?

395. U pravouglom trouglu ABC simetrale oštrih uglova α i β seku naspramne katete u tačkama A_1 i B_1. Tačka M je podnožje normale iz A_1 na hipotenuzu, a tačka N je podnožje normale iz B_1 na hipotenuzu. Koliki je ugao MCN?

396. Dat je jednakokraki trougao ABC, tačka M na kraku AB i tačka N na kraku AC. Kroz središte S duži MN konstruisana je prava s, paralelna sa BC, koja seče AB u K, i AC u L. Tačka P je podnožje normale iz M na s, a tačka Q je podnožje normale iz N na s. Dokaži da je $KL = PQ$.

397. U pravouglom trouglu ABC tačka D je središte hipotenuze AB. Prava d kroz D, normalna na CD, seče dužu katetu AC u M i produžetak katete BC u N. Ako je S središte duži MN, dokaži da je $CS \perp AB$.

398. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC data je tačka M, takva da je $BM = BC$ i na kateti AC tačka N, takva da je duž CN jednaka hipotenuzinoj visini. Dokaži da je $\sphericalangle CNM = 90^\circ$.

399. Tačka O je centar jednakostraničnog trougla ABC. Ako je D tačka stranice AB i E tačka stranice AC, tako da je $AD + AE = AB$, dokaži da je $OD = OE$ i $\sphericalangle DOE = 120^\circ$.

400. Duž AM je težišna linija trougla ABC. Ako je N tačka stranice AB, takva da prava CN polovi datu težišnu liniju, dokaži da je $BN = 2AN$.

401. Dat je trougao ABC sa pravim uglom BAC. Iza A u odnosu na B odredimo tačku C_1 i iza A u odnosu na C tačku B_1, tako da je $AC_1 = AC$ i $AB_1 = AB$. Ako je D podnožje visine AD trougla ABC, dokaži da prava AD polovi duž B_1C_1.

402. U unutrašnjosti jednakostraničnog trougla ABC izabrana je tačka O iz koje se stranica AC vidi pod uglom od $150°$. Dokaži da postoji pravougli trougao sa stranicama koje su jednake dužima OA, OB i OC.

403. U nejednakostraničnom trouglu ABC središta stranica AB, AC i BC su redom tačke: E, F i G. Van trougla su date tačke M i N, takve da je $EM \perp AB$ i $EM = \frac{1}{2}AB$, a $FN \perp AC$ i $FN = \frac{1}{2}AC$. Dokaži da je $GM = GN$.

404. Date su redom tačke A, B, C na pravoj p i tačke D i E sa iste strane prave p. takve da su trouglovi ABD i BCE jednakostranični. Ako je M tačka duži AE i N tačka duži CD, tako da je $ME = 2AM$ i $CN = 2DN$, dokaži da je trougao BMN jednakostraničan.

405. Dato je šest tačaka u ravni, takvih da ne postoje tri koje pripadaju jednoj pravoj. Dokaži da postoji trougao, čija su temena neke od datih tačaka, takav da mu je bar jedan unutrašnji ugao manji od $30°$ ili jednak $30°$.

5.6. Značajne tačke trougla

Pod *značajnim tačkama trougla* podrazumevamo sledeće četiri tačke: *centar opisanog kruga, centar upisanog kruga, ortocentar* i *težište*. Ove tačke određuju se na osnovu sledećih teorema:

Simetrale stranica ma kog trougla imaju zajednicku tačku (*centar opisanog kruga*).

Simetrale unutrašnjih uglova ma kog trougla imaju zajedničku tačku (*centar upisanog kruga*).

Sve *visine trougla* seku se u jednoj tački (*ortocentar*).

Sve *težišne linije* trougla seku se u jednoj tački (*težište*).

Težište deli svaku težišnu liniju tako da je odsečak od temena trougla do težišta jednak dvostrukom odsečku od težišta do središta naspramne stranice. (Na primer: $AT = 2TA_1$, T je težište).

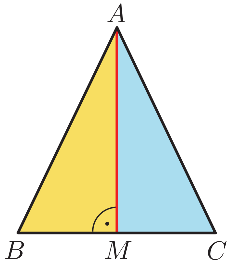
Interesantno je da su centar upisanog kruga i težište uvek unutrašnje tačke trougla. Međutim, kod tupouglog trougla centar opisanog kruga i ortocentar su van trougla. Kod pravouglog trougla ove dve tačke su na trouglu: centar opisanog kruga je središte hipotenuze, a ortocentar je teme pravog ugla.

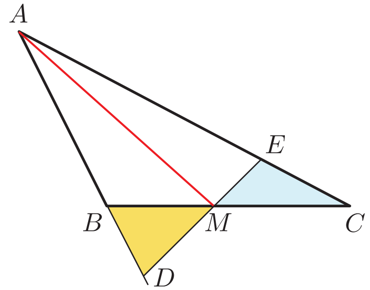
Primer A) Data je tačka M na stranici BC trougla ABC, tako da je duž AM visina, ili težišna linija, ili simetrala stranice, ili simetrala ugla. Ako duž AM ima dva od četiri navedena svojstva, dokaži da ona onda ima sva četiri navedena svojstva.

Dokaz. Neka je na primer, duž AM visina trougla ABC, slika levo. Pretpostavimo da je istovremeno AM i težišna linija. Tada su pravougli trouglovi AMB i AMC podudarni po stavu SUS (imaju jednake katete: $BM = CM$, $AM = AM$ i zahvaćeni prav ugao). Zbog toga je $\sphericalangle CAM = \sphericalangle BAM$, pa je AM simetrala ugla BAC. Takođe je AM i simetrala duži BC, što sledi direktno iz činjenice da je AM visina ($AM \perp BC$) i težišna linija ($BM = CM$).

Slično dokazujemo slučaj kad je AM visina i ima bilo koje drugo svojstvo ili ako je AM simetrala stranice i ima još neko svojstvo.

Dokažimo još slučaj kad je AM simetrala ugla i težišna linija. Najpre ćemo dokazati da uglovi ABC i ACB moraju biti oštri.





Pretpostavimo da na primer, ugao ABC može biti tup ili prav. Konstruišimo kroz M normalu na AM i njene zajedničke tačke sa AB i AC označimo sa D i E slika desno. Tačke D i E su sa raznih strana prave AM, a tačka E je na duži AC. Tada su pravougli trouglovi AMD i AME podudarni po stavu USU ($AM = AM$, itd.), a uglovi ADM i AEM su oštri. Sada su i trouglovi BMD i CME podudarni po stavu SUS (uglovi BMD i CME unakrsni $DM = EM$ po prethodnom dokazu i $BM = CM$ po pretpostavci da je CM težišna linija). Ako je to tačno, onda je $\sphericalangle BDM = \sphericalangle CEM$. Ovo ne može biti iz razloga što je BDM oštar, a CEM tup (jer je suplementan oštrom uglu AEM). Dakle, pretpostavka da ugao ABC nije oštar dovodi do protivrečnosti. Zaključujemo da su uglovi ABC i ACB oštri.

Sada se lako dokazuje da su trouglovi ABM i ACM podudarni (po stavu SSU), odakle izvlačimo neophodne zaključke.

Dokazane činjenice iz ovog primera imaju interesantne posledice:

– Visina koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla istovremeno je simetrala osnovice, simetrala ugla kod vrha i težišna linija.

– Kod jednakostraničnog trougla visina iz svakog temena istovremeno je i simetrala stranice i simetrala ugla i težišna linija.

– Kod jednakostraničnog trougla sve četiri značajne tačke se poklapaju.

Primer B) Tačka M je središte hipotenuzine visine CD pravouglog trougla ABC. Ako je N središte duži BD, dokaži da je $AM \perp CN$.

Dokaz. Duž MN je srednja linija trougla BCD, pa je $MN \| BC$. Kako je $BC \perp AC$, sledi da je i $MN \perp AC$. Po uslovu je $CD \perp AN$. Dakle, u trouglu ACN visine AM i NM seku se u M, pa je tačka M ortocentar ovog trougla. Sledi da je AM treća visina, pa je $AM \perp CN$. (Nacrtaj odgovarajuću sliku).

406. U trouglu ABC centri upisanog i opisanog kruga simetrični su u odnosu na pravu AB. Izračunaj unutrašnje uglove trougla ABC.

407. Tačka A je teme pravog ugla, a S centar upisanog kruga pravouglog trougla ABC. Izračunaj unutrašnje uglove trougla ABC, ako je $\sphericalangle ASC - \sphericalangle ASB = 20^\circ$.

408. Ako su O i S centri opisanog i upisanog kruga trougla ABC, dokaži da je $\sphericalangle SAO = \dfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

409. Neka su M, N i P središta stranica trougla ABC. Dokaži da se težišta trouglova ABC i MNP poklapaju.

410. U ravni su date tačke A, B, C, D, takve da je $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$. Dokaži da je $AD \perp BC$.

411. U jednakokrakom trouglu ABC tačka M je središte osnovice AB. Neka je N tačka kraka BC, takva da je $MN \perp BC$ i neka je S središte duži MN. Dokaži da je prava AN normalna na pravoj CS.

412. Neka je D podnožje normale konstruisane iz temena C pravouglog trougla ABC na hipotenuzu AB, a O_1 i O_2 centri krugova upisanih u trouglove CAD i CBD. Dokaži da je simetrala pravog ugla trougla ABC normalna na duž O_1O_2.

413. U ravni proizvoljnog trougla ABC date su tačke D i E, takve da su trouglovi ACD i BCE jednakokraki pravougli, sa hipotenuzama CD i CE. Dokaži da prave AE, BD i visina iz temena C datog trougla ABC imaju jednu zajedničku tačku.

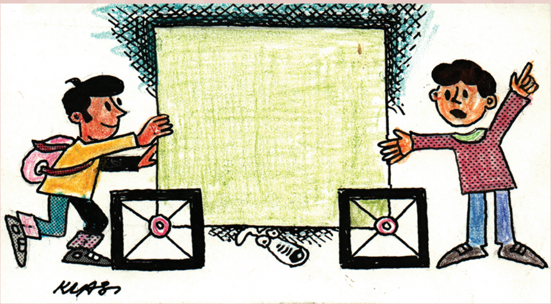
414. Neka su tačke K, L, M središta stranica redom BC, AC, AB trougla ABC, a P, Q, R središta izlomljenih linija BAC, CBA, ACB. Dokaži da se prave KP, LQ i MR seku u jednoj tački.

415. Iz jednog temena raznostranog oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla, iz trećeg težišna linija. Njihove presečne tačke su temena novog trougla. Dokaži da taj novi trougao ne može biti jednakostranični.

Glava 6

ČETVOROUGAO

- Paralelogram
- Pravougaonik
- Razni četvorouglovi
- Površine trouglova i četvorouglova



Četvorougao

Problemi o četvorouglovima neće biti teški ako smo ovladali osobinama trouglova i tehnikom dokazivanja podudarnosti. Sve što smo naučili o trouglovima može se pametno iskoristiti u ovoj glavi. Posebne osobine četvorouglova se takođe dokazuju korišćenjem osobina trouglova.

– Zbir unutrašnjih uglova jednak je punom uglu: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$.

Duž čiji su krajevi središta dveju naspramnih stranica nazivamo srednjom linijom četvorougla.

6.1. Paralelogram

Pod paralelogramom podrazumevamo četvorougao koji ima dva para paralelnih stranica.

Paralelogram je centralno simetričan četvorougao. Centar simetrije je presečna tačka dijagonala.

Ako se dijagonale četvorougla polove, onda je taj četvorougao paralelogram.

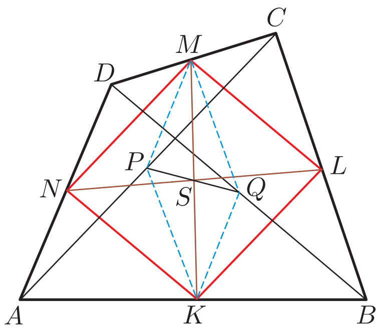
Paralelogram kome su jednake sve stranice naziva se *romb*.

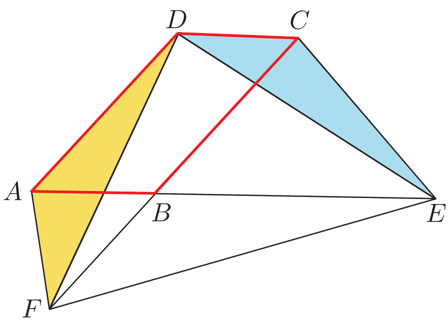
Primer A) U svakom četvorouglu obe srednje linije i duž koja spaja središta dijagonala imaju jednu zajedničku tačku, koja predstavlja središte za svaku od ove tri duži. Dokaži.

Dokaz. Neka su K, L, M, N redom središta stranica AB, BC, CD, DA i P, Q središta dijagonala AC i BD četvorougla $ABCD$, slika.

Duž KL je srednja linija trougla ABC, pa je $KL \| AC$ i $KL = \dfrac{1}{2}AC$. Slično, u trouglu ACD je MN srednja linija, pa je $MN \| AC$ i $MN =$

$\frac{1}{2}AC$. Otuda sledi da je $KL \| MN$. Slično se dokazuje i da je $LM \| KN$. Prema tome, četvorougao $KLMN$ ima dva para paralelnih stranica, pa je po definiciji paralelogram. Zbog toga se KM i LN polove. (Da bismo utvrdili da je $KLMN$ paralelogram, dovoljno je dokazati da je $KL \| MN$ i $KL = MN = \frac{1}{2}AC$.) Neka je tačka S njihovo zajedničko središte. Dokazaćemo da je S središte i duži PQ, tako što ćemo utvrditi da je četvorougao $KQMP$ paralelogram. (KQ je srednja linija trougla ADB, a MP je srednja linija trougla ADC, itd.)





Primer B) Dat je paralelogram $ABCD$ kojem je ugao kod temena B tup. Stranice AB i BC produžene su preko temena B i na produžecima su određene tačke E i F, tako da su duži BE i BF osnovice jednakokrakih trouglova BCE i ABF. Dokaži da je trougao DEF jednakokraki.

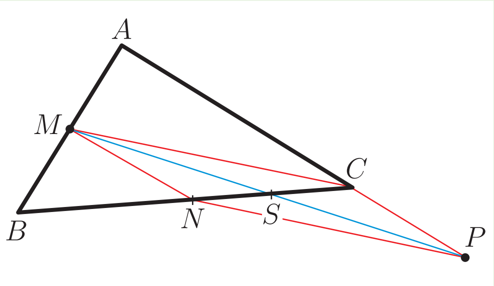
Dokaz. Utvrdićemo da su trouglovi AFD i CDE podudarni, slika desno. Trougao ABF je jednakokraki, pa je $AF = AB$. Međutim, $AB = CD$ (naspramne stranice datog paralelograma), pa je $AF = CD$. Slično se dokaže da je $AD = CE$. Jednakokraki trouglovi ABF i CBE imaju na osnovicama jednake uglove kod temena B, kao unakrsne, pa su im i ostali uglovi jednaki. Zbog toga je i $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BCE$. Kako je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$ (naspramni uglovi datog paralelograma), to je

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAF = \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE.$$

Prema tome, trouglovi AFD i CDE podudarni su po stavu SUS. Otuda sledi da je $DF = DE$.

Primer C) Na produžetku stranice AC trougla ABC, iza C u odnosu na A data je tačka P, takva da je $AC = 2CP$. Uočimo tačku M, središte stranice AB i tačku S stranice BC, takvu da je $BS = 3SC$. Dokaži da su tačke M, S i P kolinearne.

Dokaz. Neka je N središte stranice BC, slika desno. Duž MN je srednja linija trougla ABC, pa je $MN = \frac{1}{2}AC$ i MN je paralelno sa AC. Iz uslova $AC = 2CP$ je $CP = \frac{1}{2}AC$, pa je $MN = CP$ i MN je paralelno sa CP. Dakle, četvorougao $MNPC$ je paralelogram.



Po konstrukciji je $NC = \frac{1}{2}BC$, pa kako je $SC = \frac{1}{4}BC$ (po uslovu), zaključujemo da je S središte dijagonale CN paralelograma $MNPC$. Dijagonale paralelograma se polove, pa je S središte i dijagonale MP. Sledi da su tačke M, P i S na jednoj duži, pa su kolinearne.

416. Na takmičenju izviđača jedan takmičar od starta ide najpre 4 km pravo. Tada skrene za 120° levo i pređe još 3 km, pa opet skrene ulevo za 120° i pređe pravo 2 km. Zatim, ponovo skrene, ali desno za 60° i pređe još 2 km. Koliko je najkraće rastojanje od starta do cilja?

417. Dat je paralelogram $ABCD$. Tačka M je središte stranice BC, a tačka N središte stranice AD. Dokaži da duži AM i CN dele dijagonalu BD na tri jednaka dela.

418. Unutrašnji uglovi romba odnose se kao $1 : 2 : 1 : 2$. Dokaži da visine romba, konstruisane iz jednog temena tupog ugla, dele veću dijagonalu na tri jednaka dela.

419. U trouglu ABC je $AC = BC$ i AD je visina. Neka je P proizvoljna tačka prave AB, a M i N podnožja normala iz tačke P na krake AC i BC. Dokaži:

a) ako je P tačka duži AB, onda $MP + NP = AD$;

b) ako P nije tačka duži AB, onda $MP - NP = AD$ ili $NP - MP = AD$.

420. Dijagonala AC paralelograma $ABCD$ jednaka je 18 cm. Ako je N središte stranice AB, a M tačka u kojoj duž DN preseca dijagonalu AC, odredi dužinu duži AM.

421. U paralelogramu $ABCD$ stranica AB je dva puta duža od stranice BC. Neka je tačka M središte stranice AB. Dokaži da je prava CM normalna na pravu DM.

422. Dat je romb sa oštrim uglom od 60°. Prava MN odseca na stranicama AB i BC odsečke MB i NB, tako da je $MB + NB = AB$. Dokaži da je trougao MDN jednakostranični.

423. Dijagonale četvorougla $ABCD$ seku se u tački O. Dokaži da su centri O_1, O_2, O_3, O_4 krugova opisanih oko trouglova AOB, BOC, COD, DOA, temena paralelograma.

424. Dijagonale paralelograma $ABCD$ seku se u tački O. Dokaži da centri upisanih krugova trouglova ABO, BCO, CDO, DAO predstavljaju temena romba.

425. Dat je paralelogram $ABCD$ i prava p koja sa paralelogramom ima samo jednu zajedničku tačku, teme D. Neka su A_1, B_1, C_1 podnožja normala iz tačaka A, B, C na pravu p. Dokaži da je $AA_1 + CC_1 = BB_1$.

426. U trouglu ABC tačke M, N i P su središta stranica redom: BC, CA, AB. Neka je D proizvoljna tačka stranice BC, tačke E i F središta duži BD i CD i Q presek duži AD i NP. Dokaži da je četvorougao $EFNP$ paralelogram, čije se dijagonale seku na duži MQ.

427. Ako su u četvorouglu $ABCD$ tačke M, N, P i Q središta stranica AB, BC, CD i DA, a $2MP = BC + AD$ i $2NQ = AB + CD$, onda je četvorougao $ABCD$ paralelogram. Dokaži.

428. Ako su u četvorouglu $ABCD$ tačke M, N, P i Q središta stranica AB, BC, CD i DA i $2MP + 2NQ = AB + BC + CD + DA$, dokaži da je četvorougao $ABCD$ paralelogram.

429. U paralelogramu $ABCD$ na stranici AB data je tačka K, tako da je $\sphericalangle AKD = \sphericalangle DKC$. Ako je tačka S središte duži KD, dokaži da je duž CS normalna na duž DK.

430. Neka je P tačka u datom trouglu ABC, takva da $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$ i neka su M i L podnožja normala iz P redom na prave AC i BC. Ako je D središte stranice AB, dokaži da je $DM = DL$.

6.2. Pravougaonik

Ako paralelogram ima jedan prav ugao, onda su mu i svi ostali uglovi pravi. Takav četvorougao se naziva pravougaonik. Ako su sve stranice pravougaonika jednake, onda imamo kvadrat.

Pored osobina koje imaju paralelogrami, za pravougaonik važi i:

- dijagonale pravougaonika su jednake;
- oko pravougaonika može se opisati krug.

Pored osobina kojim se odlikuje pravougaonik, za kvadrat važi i:

- dijagonale kvadrata su simetrale unutrašnjih uglova;
- dijagonale kvadrata su uzajamno normalne;
- u kvadrat se može upisati krug.

Primer A) Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom ACB i tačke K, L, M, N, takve da su $BCKL$ i $CAMN$ kvadrati. Neka su L_1 i M_1 podnožja normala iz L i M na pravu AB.

Dokaži da je $LL_1 + MM_1 = AB$.

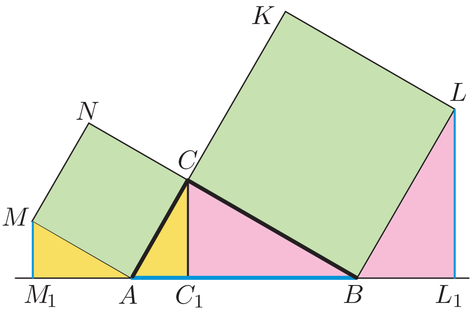
Dokaz. Neka je tačka C_1, podnožje hipotenuzine visine, sledeća slika levo. Pravougli trouglovi ACC_1 i MAM_1 podudarni su, jer imaju jednake hipotenuze ($AC = MA$, kao stranice jednog kvadrata) i oštre uglove: $\sphericalangle CAC_1 = \sphericalangle AMM_1$ (uglovi sa normalnim kracima). Iz ove podudarnosti sledi da je $AC_1 = MM_1$. Slično se dokazuje podudarnost trouglova BCC_1 i LBL_1, odakle je $C_1B = LL_1$.

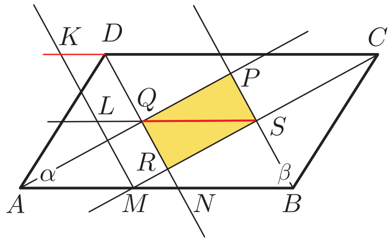
Prema tome: $LL_1 + MM_1 = BC_1 + C_1A = AB$, što se i tvrdilo.

Primer B) Simetrale unutrašnjih uglova paralelograma $ABCD$ seku se u tačkama P, Q, R, S. Dokaži da je:

a) četvorougao $PQRS$ pravougaonik;

b) dijagonala četvorougla $PQRS$ jednaka razlici susednih stranica paralelograma $ABCD$.





Dokaz. a) Neka je tačka P presek simetrala uglova α i β, slika desno. Tada u trouglu ABP imamo:

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ,$$

jer su α i β suplementni. Zbog toga je $\sphericalangle APB = 90^\circ$. Slično se dokazuje da su i ostali uglovi četvorougla $PQRS$ pravi, pa je $PQRS$ pravougaonik.

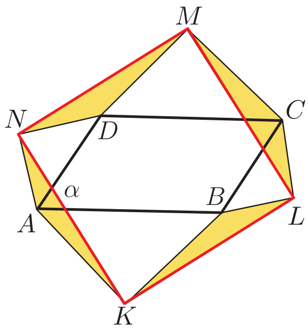
b) Označimo sa M presek simetrale CR, a sa N presek simetrale DR sa stranicom AB. Tada je, na primer, $\sphericalangle BMC = \sphericalangle MCD$ (sa paralelnim kracima), pa kako je $\sphericalangle MCD = \sphericalangle BCM$ (polovine ugla BCD), to je i $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BCM$, pa je trougao BCM jednakokraki i $BM = BC$. Tada visina BS polovi osnovicu, pa je tačka S središte duži CM. Slično utvrdimo da je tačka Q središte duži DN. Dokazaćemo da je $QS \| AB$. Neka je K tačka prave CD, takva da je četvorougao $DKMN$ paralelogram. Tada je $KM = DN$. Označimo sa L središte duži KM. U trouglu CKM je LS srednja linija, koja zbog $KL = DQ$ sadrži i tačku Q. Dakle, $QS \| CD$, pa je i $QS \| AB$. Zbog toga je četvorougao $AMSQ$ paralelogram, pa je: $QS = AM = AB - BM = AB - BC$.

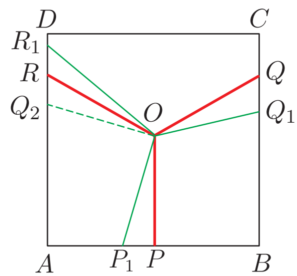
Primer C) Nad stranicama paralelograma $ABCD$, izvan paralelograma, konstruisani su kvadrati. Dokaži da su centri ovih kvadrata temena novog kvadrata.

Dokaz. Neka su K, L, M, N centri ovih kvadrata, sledeća slika. Tada su jednakokraki pravougli trouglovi ABK i CDM podudarni. S druge strane su podudarni među sobom jednakokraki pravougli trouglovi BCL i ADN. Sada možemo dokazati da su podudarni trouglovi: AKN, BKL, CML i DMN (po stavu SUS). Tupi uglovi u ovim trouglovima su $\alpha + 90^\circ$. Iz ove podudarnosti slede jednakosti: $NK = KL = LM = MN$, pa je četvorougao $KLMN$ romb, kao i da je $\sphericalangle AKN = \sphericalangle BKL$. U trouglu ABK je $\sphericalangle AKB = 90^\circ$, pa je

$$\sphericalangle NKL = \sphericalangle NKB + \sphericalangle BKL = \sphericalangle NKB + \sphericalangle AKN = \sphericalangle AKB = 90^\circ.$$

Prema tome, $KLMN$ je pravougaonik i romb, dakle, $KLMN$ je kvadrat.





Primer D) Na stranicama kvadrata $ABCD$ izabrane su tačke P, Q i R, tako da dele obim kvadrata na tri jednaka dela. Dokaži da je zbir dužina duži OP, OQ i OR najmanji u slučaju kad je jedna od tačaka P, Q ili R središte jedne stranice kvadrata. Tačka O je centar kvadrata.

Dokaz. Neka su P, Q i R izabrane tačke, tako da je P središte stranice AB, slika gore desno. Uočimo trojku tačaka P_1, Q_1, R_1, koje dele obim kvadrata na tri jednaka dela, a nijedna nije središte stranice kvadrata. Tada je $PP_1 = QQ_1 = RR_1$. Neka je Q_2 tačka simetrična sa Q_1, u odnosu na pravu OP. Tada je $RQ_2 = QQ_1 = RR_1$, pa je OR težišna linija trougla OR_1Q_2. Prema **primeru D)** iz **odeljka 5.3** je: $2OR < OR_1 + OQ_2$. Kako je zbog simetrije, $OQ = OR$ i $OQ_1 = OQ_2$, ova nejednakost prelazi u: $OR + OQ < OR_1 + OQ_1$. Sem toga, u pravouglom trouglu OPP_1 je $OP < OP_1$. Sabirajući poslednje dve nejednakosti dobijamo:

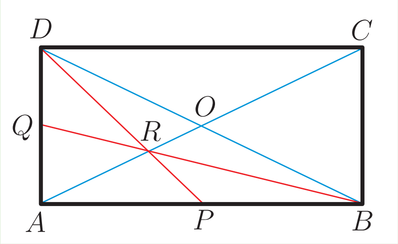
$$OP + OQ + OR < OP_1 + OQ_1 + OR_1.$$

To je upravo i trebalo da se dokaže.

Primer E) Pravougaonik $ABCD$ ima stranice $AB = 2AD$. Na stranici AB data je tačka P i na stranici AD tačka Q, tako da je $AP = BP$ i $AQ = DQ$. Duži BQ i DP seku se u tački R.

Dokaži da su tačke A, C i R kolinearne.

Dokaz. Dijagonale AC i BD datog pravougaonika seku se u tački O, kao na slici, tako da je O zajedničko središte dijagonala. Obratimo pažnju na trougao ABD. Po uslovu su BQ i DP težišne linije ovog trougla. (Tačke P i Q, redom, predstavljaju središta stranica AB i AD.) Onda je tačka R težište trougla ABD, pa je AO treća težišna linija i ona prolazi kroz težište R. Prema tome, tačka R pripada dijagonali AC, pa su tačke A, R i C kolinearne.



431. Dat je pravougaonik $ABCD$ čija je stranica AB dva puta duža od stranice BC. Na stranici CD je izabrana tačka M, takva da je $\sphericalangle AMD = \sphericalangle AMB$. Izračunaj ugao AMB.

432. Izvan jednakostraničnog trougla ABC date su tačke M, N, P i Q, takve da su četvorouglovi $ABMN$ i $BCPQ$ kvadrati. Duži AQ i CM seku se u tački S. Dokaži da je $\sphericalangle ASC$ prav, $AQ = CM$ i $CQ = 2AS$.

433. Dat je pravougaonik $ABCD$ i tačka A_1 simetrična temenu A u odnosu na dijagonalu BD. Prava BA_1 seče stranicu CD u tački M. Dokaži da je trougao BDM jednakokraki.

434. Kroz presečnu tačku dijagonala kvadrata $ABCD$ konstruisane su dve uzajamno normalne prave k i l koje seku stranice AB, BC, CD, DA kvadrata u tačkama K, L, M, N redom. Dokaži da je $KM = LN$.

435. Ortocentar oštrouglog trougla ABC je tačka H. Tačke M, N, P, Q su redom središta duži BH, CH, AC, AB. Dokaži da je četvorougao $MNPQ$ pravougaonik.

436. Dat je pravougaonik $ABCD$ i $AB > BC$. Nad stranicama AB i BC kao osnovicama konstruisani su jednakostranični trouglovi ABL i BCM, tako da je trougao ABL van pravougaonika, a tačka M je u pravougaoniku. Dokaži da je duž LM jednaka dijagonali pravougaonika.

437. Van pravougaonika $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi BCE i CFD. Dokaži da je i trougao AEF jednakostranični.

438. Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom ACB. Van trougla konstruisani su kvadrati $ABMN$ i $ACPQ$. Dokaži da su centri ovih kvadrata jednako udaljeni od središta A_1 katete BC.

439. Nad stranicama AB i BC paralelograma $ABCD$ konstruisani su kvadrati $AEFB$ i $BGHC$. Dokaži da je duž GF jednaka jednoj od dijagonala paralelograma $ABCD$.

440. Van datog trougla ABC konstruisani su kvadrati $ABMN$ i $BCPQ$. Dokaži da centri ovih kvadrata i središta duži AC i MQ predstavljaju temena novog kvadrata.

441. Dat je romb $MNPQ$. Simetrale uglova određenih dijagonalama seku stranice u tačkama A, B, C, D. Kojoj vrsti pripada četvorougao $ABCD$?

442. Dijagonale romba $ABCD$ seku se u tački O. Dokaži da centri krugova upisanih u trouglove ABO, BCO, CDO, DAO predstavljaju temena kvadrata.

443. Data su tri podudarna kvadrata: $ABCD$, $CDEF$ i $EFGH$. Dokaži da je $\sphericalangle ADB + \sphericalangle AEB + \sphericalangle AHB = 90^\circ$.

444. U pravougaoniku $ABCD$ tačka N je podnožje normale iz B na AC, tačka S je središte duži AN i tačka M je središte duži CD. Dokaži da je $\sphericalangle BSM = 90^\circ$.

445. U pravougaoniku $ABCD$ tačka M je na stranici CD, takva da je $DM = 2CM$. Ako se prave AC i BM seku pod pravim uglom, izračunaj ugao BOM, gde je tačka O presek dijagonala.

446. U pravougaoniku $ABCD$ simetrala ugla kod temena B seče prave AC i AD redom u tačkama E i F. Kroz E je konstruisana prava paralelna sa AB i ona seče dijagonalu BD u tački K. Dokaži da je $FK \perp AC$.

447. Dat je kvadrat $ABCD$ i proizvoljna tačka M stranice BC. Ako je K tačka stranice CD, takva da je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMK$, izračunaj ugao KAM.

448. Na stranici AB kvadrata $ABCD$ data je proizvoljna tačka E. Simetrala ugla CDE seče stranicu BC u tački K. Dokaži da je $AE + KC = DE$.

449. Neka su M i N središta stranica AD i CD kvadrata $ABCD$. Duži BN i CM seku se u tački P. Dokaži da je duž AP jednaka stranici kvadrata.

450. U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ data je tačka P, takva da je trougao ABP jednakokraki i $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 15^\circ$. Dokaži da je trougao PCD jednakostraničan.

6.3. Razni četvorouglovi

Među četvorouglovima koje do sada nismo isticali, posebno su značajni trapezi. Trapez je četvorougao koji ima samo jedan par paralelnih stranica. Pomenimo još i deltoid, četvorougao koji ima dva para jednakih susednih stranica. Iz definicija ovih četvorouglova proizlaze njihove osobine. Među trapezima izdvajaju se pravougli (imaju dva prava ugla) i jednakokraki (imaju jednake neparalelne stranice). Paralelne stranice trapeza nazivamo osnovicama. Navedimo neke od osobina ovih četvorouglova:

- Srednja linija trapeza, duž čiji su krajevi središta krakova, paralelna je osnovicama i jednaka je poluzbiru osnovica.
- Odsečak srednje linije trapeza između dijagonala jednak je polurazlici osnovica.
- Oko jednakokrakog trapeza može se opisati krug.
- Dijagonala deltoida čiji su krajevi temena u kojim se spajaju jednake stranice, polovi drugu dijagonalu i predstavlja simetralu dvaju unutrašnjih uglova. Ona je ujedno i simetrala druge dijagonale.
- Dijagonale deltoida su normalne među sobom.
- U deltoid se može upisati krug.

Primer A) Ugao između simetrala dvaju uglova, koje određuju produžeci po dve naspramne stranice četvorougla, jednak je poluzbiru dva suprotna ugla četvorougla. Dokaži.

Dokaz. Označimo sa θ i φ uglove određene parovima naspramnih stranica, sledeća slika. Traženi ugao x izrazimo najpre preko θ i φ. Iz trougla ONE nalazimo:

$$x = \varepsilon + \frac{\theta}{2},$$

a iz trougla AFN je:

$$\varepsilon = \alpha + \frac{\varphi}{2}.$$

Prema tome:

$$x = \alpha + \frac{1}{2}(\varphi + \theta).$$

Izrazimo θ iz trougla ADE i φ iz trougla ABF. Dobijamo:

$$\theta = 180^\circ - \alpha - \delta \quad \text{i} \quad \varphi = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

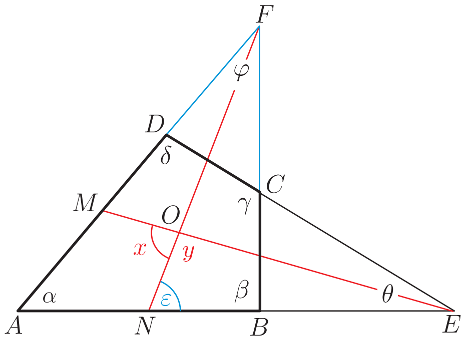
pa je

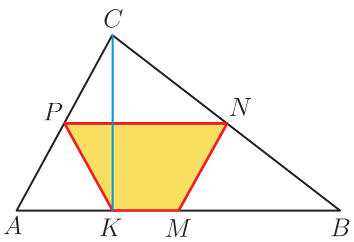
$$x = \alpha + \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha - \beta - \delta).$$

Zamenimo 360° sa $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ $(= 360^\circ)$, pa dobijemo:

$$x = \alpha + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\alpha - \beta - \delta).$$

Odavde je $x = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$. Ugao uporedan sa x je $y = 180^\circ - x = \frac{1}{2}(\beta+\delta)$.



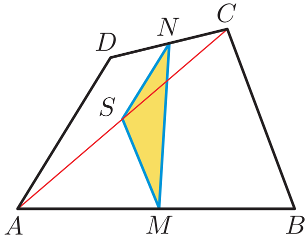


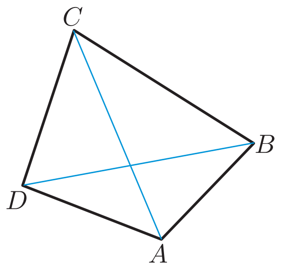
Primer B) Dokaži da središta stranica i podnožje bilo koje visine proizvoljnog raznostranog trougla predstavljaju temena jednakokrakog trapeza.

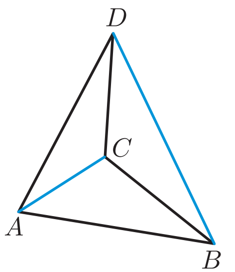
Dokaz. Neka su M, N, P središta stranica trougla ABC i K podnožje visine iz temena C, kao što je prikazano na slici gore desno. Kako je $AC \neq BC$, to je i $K \neq M$, pa postoji četvorougao $KMNP$. Duž NP je srednja linija trougla ABC, pa je $NP \| AB$, odnosno $NP \| KM$. Sem toga, $MN \| AC$ i KP seče AC, pa MN i KP nisu paralelne među sobom. Prema tome, četvorougao $KMNP$ je trapez. Dalje, $MN = \frac{1}{2}AC$, kao srednja linija trougla ABC i $KP = \frac{1}{2}AC$, kao težišna linija koja odgovara hipotenuzi u trouglu ACK. Dakle, $MN = PK$, pa je trapez $KMNP$ jednakokraki.

Primer C) U četvorouglu $ABCD$ tačka M je središte stranice AB i tačka N je središte stranice CD. Ako je $BC + AD = 2MN$, dokaži da je četvorougao $ABCD$ trapez ili paralelogram.

Dokaz. (Vidi rešenje **zadatka 452.**). Neka je tačka S središte dijagonale AC, slika dole levo. Duž SM je srednja linija trougla ABC, pa je $SM \| BC$ i $SM = \frac{1}{2}BC$. Slično, iz trougla ACD zaključujemo da je $SN \| AD$ i $SN = \frac{1}{2}AD$. Na osnovu nejednakosti trougla, za tačke M, N i S važi: $SM + SN \geqslant MN$, odakle dobijamo $\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD \geqslant MN$, odnosno $BC + AD \geqslant 2MN$. Znak jednakosti važi samo ako je S tačka duži MN. Međutim, taj uslov važi baš za naš četvorougao. Ali, u tom slučaju se poklapaju prave SM, SN i MN, pa je $MN \| BC$ i $MN \| AD$, odakle sledi: $BC \| AD$. Dakle, četvorougao $ABCD$ je trapez ili paralelogram (ako je i $AB \| CD$).







Primer D) Dokaži da u ravni ne postoje četiri nekolinearne tačke A, B, C, D, takve da su svi trouglovi ABC, BCD, CDA, DAB oštrougli.

Dokaz. Ako su A, B i C tačke jedne prave, tada je, na primer, tačka B između A i C. U tom slučaju su uglovi ABD i CBD uporedni, pa bar jedan od njih nije oštar.

Ako ne postoje tri kolinearne tačke, tada su A, B, C i D temena četvorougla, slika gore. Ako je $ABCD$ konveksni četvorougao, slika u sredini, tada bar jedan od njegovih uglova nije oštar, jer je zbir četiri ugla jednak $360°$.

Ako je $ABCD$ nekonveksan, kao na slici desno, sa nekonveksnim uglom kod C, tada bar jedan od uglova ACB, BCD, DCA mora biti veći ili jednak $120°$. Time je tvrđenje dokazano.

451. Jednakokraki trapez $ABCD$, gde $AD \| BC$ i $BC < AD$, dijagonalom AC podeljen je na dva jednakokraka trougla. Izračunaj uglove trapeza.

452. Obim jednakokrakog trapeza jednak je petostrukoj dužini kraće osnovice, a dijagonala polovi oštar ugao trapeza. Koliki su uglovi ovog trapeza?

453. Dat je trapez $ABCD$. Produžeci krakova AB i CD seku se u tački E. Odredi ugao AED ako je $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, gde je M središte stranice AD, a N središte stranice BC.

454. Dokaži da je prava koja je određena središtima osnovica jednakokrakog trapeza, normalna na osnovice.

455. Ako je manja osnovica trapeza jednaka zbiru krakova, dokaži da se simetrale unutrašnjih uglova na većoj osnovici seku u tački koja pripada manjoj osnovici.

456. Dijagonale trapeza dele srednju liniju na delove, od kojih je jedan jednak zbiru druga dva dela. Kako se dužine osnovica odnose jedna prema drugoj?

457. Dokaži da je zbir uglova na manjoj osnovici trapeza veći od zbira uglova na većoj osnovici.

458. U ravni trapeza $ABCD$ data je tačka P. Dokaži da su duži PA, PB, PC, PD jednake stranicama nekog konveksnog četvorougla.

459. Dat je trougao ABC, takav da je $AB = AC$, i tačke K i L na polupravim AB i AC, takve da je $AK + AL = AB + AC$. Dokaži da je $BC < KL$.

460. U ravni trougla ABC data je prava p. Ako su A_1, B_1, C_1, T_1 podnožja normala iz A, B, C, T na pravu p, gde je T težište trougla ABC, dokaži da je: $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1$.

461. Dijagonale AC i BD jednakokrakog trapeza sa osnovicom AB seku se u tački O, tako da je $\sphericalangle AOB = 60^\circ$. Dokaži da su središta duži OA, OD i BC temena jednakostraničnog trougla.

462. Na jednoj gusarskoj karti piše:

"Na Žutom ostrvu nalaze se bor, čempres i palma. Pođi od bora prema čempresu i broj korake. Od čempresa se okreni udesno za 90° i idi isti toliki broj koraka. Tu postavi znak. Zatim, ponovo pođi od bora prema palmi i broj korake. Od palme se okreni ulevo za 90° i idi isti toliki broj koraka. Tu postavi drugi znak. Kopaj na središtu između dva znaka i naći ćeš sakriveno blago."

Jedan mornar je našao ostrvo i na njemu čempres i palmu, ali bora, od kojeg je trebalo početi traganje, nije bilo, pa se mornar vratio praznih ruku. Međutim, da je znao malo geometriju, našao bi kovčeg sa blagom.

Da li vi možete da pronađete skriveno blago?

463. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ zbir duži AB i BD nije veći od zbira duži AC i CD. Dokaži da je $AB \leqslant AC$.

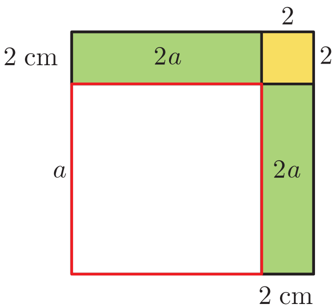
464. Ako su uglovi α i β četvorougla $ABCD$ jednaki među sobom, a ugao δ je veći od ugla γ, dokaži da je $BC > AD$.

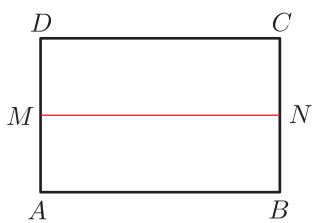
465. Data su dva konveksna četvorougla $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ jednakih stranica: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $DA = D_1A_1$. Za unutrašnje uglove ovih četvorouglova važi: ako je $\alpha > \alpha_1$, tada je $\beta < \beta_1$, $\gamma > \gamma_1$ i $\delta < \delta_1$. Dokaži.

6.4. Površine trouglova i četvorouglova

Primer A) Stranica datog kvadrata produži se za 2 cm, pa je površina novog kvadrata za 48 cm^2 veća od površine datog. Izračunaj obim datog kvadrata.

Rešenje. Na slici levo vidimo da površinu od 48 cm^2 čine dva pravougaonika sa stranicama 2 cm i a cm i jedan kvadrat stranice 2 cm, gde smo sa a cm označili dužinu stranice datog kvadrata. Površina svakog od ova dva pravougaonika je $2 \cdot a$, pa je $2a + 2a + 4 = 48$, odakle je $4a = 44$. Dakle, stranica datog kvadrata je $a = 11$ cm, pa je traženi obim 44 cm.



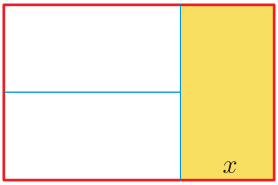


Primer B) Neka su M i N središta stranica AD i BC pravougaonika $ABCD$. Obim pravougaonika $ABCD$ je 52 cm, a obim pravougaonika $ABNM$ je 44 cm. Izračunaj površinu pravougaonika $ABCD$.

Rešenje. Neka su dužine stranica pravougaonika $ABCD$ označene sa $AB = a$ i $BC = 2b$. Tada su dužine stranica pravougaonika $ABNM$ jednake: $AB = MN = a$ i $BN = AM = b$. Sledi da je obim pravougaonika $ABCD$ za $2b$ veći od obima pravougaonika $ABNM$ (poslednja slika). Iz $52 - 44 = 8$, sledi da je $2b = 8$. Dalje, iz $2a + 2b = 44$, tj. iz $2a + 8 = 44$, nalazimo da je $a = 18$ cm. Površina pravougaonika $ABCD$ je $P = AB \cdot BC = 18 \cdot 8 = 144\ \text{cm}^2$.

Primer C) Koristeći makaze, lepak i pravougaonu papirnu traku širine 2 cm, dužine 1999 cm, napravi od te trake tri kvadrata. Mora se utrošiti sav papir.

Rešenje. Površina trake je $2 \cdot 1999 = 3998\ \text{cm}^2$. Kako je $63^2 = 3969$, a $64^2 = 4096$, načinićemo najpre kvadrat stranice 63 cm. Od preostalog papira, površine $29\ \text{cm}^2$, načinićemo jedan kvadrat stranice 5 cm i jedan kvadrat stranice 2 cm.



Primer D) Tri jednaka pravougaonika, svaki obima 48 cm, spojeni su kao na slici, tako da obrazuju novi pravougaonik. Kolika je površina kvadrata, čiji je obim jednak obimu velikog pravougaonika sa slike?

Rešenje. Ako je x cm manja stranica malog pravougaonika, onda mu je veća stranica $2x$ cm. Iz obima $6x = 48$ cm, dobijamo $x = 8$ cm. Dakle, stranice velikog pravougaonika su 24 cm i 16 cm, pa mu je obim $O = 80$ cm. Tada je stranica traženog kvadrata 20 cm, a površina $P = 400\ \text{cm}^2$.

466. Ako je S bilo koja tačka u jednakostraničnom trouglu, a M, N i P podnožja normala iz S na stranice trougla, dokaži da je $SM + SN + SP = h$, gde je h visina trougla.

467. Dužine dveju stranica trougla su 6 cm i 3 cm. Odredi dužinu treće stranice tog trougla, ako je poluzbir visina koje odgovaraju datim stranicama jednak trećoj visini.

468. Na produžecima stranica trougla ABC date su tačke D, E i F, takve da je B središte duži AD, tačka C središte duži BE i tačka A središte duži CF. Površina trougla ABC je 1 dm^2. Kolika je površina trougla DEF?

469. Površina trougla ABC je 6 cm^2. Težišne duži dele ovaj trougao na šest delova. Kolika je površina svakog dela?

470. Oko travnjaka kvadratnog oblika napravljena je betonska staza širine 2 m. Dok se beton nije osušio staza je sa obe strane (do travnjaka i spolja) zaštićena bodljikavom žicom. Ukupno je utrošeno 216 m bodljikave žice. Kolika je površina travnjaka?

471. Manja stranica pravougaonika je 5 puta kraća od veće stranice. Koliki je obim ovog pravougaonika, ako mu je površina 720 cm^2?

472. Od papira koji ima oblik pravougaonika sa stranicama dužina 9 cm i 13 cm, treba izrezati 15 nejednakih pravougaonika. Mogu li svi ovi pravougaonici imati celobrojnu površinu, izraženu u cm^2?

473. Ako se obe stranice datog pravougaonika povećaju istovremeno za 5 cm, dobija se pravougaonik koji ima površinu za 135 cm^2 veću od površine datog. Kolika je površina datog pravougaonika, ako mu je dužina za 4 cm veća od širine?

474. Ako jednu stranicu kvadrata smanjimo za 2 cm, a drugu povećamo za 3 cm, dobićemo pravougaonik čija je površina jednaka površini datog kvadrata. Odredi stranicu kvadrata.

475. Ako se dužina pravougaonika poveća za 3 cm, a širina smanji za 2 cm, dobićemo kvadrat čija je površina za 15 cm^2 veća od površine datog pravougaonika. Odredi stranice datog pravougaonika.

476. List kvadratnog oblika, sa dva reza makazama (sa dve prave) podeljen je na dva kvadrata i dva pravougaonika. Površina jednog od dobijenih kvadrata je 81 cm^2, a površina jednog od dobijenih pravougaonika 63 cm^2. Kolika je površina datog lista?

477. Kvadrat je sa dve prave podeljen na četiri pravougaonika. Kolika je stranica datog kvadrata, ako su površine triju od četiri dobijena pravougaonika poznate: 48 cm^2, 96 cm^2 i 144 cm^2? Sečenje je izvršeno tako da dva veća od ovih poznatih pravougaonika imaju zajedničko samo jedno teme.

478. Obim pravougaonika je 2 m. Kad mu se jedna stranica poveća za 10 cm, a druga smanji za 10 cm, dobije se kvadrat. Kolika je površina kvadrata?

479. Kvadrat čija je stranica 10 cm presečen je jednom pravom na dva pravougaonika. Izračunati obime tih pravougaonika, ako se zna da je dvostruki obim jednog pravougaonika jednak trostrukom obimu drugog.

480. Za pokrivanje poda potrebno je 200 pločica oblika pravougaonika dimenzija 22 cm puta 11 cm. Koliko bi pločica, oblika kvadrata ivice 20 cm trebalo za pokrivanje istog poda?

481. Ako se jedna stranica kvadrata produži za 2 cm, a druga za 5 cm, dobiće se pravougaonik koji ima površinu za 45 cm^2 veću od površine datog kvadrata. Kolika je površina kvadrata?

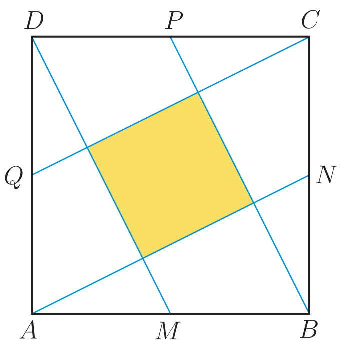
482. Obim pravougaonika je 72 cm, a jedna stranica je dva puta kraća od druge stranice. Izračunaj površinu četvorougla čija su temena središta stranica datog pravougaonika.

483. Sto podudarnih kvadrata stranice 3 cm treba složiti tako da se dobije pravougaonik:

a) najmanjeg obima; b) najvećeg obima.

484. Svaka stranica kvadrata je produžena preko oba temena po 2 cm. Tako je dobijena figura u obliku krsta. Površina tog krsta je 105 cm^2. Kolika je stranica datog kvadrata?

485. Tačke M, N, P, Q su središta stranica kvadrata $ABCD$, stranice $AB = 1$ dm. Izračunaj površinu obojenog četvorougla na slici.



486. U trapezu $ABCD$ prava p, paralelna osnovici AB, seče duži AC i BC redom u tačkama M i N. Dokaži da trouglovi DAM i DBN imaju jednake površine.

487. Visina jednakokrakog trapeza ima dužinu h, a površina trapeza je $P = h^2$. Pod kojim se uglom seku dijagonale trapeza?

488. U četvorouglu $ABCD$ nejednakih stranica dijagonale AC i BD seku se u tački O. Trouglovi ADO i BCO imaju jednake površine. Dokaži da je $ABCD$ trapez.

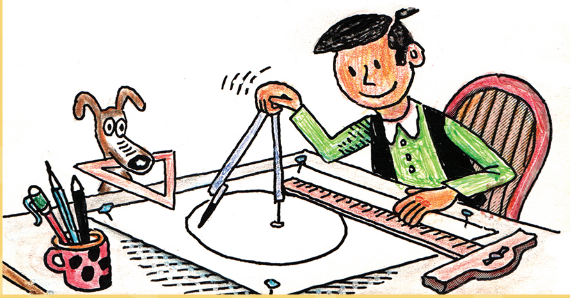
489. U četvorouglu $ABCD$ tačke M i N su središta stranica AB i CD. Neka MD seče AN u P i MC seče BN u Q. Dokaži da je površina četvorougla $MQNP$ jednaka zbiru površina trouglova APD i BCQ.

490. Na stranici AB konveksnog četvorougla $ABCD$ date su tačke M i N, a na stranici CD tačke P i Q, tako da je $AM = MN = NB$ i $CP = PQ = QD$. Ako je površina četvorougla $ABCD$ jednaka 3 dm^2, izračunaj površinu četvorougla $MNPQ$.

Glava 7

KONSTRUKTIVNI ZADACI

- Konstruisanje raznih figura
- Konstrukcije sa primenama simetrije
- Konstrukcije sa ograničenjima
- Problemi maksimuma i minimuma



Konstruktivni zadaci

Rešavanje konstruktivnih zadatka je odlična provera stečenog znanja. U ovom odeljku rešavaćemo zadatke na osnovu podudarnosti, koju smo proučavali u prethodnim glavama.

Kompletno rešenje konstruktivnog zadatka zahteva:

analizu zadatka, tj. proučavanje datih podataka, povezivanje sa poznatim osobinama tražene figure, traženje puta ka rešenju;

konstruisanje tražene figure;

dokaz konstrukcije, tj. provera da li je konstruisana figura *rešenje* zadatka;

diskusiju, tj. razmatranje svih mogućih rešenja, uz obrazloženja slučajeva u kojima nije moguće doći do rešenja.

Pod rešenjem podrazumevamo ne samo jednu dobijenu figuru traženih osobina, već sve figure podudarne sa dobijenom. Pod različitim rešenjima podrazumevamo nepodudarne figure.

Pod *konstruisanjem* tražene figure podrazumevamo pre svega opis postupaka kojim se uz pomoć unija, preseka i razlika pravih i krugova postupno određuje tražena figura.

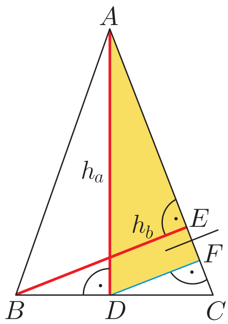
Crtanje figure samo olakšava nalaženje rešenja.

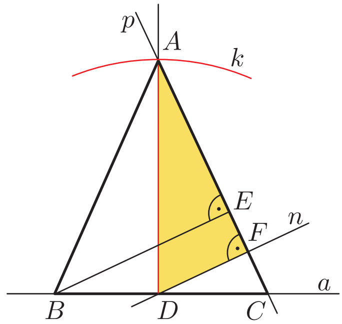
Za grafički prikaz prave koristimo *lenjir*, a za grafički prikaz kruga koristimo *šestar*. Zbog toga se kaže da rešavamo konstrukcije *lenjirom i šestarom*.

7.1. Konstruisanje raznih figura

Primer A) Konstruiši jednakokraki trougao ako su mu date obe visine h_a i h_b, gde je h_a visina koja odgovara osnovici.

Analiza. Neka je ABC traženi trougao sa visinama $AD = h_a$ i $BE = h_b$, slika levo. Uočimo podnožje F normale iz D na AC. Po konstrukciji je DF srednja linija trougla BCE, pa je $DF = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}h_b$. Sada smo dobili pravougli trougao ADF koji možemo konstruisati.





Konstrukcija. Na proizvoljnoj pravoj p izaberemo proizvoljnu tačku F i u njoj konstruišemo normalu n, slika desno. Na pravoj n odredimo tačku D, takvu da je $DF = \frac{1}{2}h_b$. Konstruišemo krug k sa centrom D i poluprečnikom h_a. Označimo sa A presečnu tačku kruga k sa pravom p. Sada u tački D konstruišemo pravu a, normalnu na AD. Njen presek sa p označimo slovom C. Na pravoj a odredimo tačku B, takvu da je tačka D središte duži BC. Trougao ABC je traženi.

Dokaz. Treba dokazati da je dobijeni trougao ABC jednakokraki i da ima visine h_a i h_b, kao što je u postavci zadatka.

Trouglovi ADB i ADC su pravougli, imaju prav ugao kod D (jer je $a \perp AD$), zajedničku katetu AD i $BD = CD$, po konstrukciji. Prema tome, ova dva trougla su podudarna, pa je $AB = AC$. To potvrđuje da je ABC jednakokraki trougao.

Zbog $AD \perp a$, sledi da je AD visina koja odgovara osnovici BC, a kako je AD poluprečnik kruga k, biće $AD = h_a$. Konstruišimo visinu BE trougla ABC. Kako je $BE \perp AC$ i $DF \perp AC$, sledi da je $DF \| BE$. Kako je tačka D po konstrukciji središte duži BC, to je duž DF srednja linija trougla BCE, pa je $BE = 2DF = 2 \cdot \frac{1}{2}h_b = h_b$. Dakle, jednakokraki trougao ABC ima visine $AD = h_a$ i $BE = h_b$.

Diskusija. Zadatak nema rešenja ako krug k ne seče pravu p, tj. ako je $h_a \leqslant \frac{1}{2}h_b$. Ako je $ha > \frac{1}{2}h_b$, zadatak ima samo jedno rešenje.

Doduše, odredivanje tačaka D i A nije jednoznačno, ali u svim drugim slučajevima dobijaju se trouglovi podudarni sa trouglom ABC, čiju smo konstrukciju opisali, a to, po definiciji, nisu različita rešenja.

Ovaj primer smo uradili sa svim detaljima. Ostale ćemo rešiti uz skraćena izlaganja.

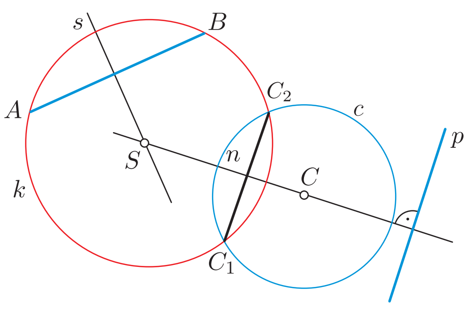
Primer B) Konstruiši krug k, koji sadrži date tačke A i B i seče dati krug c u tačkama C_1 i C_2, tako da je tetiva C_1C_2 paralelna datoj pravoj p.

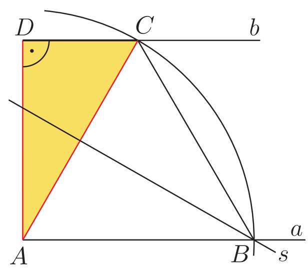
Analiza. Neka je S centar traženog kruga i C centar datog kruga. Prava CS mora biti normalna na zajedničku tetivu, pa je zbog toga normalna i na datu pravu p, slika dole levo. Sem toga, simetrala tetive AB prolazi kroz S. (Dati elementi, duž AB, krug c i prava p, obojeni su plavo.)

Konstrukcija. Konstruišemo simetralu s duži AB i normalu n iz tačke C na datu pravu p. Neka je S presečna tačka pravih s i n. Konstruišemo krug k sa centrom S i poluprečnikom SA.

Dokaz prepuštamo čitaocu, jer je zaista jednostavno utvrditi da krug k sadrži tačke A i B i da je presečna tetiva C_1C_2 krugova k i c paralelna pravoj p.

Diskusija. Zadatak ima jedinstveno rešenje ako se prave s i n seku u tački S i krug k seče dati krug. Zadatak nema rešenja ako krug k, čiji je centar S, a poluprečnik duž SA, ne seče dati krug, ili ako prave s i n nemaju zajedničkih tačaka. Zadatak ima neograničen broj rešenja ako se prave s i n poklapaju, t.j. ako je $AB \| p$ i s prolazi kroz C.





Primer C) Konstruiši pravoguli trapez $ABCD$, kome je visina $AD = 2,5$ cm, manja dijagonala 3 cm, a veća osnovica jednaka većem kraku.

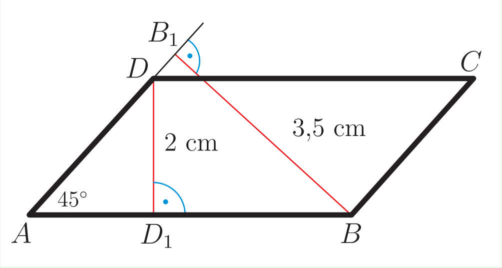
Analiza. Pravougli trougao ACD određen je katetom AD i hipotenuzom AC, pa se može odmah konstruisati. U trouglu ABC je $AB = BC$, pa se tačka B nalazi na simetrali dijagonale AC i $AB \| CD$.

Konstrukcija. (slika gore desno) i dokaz sledi jasno iz analize.

Diskusija. Budući da je $AC > AD$, zadatak ima jedno rešenje.

Primer D) Konstruiši paralelogram $ABCD$ kome su visine 2 cm i 3,5 cm, a zbir dva unutrašnja ugla iznosi 270°.

Analiza. Zbir dva različita ugla paralelograma je 180°, pa je dati zbir 270° ustvari dvostruki tupi ugao: $2\beta = 270°$ i $\beta = 135°$. Sledi da je $\alpha = 45°$. Onda, ako su visine $DD_1 = 2$ cm i $BB_1 = 3,5$ cm, tada su trouglovi ADD_1 i ABB_1 pravougli jednakokraki, pa je $AD_1 = DD_1 = 2$ cm i $AB_1 = BB_1 = 3,5$ cm.



Konstrukcija. Prvo konstruišemo ugao $\alpha = 45°$ sa temenom A, pa na kraku tog ugla odredimo tačku D_1, tako da je $AD_1 = 2$ cm. Zatim, normala u D_1 na pravu AD_1 seče drugi krak ugla α u tački D. Dalje, slično konstruišemo tačku B_1, tako da je $AB_1 = 3,5$ cm. Onda odredimo tačku B, itd.

491. Konstruiši pravougli trougao, ako mu je dat jedan oštri ugao i zbir kateta $(\alpha, a+b)$.

492. Konstruiši trougao ABC, ako mu je $\sphericalangle BAC = 60°$, visina iz temena B je 4 cm i visina iz temena C je 3 cm.

493. Konstruiši trougao ABC, ako su mu date dve težišne linije: $AM = 3$ cm i $BN = 4,5$ cm i visina $h_a = 2$ cm.

494. Konstruiši trougao kojem je dat poluprečnik opisanog kruga i visina i težišna linija iz temena A $(R,\ h_a,\ t_a)$.

495. Konstruiši trougao ABC kome su unutrašnji uglovi $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ i obim 1 dm.

496. Konstruiši jednakostranični trougao kome je stranica za 6 mm duža od visine.

497. Na osnovici BC jednakokrakog oštrouglog trougla ABC odredi tačku M, tako da razlika njenih rastojanja od krakova tog trougla bude jednaka polovini kraka AB.

498. Konstruiši jednakokraki trapez, ako mu je dat zbir osnovica, krak i dijagonala $(a + b,\ c,\ d)$.

499. Konstruiši trapez $ABCD$, ako su mu date osnovice i dijagonale $(AB,\ CD,\ AC,\ BD)$.

500. Konstruiši kvadrat kojem je zbir dijagonale i poluobima 5 cm.

501. Konstruiši pravougaonik ako je data jedna stranica i zbir druge stranice i dijagonale $(a, b + d)$.

502. Data je prava p, tačka A na pravoj p i tačka B van p. Konstruiši krug koji prolazi kroz datu tačku B i datu pravu p dodiruje u datoj tački A.

503. Prave a i b seku se u tački O. Na pravoj a data je tačka A. Konstruiši krug koji dodiruje a i b i to pravu a u datoj tački A.

504. Dat je krug k, na krugu tačka M i van kruga prava p. (Krug i prava nemaju zajedničkih tačaka.) Konstruiši krug koji dodiruje datu pravu i dati krug dodiruje u datoj tački.

505. Konstruiši krug k koji sadrži datu tačku A i dodiruje dati krug k_1 u datoj tački B.

506. Dat je krug k i izvan njega tačka A. Konstruiši pravu a, koja sadrži tačku A i seče krug k u tačkama B i C, tako da je B između A i C i $AC = 2BC$.

507. Date su tačke M, N i C_1, koje nisu na jednoj pravoj. Konstruiši trougao ABC, tako da mu je tačka M središte stranice BC, tačka N središte stranice AC i C_1 podnožje visine h_c.

508. Date su tačke M, A_1 i C_1, koje ne pripadaju jednoj pravoj. Konstruiši trougao ABC, tako da je tačka M središte stranice BC, tačka A_1 podnožje visine h_a i tačka C_1 podnožje visine h_c.

509. Konstruiši trougao ABC ako su date tačke A_1, B_1, C_1 takve da su A, B, C, redom središta duži CC_1, AA_1, BB_1.

510. Date su tačke A, M, N, koje ne pripadaju jednoj pravoj. Konstruiši paralelogram $ABCD$, kojem su tačke M i N središta dveju stranica.

7.2. Konstrukcije sa primenama simetrije

Koristićemo se osobinama centralne i osne simetrije.

Tačka M_1 je simetrična tački M u odnosu na tačku S, ako je tačka S središte duži MM_1. Tačka S je sama sebi simetrična.

Prave simetrične u odnosu na neku tačku paralelne su među sobom.

Tačka M_1 simetrična je tački M u odnosu na pravu s ako je s simetrala duži MM_1 (tj. ako s polovi duž MM_1 i $s \perp MM_1$).

Ako je tačka M_1 simetrična tački M, onda je i tačka M simetrična tački M_1. Možemo reći, tačke M i M_1 su simetrične (u odnosu na tačku ili u odnosu na pravu).

Kraci ugla su simetrični u odnosu na simetralu ugla.

Simetrične figure su podudarne.

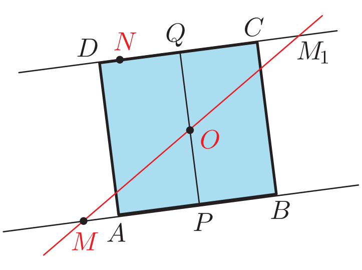
Primer A) Date su tačke M, N i O koje ne pripadaju jednoj pravoj. Konstruiši kvadrat $ABCD$, tako da tačka M pripada pravoj AB, tačka N pripada pravoj CD i tačka O je presečna tačka dijagonala.

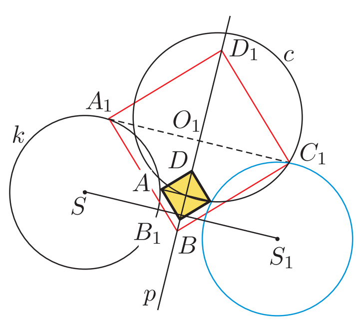
Analiza. Paralelne prave AB i CD simetrične su u odnosu na tačku O, pa tačka M_1, simetrična sa M u odnosu na O, pripada pravoj CD.

Konstrukcija. Konstruišemo tačku M_1 simetričnu sa M u odnosu na O, slika levo. Prava M_1N sadrži stranicu CD. Prava kroz M, paralelna sa M_1N, sadrži stranicu AB. Konstruišemo zajedničku normalu PQ ovih pravih kroz tačku O. Tačke P i Q su središta stranica AB i CD, a jednake su duži: OP, OQ, AP, BP, CQ i DQ.

Dokaz sledi neposredno iz konstrukcije.

Diskusija. Zadatak uvek ima jedno rešenje.





Primer B) Konstruiši kvadrat čija dva suprotna temena pripadaju datoj pravoj p, a druga dva dvama datim krugovima k i c.

Analiza. Neka su B i D tačke prave p, teme A pripada krugu k i teme C pripada krugu c, slika desno. Tačke A i C su simetrične u odnosu na pravu p. Središte O duži AC je na pravoj p.

Konstrukcija. Preslikamo krug k u k_1, simetrično u odnosu na pravu p. (Preslikamo S u simetričnu tačku S_1. Krugovi k_1 i k imaju jednake poluprečnike.) Na taj način svakoj tački kruga k odgovara simetrična tačka kruga k_1. Zbog toga je teme C kvadrata upravo presečna tačka kruga k_1 sa krugom c. Dalja konstrukcija je očigledna. (Duži OC, OA, OB i OD su jednake.)

Dokaz sledi iz konstrukcije, pa prepuštamo čitaocu da ga sam izvede.

Diskusija. Imamo jedno rešenje, ili dva rešenja (kao na slici) ili nijedno, zavisno od toga da li krug k_1 dodiruje ili seče krug c, ili k_1 i c nemaju zajedničkih tačaka.

511. Date su prave p i q koje se seku i tačka C van datih pravih. Konstruiši trougao ABC u kojem je prava p simetrala ugla α, a prava q simetrala ugla β.

512. U pravougaoniku P dat je pravougaonik P_1, takav da im se stranice ne seku. Zatim je pravougaonik P_1 "isečen i izvađen" iz pravougaonika P. Konstruiši pravu s, kojom je ostatak pravougaonika P podeljen na dva dela jednakih površina.

513. Data je prava s i dve tačke A i B sa raznih strana prave s. Konstruiši pravu a kroz tačku A i pravu b kroz tačku B, tako da prava s polovi jedan od uglova određenih pravim a i b.

514. Van datih pravih a i b data je tačka C. Konstruiši tačku A na pravoj a i tačku B na pravoj b, tako da C bude središte duži AB.

515. Date su prave a, b i c. Konstruiši pravu n normalnu na c, koja prave a, b, c seče redom u tačkama A, B, C, tako da je $AC = BC$.

516. Konstruiši trougao ABC ako su date tačke A_1, A_2, B_1, takve da su A_1 i A_2 redom simetrične sa A u odnosu na B i u odnosu na C, a B_1 je simetrična sa B u odnosu na C.

517. Date su prave a, b i c. Konstruiši jednakostranični trougao ABC, tako da teme A pripada pravoj a, teme B pripada pravoj b, a visina h_c pripada pravoj c.

518. Neka su M i N tačke simetrične temenu C trougla ABC, u odnosu na simetrale uglova α i β. Konstruiši tačku S, u kojoj upisani krug trougla ABC dodiruje stranicu AB, ako su date samo tačke M i N. (Nisu data ni temena, ni stranice trougla ABC.)

519. Date su tačke O, M, N, P, takve da među njima ne postoje tri koje pripadaju jednoj pravoj. Konstruiši romb $ABCD$, tako da tačka O bude presek dijagonala AC i BD, a tačke M, N, P, redom pripadaju pravim AB, BC, CD.

520. Data su dva kruga k i k_1 koji se seku u tačkama A i B. Konstruiši pravu a, kroz tačku A, tako da ona na krugovima k i k_1 odseca jednake tetive.

7.3. Konstrukcije sa ograničenjima

Suština rešavanja konstruktivnog zadatka nije u crtanju slike, već u dokazu da tražena figura postoji. Crtež se koristi samo radi očiglednosti. Ali, u ovom odeljku bavićemo se upravo crtežom. Poznavanje osobina geometrijskih figura koristićemo za “crtanje” u naizgled nemogućim uslovima. Razmatraćemo konstrukcije koje u geometrijskom smislu nisu problematične. Na primer, konstrukcija duži ako su dati njeni krajevi, konstrukcija simetrale datog ugla, i sl. To su elementarne konstrukcije i *uvek imaju rešenja*. Međutim, ako treba *nacrtati* duž čiji su krajevi udaljeni 20 cm, a mi imamo lenjir dužine 10 cm, nastaju problemi tehničke prirode.

Ovde ćemo rešavati dve vrste *tehničkih problema*:

1° nedovoljne dimenzije papira (table) na kojem se crta;

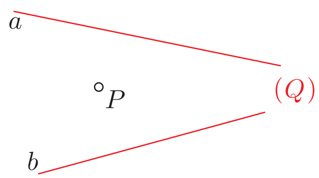
2° “mali pribor”, tj. kratak lenjir i šestar kojim nije moguće nacrtati krug dovoljno velikog poluprečnika.

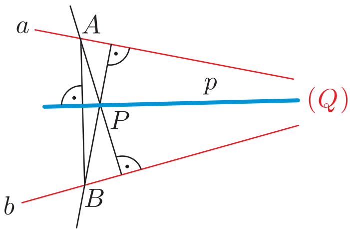
U narednim zadacima koristićemo i pojam *nedostižna tačka*. Pod nedostižnom tačkom podrazumevamo presečnu tačku dveju pravih, koju “ne vidimo”, jer se presek nalazi van crteža, tj. van papira (table), zbog nedovoljnih dimenzija papira (table).

Za nedostižnu tačku kažemo da je data ako su date bilo koje dve prave koje se seku u toj tački.

Nedostižnu tačku označavaćemo, na primer, sa (N). Prilikom rešavanja zadataka koji slede, pretpostavljamo da su “dostižni” svi podaci, osim onih za koje naglasimo da su “nedostižni”.

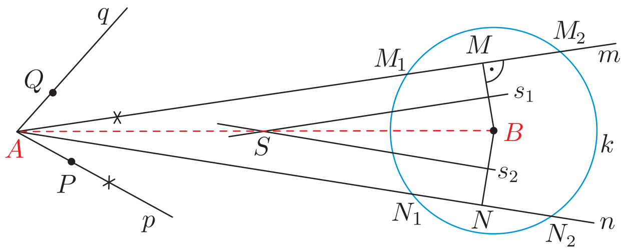
Primer A) Data je tačka P i nedostižna tačka (Q), koja je presek pravih a i b, slika levo. Konstruiši pravu $p = P(Q)$.





Rešenje. Koristićemo se ortocentrom trougla. Iz tačke P konstruišimo normale na prave a i b koje određuju nedostižnu tačku, slika desno. Sada su PA i PB visine trougla $AB(Q)$, pa je tačka P ortocentar. Prava, koja sadrži tačku P i normalna je na AB, predstavlja treću visinu trougla, a to je tražena prava.

Primer B) Date su tačke A i B, takve da je $AB > 2r$. Konstruiši središte duži AB, koristeći se lenjirom dužine r i šestarom kojim je moguće nacrtati krug poluprečnika manjeg od r ili jednakog duži r. (Konstrukcija "malim priborom".)



Rešenje. Konstruišemo krug k sa centrom B i poluprečnikom r. Zatim, izaberemo dve tačke, P i Q, takve da je $AP \leqslant r$ i $AQ \leqslant r$. Konstruišemo duž AP, a onda, "produžavanjem" preko P, nacrtamo polupravu Ap.

Slično, nacrtamo i polupravu Aq. Ako one ne seku krug k, nacrtaćemo simetralu ugla PAQ. Po potrebi crtaćemo i simetrale polovina ugla PAQ, pa simetrale njihovih polovina, itd. sve dok ne dobijemo dve poluprave koje seku krug k. (Na slici to su poluprave Am i An.) Tako dobijemo dve tetive, M_1M_2 i N_1N_2. Označimo sa M i N podnožja normala iz B na M_1M_2 i N_1N_2. Tačke M i N konstruišemo "normalno" koristeći se simetralama duži. Uglovi AMB i ANB su pravi. Simetrale duži BM i BN seku se u tački S. Sada "normalnom" konstrukcijom odredimo simetrale s_1 i s_2 ovih stranica, a onda "produžavanjem" simetrala dobijemo presek, tj. dobijamo tačku S. (Po konstrukciji prave s_1 i s_2 sadrže srednje linije trouglova ABM i ABN i obe prolaze kroz traženu tačku S, središte stranice AB.)

521. Kroz datu nedostižnu tačku (N) konstruiši pravu n, normalnu na datu pravu m.

522. Konstruiši simetralu datog ugla $(O)pq$.

523. Kroz datu nedostižnu tačku (A) konstruiši pravu a paralelnu datoj pravoj p.

524. Date su tačke A i B, takve da je $AB > 2r$. Koristeći se *malim lenjirom i malim šestarom* (iz **primera B**) nacrtaj duž AB.

525. Date su tačke A i B, takve da je $AB > 20$ cm. Koristeći se lenjirom dužine 10 cm i šestarom kojim se može nacrtaj krug poluprečnika do 10 cm dužine, nacrtaj simetralu duži AB.

7.4. Problemi maksimuma i minimuma

U ovom odeljku rešavaćemo probleme tipa: od svih mogućih figura koje zadovoljavaju zadate uslove, treba odrediti onu koja je u okviru nekog zahteva najveća (maksimalna) ili najmanja (minimalna).

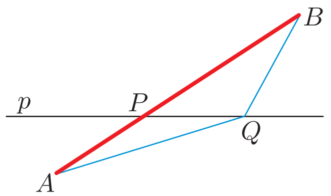
Pri tome koristimo između ostalog i poznate relacije:

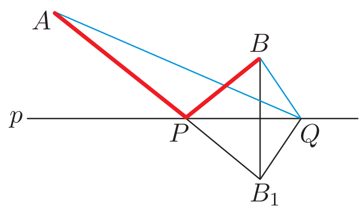
- Najkraće rastojanje od A do B je duž AB.
- Naspram većeg ugla u trouglu je veća stranica i obrnuto.
- Hipotenuza je najduža stranica u pravouglom trouglu.
- Prečnik je najveća tetiva datog kruga.
- Najkraće rastojanje od tačke A do prave p je normala AP, $P \in p$.

Primer A) Date su tačke A i B van date prave p. Konstruiši tačku P na pravoj p, tako da zbir duži $AP + PB$ bude najmanji.

Rešenje. Ako su tačke A i B sa raznih strana date prave, rešenje je očigledno: tražena tačka je presek P prave p i duži AB, leva slika. Zaista, ako je Q, $Q \neq P$, proizvoljna tačka prave p, tada postoji trougao ABQ i važi nejednakost: $AB < AQ + QB$. Kako je $AB = AP + PB$, to je $AP + PB < AQ + QB$. Ovo potvrđuje da je P tražena tačka.

U slučaju kad su A i B sa iste strane prave p, konstruišemo tačku B_1, simetričnu sa B u odnosu na p, i zadatak svodimo na prethodni slučaj, slika dole desno. Tražena tačka P je presek prave p sa duži AB_1.



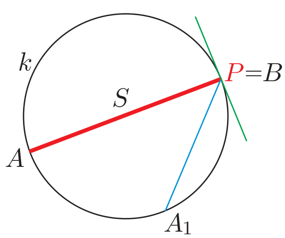


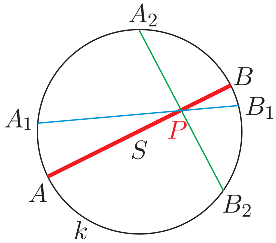
Zaista, neka je Q, $Q \neq P$, proizvoljna tačka prave p. Tada postoji trougao AB_1Q u kojem važi nejednakost: $AB_1 < AQ+QB_1$. Međutim, iz simetričnosti tačaka B i B_1 zaključujemo da je $QB_1 = QB$ i $PB_1 = PB$. Kako je $AB_1 = AP + PB_1$, tj. $AB_1 = AP + PB$, to sledi nejednakost $AP + PB < AQ + QB$. Dakle, P je tražena tačka.

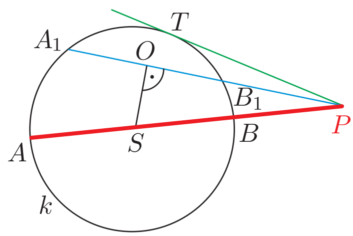
Primer B) Dat je krug k i tačka P. Kroz datu tačku konstruiši sečicu p, tako da zbir rastojanja date tačke od presečnih tačaka sečice i kružnice, bude:

a) najveći, b) najmanji.

Rešenje. Razlikovaćemo tri slučaja: 1° tačka P je na kružnici, slika levo, 2° tačka P je u krugu, slika u sredini, i 3° tačka P je van kruga, slika desno.







1° Zbog $P = B$ je $PA + PB = PA$, tj. traženi zbir je tetiva, a ona je najveća kad je PA prečnik kruga. Ako je p tangenta, tada je $A = B = P$, pa je $PA + PB = 0$, a to je minimalni zbir. Rešenja su:

a) zbir rastojanja je najveći kad sečica sadrži centar kruga;

b) zbir je najmanji kad je p tangenta.

2° Očigledno je $PA + PB = AB$, tj. zbir duži je tetiva, pa su rešenja zadatka:

a) zbir je najveći kada je AB prečnik kruga, tj. kad sečica p sadrži centar kruga;

b) zbir je najmanji kada je sečica p normalna na prečnik SP. (Dokaz ovog slučaja prepuštamo čitaocu. Treba koristiti centralna rastojanja tetiva.)

3° a) Rešenja su kao u slučaju 1°. Zaista, uočimo da je

$$PA + PB = (PB + BS + SB) + PB = 2(PB + BS) = 2PS.$$

Slično, ako sečica ne prolazi kroz S, izračuna se da je $PA_1 + PB_1 = 2PO$, poslednja slika desno. Kako je ugao POS prav, to je $PS > PO$ (hipotenuza i kateta). Ova nejednakost važi za sve slučajeve kad je $A_1 \neq A$.

Slučaj b), kad je zbir minimalan, a to je kad je prava p tangenta, nećemo ovde dokazivati. Dokaz je sličan slučaju 2°, pa ga ostavljamo čitaocu.

Zanimljivo je da će zbir $PA + PB$ biti maksimalan uvek kad sečica sadrži centar kruga, bez obzira na položaj tačke P.

526. Dat je konveksan četvorougao $ABCD$. Odredi tačku X, tako da zbir duži $AX + BX + CX + DX$ bude najmanji.

527. Dat je kvadrat $MNPQ$ i tačka A van kvadrata. Kroz tačku A konstruiši pravu a, tako da duž koju stranice kvadrata odsecaju od prave a bude što je moguće veća (najveća).

528. U dati pravougli trougao ABC upiši pravougaonik, kojem se jedno teme poklapa sa temenom C pravog ugla trougla i koji ima najmanju dijagonalu. (Pravougaonik je upisan u trougao ako sva njegova temena leže na stranicama trougla.)

529. Dat je konveksni ugao Oab i u njemu tačka C. Konstruiši tačku A na polupravoj Oa i tačku B na polupravoj Ob, tako da obim trougla ABC bude minimalan.

530. Data je prava p i tačke A i B sa raznih strana date prave. Konstruiši na pravoj p duž CD, tako da duž CD bude dužine 3 cm i da izlomljena linija $ACDB$ bude što je moguće kraća (najkraća).

531. Data je prava a i tačke M i N sa iste strane date prave a. Na datoj pravoj konstruiši duž PQ, tako da je $PQ = MN$, a izlomljena linija $MPQN$ ima najmanju dužinu.

532. Kroz teme A, van datog trougla ABC, konstruiši pravu p, tako da zbir rastojanja tačaka B i C od prave p bude najveći.

533. Date su poluprave Oa i Sb sa zajedničkom tačkom C. Na polupravoj Oa konstruiši tačku A i na polupravoj Sb konstruiši tačku B, tako da je $OA = SB$ i da je duž AB najmanja.

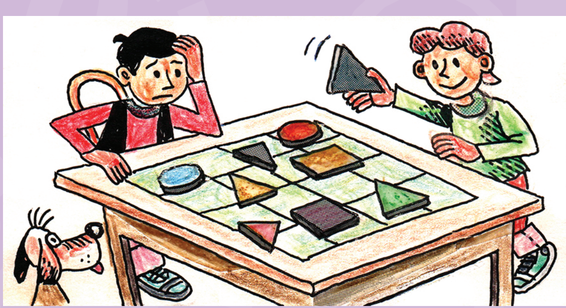
534. U dati oštrougli trougao ABC upiši trougao KLM ($K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CA$) tako da je obim trougla KLM najmanji.

535. U datom trouglu ABC konstruiši tačku P, tako da je zbir duži $PA + PB + PC$ najmanji.

Glava 8

KOMBINATORNA GEOMETRIJA

- Tačke i prave u ravni
- Razni kombinatorni problemi



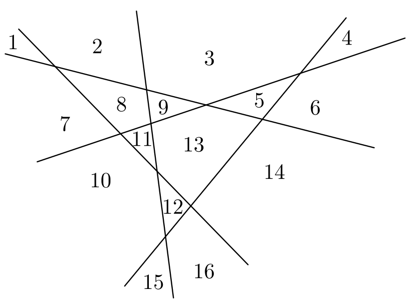
Kombinatorna geometrija

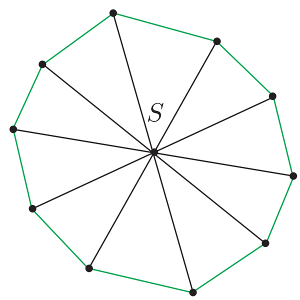
U ovom delu bavićemo se prebrojavanjem, kao u klasičnoj (algebarskoj) kombinatorici, koristeći se naučenim osobinama geometrijskih figura. Koristićemo takođe i Dirihleov princip.

8.1. Tačke i prave u ravni

Primer A) Koliko se disjunktnih (nepresecajućih) delova ravni dobija ako se međusobno seku 5 pravih, i to tako da se svake dve seku, pri čemu se u jednoj tački seku tačno dve prave?

Rešenje. Jedna prava deli ravan na dve oblasti, dve poluravni. Druga prava seče prvu, a samim tim preseca i obe poluravni na po dve nove oblasti. Sada imamo 4 oblasti. Treća prava preseca obe prethodne prave, a zbog toga prolazi kroz tri oblasti i svaku od njih deli na po dva dela. Sada imamo $4+3$, tj. 7 oblasti. Četvrta prava seče prethodne 3 prave, pa prolazi kroz 4 oblasti, deleći svaku na dva dela, itd. Ukupan broj disjunktnih oblasti je: $((((2+2)+3)+4)+5) = 16$, od čega 6 ograničenih, slika dole.





Primer B) Na krugu je raspoređeno 2000 tačaka, tako da su 1999 obojene crveno, a jedna plavo. Uočimo sve moguće mnogouglove čija su temena obojene tačke. Da li je više mnogouglova koji imaju jedno plavo teme, ili je više mnogouglova čija su sva temena crvena?

Rešenje. Uočimo sve mnogouglove kojima su temena samo crvene tačke. Svakom od njih odgovara po jedan mnogougao, koji dobijemo kada plavu tačku spojimo sa dva njoj najbliža temena. Osim toga, bilo koje dve crvene tačke obrazuju sa plavom tačkom trougao. Dakle, više je mnogouglova koji imaju jedno plavo teme.

Primer C) Dato je pet duži koje imaju zajedničko središte S, poslednja slika. Koliko je najviše pravih određeno krajnjim tačkama ovih duži, ne računajući prave koje sadrže tačku S?

Rešenje. Najviše pravih biće određeno ako krajevi duži predstavljaju temena konveksnog desetougla. Svaka tačka sa preostalih 9 određuje 9 pravih. To je ukupno $10 \cdot 9$ za 10 tačaka. Pritom je svaka prava računata po 2 puta. (Na primer: AB i BA je jedna prava.) Otuda imamo $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ pravih. Ne računajući 5 pravih koje sadrže date duži i tačku S, određeno je najviše 40 pravih.

536. Koliko najmanje pravih treba konstruisati da bi se ravan podelila na 7 disjunktnih delova?

537. Da li je moguće rasporediti 10 tačaka na 5 duži, tako da na svakoj duži budu 4 tačke?

538. Rile je zasadio 9 strukova paradajza u 10 redova, i to tako da u svakom redu budu po 3 struka. Kako je on to učinio?

539. Date su paralelne prave a i b. Na pravoj a date su tačke A, B, C, D i E, a na pravoj b tačke M, N, P i Q. Koliko duži i koliko trouglova određuju ovih 9 tačaka?

540. Dat je konveksni devetougao. Koliko je ukupno trouglova određeno temenima tog devetougla?

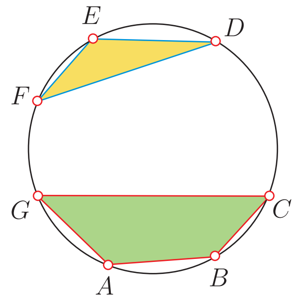
541. Dato je u ravni 10 crvenih i 8 plavih tačaka. Koliko najviše može da ima trouglova, čija temena predstavljaju date tačke, ako svaki od trouglova ima i plavih i crvenih temena?

542. Date su tri različite prave i na svakoj od njih po pet različitih tačaka. Koliko najviše trouglova određuju ove tačke?

543. Date su dve paralelne prave a i b. Na pravoj a date su tačke A, B, C, D, a na pravoj b tačke M, N, P. Koliko je konveksnih četvorouglova određeno ovim tačkama?

544. U ravni je dato 5 različitih tačaka. Koliko različitih pravih određuju ove tačke? Razmotri sve slučajeve.

545. Na kružnici je izabrano sedam različitih tačaka. One određuju izvestan broj trouglova i četvorouglova.



a) Čega je više određeno ovim tačkama: trouglova ili četvorougla?

b) Ako odredimo istovremeno jedan trougao i jedan četvorougao, tako da oni budu disjunktni, kao na slici, koliko ima ovakvih kombinacija?

8.2. Razni kombinatorni problemi

Sledi poslednja grupa zadataka u ovom delu geometrije. U većini se koristi samo "zdrav razum", uključujući i neke "algebarske ideje", kao što je *Dirihleov princip*.

Primer A) U jednakostraničnom trouglu stranice 3 cm na slučajni način raspoređeno je 10 tačaka. Dokaži da uvek postoje bar dve tačke čije međusobno rastojanje nije veće od 1 cm.

Dokaz. Povlačenjem pravih paralelnih stranicama, na međusobnom rastojanju od 1 cm, podelićemo dati trougao na 9 jednakostraničnih trouglova stranice 1 cm. Kad u ovih 9 trouglova rasporedimo 10 tačaka, na bilo koji način, uvek će postojati bar jedan trougao u kojem su bar dve tačke (Dirihleov princip). To su tražene tačke, jer njihovo rastojanje ne može biti veće od stranice malog trougla.

Primer B) U ravni su izabrane 2003 proizvoljne tačke. Tačke su raspoređene tako da njih 3 predstavljaju temena trougla ABC, a ostalih 2000 su unutrašnje tačke ovog trougla. Koliko ima trouglova koji se ne preklapaju, a temena su im date tačke?

Rešenje. Neka je A jedna od 2000 tačaka u trouglu. Ona je zajedničko teme izvesnom broju trouglova. Kako se ovi trouglovi ne preklapaju, to će zbir njihovih unutrašnjih uglova sa temenom A biti 360°.

Ovakvih tačaka ima 2000, pa je zbir svih unutrašnjih uglova trouglova jednak $2000 \cdot 360^\circ + 180^\circ$ (dodajemo zbiru i uglove trougla ABC), a to je 720180°. Traženi broj trouglova je $720180 : 180 = 4001$.

Primer C) U ravni je dato 25 tačaka, takvih da se od bilo koje tri mogu izabrati dve, između kojih je rastojanje manje od 1 cm. Dokaži da se sve tačke mogu pokriti sa dva kruga čiji su poluprečnici po 1 cm.

Dokaz. Posmatrajmo sve duži čiji su krajevi date tačke. Neka je AB najveća od njih. Konstruišimo dva kruga poluprečnika 1 cm, sa centrima A i B. Dokazaćemo da oni pokrivaju i preostale 23 tačke. Ako je $AB \leqslant 1$, onda je to očigledno, jer je rastojanje svake tačke M od A i B manje ili jednako 1 cm. Ako je $AB > 1$ i M neka od preostale 23 tačke, tada je po uslovu $AM < 1$, pa je M u prvom krugu, ili je $BM < 1$, pa je M u drugom krugu.

546. Drvena kocka zapremine 1 m^3 obojena je spolja crvenom bojom, pa je onda razrezana na kubne decimetre. Koliko je ovih manjih kocki obojeno sa tri strane, koliko sa dve strane i koliko je neobojenih?

547. Na krugu je izabrano 9 proizvoljnih tačaka. Zatim su konstruisane sve prave određene ovim tačkama. Dokaži da među ovim pravim postoje bar dve koje se seku pod uglom koji nije veći od 5°, ili su paralelne.

548. U kvadratu stranice 7 cm razbacano je 100 plavih tačaka, tako da među njima nema poklapanja. Dokaži da se iz ovog kvadrata može izrezati kvadrat stranice 1 cm, tako da se u njemu ili na konturi nalaze bar tri plave tačke.

549. U ravni su plavom i crvenom olovkom nacrtane sve duži određene sa 250 tačaka, izabranih tako da prve tri predstavljaju temena jednakostraničnog trougla stranice 7 cm, a ostale su u tom trouglu i ne postoje tri koje su kolinearne. Dokaži da neke tri od ovih tačaka predstavljaju temena “plavog” ili “crvenog trougla”, stranica ne većih od 1 cm.

550. Pravougaonik, čije stranice imaju dužine 5 cm i 9 cm, podeljen je na 10 pravougaonih delova, tako da su dužine stranica manjih pravougaonika celi brojevi. Dokaži da među dobijenim delovima postoje bar dva pravougaonika iste površine.

551. U pravougaoniku stranica 30 cm i 50 cm proizvoljno je razbacano 750 tačaka koje se ne preklapaju. Dokaži da neke tri od ovih tačaka predstavljaju temena trougla površine manje od 1 cm^2.

552. Na datom "plavom krugu" crvenom olovkom nacrtani su neki, proizvoljni "crveni" lukovi, tako da je zbir ovih lukova manji od polovine kruga. Dokaži da na datom krugu postoji "plavi prečnik", tj. prečnik čiji su krajevi plave tačke, ma kako bili raspoređeni "crveni" lukovi.

553. Dat je kvadrat stranice 7 cm i 8 kvadrata stranice 3 cm. Može li se veliki kvadrat prekriti malim kvadratima, tako da su im stranice paralelne stranicama velikog kvadrata?

554. Postavi na sto 16 jednakih (okruglih) novčića, tako da se ne preklapaju i da svaki od njih dodiruje tri druga novčića.

555. Da li se u ravni može nacrtati:

a) 2000 b) 2001 c) 2002

podudarnih krugova, tako da svaki dodiruje tačno tri druga kruga?

556. Jednakostranični trougao stranice 2000 dm treba popločati pločicama oblika jednakostraničnog trougla stranice 1 dm, tako da se pločice ne preklapaju. Koliko je ovakvih pločica potrebno?

557. Šest tačaka u ravni, predstavljaju temena šestougla u kojem se nalaze još 663 različite tačke. Svih 669 tačaka se na proizvoljan način, dve po dve, spoje nepresecajućim dužima (tako da bilo koje dve duži nemaju zajedničku unutrašnju tačku, tj. bilo koje dve duži mogu imati zajedničko najviše jedno teme). Spajanje tačaka produžava se sve dok postoji mogućnost dobijanja novih nepresecajućih duži. Ako su npr. tačke A, B, C kolinearne i B je između A i C, tada ove tri tačke međusobno određuju samo dve nepresecajuće duži: AB i BC. Dokaži da ukupan broj nepresecajućih duži ne zavisi od redosleda njihovog povlačenja.

558. U ravni je izabrano 2000 tačaka, tako da među njima ne postoje tri koje pripadaju jednoj pravoj. Dokaži da možemo konstruisati 500 nepresecajućih četvorouglova, kojima su izabrane tačke temena.

559. Dat je krug prečnika 3 cm i u njemu nekoliko manjih krugova, tako da je zbir prečnika ovih manjih krugova jednak 25 cm. Dokaži da za svaku pravu p u ravni kruga postoji njoj paralelna prava q, koja seče bar 9 manjih krugova.

560. Dato je pet tačaka, tako da među njima ne postoje tri koje pripadaju jednoj pravoj. One se spajaju plavim i crvenim dužima, i to tako da ne postoji trougao čije su sve stranice iste boje. Dokaži:

a) Iz svake tačke polaze tačno dve plave i dve crvene duži.

b) Postoji zatvorena izlomljena linija, sastavljena od duži iste boje, koja sadrži sve date tačke.

Glava 9

PRIMERI TAKMIČENJA

- Programi matematičkih takmičenja
- Kengur bez granica
- Misliša
- Školska takmičenja
- Opštinska takmičenja
- Okružna takmičenja
- Državna takmičenja
- Republička takmičenja (u Jugoslaviji)
- Savezna takmičenja (u Jugoslaviji)

Primeri takmičenja

9.1. Programi matematičkih takmičenja

1) ŠKOLSKO TAKMIČENJE

Gradivo iz programa redovne i dodatne nastave u prethodnim razredima, logički i logičko-kombinatorni zadaci i još:

IV razred: Sabiranje i oduzimanje prirodnih brojeva. Problemski zadaci. Magični kvadrati. Prebrojavanje skupova tačaka, figura i brojevnih skupova.

V razred: Kocka i kvadar (površina i zapremina).* Skupovi i primene. Geometrijski objekti. Ugao. Prebrojavanje skupova tačaka, figura i brojevnih skupova.

VI razred: Deljivost i prosti brojevi. Osna simetrija. Celi brojevi. Racionalni brojevi. Sabiranje i oduzimanje racionalnih brojeva. Apsolutna vrednost. Problemski zadaci.

2) OPŠTINSKO TAKMIČENJE

Gradivo predviđeno za školsko takmičenje i još:

IV razred: Množenje prirodnih brojeva. Problemi presipanja, prevoženja, razmeštanja, merenja. Obim kvadrata, pravougaonika i odgovarajućih složenih figura. Jednačine.

V razred: Deljivost. Razlomci (osnovna svojstva i upoređivanje, sabiranje i oduzimanje razlomaka i odgovarajuće jednačine). Problemski zadaci.

VI razred: Trougao (uglovi, podudarnost i značajne tačke). Dirihleov princip.

* Po važećim nastavnim programima ne izučava se ni u IV, ni u V razredu.

3) OKRUŽNO TAKMIČENJE

Gradivo predviđeno za prethodne stupnjeve takmičenja i još:

IV razred: Deljenje prirodnih brojeva. Problemski zadaci sa jednačinama i dijagramima. Dešifrovanje računskih operacija. Kvadrat i pravougaonik (površina). Zadaci iz numeracije.

V razred: Množenje i deljenje razlomaka. Decimalni zapis broja (sabiranje i oduzimanje).

VI razred: Trougao (konstruktivni zadaci).

4) DRŽAVNO TAKMIČENJE

Gradivo predviđeno za prethodne stupnjeve takmičenja i još:

VI razred: Množenje i deljenje racionalnih brojeva. Procenti. Četvorougao (dokazni i konstruktivni zadaci). Nestandardni konstruktivni zadaci.

9.2. Kengur bez granica

A) Zadaci za 5-6 razred

Zadaci koji vrede 3 poena

1. U izrazu $3 \cdot 2006 = \blacktriangle + 2005 + 2007$ koji broj treba zapisati umesto $\blacktriangle$ da bi se dobilo tačno tvrđenje?

A) 2005 B) 2006 C) 2007 D) 2008 E) 2009

2. Šest karata je numerisano brojevima 309, 41, 5, 7, 68, 2. Koji je najmanji broj koji se može formirati ređanjem ovih karata jedne do druge?

A) 1234567890 B) 2341568709 C) 3097568245
D) 2309415687 E) 2309415678

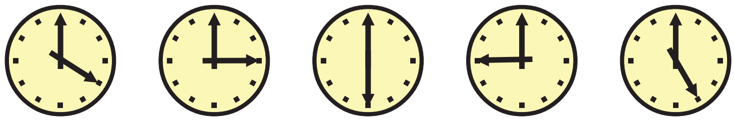
3. U školskoj trpezariji stolovi su kvadratnog oblika. Za svakom stranom stola može sedeti jedna osoba. Učenici su na zabavi spojili 10 ovakvih stolova, u jedan red, da bi dobili jedan veliki sto pravougaonog oblika. Koliko osoba može sedeti za ovim velikim stolom?

A) 20 B) 22 C) 30 D) 32 E) 40

4. U prodavnici hokejaške opreme za štap i pak treba platiti ukupno 1500 dinara. Za dva štapa i tri paka treba platiti ukupno 3300 dinara. Kolika je cena jednog paka?

A) 200 B) 300 C) 400 D) 500 E) 600

5. Na kojem satu kazaljke zaklapaju ugao od 150°?

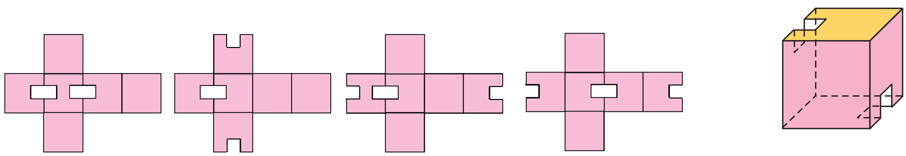


A) B) C) D) E)

6. Kuće na levoj strani jedne ulice imaju neparne brojeve od 1 do 39, a kuće na desnoj strani parne brojeve od 2 do 34. Koliko kuća ima u toj ulici?

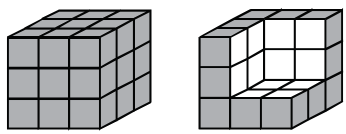
A) 8 B) 36 C) 37 D) 39 E) 73

7. Koja od ovih mreža sklapanjem formira telo sa desne strane?



A) B) C) D) E) nijedna

8. Da bi se obojila cela površina leve, sive kocke potrebno je 9 kg farbe. Koliko je kilograma farbe potrebno da se oboje bele površine desne kocke?

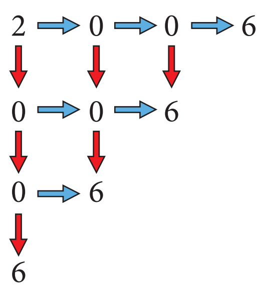


A) 2 B) 3 C) 4 i po D) 6 E) 7

9. Ana, njena sestra i majka pre 20 godina zajedno su imale 60 godina. Koliko godina zajedno imaju one danas?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 120

E) ne može se odrediti.



10. Na koliko načina broj 2006 možemo pročitati sa slike, ako se krećemo samo u smeru strelica?

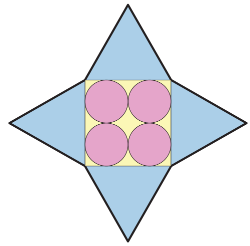
A) 12 B) 11 C) 10 D) 8 E) 6

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Proizvod dva cela broja je 72. Koji od navedenih brojeva ne može da bude zbir ta dva broja?

A) 73 B) 22 C) 27 D) 18 E) 24

12. Prikazana zvezda sastoji se od četiri jednakostranična trougla i kvadrata u koji su smeštena četiri kruga poluprečnika 5 cm. Krugovi se međusobno dodiruju i dodiruju stranice kvadrata. Koliki je obim ove zvezde?

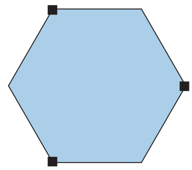


A) 40 B) 80 C) 120
D) 160 E) 240

13. Jednu tablu sa 10×10 polja treba obojiti na sledeći način: gornje levo polje crvenom bojom, dva njemu susedna polja belom bojom, u odnosu na njih tri susedna, međusobno dijagonalno smeštana polja plavom bojom, da bi se nastavilo bojiti u dijagonalnom pravcu: zelenom, ljubičastom, crvenom, belom, plavom, zelenom, ljubičastom itd. bojom. Koje boje će biti polje u donjem desnom uglu?

A) crvene B) bele C) plave D) zelene E) ljubičaste

14. Parče papira u obliku pravilnog šestougla, kao na crtežu, treba presaviti tako da se označena temena nađu u centru šestougla. Kog oblika će biti tako presavijen papir?

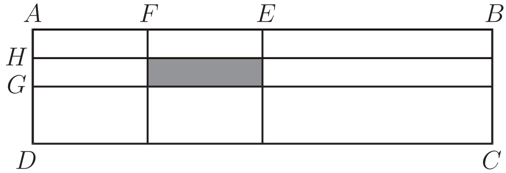


A) šestokraka zvezda B) dvanaestougao
C) šestougao D) kvadrat E) trougao

15. Razlika zbira prvih 1000 pozitivnih parnih i zbira prvih 1000 pozitivnih neparnih brojeva je

A) 1 B) 200 C) 500 D) 1000 E) 2000

16. Duža stranica pravougaonika sa crteža iznosi 16 cm, a kraća 4 cm. E je središte duži AB, F je središte duži AE, G je središte duži AD, a H je središte duži AG. Koliko cm^2 iznosi površina osenčenog pravougaonika?



A) 4 B) 16 C) 8 D) 2 E) 1

17. Koliki je rezultat navedenih operacija?

$$1111111111 - 111111111 + 11111111 - 1111111 + 111111 - 11111 + 1111 - 111 + 11 - 1?$$

A) 111111111 B) 1010101010 C) 100000000
D) 999999999 E) 0

18. Od svih dvocifrenih brojeva Ana je sabrala najmanji i najveći broj deljiv sa 3. Branko je od svih dvocifrenih brojeva sabrao najmanji i najveći broj koji nije deljiv sa 3. Za koliko je Anin zbir veći od Brankovog?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

19. "Kengur kocka" je kocka čije su tri strane crvene i tri strane bele boje. Koliko različitih "kengur kocki" možemo da napravimo?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Pera Ždera je kupio četiri kutije peciva: u jednoj su medenjaci (M), u drugoj štrudle sa jabukama (Š), u trećoj kiflice sa pekmezom (K), a u četvrtoj je baklava (B). Ove kutije poređao je na policu, i to tako da su medenjaci levo od kiflica, baklava je desno, i to pored kutije sa štrudlama, dok se na desnom kraju police nalazi poslastica koja nije kutija sa kiflicama. Koji je redosled kutija na polici?

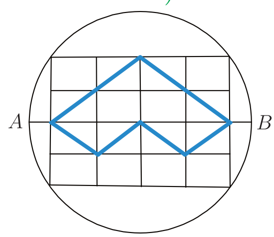
A) ŠKMB B) BŠKM C) KŠBM D) MKŠB E) BMKŠ

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Štap dužine 15 dm izlomljen je na koliko god je to moguće komada, različitih dužina. Dužina svakog komada u decimetrima je celi broj. Na koliko je komada razlomljen štap?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22. Prečnik kruga, na slici AB, iznosi 10 cm. Koliki je obim figure, koja je označena debelom plavom linijom, ako su pravougaonici na slici podudarni?



A) 8 B) 16 C) 20

D) 25 E) 30

23. Nastavnica u svojoj ruci skriva jedan predmet, koji predstavlja figuru u ravni. Ipak, voljna je da kaže neke informacije o toj figuri:

1. ako je plava, onda je krug.
2. ako je kvadrat, onda je crvene boje.
3. ako je žuta, onda je kvadrat.
4. figura je ili kvadrat ili krug.
5. ili je žuta ili plava.

Šta sa sigurnošću možemo tvrditi o toj figuri?

A) crvena je B) crveni krug C) žuti krug

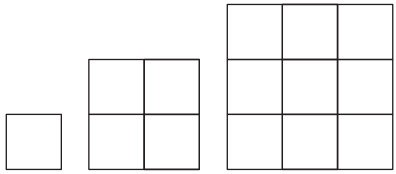
D) plavi krug E) plavi kvadrat

24. Data je duž AB, dužine 2006 dužinskih jedinica. Tačke C, D i E raspoređene su na duži AB, tako da duž AE čini dve trećine duži AB. Duži

AC i BD su dužine po 1111 dužinskih jedinica. Šta je tačan raspored tih tačaka?

A) $ACDEB$ B) $ACEDB$ C) $AEDCB$ D) $ADECB$ E) $ADCEB$

25. Sanja je od 4 šibice napravila kvadrat. Zatim ga je dopunjavala kao na crtežu, formirajući sve veće i veće kvadrate. Koliko je šibica potrebno da bi se kvadrat dimenzija 30×30 dopunio do kvadrata dimenzija 31×31?

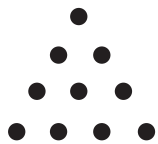


A) 124 B) 148 C) 61 D) 254 E) 120

26. Na jednoj dugoj papirnoj traci zapisali smo prvih 2006 pozitivnih celih brojeva. Jovan je prvo podvukao sve parne brojeve, zatim sve deljive sa 3 i na kraju sve one koji su deljivi sa 4. Koliko je brojeva podvučeno tačno dva puta?

A) 1003 B) 1002 C) 501 D) 334 E) 167

27. Koliko najmanje tačkica treba obrisati sa crteža, tako da nikoje tri preostale tačkice ne mogu da budu temena jednakostraničnog trougla?

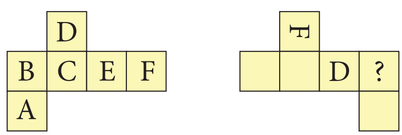


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

28. Aca i Pera su na jednom izletu založili vatru, sa namerom da prže slaninu. Aca je doneo 8, a Pera 7 drvenih trupaca, jednakih veličina. Videći vatru, Dejan ih je zamolio da isprže i njegovo parče slanine. U znak zahvalnosti Dejan im je dao bonbone, ukupno 30 komada. Za koliko više bonbona treba dati Aci nego Peri?

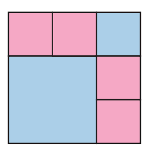
A) 14 B) 10 C) 2 D) 4 E) 6

29. Na crtežu su prikazane dve mreže, od kojih želimo da napravimo dve jednake kocke. Koje slovo treba upisati umesto upitnika?



A) A B) B C) C D) D E) E

30. Na koliko se načina brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6 mogu upisati u kvadratiće na crtežu, tako da razlika brojeva iz dva susedna kvadratića ne bude 3? Levi donji veliki i gornji desni mali ne smatraju se susednim kvadratićima.



A) $3 \cdot 2^5$ B) 3^6 C) 6^3 D) $2 \cdot 3^5$ E) $3 \cdot 5^2$

B) Zadaci za 5-6. razred

Zadaci koji vrede 3 poena

1. Šta je najmanje?

A) $2+0+0+8$ B) $200:8$ C) $2\cdot0\cdot0\cdot8$ D) $200-8$ E) $8+0+0-2$

2. Čime treba zameniti  da bi važilo:  ·  $= 2\cdot2\cdot3\cdot3$?

A) 2 B) 3 C) $2\cdot3$ D) $2\cdot2$ E) $3\cdot3$

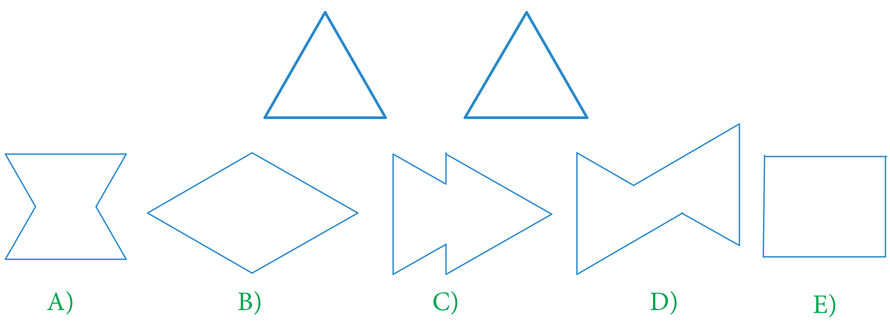
3. Milan voli da množi sa 3, Petar voli da dodaje 2, a Nikola voli da oduzima 1. Kojim redom oni treba da izvrše svoje omiljene operacije da bi od broja 3 dobili broj 14?

A) MPN B) PMN C) MNP D) NMP E) PNM

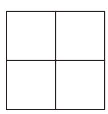
4. Čime treba zameniti znak ♣ da bi jednakost $1+1♣1-2=100$ bila tačna?

A) $+$ B) $-$ C) $\cdot$ D) 0 E) 1

5. Kristina se igra sa dve date trougaone pločice. Ona stavlja jednu pločicu pored druge ili preko nekog njenog dela, tako da obe budu na komadu papira. Zatim ona na papiru crta konturu dobijene figure. Samo jednu od datih kontura ona ne može dobiti. Koju?



6. Brojevi 2, 3, 4 i još jedan broj upisani su u polja tabele 2×2. Poznato je da je zbir brojeva u prvoj vrsti jednak 9, a u drugoj vrsti 6. Koji je broj još upisan u tabelu?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

7. U gusarskoj školi svaki đak mora da sašije crno-belu zastavu. Uslov je da crna boja mora prekrivati tačno tri petine zastave. Koliko od sledećih zastava zadovoljava taj uslov?

A) Nijedna B) Jedna C) Dve D) Tri E) Četiri

8. Pre grudvanja Pavle je pripremio nekoliko grudvi. Tokom grudvanja on je napravio 17 novih grudvi i bacio je 21 grudvu na druge dečake. Posle grudvanja njemu je ostalo još 15 grudvi. Koliko grudvi je Pavle pripremio pre grudvanja?

A) 53 B) 33 C) 23 D) 19 E) 18

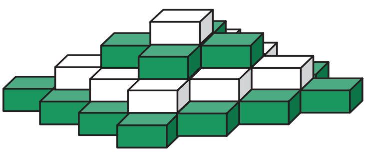
9. Na prvoj slici desno dat je mali deo tablice množenja. Na drugoj slici dat je drugi deo u kome, nažalost, neki brojevi nedostaju. Koji broj treba da bude u kvadratu sa znakom pitanja?

×	4	3
5	20	15
7	28	21

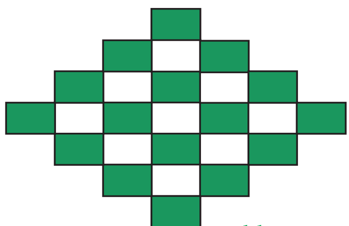
×		
	35	63
	30	?

A) 54 B) 56 C) 65 D) 36 E) 42

10. U prodavnici igračaka istaknut je četvorospratni “cvet od cigli” (slika 1). Svaki sprat je napravljen od cigli iste boje. Na slici 2 je dat prikaz tog “cveta” odozgo. Koliko belih cigli je potrebno da se napravi ovakav “cvet”?



Slika 1



Slika 2

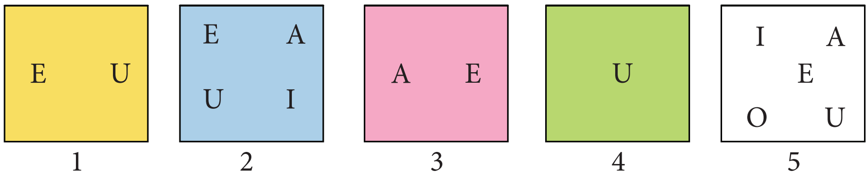
A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Od koliko jednakih palidrvaca nije moguće formirati trougao? (Palidrvca se ne mogu lomiti!)

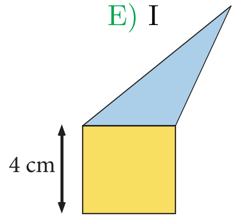
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

12. Dato je 5 kutija i svaka od njih sadrži neke kartice označene slovima A, E, I, O i U kao na slici. Petar želi da izvadi kartice iz svake kutije tako da na kraju u svakoj kutiji bude po jedna kartica i da u različitim kutijama budu kartice označene različitim slovima. Koja kartica ostaje u 5. kutiji?



A) Nemoguće je B) A C) U D) O E) I

13. Trougao i kvadrat na slici imaju isti obim. Koliki je obim cele figure (petougla)?



A) 12 cm B) 24 cm C) 28 cm

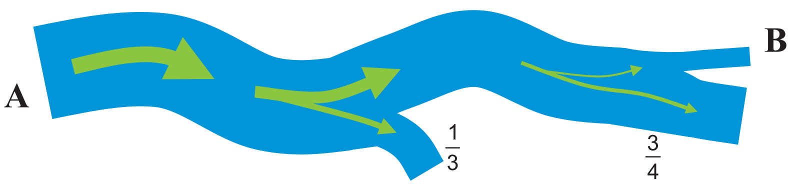
D) 32 cm E) Zavisi od dimenzija trougla.

14. Marija ima 6 boca čije su zapremine 16, 18, 22, 24, 32 i 34 ml. Neke od njih su napunjene sirupom od pomorandže, a neke sirupom od višnje, dok je jedna boca prazna. Ukupna zapremina sirupa od pomorandže dva puta je veća od zapremine sirupa od višnje. Kolike su zapremine boca u kojima je sirup od višnje?

A) 16 i 18 ml B) 16 i 22 ml C) 16 i 24 ml

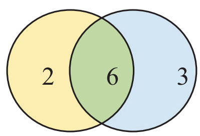
D) 18 i 22 ml E) 18 i 24 ml

15. Reka počinje da teče iz tačke A. U svom toku ona se deli na dva rukavca. U jedan rukavac odlazi $\frac{1}{3}$ vode, a u drugi ostatak. Zatim se drugi rukavac u svom toku deli na dva, jedan u koji odlazi $\frac{3}{4}$ vode iz rukavca i drugi u koji odlazi ostatak. Na slici je prikazana opisana situacija. Koji deo od ukupne količine vode iz reke protiče kroz tačku B?



A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{11}{12}$ D) $\frac{1}{6}$ E) Ne može se odrediti

16. Gađajući dvema strelicama prikazanu metu koliko različitih rezultata možemo postići? (Moguć je i promašaj.)

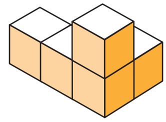


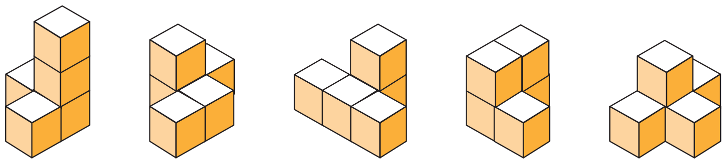
A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

17. Radmila je želela da spakuje sve svoje diskove na jednu policu, ali trećina diskova nije mogla da stane. Te diskove koji nisu stali na policu spakovala je u tri kutije. Stavila je sedam diskova u svaku kutiju, ali su joj ostala još dva diska, koja nisu stala u kutije, pa ih je ostavila na stolu. Koliko diskova ima Radmila?

A) 21 B) 23 C) 45 D) 69 E) 63

18. Koju od “građevina” A),..., E) – svaka se sastoji od tačno 5 kocki – ne možeš dobiti iz “građevine” date desno, ako ti je dozvoljeno da pomeriš samo jednu kocku?





A) B) C) D) E)

19. Tačke A, B, C i D su obeležene na pravoj u nekom poretku. Zna se da je $AB = 13$, $BC = 11$, $CD = 14$ i $DA = 12$. Koliko je rastojanje između dve najudaljenije tačke?

A) 14 B) 38 C) 50 D) 25 E) drugi odgovor

20. Danas mogu da kažem: “Za dve godine moj sin će imati dva puta više godina nego što je imao pre dve godine. A za tri godine moja ćerka će imati tri puta više godina nego što je imala pre tri godine.” Šta je tačno?

A) Sin je jednu godinu stariji od ćerke.

B) Ćerka je jednu godinu starija od sina.

C) Oni imaju isto godina.

D) Sin je dve godine stariji od ćerke.

E) Ćerka je dve godine starija od sina.

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Pet znakova predstavljaju pet različitih cifara.

$@ + @ + @ = \ast$ $\# + \# + \# = \&$ $\ast + \& = \frown$

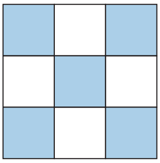
Koju cifru predstavlja znak $\frown$?

A) 0 B) 2 C) 6 D) 8 E) 9

22. Tri prijatelja žive u istoj ulici: doktor, inženjer i muzičar. Njihova imena su: Stefan, Rade i Filip. Doktor nema ni sestru ni brata. On je najmlađi među prijateljima. Filip je stariji od inženjera i oženjen je Stefanovom sestrom. Imena doktora, inženjera i muzičara su sledeća:

A) Stefan, Rade, Filip B) Filip, Stefan, Rade C) Rade, Stefan, Filip

D) Rade, Filip, Stefan E) Stefan, Filip, Rade

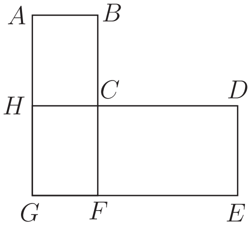


23. Pretpostavi da putuješ preko kvadratnih oblasti prikazanih na slici, tako da svaki kvadrat posetiš tačno jednom. Odakle moraš da kreneš, ako možeš da se krećeš samo horizontalno i vertikalno, ali ne i dijagonalno?

A) Iz centralnog kvadrata. B) Iz ugaonog kvadrata.

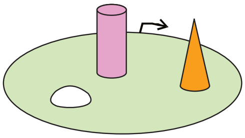
C) Iz neobojenog kvadrata. D) Iz obojenog kvadrata.

E) Iz bilo kog kvadrata.

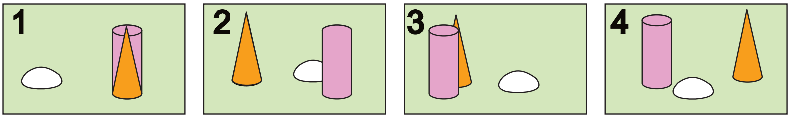


24. Slika prikazuje plan grada. Postoje četiri kružne autobuske marš-rute u gradu. Autobus No1 sledi marš-rutu $C-D-E-F-G-H-C$, koja je dugačka 17 km. Autobus No2 ide marš-rutom $A-B-C-F-G-H-A$ dugom 12 km. Marš-ruta autobusa No3 je $A-B-C-D-E-F-G-H-A$, i ona je 20 km. Autobus No4 ide $C-F-G-H-C$. Koliko je dugačka njegova marš-ruta?

A) 5 km B) 8 km C) 9 km D) 12 km E) 15 km



25. Bojana je obišla oko parka, polazeći iz obeležene tačke u smeru koji pokazuje strelica. Ona je napravila 4 snimka. Kojim redosledom je ona napravila snimke?



A) 2431 B) 4213 C) 2143 D) 2134 E) 3214

26. U kutiji se nalazi 7 karata. Brojevi od 1 do 7 ispisani su na ovim kartama tako da se na svakoj karti nalazi tačno jedan broj. Prvi mudrac slučajnim izborom uzima 3 karte iz kutije, a zatim drugi mudrac uzima 2 karte (2 karte ostaju u kutiji). Nakon toga prvi mudrac kaže drugom: "Znam da je zbir brojeva na tvojim kartama paran." Zbir brojeva na kartama prvog mudraca jednak je

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 D) 15

27. Stari TV ekran ima stranice u odnosu 4 : 3, a novi ima stranice u odnosu 16 : 9. Imamo film koji ispunjava tačno sve ekrane koji imaju odnos

16 : 9 i želimo da ga gledamo na starom 4 : 3 ekranu. Ako film ispunjava tačno širinu ekrana, onda je deo površine starog ekrana koji nije iskorišćen jednak

Odnos 16 : 9 Odnos 4 : 3

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) Zavisi od veličine ekrana

28. U svakom dvocifrenom broju cifra jedinica oduzeta je od cifre desetica. Koliki je zbir svih rezultata?

A) 90 B) 100 C) 55 D) 45 E) 30

29. U jednakosti KAN + GA = ROO svako slovo označava neku cifru (različita slova za različite cifre, ista slova za iste cifre). Odredi RN − KG.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 21 E) 22

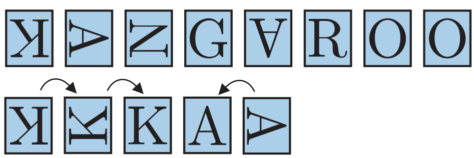
30. Koliko se najviše cifara može obrisati iz 1000-cifrenog broja 20082008 . . . 2008, tako da zbir preostalih cifara bude 2008?

A) 260 B) 510 C) 746 D) 1020 E) 130

C) Zadaci za 5–6. razred

Zadaci koji vrede 3 poena

1. Aleksa je napisao reč KANGAROO pomoću kartica koje pokazuju po jedno slovo. Nažalost neka slova su okrenuta pritiskom na karticu (vidi sliku). Pritiskajući dva puta Aleksa može da ispravi slovo K, a pritiskajući jednom može da ispravi slovo A ili slovo N.



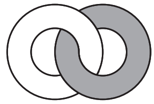
Koliko puta Aleksa treba da pritisne kartice da bi sva slova bila pravilno okrenuta?

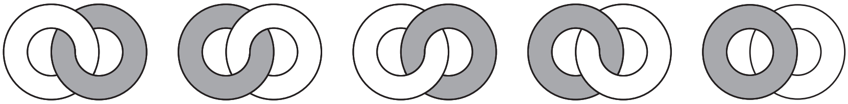
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. Torta je teška 900 g. Petra je isekla tortu na 4 dela. Najveći deo je težak koliko sva tri ostala dela zajedno. Koliko teži najveći deo?

A) 250 g B) 300 g C) 400 g D) 450g E) 600 g

3. Dve velike alke, siva i bela, spojene su jedna za drugu. Petar stoji ispred alki. Ono što on vidi prikazano je na slici desno. Pavle se nalazi iza alki. Šta on vidi?





A) B) C) D) E)

4. U sabiranju prikazanom na slici neke cifre su zamenjene zvezdama. Koliki je zbir cifara koje nedostaju?

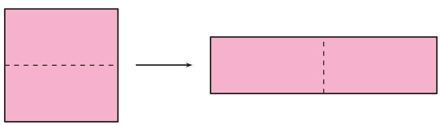
$$\begin{array}{ccc} 1 & \bigstar & 2 \\ 1 & \bigstar & 3 \\ 1 & \bigstar & 4 \\ \hline 3 & 0 & 9 \end{array}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 10

5. Kolika je razlika najmanjeg petocifrenog i najvećeg četvorocifrenog broja?

A) 1 B) 10 C) 1111 D) 9000 E) 9900

6. Kvadrat obima 48 cm rasečen je na dva dela od kojih je napravljen pravougaonik. Odredi obim tog pravougaonika.

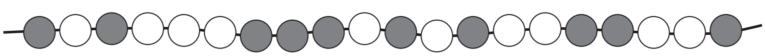


A) 24 cm B) 30 cm C) 48 cm D) 60 cm E) 72 cm

7. Katarina ima 38 palidrvaca od kojih pravi trougao i kvadrat. Svaka stranica trougla sastoji se od 6 palidrvaca. Koliko palidrvaca ima svaka stranica kvadrata?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8. Ogrlica na slici napravljena je od belih i sivih perli.



Vukašin hoće da skine 5 sivih perli. On može da skida perle sa bilo koje strane ogrlice, pa mora da skine, takođe, i neke bele perle. Koji je najmanji broj belih perli koje Vukašin mora da skine?

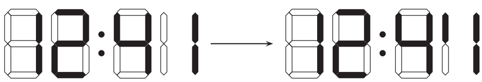
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. Marko je učestvovao u trci koja se sastojala iz 5 krugova. Vremena kada je Marko prošao kroz startnu tačku data su u tabeli. Koji krug je Marko prošao za najkraće vreme?

	Vreme
Start	09.55
Nakon 1. kruga	10.26
Nakon 2. kruga	10.54
Nakon 3. kruga	11.28
Nakon 4. kruga	12.03
Nakon 5. kruga	12.32

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4. E) 5.

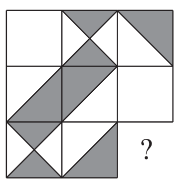
10. Brankov digitalni sat ne radi pravilno. Tri horizontalne linije za krajnje desnu cifru se ne prikazuju. U momentu kada je Branko pogledao na sat vreme se promenilo od onog prikazanog na levom satu na slici, na vreme prikazano na desnom satu. Koje vreme je tada trebalo da bude prikazano na desnom satu?

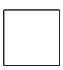
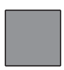
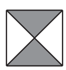
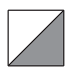


A) 12.40 B) 12.42 C) 12.44 D) 12.47 E) 12.49

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Koju pločicu treba dodati tako da ukupna površina sivih delova na slici bude jednaka ukupnoj površini belih delova?



A)  B)  C)  D)  E) nemoguće je

12. Kosta i Vuk su krenuli da hodaju iz iste tacke. Kosta je išao 1 km na sever, 2 km na zapad, 4 km na jug i na kraju 1 km na zapad. Vuk je isao 1 km na istok, 4 km na jug i 4 km na zapad. Koja od sledećih mogućnosti mora biti poslednji deo Vukovog puta da bi došao u istu tačku u kojoj je Kosta?

A) već su u istoj tački B) 1 km na sever
C) 1 km na severo-zapad D) više od 1 km na severo-zapad
E) 1 km na zapad

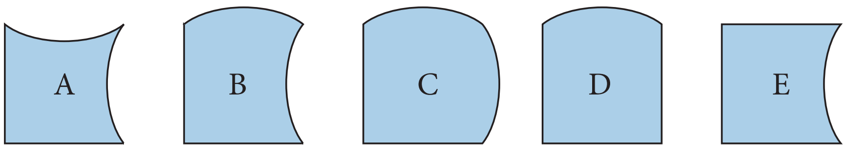
13. U letnjem kampu 7 učenika jede sladoled svakog dana, a 9 učenika jede sladoled svakog drugog dana, dok ostali učenici uopšte ne jedu sladoled. Juče je 13 učenika jelo sladoled. Koliko učenika jede sladoled danas?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) nemoguće je odrediti

14. Kenguri A, B, C, D i E sede tim redom u smeru kretanja kazaljke na satu oko okruglog stola. Tačno kada se čuje zvono, svi kenguri sem jednog zamene mesto sa svojim susedom. Nakon toga, raspored kengura počev od kengura A, u smeru kretanja kazaljke na satu, je A, E, B, D, C. Koji kengur se nije pomerio?

A) A B) B C) C D) D E) E

15. Kvadrat se može formirati korišćenjem 4 dela od 5 datih na slici. Koji deo ostaje neupotrebljen?



A) A B) B C) C D) D E) E

16. Prirodni broj ima tri cifre. Kada se njegove cifre pomnože dobija se 135. Koji rezultat se dobija ako se njegove cifre saberu?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

17. Restoran ima 16 stolova, od kojih svaki ima ili 3 ili 4 ili 6 stolica. Za sve stolove koji imaju 3 ili 4 stolice ukupno može da sedne 36 osoba. Koliko u restoranu ima stolova sa 3 stolice, ako se zna da u restoranu mogu da sednu ukupno 72 osobe?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

18. Tačke A, B, C, D, E i F nalaze se tim redom na pravoj. Znamo da je $AF = 35$, $AC = 12$, $BD = 11$, $CE = 12$ i $DF = 16$. Kolika je dužina duži BE?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

19. Julija je podelila svoje kamenčiće u grupe. Nakon što ih je podelila u grupe od po 3, ostala su joj još 2 kamenčića. Onda ih je podelila u grupe od po 5 i opet su joj ostala 2 kamenčića. Koliko najmanje kamenčića ona treba da doda da joj ne bi ostao nijedan kada ih podeli bilo u grupe od po 3 bilo u grupe od po 5?

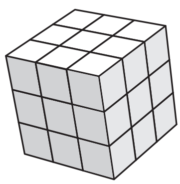
A) 3 B) 1 C) 4 D) 10 E) 13

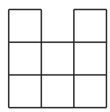
20. Strane kocke obeležene su brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Strane obeležene brojevima 1 i 6 imaju zajedničku ivicu. Isto važi i za strane obeležene brojevima 1 i 5, strane obeležene brojevima 1 i 2, strane obeležene brojevima 6 i 5, strane obeležene brojevima 6 i 4 i strane obeležene brojevima 6 i 2. Kojim brojem je obeležena strana suprotna strani obeleženoj brojem 4?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) nemoguće je odrediti

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Kocka $3 \times 3 \times 3$, na slici levo, napravljena je od 27 malih kocki. Koliko malih kocki treba da skloniš tako da kada gledaš sa desne strane, odozgo i spreda vidiš ono sto je prikazano na slici desno?





A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

22. Na disku ima 5 pesama: pesma A traje 3 min, pesma B 2 min 30 s, pesma C 2 min, pesma D 1 min 30 s i pesma E 4 min. Ovih 5 pesama su snimljene u redosledu A, B, C, D, E i emituju se u petlji bez prekida. Kada je Adam izašao iz kuće emitovana je pesma C. On se vratio kući posle tačno jednog sata. Koja pesma je emitovana kada se Adam vratio kući?

A) A B) B C) C D) D E) E

23. Dejan je upisao brojeve od 1 do 9 u polja tabele 3×3. Počeo je sa brojevima 1, 2, 3 i 4 kao na slici. Ispostavlja se da za polje sa brojem 5 važi da je zbir brojeva u susednim poljima (susedna polja su ona koja imaju zajedničku stranicu) jednak 9. Koliki je zbir brojeva u poljima susednim polju sa brojem 6?

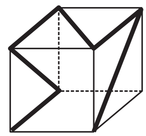
1		3
2		4

A) 14 B) 15 C) 17 D) 28 E) 29

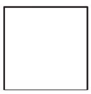
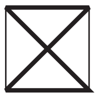
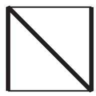
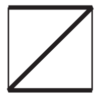
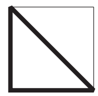
24. S jedne strane Park avenije je 60 stabala. Svako drugo drvo je javor, a svako treće ili lipa ili javor. Sva ostala stabla su breze. Koliko ima breza?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 24 E) 30

25. Crna traka je zalepljena na providnu plastičnu kocku kao na slici.



Koja od sledećih slika ne prikazuje kocku iz bilo koje perspektive (šest “perspektiva”)?

A)  B)  C)  D)  E) 

26. Kralj je putovao sa svojim izaslanicima od dvorca do letnje palate brzinom od 5 km/h. Na svaki sat vremena kralj šalje izaslanika nazad u dvorac i on putuje brzinom od 10 km/h. Koliko vremena prođe između dolaska dva uzastopna izaslanika u dvorac?

A) 30 min B) 60 min C) 75 min D) 90 min E) 120 min

27. Na tabli su napisana tri jednocifrena broja. Aleksa ih je sabrao i dobio 15. Zatim je obrisao jedan od brojeva i na njegovo mesto napisao broj 3. Zatim je Ratko pomnožio tri broja napisana na tabli i dobio 36. Koji broj je Aleksa mogao da obriše?

A) 6 ili 7 B) 7 ili 8 C) samo 6 D) samo 7 E) samo 8

28. Zec Vasa voli da jede kupus i šargarepu. Tokom jednog dana on pojede ili 9 šargarepa ili 2 kupusa ili 1 kupus i 4 šargarepe. Međutim, nekog dana jede samo travu. Tokom poslednjih 10 dana Vasa je pojeo ukupno 30 šargarepa i 9 kupusa. Koliko je od ovih 10 dana jeo samo travu?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

29. Grupa ljudi sastoji se od kraljeva, lažljivaca i kmetova. Svaki kralj uvek govori istinu, svaki lažljivac uvek laže, a svaki kmet naizmenično govori istinu i laže. Svima su postavljena ista pitanja. Na pitanje: “Da li si ti kralj?”, njih 17 je odgovorilo potvrdno. Na pitanje: “Da li si ti kmet?”, njih 12 je odgovorilo potvrdno. Koliko kraljeva ima u grupi?

A) 4 B) 5 C) 9 D) 13 E) 17

30. Baka ima 10 unučadi i svi imaju različiti broj godina. Alisa je najstarija. Ako je zbir godina svih unučadi 180, koliko najmanje godina može imati Alisa?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

9.3. Mislиša

D) Zadaci za 5. razred

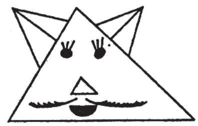
Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. Jasna ima dve jabuke, dve polovine jabuke i četiri četvrtine jabuke. Koliko jabuka ima Jasna?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

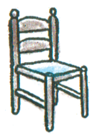
2. *Stari zadatak*. Guska i po, 6 dinara. Koliko koštaju 2 guske?

A) 14 B) 12 C) 10
D) 9 E) 8



3. Koliko na ovoj slici vidiš trouglova?

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4



4. U svakom uglu sobe nalazi ce po jedna stolica. Na svakoj stolici sedi po jedan dečak. Svaki dečak vidi 3 dečaka. Koliko u toj sobi ima dečaka?

A) 3 B) 4 C) 8
D) 9 E) 12

5. Koliko elemenata ima skup T koji predstavlja uniju skupova

$$R = \{1, 2, 3\} \quad \text{i} \quad S = \{3, 4, 5\}?$$

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6. Proizvod dva broja je 15 puta veći od prvog činioca. Koliki je drugi činilac?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 150 E) ne može se odrediti

7. Ivica i Marica danas slave rođendan. Zbir njihovih godina je 11, a proizvod 24. Koliko godina je imala Marica kada se Ivica rodio?

A) 2 B) 3 C) 5
D) 6 E) 8

8. Koliko ovde ima tačno rešenih zadataka:

a) $2 + 8 \cdot 2 = 18$

b) $(2 + 8) \cdot 2 + 8 = 100$

c) $0,9 + 0,10 = 0,19$

d) $0,1 \cdot 0,001 = 0,0001$

e) $\frac{1}{8} + 2\frac{7}{8} = 3$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Neuredna Maja ima u fioci 6 belih, 8 crvenih i 10 roze čarapa. Koji je broj čarapa koje Maja treba zatvorenih očiju uzeti iz fioke, da bi bila sigurna da će moći obuti par čarapa iste boje?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

10. Koji od sledećih razlomaka ima najveću vrednost:

I) $\dfrac{2+0+0+8}{2+0+0+8}$; II) $\dfrac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 8}{2+0+0+8}$;

III) $\dfrac{2008}{2+0+0+8}$; IV) $\dfrac{2+0+0+8}{2009}$.

A) I razlomak B) II razlomak C) III razlomak

D) IV razlomak E) svi imaju istu vrednost

11. Ivan i Rade sakupljaju sličice poznatih sportista. Jednog dana zaključili su da su sakupili jednak broj sličica. Rade je za rođendan poklonio Ivanu polovinu svojih sličica. Ivan je posle toga imao više sličica nego Rade. Koliko puta više?

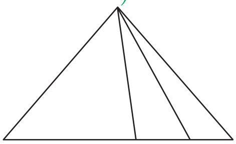
A) 2 puta B) 3 puta C) 4 puta D) 5 puta

E) zavisi od toga koliko su sličica imali na početku

12. Koliko ima dvocifrenih prirodnih brojeva kod kojih proizvod cifara nije veći od 3?

A) 5 B) 8 C) 11 D) 12 E) 14

13. Koliko na ovoj slici vidiš trouglova?



A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

14. Kada su kosci pokosili 12 ari jedne livade, do polovine im je ostalo još $\frac{3}{8}$ livade. Koliko ari ima ta livada?

A) 96 B) 36 C) 48 D) 24 E) 52

15. Trećina i po od sto koliko je to?

A) 33 B) 33,33... C) 50 D) 66 E) 66,6

16. Koji od navedenih skupova ima najviše elemenata:

$$P = \{1, 2, \{1, 2\}\}, \quad Q = \{0, 1, 2, \{1, 2\}\},$$
$$R = \{1, 2, 3\}, \quad S = \{5\}, \quad T = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}\}?$$

A) P B) Q C) R D) S E) T

17. Dok su čekali red da uđu u muzej, nastavnik je zamolio đake da stoje po troje u jednom redu. Vesna, Ivana i Ana su primetile da je njihova trojka sedma od početka kolone, a peta od kraja kolone. Koliko je učenika toga dana nastavnik poveo u muzej?

A) 18 B) 21 C) 24 D) 36 E) 33

Zadaci koji ce ocenjuju ca 5 bodova

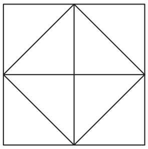
18. Iz Lukine knjige ispalo je redom nekoliko listova. Na prvoj stranici koja je ispala stoji broj 215, a na poslednjoj broj koji se piše ciframa 1, 2 i 3. Koliko je listova ispalo iz Lukine knjige?

A) 24 B) 49 C) 54 D) 96 E) 106

19. Koliko je $100-(100-(100-(100-(100-99))))$?

A) 1 B) 95 C) 96 D) 99 E) 100

20. Središta stranica velikog kvadrata spojena su međusobno kao na slici desno. Koliko na tako dobijenoj slici vidiš pravih uglova?



A) 20 B) 16 C) 14

D) 10 E) 8

21. Da bi prešao put između dve oaze u pustinji, jednom beduinu je potrebno 2 sata. Ali, vrućina je velika i on posle svakih 20 minuta mora da popije po 3 dl vode. Nevolja je u tome što vode ima samo u oazama. Koliko najmanje vode treba taj beduin da ponese da bi uspešno savladao put između dve oaze?

A) 12 dl B) 15 dl C) 18 dl D) 21 dl E) 3 dl

22. U sledećem “računu” istim slovima odgovaraju iste cifre, a različitim slovima različite cifre:

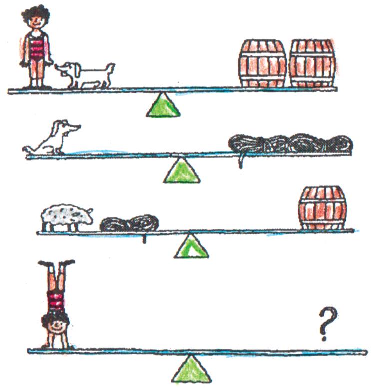
$$\mathrm{VODA} + \mathrm{VODA} + \mathrm{VODA} + \mathrm{VODA} = \mathrm{DAVI}$$

Dešifruj taj račun, a zatim odgovori koju cifru zamenjuje slovo A i koliki je zbir cifara u “broju” VODA.

A) $A=4$; zbir cifara je 13 B) $A=4$; zbir cifara je 9

C) $A=5$; zbir cifara je 11 D) $A=6$; zbir cifara je 11

E) $A=2$; zbir cifara je 6



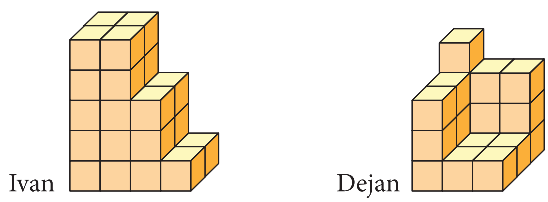
23. Slike pokazuju da su izvršena 4 merenja na terazijama. Prva slika pokazuje da su dečak i pas u ravnoteži sa 2 bureta. Druga slika pokazuje da je pas u ravnoteži sa 2 konopca. Treća slika pokazuje da su 1 ovčica i 1 konopac u ravnoteži sa jednim buretom. Koliko ovčica treba da stoji na mestu “?” da bi i četvrte terazije bile u ravnoteži?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

24. Na klupi u parku sedi šest dečaka. Posmatrajući ih s leva na desno vidimo da između Pere i Marka sede Kosta i još jedan dečak. Između Ranka i Koste sede Bora i još jedan dečak. Između Bore i Vase sede Pera i još jedan dečak. Vasa ne sedi s kraja. Kojim redom sede dečaci na klupi? (Napiši početna slova njihovih imena bilo s leva u desno, bilo s desna u levo.)

A) R, B, V, P, K, M; B) B, K, R, P, V, M;
C) R, B, P, K, M, V; D) P, R, B, V, M, K;
E) R, B, P, K, V, M.

25. Ivan i Dejan su od jednakih kockica napravili figure koje vidite na slici. Zatim su se predomislili i rešili da od svih ovih kockica, naprave jednu veliku (zajedničku) kocku. Koliko im još najmanje kockica nedostaje?



A) nedostaje 8 B) nedostaje 10 C) nedostaje 12
D) nedostaje 14 E) nedostaje 16

E) Zadaci za 5. razred

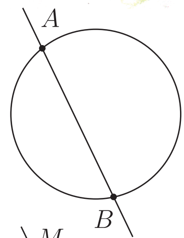
Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. Koliko je: $2013 + 2 \cdot 2013 + 3 \cdot 2013$?

A) 0 B) 2013 C) 12036 D) 12052 E) 12078

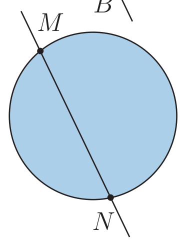
2. *Evo jedne male šale.* Hogar je za doručak pojeo pola pečenog praseta, a za ručak polovinu ostatka od pečenog praseta. Koji deo pečenog praseta mu je ostao za večeru?

A) polovina B) petina C) trećina
D) četvrtina E) ne može se odrediti



3. Šta je zajedničko za pravu i kružnicu na ovoj slici?

A) tačka A B) tačka B C) tačke A i B
D) duž AB E) prava AB

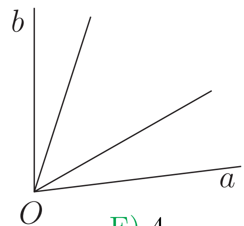


4. Šta je zajedničko za pravu i krug na ovoj slici?

A) tačke M i N B) kružnica
C) deo kružnice D) tačke između M i N
E) duž MN

5. Ako je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{4, 1, 3, 2\}$, koliko elemenata ima skup $A \cup B$?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4



6. Koliko oštrih uglova ima na ovoj slici?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

7. Koliko u skupu $S = \{9, 13, 23, 27, 33, 38, 129\}$ ima brojeva deljivih sa 3?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

8. *Zadatak naših baka.* Zamisli jedan broj. Drug ti pokloni još toliko, ja ti poklonim još 10. E, sad “baci pola u vodu”, a zatim vrati drugu njegovo. Koliko ti je ostalo?

(Mala pomoć: “baci pola u vodu” znači podeli sa dva.)

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Koliko se ukupno trocifrenih brojeva može dobiti stavljajući cifre 5, 8 ili 9 umesto $*$ u broju $4 * *$? Cifre u broju mogu se ponavljati.

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

10. Među trocifrenim brojevima koji se pišu istim ciframa, koliko ima onih koji su deljivi sa 3?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

11. Ako Ana kupi svesku ostaće joj 260 dinara od sume koju je imala, a ako kupi flomaster ostaće joj 380 dinara. Koliko je novca Ana imala, ako se zna još i to da je sveska dva puta skuplja od flomastera?

A) 360 B) 440 C) 480 D) 500 E) 540

12. Jelica je napisala redom sve brojeve prve stotine, tj. sve brojeve od 1 do 100. Koliko je puta pri tome Jelica napisala cifru 1?

A) 10 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

13. U jednom odeljenju ima 27 učenika. Zbir njihovih godina je 267. Koliki će biti zbir njihovih godina tačno kroz godinu dana?

A) 274 B) 284 C) 294 D) 364

E) Nemoguće je izračunati

14. Pored jedne pravolinijske staze bilo je raspoređeno 12 zastavica. One su se nalazile na jednakim rastojanjima jedna od druge. Sportista Joca je krenuo od prve zastavice i do četvrte zastavice stigao za 12 sekundi. Koliko je vremena potrebno sportisti Joci da stigne od prve do poslednje zastavice, ako sve vreme trči istom brzinom?

A) 48 B) 44 C) 36 D) 32 E) 24

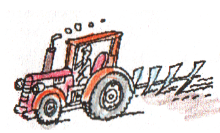
15. Zbir dva broja je 24. Kada se veći podeli manjim dobija se količnik 3 i ostatak 4. Koji su to brojevi?

A) 8 i 16 B) 7 i 17 C) 6 i 18 D) 3 i 21 E) 5 i 19

16. Koliko prostih delilaca ima broj 2013 u skupu prirodnih brojeva?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 1

17. Kada je poorao polovinu njive, traktorista je shvatio da treba poorati još osminu njive i još 60 ari da bi cela njiva bila poorana. Kolika je površina njive koju traktorista treba da poore?



A) 110 ari B) 120 ari C) 150 ari D) 160 ari E) 1 hektar

Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. Luka je na kružnici k označio 5 tačaka: L, O, P, T, A. Zatim je nacrtao sve duži kojima su to krajnje tačke. Na koliko su delova sve te dužu podelile odgovarajući krug?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

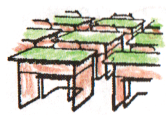
19. U jednoj grupi ima 12 učenika. Svaki od njih uči bar jedan od tri strana jezika: francuski, engleski ili ruski. Svaki od jezika uči po 8 učenika. Poznato je da 2 učenika uče samo ruski i engleski, 2 učenika uče samo francuski i ruski, a 2 učenika uče samo francuski i engleski. Koliko među učenicima te grupe ima onih koji uče sva tri jezika?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

20. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000 kojima je zbir cifara 2, a koju su deljivi sa 2?

A) 12 B) 11 C) 8 D) 6 E) 4

21. U jednoj školi jedno odeljenje ima učionicu u kojoj u svaku klupu mogu da sednu po dva učenika. Zna se još i ovo: ako svi učenici tog odeljenja sednu tako da svako bude sam u klupi, onda će 11 učenika ostati bez mesta, a ako sednu po dvoje u svaku klupu onda će dve klupe ostati prazne. Koliko u tom odeljenju ima učenika, a koliko klupa?

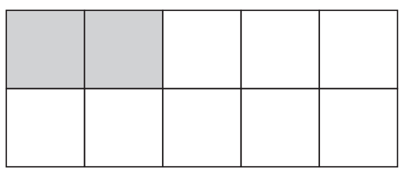


A) 26 učenika, 13 klupa B) 30 učenika, 15 klupa

C) 26 učenika, 14 klupa D) 25 učenika, 15 klupa

E) 26 učenika, 15 klupa

22. Koliko još malih kvadrata treba osenčiti da bi u ovom pravougaoniku bilo osenčeno ukupno $\frac{3}{5}$ od broja svih malih kvadrata?



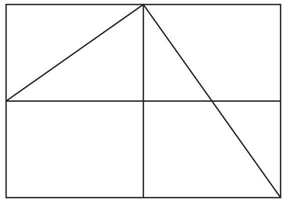
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23. Svaki od znakova koje vidiš zamenjuje po jednu cifru. Isti znakovi – iste cifre, različiti znakovi – različite cifre. Tvoj je zadatak da otkriješ kojim ciframa treba zameniti znakove da bi se i vodoravno i uspravno (u svakom redu i svakoj koloni) dobili zbirovi koje vidiš desno i dole, a onda da odgovoriš koja cifra se krije iza znaka Δ?

✱	✱	✱	∅	∅	12
✱	✱	∅	∅	♥	14
✱	♦	✱	∅	♥	16
✱	∅	♥	Δ	∅	18
♥	✱	♦	∅	Δ	20
12	14	16	18	20	

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

24. *Ivan, Aca, Mirko i Joca.*



Ivan: “Na ovoj slici ima 4 trougla i 4 pravougaonika.”

Aca: “Na ovoj slici ima 5 trouglova i 7 pravougaonika.”

Marko: “Na ovoj slici ima 6 trouglova i 9 pravougaonika.”

Joca: “Na ovoj slici ima 7 trouglova i 9 pravougaonika.”

Dobro pogledaj sliku pa odgovori ko je u pravu?

A) Ivan B) Aca C) Mirko D) Joca

E) Niko nije tačno odgovorio

25. *Zanimljiva priča.*

U riznici jednog kralja nalazi se pet ćupova punih zlatnika. Trebalo bi da su u ćupovima zlatnici od po 20 grama. Međutim, kralj zna da u četiri ćupa svaki zlatnik ima po 20 grama, a da u jednom ćupu svaki zlatnik ima po 21 gram. Koliko najmanje merenja treba kralj da izvrši na terazijama, koristeći tegove, da bi otkrio koji je to ćup u kojem su zlatnici od po 21 gram?

A) jedno B) dva C) tri D) četiri E) pet

F) Zadaci za 6. razred

Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. Odredi najmanji među brojevima:

A) $2+0+0+7$ B) $2\cdot 0\cdot 0\cdot 7$ C) $20\cdot 0+7$

D) $(2-0)\cdot(0+7)$ E) $(2+0)\cdot(0-7)$

2. Koliko je $1-5\cdot(-2)$?

A) 8 B) –8 C) –9 D) 10 E) 11

3. Mačkov rep dugačak je 8 cm i još polovinu dužine celog repa, Koliko je dugačak mačkov rep?

A) 8 B) 20 C) 9

D) 12 E) 16

4. Koji je to broj, bilo da ga dodaš, bilo da ga oduzmeš, ništa ne promeniš?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) nema takvog broja

5. Koji broj podeljen sa -7 daje rezultat 14?

A) -98 B) -2 C) 2 D) -70 E) 14

6. Jedno pecivo je sa 5 rezova podeljeno na 5 delova. Da li je to pecivo đevrek ili kifla?

A) kifla B) đevrek C) i kifla i đevrek

D) pereca E) takvo rezanje je nemoguće

7. Koliko ima celih brojeva x za koje važi $-x+3=10$?

A) 7 B) -7 C) 3 D) 1 E) nema takvih brojeva

8. Ako je n negativan celi broj, koji od sledećih izraza ima najveću vrednost:

A) $n+3$ B) $3-n$ C) $3\cdot n$ D) $3:n$ E) $n:3$

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Na kontrolnoj vežbi iz matematike Pera je ovako računao:

a) $8+12:4-4=20:4-4=5-4=1$

b) $0,88+0,2=0,90$ c) $52\cdot(-2)\cdot 10\cdot 0\cdot(-627)=0$

d) $0,24\cdot(-0,001)=-0,00024$

e) $(-0,24):0,001=-240$

Koliko zadataka Pera nije tačno rešio?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Koliko ima celih brojeva koji nisu manji od -2007 i nisu veći od 2007?

A) 2007 B) 2005 C) 4014 D) 4015 E) 4008

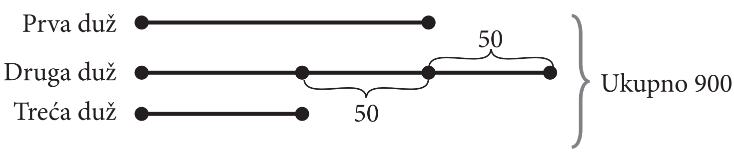
11. Rešenje jednačine $\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)\cdot x=3$ je:

A) $x=1$ B) $x=2$ C) $x=3$ D) $x=4$ E) $x=5$

12. Koliko je dugačka stranica kvadrata čija je površina 4 hektara?

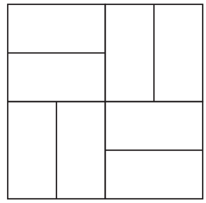
A) 100 m B) 10000 m C) 20 m D) 200 m E) 20000 m

13. Prema podacima sa slike odredi dužinu treće duži.



A) 150 B) 200 C) 250 D) 300 E) 350

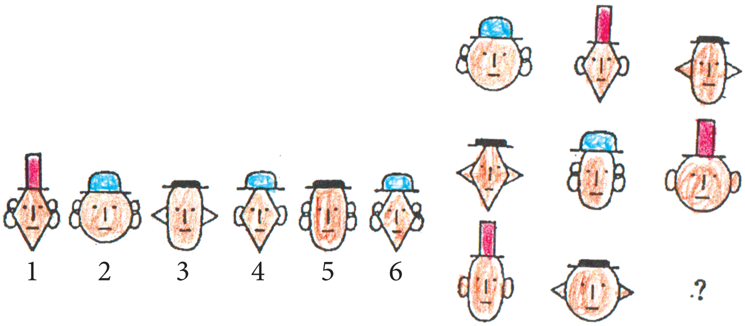
14. Koliko pravougaonika vidite na slici?



A) 8 B) 9 C) 13

D) 17 E) 21

15. Kojim je brojem označena figurica koju bi trebalo nacrtati umesto znaka pitanja, da bi na slici desno bio logičan raspored figurica?



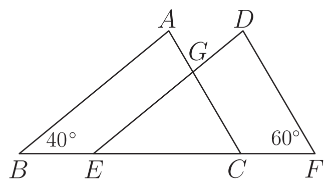
A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 4

16. Koliki su uglovi jednakokrakog trougla kod koga je visina na osnovicu jednaka polovini odgovarajuće stranice?

A) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ B) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ C) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

D) $45^\circ, 65^\circ, 70^\circ$ E) $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$

17. Trouglovi ABC i DEF su podudarni, pri čemu je $BC = EF$. Koliki je ugao EGC?



A) 20° B) 40° C) 60°

D) 80° E) 100°

Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. U sva polja kvadrata kojeg vidite bili su upisani celi brojevi, tako da su zbirovi u svim vrstama, kolonama i na obe dijagonale bili jednaki. Zatim su neki brojevi obrisani. Šta je pisalo u polju koje je obeleženo zvezdicom?

	3	24
	15	
*		12

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 5

19. Koliko je $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 2005 - 2007$?

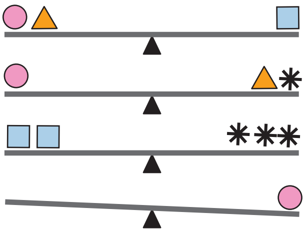
A) $1004 \cdot (-2)$ B) $502 \cdot (-1)$ C) $1000 \cdot (-2)$

D) $502 \cdot (-2)$ E) $504 \cdot (-2)$

20. U jednoj igri na sreću Vladina srećka je dobila premiju. Kada su Vladu pitali koji je bio njegov srećni broj, on je odgovorio: “Prve tri cifre mog srećnog broja čine broj koji je sedam puta veći od broja kojeg čine poslednje dve cifre mog srećnog broja, a razlika između ta dva broja je 150.” Kada otkriješ Vladin srećni broj odredi zbir cifara toga broja.

A) 13 B) 15 C) 18 D) 20 E) 25

21. Koliko “trouglića” treba staviti na levu stranu četvrte vage da bi ona bila u ravnoteži?



A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

22. Samo 5 devojčica cy članovi matematičke sekcije, a više od $\frac{8}{11}$ članova sekcije čine dečaci. Koliki je najmanji mogući broj članova te sekcije?

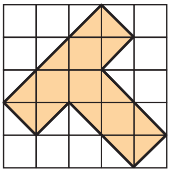
A) 11 B) 15 C) 17 D) 19 E) 20

23. Dat je trougao ABC. Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena C grade sa pravom AB jednake uglove. Koliki je ugao $\sphericalangle ABC$, ako se zna da je ugao $\sphericalangle CAB = 20°$?

A) 120° B) 60° C) 40°

D) 90° E) 110°

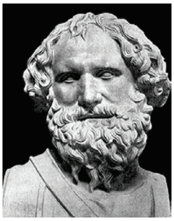
24. Površina jednog kvadratića na slici je 0,25 cm ^{2}. Pažljivo posmatraj sliku desno i odredi površinu slova “T”.



A) 2,5 cm^2 B) 25 cm^2

C) 250 cm^2 D) 0,25 cm^2 E) 0,025 cm^2

25. Najpoznatiji matematičar Starog veka i jedan od najvećih matematičara svih vremena, Arhimed, poginuo je kada je imao 75 godina. To je bilo u vreme rimske opsade grada Sirakuze, 212. godine pre nove ere. Odredi godinu rođenja čuvenog Arhimeda.



A) 137 g. pre n. e. B) 287 g. pre n. e.

C) 278 g. pre n. e. D) 75 g. n. e. E) 287 g. n. e.

G) Zadaci za 6. razred

Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. Broj 60 podeli jednom polovinom, pa tome dodaj 6, Koji si broj dobio?

A) 30 B) 36 C) 66 D) 120 E) 126

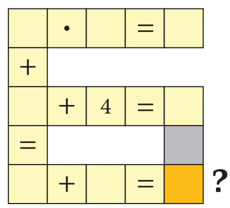
2. Koliko je: $25 : \dfrac{1}{25} - 25 \cdot \dfrac{1}{5}$?

A) $\dfrac{1}{5}$ B) 1 C) 5 D) 25 E) 620

3. Odredi proizvod svih prirodnih brojeva u čijem imenu (nazivu) ima tačno tri slova.

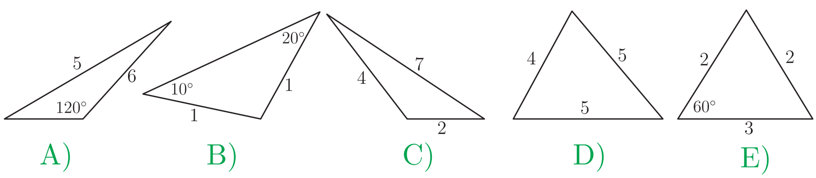
A) 2 B) 3 C) 5 D) 100 E) 3000

4. *Šestica.* U svako prazno polje ove neobične šestice možeš upisati po jedan broj, ali tako da sva četiri računa budu tačna i svi upisani brojevi različiti. Osenčeno polje ne popunjavaj, u ostala polja upiši brojeve od 1 do 9 (broj 4 je već upisan). Koji će se broj naći u polju pored kojeg stoji znak “?”?



A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

5. Među navedenim slikama nalazi se samo jedna koja prikazuje trougao koji stvarno postoji. Koja je to slika?



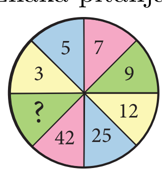
6. Koji je to broj koji je za 40 veći od svoje petine?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

7. Vrednost izraza $|x - y - z|$ za $x = -3$, $y = 2$ i $z = -4$ jednaka je

A) 11 B) 5 C) 1 D) -1 E) -5

8. Koji se broj sakrio iza znaka pitanja?



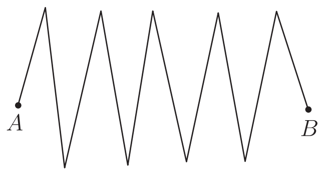
A) 1 B) 45 C) 48 D) 49 E) 63

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Aca je zamislio negativan broj. Najpre ga je pomnožio samim sobom, zatim ga je podelio samim sobom, a onda ta dva rezultata sabrao i dobio rezultat 2. Koji broj je Aca zamislio?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

10. Najpre povuci pravu određenu tačkama A i B, a zatim prebroj sve duži na dobijenoj slici. Koliko ima duži?



A) 71 B) 64 C) 68 D) 62 E) 54

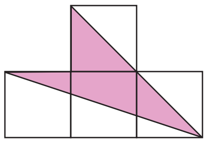
11. Kojim brojem treba podeliti 2012 da se dobije količnik 6 i ostatak 224?

A) 234 B) 266 C) 298 D) 363 E) 369

12. Reši jednačinu: $(3x + 2x + 18) \cdot 4 = 132$. Rešenje je:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13. Koji deo figure koju čine 4 podudarna kvadrata (na slici) je obojen?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{3}{8}$

14. Maca Murka pojede svu hranu iz posude za 6 minuta, a mačak Vicko istu toliku količinu hrane pojede dva puta brže. Za koliko će minuta oni pojesti istu količinu hrane, ako zajedno jedu?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. *Sima Soko i Velja Vihor.* Sima Soko i Velja Vihor pešačili su stazom dugom 6 kilometara. Krenuli su istovremeno. Sima je hodao brzinom od 100 metara u minuti, a Velja brzinom od 80 metara u minuti. Kad je prevalio polovinu staze Sima se odmarao pola sata. Velja nije pravio pauzu. Ko je prvi stigao na cilj i koliko minuta pre drugog?

A) Sima je stigao 5 minuta pre Velje

B) Sima je stigao 10 minuta pre Velje

C) Sima je stigao 15 minuta pre Velje

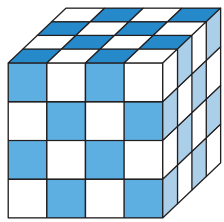
D) Velja je stigao 15 minuta pre Sime

E) Velja je stigao 10 minuta pre Sime

16. *Piramida sa brojevima.* Pomozi ovoj devojčici da otkrije pravilo po kojem se ređaju brojevi u piramidi koju vidiš levo, da bi po istom pravilu popunila i piramidu koju vidiš desno. Kad to uradi, koji broj će se naći na polju u kojem stoji znak pitalja?

A) 5 B) 7 C) 12 D) 29 E) 50

17. Kocka ivice 4 cm $(4 \times 4 \times 4)$ sastavljena je od jediničnih belih i plavih kockica. Svake dve susedne kockice su različite boje. Uporedi broj belih i broj plavih kockica upotrebljenih za slaganje ovakve kocke.



A) Plavih ima 2 puta više nego belih

B) Isti je broj plavih i belih kockica

C) Plavih ima manje nego belih

D) Plavih ima više nego belih

E) Ne može se tačno utvrditi

Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. *Stari češki zadatak.* Po predanju, češka princeza Libuša, obećala je da će dati ruku onom od trojice momaka koji ume da reši sledeći zadatak: “Ako bih ja prvom momku dala polovinu svih šljiva iz ove korpe i još jednu šljivu, drugom momku polovinu preostalih šljiva i još jednu šljivu, a posle toga broj preostalih šljiva prepolovila, pa polovinu i još tri šljive dala trećem momku, tada bi korpa ostala prazna.” Koliko je bilo šljiva u princezinoj korpi?

A) 64 B) 48 C) 42 D) 30 E) 28

19. U kutiji se nalazi 30 klikera. Neki su plavi, neki crveni, a neki žuti. Zna se da plavih ima šest puta više nego crvenih. Koliko bi najmanje, a koliko najviše žutih klikera moglo biti u toj kutiji?

A) Najmanje 5, najviše 22 B) Najmanje 4, najviše 25
C) Najmanje 2, najviše 23 D) Najmanje 2, najviše 26
E) Najmanje 1, najviše 24

20. Odredi najmanji prirodni broj koji je deljiv sa 36, a zapisuje se samo nulama i jedinicama. Koliko je jedinica upotrebljeno za zapisivanje traženog broja?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

21. Pred tobom se nalaze 4 paketa različitih težina. Imaš zadatak da ih poređaš od najlakšeg do najtežeg. Na raspolaganju su ti terazije sa dva tasa, ali tegove nemaš. Sa koliko najmanje merenja (upoređivanja težina datih paketa) možeš izvršiti zadatak?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22. Krak AB jednakokrakog trougla ABC (gde je $AB = AC$) produžen je preko temena A do tačke D tako da je $AD = AC$. Koliki je ugao BCD?

A) $75°$ B) $85°$ C) $90°$ D) $95°$ E) $105°$

23. *Razgovor u učionici.* Nastavnik je postavio zadatak:

"Aca može da završi jedan posao za 9 dana, a Branko može isti takav posao da završi za 6 dana. Međutim, njih dvojica su započela da rade taj posao zajedno, a onda je Aca, posle izvesnog vremena napustio posao. Branko je nastavio sam da radi i uradio ostatak posla za 1 dan. Koliko dugo su njih dvojica taj posao radila zajedno?"

Posle kraćeg vremena jedan učenik je dao odgovor. Nastavnik je rekao: "Bravo!"

Kako je glasio učenikov odgovor?

A) 2 dana B) 3 dana C) 4 dana D) 6 dana E) 9 dana

24. Koliko rešenja ima sledeća jednačina: $(|x+2|-2)\cdot(|x-2|-2) = 0$?

A) Nema rešenja B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

25. Na tabli je napisano 10 jedinica i 10 dvojki. Igraju dva igrača. Jednim potezom jedan igrač sa table briše bilo koja dva broja i, ako su oni jednaki napiše dvojku, a ako su različiti napiše jedinicu. Ako, na kraju, na tabli ostane broj 1, pobednik je prvi igrač, a ako ostane broj 2, pobednik je drugi igrač. Koji igrač pobeđuje pri pravilnoj igri?

A) Uvek pobeđuje drugi
B) Prvi, ako u svom drugom potezu obriše dve različite cifre
C) Prvi, ako u prvom potezu obriše dve dvojke
D) Uvek pobeđuje prvi E) Ne može se utvrditi

9.4. Školska takmičenja

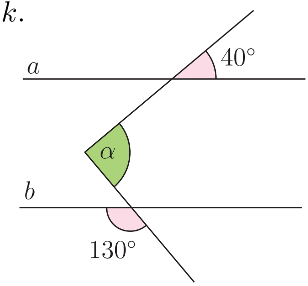
H) 5. razred

1. Dužine stranica pravougaonika, merenih u centimetrima, izražavaju se prirodnim brojevima. Površina pravougaonika je 24 cm^2. Koliko takvih nepodudarnih pravougaonika postoji?

2. Ako za uglove α, β i γ važi da je $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\alpha + \gamma = 180^\circ$ i α je trećina razlike uglova γ i β, izračunaj $\alpha + \beta + \gamma$.

3. Pri deljenju brojeva 73, 92 i 111 nekim prirodnim brojem k dobijeni su redom ostaci 1, 2 i 3. Nađi najveći takav broj k.

4. Izračunaj meru nepoznatog ugla α datog na slici, ako su prave a i b paralelne.



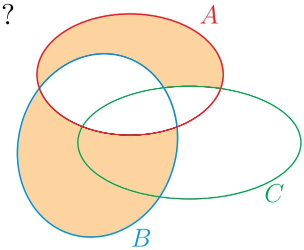
5. Na testu iz matematike bilo je 20 zadataka. Za svaki tačno urađeni zadatak dobija se tri boda, a za neurađeni ili netačno urađeni oduzima se jedan bod. Ako je Petar na testu dobio 36 bodova, koliko je zadataka tačno uradio?

I) 5. razred

1. a) Odredi broj koji je za 12 manji od broja $5050050 : 50 - 45$.

b) Koliko puta je broj $36 \cdot 15$ veći od broja 20?

2. Dati su skupovi A, B i C (slika). Koristeći skupovne operacije zapiši skup koji se sastoji od narandžasto obojenih delova.



3. Odredi ugao koji je sa uglom $\alpha = 2013'$

a) komplementan; b) suplementan.

4. Tačke A, B i C su na jednoj, a D i E na drugoj od dve paralelne prave. Nabroj sve duži i sve trouglove koje određuju ovih 5 tačaka.

5. Sve strane drvene kocke obojene su, a zatim je ta kocka isečena paralelno svojim stranama na male kocke ivica 1 cm. Zna se da tačno šest malih kocki imaju tačno po jednu obojenu stranu.

a) Kolika je površina velike kocke?

b) Koliko ima malih kocki čija nijedna strana nije obojena?

J) 6. razred

1. Ako je $x = (-4) - (-3) + (-5)$ i $y = -1 - x$, izračunaj koliko je $|x - 1| - |y - 2|$.

2. Za koje a i b je petocifreni broj $\overline{201a3b}$ deljiv sa 15 (cifre a i b su različite)?

3. Neka su α_1, α_2, α_3, α_4 i α_5 nadovezani uglovi pri čemu je zbir svaka dva susedna ugla 40°. Njihove simetrale su redom s_1, s_2, s_3, s_4 i s_5. Izračunaj $\sphericalangle(s_3, s_4)$ i $\sphericalangle(s_2, s_5)$.

4. Iz skupa $A = \left\{\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right\}$ izaberi četiri broja tako da njihov zbir bude:

a) najmanji; b) najveći mogući.

5. Na koliko se načina broj 2013 može zapisati kao proizvod dva cela broja?

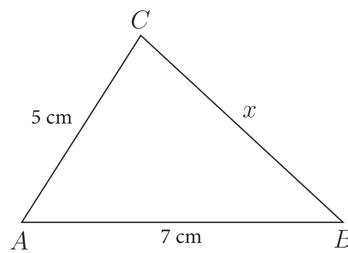
K) 6. razred

1. Izračunaj vrednost izraza

$$2000x - 2001x + 2002x - 2003x + 2004x - 2005x + 2006x - 2007x$$

ako je x negativno rešenje jednačine $|x| = 2008$.

2. U trouglu ABC je $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = \beta$. Simetrale uglova α i β seku se pod uglom 124°. Odredi $\sphericalangle ACB = \gamma$.



3. Ako su stranice trougla 5, 7 i x (u cm), gledaj sliku i odredi moguće prirodne brojeve x. Za svaku vrednost x uporedi odgovarajuće uglove.

4. Nađi razlomak sa imeniocem 4, koji je manji od $-\frac{5}{23}$, a veći od $-\frac{6}{23}$.

5. Nacrtaj pravougaonik $ABCD$ ($AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm). Odredi tačke M, N, P, Q, koje su redom središta stranica AB, BC, CD, DA. Na izlomljenoj liniji $MNQP$ konstruiši tačke koje su jednako udaljene od temena A i C.

9.5. Opštinska takmičenja

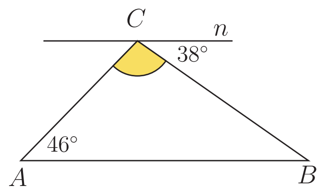
L) 5. razred

1. Neka je M skup slova koja čine reč ***matematika***, a T skup slova koja čine reč ***takmičenje***. Koliko dvočlanih podskupova ima presek skupova M i T?

2. Odredi koliko prirodnih brojeva x ispunjava uslove $\frac{2}{29} < \frac{5x}{2001} < \frac{3}{23}$.

3. Odrediti proste brojeve p i q, ako je $2p + 3q = 100$.

4. U ravni je dat trougao ABC i prava n koja sadrži teme C i paralelna je pravoj AB. Na osnovu podataka sa slike odredi ugao ACB.



5. Marija je imala 3, a Petar 5 čokolada. Njih dvoje, zajedno sa Jelenom, podelili su ukupnu količinu čokolade na ravne delove. Jelena je dala 80 dinara Mariji i Petru i na taj način platila svoj deo čokolade. Kako će Marija i Petar pošteno podeliti 80 dinara?

LJ) 5. razred

1. Odredi najmanji i najveći petocifreni broj deljiv sa 2010.

2. Uporedi razlomke $\frac{61}{2010}$ i $\frac{5}{149}$.

3. Broju 2009 dopiši sa leve i sa desne strane jednu istu cifru, tako da dobijeni šestocifreni broj bude deljiv sa 12.

4. Dati su skupovi $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3\}$, $S_3 = \{4, 5, 6\}$, $S4 = \{7, 8, 9, 10\}, \ldots$ Odredi zbir elemenata skupa S_{10}.

5. Koliki konveksni ugao zaklapaju satna i minutna kazaljka na časovniku u 8 časova i 10 minuta?

M) 6. razred

1. Odredi sve celobrojne vrednosti promenljive x u izrazu $\frac{20}{-5x+10}$, tako da izraz ima vrednost veću od 1.

2. Spoljašnji ugao jednakokrakog trougla je: a) $121°$, b) $65°$.
Odredi unutrašnje uglove tog trougla. (Razmotri sve mogućnosti.)

3. U ravni kvadrata $ABCD$ data je tačka M, tako da su duži CM i DM jednake. Dokaži da su uglovi DAM i MBC jednaki.

4. Lopta koja slobodno pada svaki put odskoči od zemlje do visine za $\frac{3}{5}$ manje od visine sa koje pada. Ako je u trećem odskoku dostigla visinu od 32 cm, nađi dužinu puta koji će lopta preći do momenta kada četvrti put dodirne zemlju.

5. Na koliko se načina broj 2002 može napisati kao proizvod tri prirodna broja, od kojih je prvi jednocifreni, drugi dvocifreni i treći trocifreni broj? Ispiši sve mogućnosti.

N) 6. razred

1. Koliko ima četvorocifrenih brojeva deljivih sa 5, kod kojih:

a) cifre se mogu ponavljati; b) sve su cifre različite?

2. U pravouglom trouglu jedan oštar ugao je 30°. Dužina katete naspram tog ugla je 9 cm. Izračunaj rastojanje težišta trougla od:

a) ortocentra trougla;

b) centra opisanog kruga tog trougla.

3. U trouglu ABC ugao α je 80°, a visine h_a i h_b seku se pod uglom od 126°. Koja je najmanja, a koja najveća stranica u trouglu ABC?

4. Luka je na tastaturi hteo da ukuca dvocifreni broj $\overline{ab}$. Greškom je ispred prve cifre i posle druge cifre ukucao 4. Na taj način dobio je četvorocifreni broj 54 puta veći od dvocifrenog broja $\overline{ab}$. Odredi bpoj $\overline{ab}$.

5. U kvadratu stranice 44 cm raspoređeno je 2013 tačaka. Dokaži da postoji kvadrat stranice 1 cm u kome su bar dve od ovih tačaka.

9.6. Okružna takmičenja

O) 5. razred

1. Joca je zamislio jedan broj. Zatim ga je povećao 4,5 puta, a potom dobijeni broj umanjio za 12,3 i dobio 5,7. Koji je broj zamislio Joca?

2. Jedan kanap presečen je na dva dela, tako da je jedan deo jednak polovini kanapa uvećanoj za 0,5 m. Ako se manji deo kanapa podeli tako da njegov veći deo bude jednak njegovoj polovini uvećanoj za 0,5 m, onda je preostali deo kanapa dužine 1,5 m. Kolika je ukupna dužina kanapa?

3. Odredi najmalji sedmocifreni prirodni broj koji je deljiv sa 36 i čije su sve cifre različite.

4. Data je prava p i dve tačke A, B sa iste strane prave p (prava AB nije ni paralelna sa pravom p, ni normalna na pravu p). Konstruiši koncentrične kružnice k_1 i k_2, tako da kružnica k_1 dodiruje prave p i AB, a kružnica, k_2 sadrži tačke A i B.

5. Rasporedi 14 tačaka na 7 pravih, tako da na svakoj pravoj budu po 4 tačke.

P) 5. razred

1. Ako je $a = 2,5$ i $b = 10$, izračunaj vrednost izraza $1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

2. Date su dve različite kružnice i tri različite prave. Za tačku kažemo da je "simpatična" ako je zajednička za dva od datih pet geometrijskih objekata. Koliko najviše "simpatičnih" tačaka mogu imati date kružnice i prave?

3. Skup M čine prosti činioci broja 2310. Koliko postoji brojeva koji su jednaki proizvodu tačno dva elementa iz skupa M?

4. Stranica kvadrata je 6 cm. Jednom pravom kvadrat je podeljen na 2 pravougaonika čiji se obimi razlikuju za 5 cm. Izračunaj površine tih pravougaonika.

5. Zlatar Zlatko je za $\frac{1}{2}$ kg srebra i $\frac{1}{3}$ kg zlata platio 750 000 dinara, a za 1 kg srebra i $\frac{1}{2}$ kg zlata platio je 1250 000 dinara. Koliko će Zlatko platiti 1 kg srebra i 2 kg zlata?

Q) 6. razred

1. Odredi sve cele brojeve x za koje je $|x| < 3$ i $|1 - x| < |1 + x|$.

2. Na stranicama romba $ABCD$ date su tačke E, F, G i H koje pripadaju redom stranicama AB, BC, CD i DA, tako da važi: $AE = AH = CF = CG$. Dokaži da je četvorougao $EFGH$ pravougaonik.

3. Odredi sve proste brojeve p, q i r, takve da je $p + 5q + 7r = 47$ (p, q i r ne moraju biti različiti).

4. Odredi najmanji razlomak $\frac{x}{y}$ (x i y su prirodni brojevi), takav da su količnici $\frac{x}{y} : \frac{11}{210}$ i $\frac{x}{y} : \frac{11}{280}$ prirodni brojevi.

5. Konstruiši trougao ABC ako je dato: $h_a = 4$ cm, $t_a = 6$ cm i $t_b = 9$ cm.

R) 6. razred

1. Odredi proste brojeve p i q takve da je $p^2 + 497q^2 = 2013$.

2. Odredi cifre x i y različite od nule, ako je broj $\overline{xyxyx}$ deljiv sa 3, a broj $\overline{yxyxyxy}$ deljiv sa 18.

3. Konstruiši trougao ABC ako je $a = 5$ cm, $\beta = 45°$ i poluprečnik opisane kružnice 3 cm.

4. U skupu celih brojeva reši nejednačinu $\frac{1}{3} < \frac{2}{1-x} < \frac{3}{4}$.

5. Simetrala jedne dijagonale pravougaonika seče dužu stranicu pravougaonika, tako da je jedan od dobijenih delova jednak kraćoj stranici. Odredi ugao između dijagonala pravougaonika.

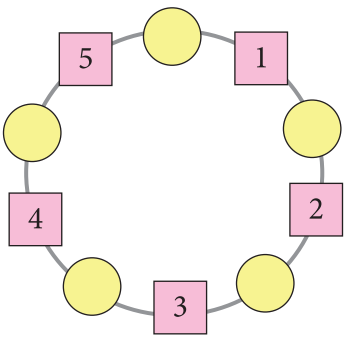
9.7. Državna takmičenja

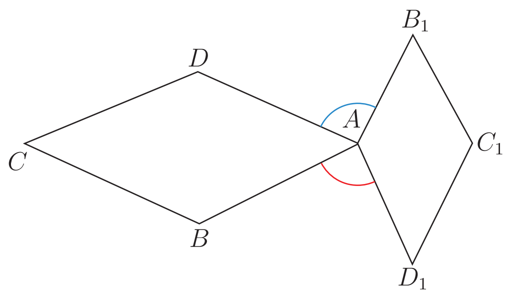
S) 6. razred

1. Odredi proste brojeve p, q, r, s i t, takve da je $p \cdot q \cdot r \cdot (s+t) = 2010$. Ne moraju svi brojevi biti međusobno različiti.

2. Neka je tačka M na stranici BC, a tačka K na stranici AC trougla ABC. Da li se duži AM i BK mogu seći tako da tačka preseka polovi ove duži?

3. U svaki kružić upiši po jedan broj, tako da je svaki broj u kvadratiću jednak zbiru brojeva u dva njemu susedna kružića (vidi sliku).





4. Romb $ABCD$ i romb $AB_1C_1D_1$ imaju zajedničko teme A i pri tome je $\sphericalangle DAB_1 = \sphericalangle BAD_1$ (vidi sliku). Dokaži da središte duži BD_1, presek dijagonala romba $ABCD$ i presek dijagonala romba $AB_1C_1D_1$ predstavljaju temena jednakokrakog trougla.

5. Na matematičkom takmičenju učestvovalo je 2010 učenika. Dokaži da se među njima može izabrati 45 učenika, takvih da su ili svi iz istog grada ili svi iz različitih gradova.

T) 6. razred

1. Odredi sve sedmocifrene brojeve koji počinju sa 7002, a deljivi su i sa 5 i sa 7 i sa 11.

2. Konstruiši paralelogram $ABCD$ čija je dijagonala AC dužine 6 cm, dijagonala BD dužine 4 cm, a visina DD' dužine 3 cm.

3. Na jednom testiranju učestvovalo je 300 učenika, od kojih je 10% bilo dečaka. Svi dečaci su osvojili isti broj bodova, a prosečni broj bodova devojčica bio je 83. Ako je prosečni broj bodova svih učenika bio 84, koliko je bodova osvojio svaki dečak?

4. Trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su jednakokraki pravougli sa hipotenuzama AB i A_1B_1, pri čemu $C_1 \in BC$, $B_1 \in AB$, $A_1 \in AC$. Dokaži da je $AA_1 = 2 \cdot CC_1$

5. Dato je 2007 različitih prostih brojeva. Dokaži da se bar 502 od tih brojeva završavaju istom cifrom.

9.8. Republička takmičenja (u Jugoslaviji)

U) 6. razred

1. Goca i Nina imaju jednak broj jabuka. Goca svoje jabuke prodaje po ceni 3 jabuke za 1 dinar, a Nina 2 jabuke za 1 dinar. Ako sastave jabuke i prodaju ih po ceni 5 jabuka za 2 dinara, onda će zaraditi 4 dinara manje nego da jabuke prodaju pojedinačno. Koliko su jabuka imale Goca i Nina, ako i pri pojedinačnoj i pri zajedničkoj prodaji ne ostane nijedna jabuka?

2. Peđa pretrči kružnu stazu za 24 minuta. Ako Dejan i Peđa trče u različitim smerovima, onda se na stazi susretnu posle 9 minuta. Ako Dejan i Peđa trče istim smerom, posle koliko vremena će se prvi put sresti i kada će se prvi put istovremeno naći u početnoj tački?

3. Dat je pravougli trougao ABC, sa pravim uglom kod temena B. Kroz tačku A konstruisana je prava p paralelna sa BC i na pravoj p izabrana je tačka K, tako da cv K i C sa raznih strana prave AB. Ako prava CK seče stranicu AB u tački M tako da je $MK = 2 \cdot AC$, onda je $\sphericalangle ACB = 3 \cdot \sphericalangle KCB$. Dokaži.

4. Dat je trapez $ABCD$. Simetrale spoljašnjih uglova trapeza kod temena A i D seku se u tački M, a simetrale spoljašnjih uglova kod temena B i C seku se u tački N. Ako je $MN = 999$ cm, koliki je obim trapeza $ABCD$?

5. Trgovac Mile je kupio izvesnu količinu pasulja po ceni od 5 dinara i 163 kilograma pasulja po ceni od 10 dinara. Zatim je obe količine pasulja pomešao i dobijenu mešavinu prodavao za 8 dinara po kilogramu. Kada je rasprodao pasulj, platio je 23% poreza na ukupan promet pasulja. Potom je utvrdio da sada ima 1998 dinara više nego pre početka posla. Koliko je kilograma pasulja prodao trgovac Mile?

V) 6. razred

1. Svaki put kada pogreši pri izradi domaćeg zadatka, Milan istrgne jedan list iz sveske. Tako mu se desilo da iz jedne sveske istrgne 25% listova, a iz druge, iste takve sveske, svaki deveti list. Koliko je listova prvobitno bilo u svakoj svesci i za koliko se procenata smanjio ukupan broj listova (u obe sveske zajedno), ako je Milan istrgao ukupno 26 listova?

2. U četvorouglu $ABCD$ uglovi ABC i ADC su pravi. Neka su M i N tačke na stranicama BC i DC (redom), takve da je $BM = DN$ i $\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAN$. Dokaži da se dijagonale AC i BD seku pod pravim uglom.

3. Neka je x trocifreni broj čije su sve cifre međusobno različite i različite od nule. Zbir svih trocifrenih brojeva koji imaju cifre iste kao i broj x, tri puta je veći od trocifrenog broja čije su sve cifre jednake cifri stotina broja x. Odredi broj x.

4. Neka je težišna duž AA_1 trougla ABC normalna na simetrali ugla ABC tog trougla. Dužine stranica trougla ABC su uzastopnim prirodnim brojevima izražene u centimetrima. Kolike su dužine stranica trougla ABC?

5. Na tabli su napisani brojevi $1, 2, 3, 4, \ldots, 221, 222$. Dozvoljeno je u jednom koraku bilo koja dva broja uvećati za po 1. Da li se, posle izvesnog broja koraka mogu dobiti svi jednaki brojevi? Odgovor detaljno obrazloži.

9.9. Savezna takmičenja (u Jugoslaviji)

X) 6. razred

1. Dokaži da je broj

$$1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003} + 5^{2003} + 6^{2003} + 9^{2003}$$

deljiv sa 10.

2. Dokaži da je zbir dužina težišnih duži proizvoljnog trougla ABC veći od poluobima, a manji od obima tog trougla.

3. Neka je ABC jednakokraki trougao ($AC = BC$), tačka O centar opisane kružnice oko trougla, a S centar kružnice koja dodiruje osnovicu AB i produžetke krakova. Ako su tačke O i S simetrične u odnosu na pravu AB, izračunaj unutrašnje uglove trougla ABC.

4. U koliko sati između 12 h i 13 h prava koja prolazi kroz podeoke za 6 h i 12 h na brojčaniku časovnika predstavlja simetralu ugla kojeg obrazuju kazaljke tog časovnika?

5. U svakoj klupi u jednom razredu sede najviše dva učenika. Poznato je da $\frac{2}{3}$ ukupnog broja dečaka sedi u klupama sa $\frac{3}{5}$ ukupnog broja devojčica. Koji deo učenika sedi u paru dečak-devojčica?

Y) 6. razred

1. Trocifreni broj $\overline{abc}$ je prost, a broj $\overline{cba}$ je kub jednog prirodnog broja. O kojim brojevima je reč?

2. Neka je K središte težišne duži CC_1 trougla ABC i M presečna tačka pravih AK i BC. Odredi odnos dužina duži CM i MB.

3. Na stolu su tri sveće jednakih dužina, ali nejednakih debljina. Jagoda je u 8 h upalila prvu sveću, a posle jednog sata i druge dve. Sat posle toga su se izjednačile po dužini prva i treća sveća. Kada će se izjednačiti po dužini prva i druga sveća, ako treća cela izgori za 8 sati, a druga cela izgori za 12 sati?

4. U jednakokrakom trouglu ABC je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 40^\circ$. Simetrala ugla CAB seče naspramni krak u tački D. Dokaži da je $AD + DC = AB$.

5. Jelena i Radovan igraju sledeću igru. Na listu oblika paralelograma naizmenično upisuju krugove, sve jednake veličine, koji se ne preklapaju među sobom i ne izlaze iz okvira papira. Pobednik je onaj ko upiše poslednji krug. Dokaži da Jelena, ako ona crta prvi krug, može igrati tako da sigurno pobeđuje.

Glava 10

REŠENJA ZADATAKA

- Rešenja pripremnih zadataka
- Rešenja zadataka sa takmičenja

Rešenja zadataka

10.1. Rešenja pripremnih zadataka

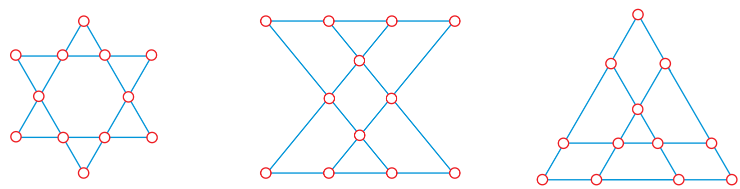
$*$) Menjajući međusobni raspored dečaci određuju brojeve: 136, 163, 316, 361, 613 i 631. Ali, nijedan od ovih brojeva nije deljiv sa 7. Međutim, ako drugi dečak dubi na glavi, umesto broja 6 imaćemo broj 9, a broj 931 deljiv je sa 7, jer je $7 \cdot 133 = 931$.

Celi brojevi

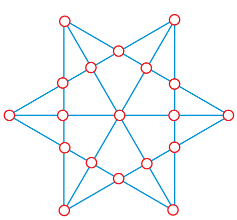
1. Rešenje je

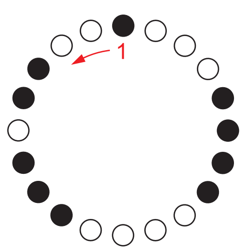
6	6	3	6	6	3	6	6
2	2	11	2	2	11	2	2
7	7	1	7	7	1	7	7
6	6	3	6	6	3	6	6

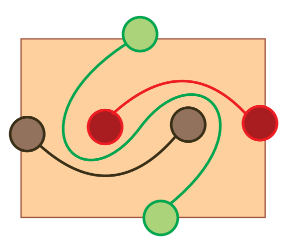
2. Zadatak ima više rešenja. Neka od njih vidimo na donjim slikama.



3. Vidi sliku dole levo.







4. Kretanjem u suprotnom smeru i stavljanjem crnih kamenčića na svako sedmo mesto (između dva zatečena kamenčića) dobićemo polazni raspored, kao što se vidi na slici gore u sredini. Brojem 1 i strelicom ↶ označen je polazni crni kamenčić i smer kretanja ukrug.

5. Izvršimo šest prevrtanja, tako što najpre ne diramo čašu broj 1, pa čašu broj 2, itd.

6. Kablovi leže na stolu i ne ukrštaju se ako se povežu kao što je prikazano na poslednjoj slici desno.

7. Zbir brojeva na karticama iznosi 81, pa treba napraviti tri vrste, tako da u svakoj imamo zbir 27. To nije moguće sa ovim karticama. Ali, ako karticu sa brojem 9 okrenemo za 180°, ona prelazi u broj 6, a ukupni zbir se menja i iznosi 78. Sada načinimo tri vrste: $15 + 11 = 17 + 3 + 6 = 13 + 6 + 7 = 26$. Ima još jedno rešenje. Nađi ga!

8. Redosled presipanja vidimo u sledećoj tabeli

	Početno stanje	1. korak	2. korak	3. korak	4. korak	5. korak	6. korak
Kanta od 8 l	8	3	3	6	6	1	1
Balon od 5 l	0	5	2	2	0	5	4
Kanta od 3 l	0	0	3	0	2	2	3

9. Posle dva presipanja ukupna količina tečnosti nije se promenila u obe posude, jer je u jednom slučaju oduzeta, u drugom dodata puna šoljica. Zbog toga je u prvoj posudi tačno onoliko kafe, koliko je mleka prebačeno u drugu posudu.

10. Kasa mora imati tri brave. Zoran će imati ključeve od prve i druge brave, Dušan od druge i treće brave i Nikola od prve i treće brave.

11. Pođimo od izjave majke. Pretpostavimo da se sin Nade Stojanović zove Milan i da nije star 8 godina. U tom slučaju bi oba dela izjave oca bila netačna. Dakle, početna pretpostavka je pogrešna, pa sin ima 8 godina. Dalje, iz izjave oca zaključujemo da se sin zove Dušan.

12. Prva i treća sveća izjednačile su se po dužini pošto je prva gorela 2 sata, a treća 1 sat. Prva sveća, dakle, gori dva puta sporije od treće, pa će cela izgoreti za 16 sati. Prva sveća za 4 sata izgoreće do četvrtine svoje dužine. Za to vreme druga će goreti 3 sata i takođe izgoreti za četvrtinu svoje dužine. Tada će se ove dve sveće izjednačiti po dužini.

13. Jedan igrač igrao je 6 puta sa belim i 5 puta sa crnim figurama, a drugi 5 puta sa belim i 6 puta sa crnim. Kad bi prvi dobio svih 5 partija s crnim figurama, rezultat bi bio 11:0, pa to nije moguće. Ako bi prvi dobio jednom sa crnim figurama, onda bi drugi dobio 4 puta kao crni i prvi bi osvojio samo 3 poena, što takođe nije mogućno. Ako bi prvi dobio dve partije kao crni, onda bi drugi dobio 3 puta kao crni, pa bi rezultat bio $6 : 5$ za drugog. Daljom proverom utvrdimo da je prvi dobio 3 partije kao crni, a drugi 2 partije kao crni i 2 kao beli. Tada je rezultat $7 : 4$ za prvog igrača. Dakle, prvi igrač je Bane i on je već odigrao 6 puta kao beli. U dvanaestoj partiji bele figure ima Mirjana.

14. Broj igrača je, naravno, prirodni broj, a da bi devet desetina učesnika takođe bio celi broj, ukupni broj učesnika mora biti deljiv sa 10. Prema tome, na turniru je bilo 10, 20, 30, ...učesnika. Međutim, broj učesnika ne može biti 20, jer bi tada jedna desetina ovog broja, a to znači 2 tenisera, izgubila sve mečeve. To nije moguće, jer je u njihovom međusobnom susretu jedan od njih morao pobediti. Onda broj učesnika ne može biti ni 30, 40, ...Ostaje samo jedna mogućnost: na turniru je učestvovalo 10 tenisera.

15. Okrenemo istovremeno oba sata, tako da pesak curi iz punih u prazne delove. Posle 20 minuta iscuri sav pesak iz drugog sata. Odmah ga obrnemo. U momentu kada iz prvog sata iscuri sav pesak (posle 25 minuta), vratimo drugi sat u početni položaj. Količina peska koja je u međuvremenu iscurila u prazni deo, vratiće se tokom narednih 5 minuta. Tako ćemo izmeriti $25 + 5$, odnosno 30 minuta.

16. Prvo merenje. Stavimo po 3 klikera na levi i desni tas terazija i odmah odredimo u kojoj trojci je najlakši. (Ako je na terazijama ravnoteža, lakši novčić je u trećoj grupi.

Drugo merenje. Iz odabrane trojke stavimo po 1 kliker na svaki tas. Iz položaja terazija lako zaključimo koji je kliker najlakši.

17. Označimo novčiće sa A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4.

Prvo merenje. Stavimo A_1, A_2, A_3 na levi, B_1, B_2, B_3 na desni tas. Ako je na terazijama ravnoteža, onda se u sledeća dva merenja uporedi A_4, pa B_4 sa jednim od šest ispravnih novčića sa terazija. Tako se utvrdi koji je novčić lakši, odnosno teži od ostalih. Kako ćemo postupiti ako nismo dobili ravnotežu? Pretpostavimo da je pretegla leva strana. Tada je jedan od novčića A_1, A_2, A_3 teži, ili je jedan od novčića B_1, B_2, B_3 lakši.

Drugo merenje. Skinemo B_3 i A_3 sa terazija, A_2 premestimo na desnu stranu, a na levu, uz A_1 stavimo još i ispravne novičiće A_4 i B_4.

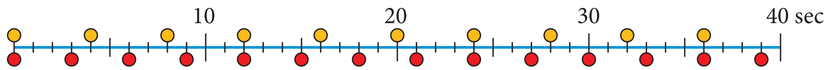
Treće merenje. Ako pretegne desna strana, A_2 je teži novčić. Ako pretegne leva strana, onda ili je A_1 teži, ili je jedan od B_1, B_2, lakši. Šta je tačno utvrdićemo kad uporedimo B_1 i B_2. Ako je pri drugom merenju uspostavljena ravnoteža, onda je neispravan A_3 ili B_3, a kakav je i koji je utvrdićemo kad jednog od njih uporedimo sa bilo kojim ispravnim novčićem.

18. Kutije ćemo obeležiti brojevima od 1 do 10. Zatim stavimo na vagu 1 kesicu iz prve kutije, 2 kesice iz druge, itd., na kraju i 10 iz desete kutije. Kada bi sve kesice imale masu od 100 g, ukupna masa bila bi 5,5 kg. Na osnovu manje izmerene količine lako utvrdimo u kojoj su kutiji lakša pakovanja. Na primer, ako je izmereno 5,47 kg, tj. ako nedostaje 30 grama kafe, onda su lakši paketići iz treće kutije, itd.

19. Označimo sa x najmanji od ova četiri broja, tj. broj koji treba pomnožiti sa 3, da bi se izjednačio sa ostalima. Dakle, ako prvom broju dodamo 3 dobićemo $3x$ (prvi broj je $3x - 3$). Ako drugom broju oduzmemo 3 dobićemo $3x$ (drugi broj je $3x + 3$). Četvrti broj, očigledno je $9x$, jer je $9x : 3 = 3x$. Zbir sva četiri broja je:

$3x - 3 + 3x + 3 + x + 9x = 16x$. Dakle, $16x = 208$, pa je $x = 208 : 16 = 13$. Traženi brojevi su: 36, 42, 13 i 117.

20. Na plavoj brojevnoj osi, na kojoj prebrojavamo protekle sekunde, žutim kružićima označićemo udare prvog zvona, a crvenim kružićima udare drugog zvona.



Vidimo da su prvi, sedmi, trinaesti i devetnaesti udari istovremeni udari oba zvona, i oni se broje kao pojedinačni udari. Neposrednim prebrojavanjem uveravamo se da je od prvog do dvadesetog udara prošlo tačno 39 sekundi.

21. Uvek se dvoje rukuju, pa se oboma računa po jedno rukovanje. Dakle, svakim rukovanjem ukupni broj rukovanja uvećava se za 2. Zbog toga, zbir svih rukovanja svih ljudi mora biti paran broj. Onda broj ljudi koji su se rukovali neparan broj puta ne može biti neparan. (Tada bi ukupni broj njihovih rukovanja bio neparan, pa bi broj rukovanja svih ljudi bio neparni broj, što je nemoguće.)

22. Ako guska i po snese jaje i po, onda će 9 gusaka sneti 6 puta više jaja, odnosno $6 \cdot 1,5$ što iznosi 9 jaja, i to za dan i po. Za 9 dana, t.j. za 6 puta više dana, guske snesu 6 puta više jaja, a to je 54 komada. Dakle, 9 gusaka za 9 dana snese 54 komada jaja.

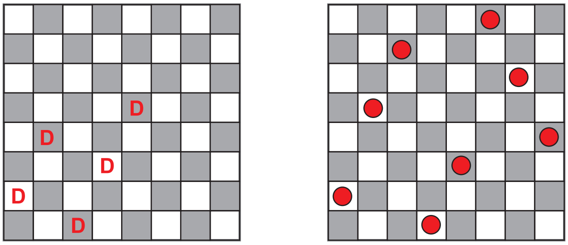
23. Donela je 31 jaje. Prvi kupac uzeo je $\dfrac{31}{2} + \dfrac{1}{2} = 16$ komada. Slično izračunamo da je drugi kupio 8, treći 4, četvrti 2 i peti 1 jaje.

24. Ako bi Dušan mirovao, Irena bi morala načiniti 20 obrtaja da bi se našla 20 puta licem u lice prema partneru. Međutim, Dušan je za to vreme 2 puta obišao Irenu, pa se svaki put mesto susreta licem u lice pomeralo u smeru obilaženja. Zbog toga, ako je Dušan obilazio partnerku u smeru u kome se i ona obrtala, Irena je morala da načini dva okreta više. Ako se, pak, Dušan kretao u suprotnom smeru, onda je do susreta dolazilo malo brže, pa je Irena napravila 18 okreta (dva okreta manje). U prvom slučaju brzina obrtanja Ireninog je 2,2 obrta u sekundi, a u drugom slučaju 1,8 obrta u sekundi.

25. Traženi broj je $1\ldots$, a treba da je zadovoljen uslov: $3 \cdot 1\ldots = \ldots 1$. Da bi se proizvod $3 \cdot 1\ldots$ završavao cifrom 1, poslednja cifra traženog broja mora biti 7. Onda imamo $3 \cdot 1\ldots 7 = \ldots 71$. Dalje, da bi pretposlednja cifra na desnoj strani bila 7, traženi broj mora imati pretposlednju cifru 5. Tada je: $3 \cdot 1\ldots 57 = \ldots 571$. Razmatrajući ovako do kraja, dobijemo traženi broj 142857. On zaista ispunjava postavljeni uslov: $3 \cdot 142857 = 428571$.

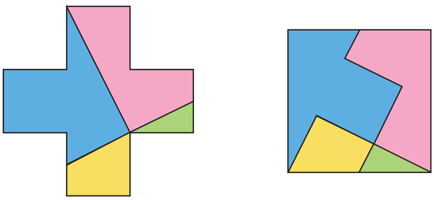
26. Konj se kreće po tabli tako da sa crnog polja ide na belo i obrnuto. Da bi se ispunio postavljeni zadatak, konj treba da načini 63 skoka. Budući da polazi sa crnog polja, on će u prvom, trećem, petom, i svakom neparnom skoku biti na na belom polju. Dakle, nije moguće da se konj u 63. skoku nađe u desnom gornjem uglu, jer je to polje crno.

27. Pet kraljica je moguće rasporediti, tako da budu ispuneni postavljeni uslovi. Jedan takav raspored vidimo na slici levo.



28. Nije moguće postaviti više od osam dama, jer bi se u protivnom u nekom redu našle dve dame. Osam dama se mogu rasporediti tako da jedna drugu ne tuku, kao što se vidi na slici gore desno.

29. Na slici levo vidimo kako figuru režemo, a na slici desno kako se sklapa kvadrat.



30. a) Iz $AO + RE = BER$ sledi da je $B = 1$, a iz $BER + DE = EBA$, tj. iz $1ER + DE = EBA$, sledi da je $EBA < 300$. Dakle, $1 < E < 3$, pa je $E = 2$, itd. Konačno rešenje je: (1234579) $\Rightarrow$ ($BEOGRAD$).

b) Slično prethodnom. Rešenje je: $MURTENICA$.

31. Prvo upisujemo 9 jednocifrenih, pa 90 dvocifrenih brojeva. Za taj deo našeg broja upotrebljeno je $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ cifara, a poslednji dopisani broj je 99. Dalje dopisujemo trocifrene brojeve. Njih ima ukupno 900, što iznosi još 2700 cifara. Očigledno je da 2017-a cifra pripada jednom od trocifrenih brojeva. Upisivanjem 190. cifre počinju trocifreni brojevi. Kako je $2017 = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 609 + 1$, sledi da je tražena cifra ustvari prva cifra šestodesetog trocifrenog broja. Šeststoti trocifreni broj je 699, a šestodeseti je 709. Tražena cifra je 7.

32. Slično prethodnom zadatku. Upisani su svi jednocifreni, svi dvocifreni, svi trocifreni i 1001 četvorocifreni broj, pa je upotrebljeno ukupno $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1001 \cdot 4 = 6893$ cifre.

33. a) Ako želimo da izbrišemo jednu cifru tako da ostane najmanji broj, postupićemo na sledeći način: ako je prva cifra veća od druge, brišemo prvu cifru. Ako prva cifra nije veća od druge, tada prvu cifru ostavljamo i na isti način poredimo drugu i treću cifru, itd. Kad izbrišemo jednu cifru, opisanim postupkom, polazeći ponovo od prve cifre, određujemo koju sledeću cifru treba izbrisati.

U datom broju je $2 < 7$, pa dvojka ostaje. Zatim, zbog $7 > 5$, brišemo cifru 7. Ostaje broj 25486392. Slično dolazimo do zaključka da je sledeća izbrisana cifra 5, pa ostaje broj 2486392. Sada izbrišemo cifru 8 i ostaje najmanji broj: 246392.

b) Ako želimo da posle brisanja ostane najveći broj, brisaćemo prvu cifru ako je ona manja od druge. Ako nije, poredimo drugu i treću cifru, itd. Tako prvo brišemo cifru 2, jer je $2 < 7$. Ostaje broj 75486392. Zatim brišemo 4, jer je $4 < 8$. Ostaje broj 7586392. Konačno brišemo 5, jer je $5 < 8$, pa ostaje najveći broj 786392.

34. Traženi broj će biti najmanji ako mu je broj cifara najmanji. Da bi pritom zbir cifara bio zadati broj (ovde je to broj 100), treba uzeti što više cifara 9 i najmanju cifru postaviti na prvo mesto. Kako je $100 = 11 \cdot 9 + 1$, to je traženi broj 199999999999.

35. Ima dva rešenja: $(-1) \cdot (-121)$ i $(-11) \cdot (-11)$.

36. Među ovim brojevima je i broj 5, a proizvod neparnog broja i broja 5 završava se cifrom 5. Naš proizvod završava se cifrom 5.

37. Među datim brojevima su: 8, 10, 15, 20 i 25. Kako je $8 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 = 600000$, to se naš proizvod završava sa pet nula, pa je tražena cifra 0.

38. Uočimo da je $25 + 56 = 26 + 55 = 27 + 54 = \cdots = 81$. Ovakvih zbirova ima 16. Treba načiniti četiri grupe sa po četiri ovakva zbira. Na primer, jedna grupa je: 25, 26, 27, 28, 53, 54, 55, 56, itd.

39. Postoje dva rešenja: $3 \cdot 58 = 174 = 29 \cdot 6$, odnosno $4 \cdot 39 = 156 = 78 \cdot 2$.

40. Imamo pet vrsta koje treba sabrati. Prva je: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$, druga: $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$, treća: $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$, četvrta: $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ i peta: $5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$. Sve to ukupno je: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 15 \cdot 15 = 225$.

Ako imamo kvadrat 10 puta 10, zbir svih proizvoda je:

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) = 55 \cdot 55 = 3025.$$

41. Brisanjem znakova prema utvrđenim pravilima dobijamo one rezultate koje bismo dobili množenjem celih brojeva, brojeva $+1$ i -1. ($- \cdot - = + \cdot + = +$ i $+ \cdot - = -$). Prema tome, bez obzira na redosled brisanja znakova, poslednji preostali znak će biti "+", ako je na početku na tabli bio parni broj minusa. Ako smo imali neparni broj minusa na kraju će ostati znak "$-$".

42. Oba sata pokazivaće isto (tačno) vreme kada ponovo istovremeno pokažu 12 časova, tj. kada drugi bude napredovao tačno 12 časova. To napredovanje, izraženo u sekundama, iznosi 43200 sekundi. Za svakih 45 sekundi napredovanja drugog, prvi, tačan časovnik, pokaže da je prošao 1 čas. Kako je $43200 : 45 = 960$, to znači da je prošlo 960 časova, odnosno 40 dana. Dakle, oba časovnika pokazala su tačno vreme, prvi put u podne 11. maja 2017.

43. Deda ima 12 puta više godina nego unuk. Dakle, unuk ima 5, a deda 60 godina.

44. Prema uslovima zadatka je $1900 \leqslant x^2 \leqslant 1999$, pa je $x = 44$, zato što je $44^2 = 1936$. Moj pradeda je 1952. godine proslavio šezdeseti rođendan. (Rođen je $1936 - 44 = 1892$. godine.)

45. Dobro su računali – Aca je Nemanjin otac.

46. Očigledno se traže dva dvocifrena broja: $10a + b$ i $10b + a$, $a > b$. Njihova razlika je $9(a - b)$. Kako su a i b cifre različite od 0, to razlika $a - b$ može biti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ili 8. Ivoni je bilo dovoljno da zna svoj kućni broj, pa da izračuna a i b. To znači da je razlika $a - b$ jedinstvena. Sledi da je $a - b = 8$, jer za ostale slučajeve imali bismo bar dve mogućnosti, pa ni Ivona ne bi mogla odrediti rešenje. (Na primer, ako je $a - b = 6$, onda je to: $9 - 3$, $8 - 2$ ili $7 - 1$.) Nama je dovoljan zaključak o jedinstvenosti razlike, pa, mada ne znamo Ivoninu adresu, znamo da deda Vlada ima 91 godinu, a unuk Luka 19.

47. Kada bi pokušali da kupe dve zbirke zadataka, svaki za sebe, nedostajalo bi im $16 + 5 = 21$ dinar. Za jednu takvu knjigu nedostaje im 2 dinara. Znači, cena jedne zbirke je 19 dinara (tj. $21 - 2$). Filip je imao 3 dinara, a Luka 14 dinara.

48. Slično prethodnom zadatku, za kupovinu dve zbirke zadataka nedostaje 9 dinara, što znači da je cena jedne knjige manja od 9 dinara. Prvom dečaku za kupovinu knjige nedostaje 7 dinara, što znaci da je cena jedne zbirke veća od 7 dinara. Veća od 7, a manja od 9, cena mora biti 8 dinara. Uroš je imao 1 dinar, a Stefan 6 dinara.

49. Iz prvog uslova nalazimo da osam olovaka i dvadeset svezaka staju 440 dinara. Kako, prema drugom uslovu, osam olovaka i dve sveske staju 80 dinara, to zaključujemo da osamnaest svezaka staju 360 dinara. Dakle, cena jedne sveske je 20 dinara, pa je cena olovke 5 dinara.

50. Ako za pola sveske treba platiti 10 dinara više nego za pola olovke, onda za dve sveske treba platiti 40 dinara više nego za dve olovke. Kako, prema drugom uslovu, za tri olovke treba platiti 10 dinara više nego za dve sveske, to sledi da za tri olovke treba platiti 50 dinara više nego za dve olovke. Dakle, cena olovke je 50 dinara, pa je cena sveske 70 dinara.

51. Kad bi u dvorištu bilo samo 40 kokošaka onda bi ukupni broj nogu bio 80. Međutim, izbrojano je 50 nogu više, što znači da je bilo 25 ovaca. Dakle, kokošaka ima 15.

52. Na dva dečaka dolaze tri devojčice, pa na 10 dečaka dolazi 15 devojčica. Prema tome, dečaka ima 10 puta više, a devojčica 15 puta više nego nastavnika. To znači da učenika i nastavnika ima 26 puta više nego nastavnika. Dakle, nastavnika ima $936 : 26 = 36$. Dečaka ima 360, a devojčica 540.

53. Žene su pogodile ukupno 396 krugova. Od toga je Sanja pogodila trećinu, tj. 132 kruga. Ljuba ima 142 poena, a Vanja 122. Dalje, Ljubin muž Ratko osvojio je dva puta više poena od Ljube, tj. 284 ukupno. Sanjin muž je Aca, koji je osvojio 198 krugova, a Vanjin muž je Predrag, koji je osvojio 122 poena, koliko i Vanja.

54. Udarničkim radom skraćen je rok za 20 dana, što znači da je umesto 60 dana $(3 \cdot 20)$ rađeno 40 dana $(2 \cdot 20)$. Dakle, udarnički je rađeno 40 dana (posle 30 dana rada normalnim tempom).

55. Dok zec skoči 14 puta, pas skoči 4 puta. Za to vreme zec pretrči 7 metara, a pas 8 metara. Znači, da bi smanjio rastojanje do zeca za 1 metar, pas mora pretrčati 8 metara, a da bi ga sustigao, pretrčaće $125 \cdot 8 = 1000$ metara.

56. Prvih 15 sekundi trku je pratio jedan sudija i za to vreme Željka je prešla 1 metar. Onda se pridružio drugi sudija Željka se odmarala narednih 45 sekundi. Tada je otišao prvi sudija, a za narednih 15 sekundi Željka je prešla još 1 metar. Sada je otišao i drugi sudija, a stigao je treći. Za prvih 15 sekundi nadzora trećeg sudije Željka je prešla treći metar, itd. Na taj način je Željka posle 4 puta po 1 minut i 15 sekundi, tj. za 5 minuta prešla 4 puta po 2 metra, tj. 8 metara, a trku je nadgledalo 8 sudija.

57. Relativna brzina voza u odnosu na mašinovođu je 120 km/h, tj. $(48+72)$ km/h. Za minut pored mašinovođe bi prošlo $120000 : 60 = 2000$ metara, a za 6 sekundi je prošla kompozicija dužine 200 metara.

58. Prema opisu puž se kreće po linijama jedne kvadratne mreže, tako što u svakom čvoru mreže menja pravac za 90°. Da bi se vratio u početni položaj mora za svako pomeranje udesno da se vrati toliko ulevo, i da se pri tome toliko kreće nagore i vrati toliko nadole (ili obrnuto). U svakom slučaju, ako se udesno kreće $k \cdot 15$ sekundi, do povratka će preći ulevo $k \cdot 15$ sekundi, gore $k \cdot 15$ sekundi i dole $k \cdot 15$ sekundi. To je ukupno $4k \cdot 15$ sekundi, odnosno k minuta.

59. Za merenje na terazijama možemo tegove stavljati na oba tasa, što znači da izmerenu masu nalazimo sabiranjem i oduzimanjem masa tegova. Poznato je da se svaki prirodni broj može izraziti kao kombinacija brojeva $1, 3, 9, 27, \ldots, 3^n, \ldots$ (sabiranjem i oduzimanjem). Tako pomoću tegova mase 1, 3 i 9 možemo izmeriti svaku masu izraženu prirodnim brojem od 1 do 13. Ali, ako umesto prvog uzmemo teg mase 2, onda možemo izmeriti još i masu od 14 kilograma. (Imamo npr: $1 = 3-2$, 2, 3, $4 = 9-3-2$, $5 = 2+3$, $6 = 9-3$, itd.) Ali, tada ne možemo izmeriti masu od 13 kg.

60. Prema rešenju prethodnog zadatka, masu do 40 kg možemo izmeriti tegovima od 1 kg, 3 kg, 9 kg i 27 kg. Za mase od 41 kg do 80 kg, izmerimo $(80-M)$ kg, gde je M kg tražena masa, pa ostatak iz džaka damo kupcu.

61. Slično rešenju **zadatka 59**. Rasečemo šestu i dvadesetdrugu alku, pa imamo delove mase 1 g, 1 g, 5 g, 15 g i 38 g. Nije teško uveriti se da zbir ili razlika ovih pet brojeva u odgovarajućim kombinacijama, daje svaki prirodni broj, od 1 do 60.

62. Dvocifreni brojevi deljivi sa 23 su: 23, 46, 69 i 92. Broj kome svake dve uzastopne cifre određuju broj deljiv sa 23 može početi sa 2, 4, 6 ili 9. To su brojevi: 23, 46923, 6923 i 923. Najveći od njih je broj 46923.

63. Pretpostavimo da je $a < b < c$. Tada znamo: $a + b = 332$, $a + c = 408$ i $b + c = 466$. Sabiranjem ove tri jednakosti dobijamo: $2a + 2b + 2c = 1206$, odnosno:

$a + b + c = 603$. Oduzimajući prve tri jednakosti od poslednje dobijamo redom: $c = 271$, $b = 195$, $a = 137$.

64. Zbir svih 10 brojeva sa drugog lista je 72. U tom zbiru se svaki od 5 brojeva sa prvog lista pojavljuje po 4 puta, pa je zbir ovih 5 brojeva $72 : 4 = 18$. Zbir dva najveća broja je 15, a dva najmanja 0, pa je srednji, tj. treći po veličini, broj 3. Dalje se lako izračuna da su preostala četiri broja: -1, 1, 5 i 10.

65. Dat je uslov: $\overline{AA} + \overline{BCB} = \overline{DEED}$. Očigledno je $D = 1$, pa je $B = 9$ i $E = 0$. Četvorocifreni broj je 1001 i jednostavno dobijamo: $A = 2$, $C = 7$. Prema tome: $22 + 979 = 1001$.

66. Imamo dva niza prirodnih brojeva: prvi ide od 1 i povećava se na svakoj sledećoj tabli za 1, dok se brojevi na drugoj tabli smanjuju za 1. Zbir cifara oba broja ne menja se sve dok se na prvoj tabli ne pojavi na kraju cifra 0, ili na kraju drugog broja cifra 9. U prvom slučaju zbir cifara broja se smanji za 8, a u drugom se poveća za 8. Znači, zbir cifara se neće promeniti ako se istovremeno kod prvog broja pojavi 0, a kod drugog 9. To je moguće, npr. ako je prvi broj 10, a drugi 49 (jer je zbir cifara 14). Sledi da je rastojanje između dva naselja 59 km.

67. Iz prve izjave Valentine zaključujemo da postoje dva para jednocifrenih brojeva koji imaju isti zbir kvadrata., Lako je utvrditi da jedan par čine 1 i 8, a drugi 4 i 7 (jer je $1^2 + 8^2 = 65 = 4^2 + 7^2$). Na osnovu Brankine izjave, Valentina je izračunala da su traženi brojevi 4 i 7.

68. Slično **zadatku 25**. Polazeći od jednakosti: $4 \cdot (\dots 6) = 6\dots$, najpre zaključujemo da važi $4 \cdot (\dots 6) = \dots 4$, odnosno: $4 \cdot (\dots 46) = \dots 4$. Zatim dobijemo: $4 \cdot (\dots 46) = \dots 84$, odnosno $4 \cdot (\dots 846) = \dots 84$. Ovaj postupak nastavljamo dok u broju na desnoj strani jednakosti ne dobijemo cifru 6. Ovim postupkom možemo dobiti periodični broj sa jako mnogo novih cifara, tako da važi postavljena jednakost, ali broj 153846 je najmanji od njih, pa je to baš traženi broj.

69. Traženi broj mora počinjati cifrom 1, jer u protivnom 6 puta veći broj ne bi bio šestocifren. Ako je n traženi broj, tada su prve cifre brojeva n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$ i $6n$ sve različite od nule i različite među sobom. Zaista, ako bi dva od ovih brojeva, npr. $5n$ i $4n$ počinjala istom cifrom, onda bi njihova razlika, tj. broj n, počinjala nulom i broj n bio bi petocifreni. Prema tome, početne cifre brojeva n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$ i $6n$ su upravo cifre traženog broja, a samim tim su one i krajnje cifre ovih šest brojeva. Iz već uočenih razloga poslednje cifre ovih šest brojeva su različite, pa među njima nema nule. Poslednja cifra broja n ne može biti 5, jer bi se tada $2n$ završavalo nulom. Ne može biti ni parna cifra, jer bi se tada $5n$ završavalo nulom, niti može biti 1, jer je 1 prva cifra. Zadnja cifra ne može biti ni 3, ni 9, jer se tada ni jedan od brojeva $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$ ne bi završavalo cifrom 1. Dakle $n = 1\dots 7$, pa krajnje cifre dobijamo množenjem broja 7 sa 2, 3, 4, 5 i 6 . Sada je jasno da je $2n = 2\dots 4$, $3n = 4\dots 1$, $4n = 5\dots 8$, $5n = 7\dots 5$ i $6n = 8\dots 2$. Razlika ma koja dva od ovih brojeva je opet jedan od tih šest brojeva, pa na svakom cifarskom mestu ovi brojevi imaju međusobno različite cifre. (U protivnom bi razlika neka dva broja (tj. neki od ovih brojeva), imala jednu cifru nula ili 9, što je nemoguće.) Zahvaljujući toj činjenici možemo ovih šest brojeva “potpisati” i sabrati. (Na svakom mestu, tj. u svakoj koloni, zbir cifara je: $7 + 4 + 1 + 8 + 5 + 2 = 27$.) Dobićemo: $21n = 2999997$, odakle je traženi broj $n = 142857$.

70. Proizvod brojeva godina devojčica može biti 36 u sledećim slučajevima: $1 \cdot 1 \cdot 36$, $1 \cdot 2 \cdot 18$, $1 \cdot 3 \cdot 12$, $1 \cdot 4 \cdot 9$, $1 \cdot 6 \cdot 6$, $2 \cdot 2 \cdot 9$, $2 \cdot 3 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 4$. Vera nije mogla odrediti godine devojčica, iako je znala matematiku i znala je zbir brojeva godina (kućni broj školske zgrade). To znači da je bilo jednakih zbirova. Jednak zbir imamo samo u dva slučaja $1 + 6 + 6 = 2 + 2 + 9 = 13$. Kako je Milena najstarija, to znači da su godine devojčica: 2, 2, 9. U drugom slučaju nemamo najstariju devojčicu.

71. Ako je Miša kupio m olovki i n svezaka, onda treba da plati $12m+60n = 3(4m + 20n)$ dinara. To je broj deljiv sa 3, a broj 1240 nije deljiv sa 3.

72. Kada se delitelj povećao za 1, ostatak se smanjio za 14, što znači da je količnik 14. Traženi broj je $131 \cdot 14 + 112 = 1946$.

73. Prema datim uslovima je $n = 111q+r$, gde tražimo r, tako da $0 \leqslant r < 111$. Kako je 111 deljivo sa 3 i 37, jer je $3 \cdot 37 = 111$, to r pri deljenju sa 37 daje ostatak 33 (to je jedan od brojeva: 33, 70, 107), a pri deljenju sa 3 daje ostatak 1. Dakle, traženi ostatak je $r = 70$.

74. Brojevi 4 i 44 nisu deljivi sa 8. Ako broj ima više od dve cifre, onda je on deljiv sa 8 samo ako je 444 deljivo sa 8, a ovaj uslov nije ispunjen.

75. Broj m nije veći od $2017 \cdot 9$, tj. $m \leqslant 18153$. Od svih brojeva koji nisu veći od 18153 najveći zbir cifara ima broj 9999, što znači da je $n \leqslant 36$. Kako je n deljivo sa 9, to je $n = 9$, ili $n = 18$, ili $n = 27$, ili $n = 36$. U svakom slučaju zbir cifara broja n je 9.

76. Prvih pet cifara biramo da broj bude minimalan, a šestom udešavamo deljivost sa 9. Traženi broj je 102348.

77. Rastavimo broj 180 na proste činioce: $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5(\cdot 1)$. Prema tome, četiri cifre koje daju proizvod 180 mogu biti: 2, 2, 5, 9, ili 2, 3, 5, 6, ili 3, 3, 4, 5, ili 1, 4, 5, 9, ili 1, 6, 6, 5. Zbir cifara je deljiv sa 9 u slučajevima 2, 2, 5, 9 i 1, 6, 6, 5, pa je najmanji traženi broj 1566.

78. $10^{2017} - 7 = 1000\ldots00 - 7 = 999\ldots93$, gde ima ukupno 2016 cifara 9. Broj je očigledno deljiv sa 3 i imamo: $999\ldots93 : 3 = 333\ldots31$. Poslednji broj nije deljiv sa 9, jer mu zbir cifara nije deljiv sa 9, pa zbog toga dati broj ne može biti deljiv sa 27.

79. Slično **zadatku 76.** Rešenje je 10234587. (Broj je deljiv sa 3 i sa 11.)

80. Kako je $3^{1999} = 9 \cdot 3^{1997}$, to je prvi član niza deljiv sa 9, a prema kriterijumu deljivosti sa 9 i svi ostali članovi niza biće deljivi sa 9. Dalje, kako je $3^2 < 10$, to je sigurno $3^{1999} < 3^{2000} = 9^{1000} < 10^{1000}$, što znači da broj 3^{1999} nema više od 1000 cifara. Stoga je njegov zbir cifara sigurno manji od 9000. Dakle, drugi član niza je manji od 10^4, a njegov zbir cifara nije veći od $4 \cdot 9 = 36$. Sledi da treći član niza mora biti 9, ili 18, ili 27, ili 36 (jer je deljiv sa 9). U svakom slučaju, četvrti član niza i svi ostali, jednaki su broju 9. Na 2000-om mestu je takođe broj 9.

81. Kako je $3^4 = 9 \cdot 9$, treba utvrditi deljivost sa 9, zatim dati broj podeliti sa 9 i utvrditi kada je dobijeni količnik ponovo deljiv sa 9.

$$10^{2n} - 1 = 1000\ldots00 - 1 = 999\ldots99$$

Ovaj broj ima parni broj cifara 9. Kada ga podelimo sa 9 dobićemo broj sa parnim brojem jedinica: $1111\ldots11$ (sa tačno $2n$ jedinica). Najmanji ovakav broj, deljiv sa 9, biće broj sa 18 jedinica. (Zbir cifara je 18, jer mora biti paran i deljiv sa 9.) Dakle, $2n = 18$, tj. $n = 9$, daje prvi broj deljiv sa $9 \cdot 9$, tj. sa 3^4. Zaključujemo da su za $n = 9k$, $k \in N$, svi brojevi oblika $10^{2n} - 1$ deljivi sa 3^4.

82. Zbir cifara svakog od ovih brojeva je 21, što znači da su svi deljivi sa 3. Dokazaćemo da je 3 traženi najveći zajednički delilac. Zaista, ako je d najveći zajednički delilac, npr. za 123465 i 123456, onda je i razlika ova dva broja deljiva sa d. Međutim $123465 - 123456 = 9$. Mora biti $d = 3$ ili $d = 9$. Međutim, ni jedan od šestocifrenih brojeva nije deljiv sa 9, pa je $d = 3$.

83. Broj n mora biti deljiv sa 4 i sa 9, pa je zadato deljenje $8712 : 36 = 242$ ili $4716 : 36 = 131$.

84. Broj $26*17*$ mora biti deljiv sa 5 (zadnja cifra je 0 ili 5) i sa 9 (zbir cifara je deljiv sa 9). Dakle, $26*17* = 262170$ ili $26*17* = 266175$. Postavljenoj jednakosti odgovara broj 262170, tj. zadata jednakost je: $5826 \cdot 45 = 262170$.

85. Traženi broj mora biti deljiv sa 8 i sa 9. Rešenja su: 219960 i 319968.

86. Naš broj mora biti deljiv sa 3 i sa 4. Rešenja su: 1991160,1994460, 1997760, 1992264, 1995564, 1998864, 1990068, 1993368, 1996668, 1999968.

87. Traženi broj mora biti deljiv sa 4 i sa 9. Rešenja su: 920160, 520164 i 120168.

88. Broj n mora biti deljiv sa 4 i sa 11. Biće deljiv sa 4, ako je $95 + 6N$ deljivo sa 4, a to je za $N = 1$, ili $N = 5$, ili $N = 9$. Tada je $n = \overline{(M+2)1956}$, ili $n = \overline{(M+2)1960}$, ili $n = \overline{(M+2)1964}$, gde je $(M+2)$ prva cifra broja n, ili za $M > 7$ određuje prve dve cifre broja n. Sada, na osnovu kriterijuma deljivosti sa 11, nalazimo dva rešenja: $M = 7$ i $N = 5$, ili $M = 3$, $N = 9$.

89. Dobijeni broj mora biti deljiv sa $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$, tj. sa 2520. Kad broj 19990000 podelimo sa 2520, dobićemo ostatak deljenja 1360. Kako je $2520 - 1360 = 1160$, to će najmanji od traženih brojeva biti 19991160. Uvećavajući ovaj broj za $k \cdot 2520$, dobijamo ostala rešenja: 19993680, 19996200 i 19998720.

90. Šestocifreni broj dobijen dopisivanjem triju cifara biće deljiv sa 9, sa 8 i sa 7, pa će biti deljiv i sa 504, tj. sa $9 \cdot 8 \cdot 7$. Postupajući slično prethodnom zadatku dobijamo rešenja: 623448 i 623952.

91. Slično **zadacima 89.** i **90.** Rešenja su: a) 123200 i 123816. b) 123205 i 123821.

92. Neposrednim proveravanjem utvrdićemo da tražena cifra može biti: 5 (ostaci deljenja u oba slučaja su 0), ili 6 (ostatak deljenja je 1), ili 7 (ostatak deljenja je 2). (Imamo tri rešenja.)

93. Očigledno je dužina stranice kvadrata jednaka najvećem zajedničkom deliocu brojeva 462 i 726, a to je 66 cm. Ovakvih kvadrata ima $7 \cdot 11$, tj. 77.

94. Uzimajući u obzir odnose brzina biciklista, zaključujemo: kad prvi biciklista završi prvi krug, drugi će preći 1,5 krugova, treći 2 kruga i četvrti 2,5 krugova. Kad prvi pređe svoju stazu i drugi put, tada će drugi završiti treći krug, treći će završiti četvrti krug, a četvrti završava peti krug, pa će se svi naći u polaznom položaju. Za to vreme je prvi prešao $\frac{2}{3}$ km, a on za 10 minuta prelazi 1 km. Do prvog susreta svih biciklista prošlo je $\frac{2}{3} \cdot 10$ minuta, odnosno 6 minuta i 40 sekundi.

95. Između dva polaska sa stanice prođe 75 minuta za prvi autobus, 60 minuta za drugi i 50 minuta za treći. Kako je $S(75, 60, 50) = 300$, to znači da će posle 300 minuta, odnosno posle 5 časova, svi autobusi ponovo krenuti istovremeno iz polazne stanice.

96. Pretpostavimo da je biciklista započeo vožnju u momentu kada je u njegovom smeru krenuo jedan autobus. Posle 18 minuta vožnje, neka se biciklista okrenuo nazad i ponovo vozio 18 minuta. ($18 = S(9,\ 6)$.) U toku prvih 18 minuta vožnje biciklistu su prestigla dva autobusa, a u toku drugih 18 minuta vožnje njega su susrela tri autobusa. Dakle, za 36 minuta pored bicikliste je prošlo 5 autobusa. Vremenski intervali u kojima autobusi polaze sa stanice su:

$\frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ minuta = 7 minuta i 12 sekundi.

97. Pretpostavimo da unuk ima 1 godinu. Dalje, ako je broj n deljiv sa 2, 3, 4, 5 i 6, onda je $n+2$ deljivo sa 2, $n+3$ deljivo sa 3, itd. Dakle, kad se unuk rodio deda je imao 60 godina (najmanji zajednički sadržalac za 2, 3, 4, 5 i 6). Sada deda ima 61 godinu, a unuk 1 godinu.

98. Ako bismo ovaj broj povećali za 1, on bi bio deljiv sa 2, sa 3, sa 4 i sa 5. Dakle, to je broj $k \cdot s - 1$, gde je $s = S(2, 3, 4, 5) = 60$ i $k \in N$. Dobijamo: $100 < k \cdot 60 - 1 < 200$. Ovo važi za $k = 2$ ili $k = 3$. Traženi broj je 119 ili 179.

99. To je broj $S(4,\ 5,\ 6) - 2 = 58$. (Vidi prethodni zadatak.)

100. Slično **zadatku 98**. To je broj oblika $k \cdot s + 2$, gde je $s = S(3, 4, 5, 6, 7) = 420$. Za $k = 24$ je $k \cdot s + 2 = 10082$, a za $k = 23$ je $k \cdot s + 2 = 9662$, pa je traženi broj upravo 9662.

101. Slično **zadatku 98**. Rešenja su: 247, 499 i 751.

102. Slično **zadatku 98**. Rešenje je: 182 knjige.

103. To je broj oblika $\overline{ABCABC}$. Vidimo da je $\overline{ABCABC} : \overline{ABC} = 1001$. Broj 1001 je deljiv sa 11, i to $1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$. Prema tome:

$$\overline{ABCABC} = \overline{ABC} \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13.$$

104. Neka je dat broj n koji se zapisuje sa šest cifara x. Tada je

$$n = x \cdot 111111 = x \cdot 111 \cdot 1001 = x \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

105. Broj mora biti deljiv sa 3 i sa 11, pa mu je zbir cifara 3, 6, 9 itd. Da bi bio deljiv sa 11 dovoljno je da ima paran broj cifara. Najmanji takav broj je 111111.

106. Neka su a, b, c redom cifre traženog broja. Tada mora biti $(a+c-b)$ deljivo sa 11 i $a+b+c=10$. Sledi da je $a+c-b=0$, tj. $a+c=b$, pa je $b=5$ i $a+c=5$. Traženi brojevi su; 550, 451, 352, 253 i 154.

107. a) Broj n ima 195 cifara. (Vidi rešenje **zadatka 31**.)

b) Do broja 99 sve su cifre, osim nule, upotrebljene jednak broj puta, i to po 20 puta. U broju n cifra 5 pojavljuje se 20 puta.

c) Zbir cifara broja n je $20(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+3=903$, što znači da je n deljiv sa 3, tj. $n=3k$, $k \in N$.

d) Broj n je deljiv sa 3, a ako bi bio kvadrat prirodnog broja morao bi biti deljiv i sa 9. Ovaj uslov nije ispunjen (903 nije deljivo sa 9), pa n nije kvadrat prirodnog broja.

108. Od pet uzastopnih neparnih brojeva najviše dva mogu biti deljiva sa 3 (prvi i četvrti, ili drugi i peti, ili samo treći). Samo jedan od ovih pet brojeva deljiv je sa 5, a najviše jedan je deljiv sa 7. Prema tome, bar jedan od datih brojeva nema ni jedno od ovih svojstava.

109. Neka je dati broj $\overline{ABB}=100A+11B=7k$. Odavde je $98A+7B+2A+4B=7k$, odnosno $7(14A+B)+2(A+2B)=7k$. Odavde zaključujemo da je $A+2B=7m$ (jer su i leva i desna strana jednakosti deljive sa 7), a broj $A+2B$ je zbir cifara našeg broja.

110. Traženi broj ima jedan ili dva prosta delioca. U prvom slučaju to bi bio broj $p\cdot p\cdot p$, gde je p prost broj. Treba da važi: $1+p+p\cdot p+p\cdot p\cdot p=2000+p\cdot p\cdot p$, odnosno $p+p\cdot p=1999$. Ovo nije moguće jer je zbir $p+p\cdot p$ paran za svaki prosti broj p. Ako traženi broj ima dva prosta delioca, tj. ako je $n=p\cdot q$, onda važi uslov: $1+p+q+pq=2000+pq$, odnosno $p+q=1999$. Odavde je $p=2$ i $q=1997$, pa je $n=2\cdot 1997=3994$.

111. Rastavimo 3024 na proste činioce: $3024=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7$. Leva strana jednakosti je proizvod četiri uzastopna broja. Kako je $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9$, imamo: $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$, odakle je $x=11$, ili $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=-6\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)$, odakle je $x=-4$.

112. Ako je $p=2$, tada je $1995p+1=3991=13\cdot 307$ složeni broj. Ako je $p>2$, onda je p neparni broj, pa je i $1995p$ neparan, a $1995p+1$ parni broj (i veći od 2), dakle $1995p+1$ je složeni broj.

113. Slično prethodnom zadatku.

114. Ako je $p=2$, tada je $p+8=10$ i $p+10=12$, pa su oba data broja složeni brojevi. Ako je $p=3$, tada je $p+8=11$ i $p+10=13$, dakle oba data broja su prosti brojevi. Ako je $p>3$, onda je $p=6k+1$, ili $p=6k-1$. Ako je $p=6k+1$, tada je $p+8=6k+9=3(2k+3)$, a to je složeni broj. Ako je $p=6k-1$, onda je $p+10=6k+9$, takođe složeni broj. Jedino rešenje je $p=3$.

115. Ako je $p = 2$, onda je $p^3 + 3^p = 2^3 + 3^2 = 17$, a to je prost broj. Ako je $p > 2$, onda su p^3 i 3^p neparni brojevi, pa je $p^3 + 3^p$ parni, a samim tim i složeni broj. Jedino rešenje je $p = 2$.

116. Ako je $p = 2$, tada je $p^{1995} + p^{1996} = 2^{1995} + 2^{1996}$. Ovo je parni broj (zbir dva parna broja), veći od 2, pa je složeni broj. Ako je $p > 2$, dokaz izvodimo kao u prethodnom zadatku.

117. Za $p = 2$ je $p^2 + 71 = 75 = 3 \cdot 25$ i $p^3 + 17 = 25 = 5 \cdot 5$, pa su ova dva broja složeni brojevi, itd. (Vidi **zadatak 115**.)

118. Najpre nalazimo: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Traženi brojevi mogu biti trocifreni, sa ciframa 5, 6, 7 (ima ih 6) ili četvorocifreni sa ciframa 1, 5, 6, 7 (ima ih 6, jer moraju počinjati cifrom 1), ili sa ciframa 2, 3, 5, 7 (ima ih 6, jer moraju počinjati cifrom 2). Postoji 18 traženih brojeva.

119. Kako je $528 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$, zaključujemo da ne postoji prirodni broj kojem je proizvod cifara jednak 528 (jer 11 ne može biti cifra).

120. Rastavimo 5040 na proste činioce: $5040 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Broj će biti manji ukoliko ima manje cifara, a onda te cifre poređamo od manjih ka većim. Od prostih činilaca možemo načiniti najmanje pet cifara: 2, 5, 7, 8, 9, ili 4, 4, 5, 7, 9, ili 4, 5, 6, 6, 7. Dakle, najmanji je broj 25789.

121. Na osnovu jednakosti $453600 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, slično prethodnom zadatku, dobijamo najmanji broj 4557899. Najveći broj ne postoji, jer možemo dopisati proizvoljan broj jedinica, a proizvod cifara neće se promeniti.

122. Znamo da je $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$. Ako ovaj broj pomnožimo sa $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$, dobićemo kvadrat prirodnog broja, a 231 je traženi najmanji broj. Naime: $8316 \cdot 231 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2$.

123. Slično prethodnom zadatku. Rešenje: $21168 \cdot 28 = 84^3$.

124. Prosti činioci traženog broja su samo dvojke i trojke. Da bismo množenjem sa 2 dobili kvadrat prirodnog broja, broj trojki u razvoju traženog broja mora biti paran, a da bismo množenjem sa 3 dobili kub, broj dvojki u razvoju mora biti deljiv sa tri . Najmanji takav broj je $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

125. Slično prethodnom zadatku. Rešenja su:

a) $2^4 \cdot 3^3 = 432$; b) $2^3 \cdot 3^4 = 648$.

126. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj cifara prostog broja p složeni broj. Konkretnosti radi, neka je broj cifara $15 = 3 \cdot 5$. Tada je $p = 111111111111111 = 11111 \cdot 10000100001 = m \cdot n$, tj. p je složeni broj. To je nemoguće, jer je dati broj p prost broj. Dakle, broj cifara broja p mora biti prost broj.

Obrnuto tvrđenje ne važi, jer na primer, 3 je prost broj, a broj $111 = 3 \cdot 37$ je složeni broj.

127. Vidi rešenje prethodnog zadatka: $\overline{BBB} = B \cdot 111 = B \cdot 3 \cdot 37$. Dakle, rešenje je $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

128. $\overline{ABBA} = 1001A + 110B = 11 \cdot 91A + 11 \cdot 10B$, što znači da je broj $\overline{ABBA}$ deljiv sa 11. Znači, rešenje zadatka je $5 \cdot 7 \cdot 11$, ili $7 \cdot 11 \cdot 13$, ili $11 \cdot 13 \cdot 17$. Proverom utvrdimo da je jedino rešenje: $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.

129. Rastavljanjem na proste činioce, dobijamo: $1000000000 = 2^9 \cdot 5^9$. Nule u zapisu nekog broja nastaju kad se množe među sobom njegovi činioci 2 i 5. Znači, treba formirati dva broja, tako da je jedan formiran od dvojki, a drugi od petica. Prema tome $1000000000 = 512 \cdot 1953125$.

130. Proizvod dva dvocifrena broja je veći od $10 \cdot 10 = 100$, a manji od $100 \cdot 100 = 10000$. Dakle, proizvod dva dvocifrena broja je 4444 ili 444. U prvom slučaju imamo: $4444 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101$, što ne daje rešenja. U drugom slučaju je $444 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37 = 12 \cdot 37$. Dakle, to je rešenje zadatka: $12 \cdot 37 = 444$.

131. Slično prethodnom zadatku, zaključujemo da je $a \cdot b = 2222$ ili $a \cdot b = 22222$. Kako je $2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$, to ovaj slučaj daje dva rešenja: $22 \cdot 101$, ili $11 \cdot 202$. U drugom slučaju je $22222 = 2 \cdot 41 \cdot 271$, pa dobijamo još dva rešenja: $82 \cdot 271$, ili $41 \cdot 542$.

132. Slično **zadatku 130**. Proizvod bi mogao biti 77777 ili 777777. U prvom slučaju je $77777 = 7 \cdot 41 \cdot 271$, pa je jedino rešenje $287 \cdot 271 = 77777$. Drugi slučaj ne daje rešenja.

133. Dati brojevi nisu deljivi sa 3. Ako imaju jednake ostatke pri deljenju sa 3, onda je njihova razlika deljiva sa 3. Npr., ako su to brojevi $3m+1$ i $3n+1$, onda je $3m+1-(3n+1) = 3m-3n = 3(m-n)$. Ako dati brojevi nemaju jednake ostatke pri deljenju sa 3, onda je njihov zbir deljiv sa 3. Na primer:

$$3m + 1 + 3n + 2 = 3m + 3n + 3 = 3(m + n + 1).$$

134. Neka je npr. $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Tada je razlika najvećeg i najmanjeg broja: $1000d + 100c + 10b + a - (1000a + 100b + 10c + d) = 999d + 90c - 90b - 999a = 9(111d + 10c - 10b - 111a)$, a to je deljivo sa 9, što znači da predstavlja složeni broj.

135. Pretpostavimo da postoji najveći prosti broj p_n. Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, svi ostali prosti brojevi. Uočimo broj $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-1} \cdot p_n + 1$. Broj N je sigurno prost, jer nije deljiv nijednim prostim brojem. (Uvek je ostatak deljenja jednak 1.) Međutim, očigledno je $N > p_n$, što znači da nije p_n najveći prosti broj. Ova kontradikcija potvrđuje da ne postoji najveći prosti broj.

136. Kako je $1996 = 2 \cdot 2 \cdot 499$, to su moguća tri rešenja: $4 \cdot 499 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 4 + 499 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 1996$, ima 1493 jedinice, ili $2 \cdot 2 \cdot 499 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 2 + 2 + 499 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 1996$, takođe sa 1493 jedinice. Sem toga je $1996 = 2 \cdot 998 = 2 \cdot 998 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 2 + 998 + 1 + 1 + \cdots + 1$, sa 996 jedinica – to je treće rešenje. Za broj 1995 ima dvadesetak različitih rešenja, koja se dobijaju kao i u opisanom slučaju.

137. Elementi skupa A su neki stepeni brojeva: 11, 13, 17 ili 19. Svi stepeni ovih brojeva završavaju se jednom od cifara: 1, 3, 7 ili 9. Elementi skupa A su sva tri člana sa različitim poslednjim ciframa, ili se bar dva završavaju istom cifrom. U prvom slučaju zbir dva broja se završava nulom ($1+9$ ili $7+3$), a u drugom slučaju razlika dva broja. Taj zbir ili razlika je broj deljiv sa 5.

138. Neka su a i b trocifreni brojevi, takvi da je $a+b=37k$. Dopisivanjem broja b, desno od a, dobijamo šestocifren broj n, pa je: $n = 1000a + b = 999a + +(a+b) = 27 \cdot 37a + 37k = 37(27a+k)$. Ovo pokazuje da je broj n deljiv sa 37.

139. Trocifreni broj na školskoj tabli ima cifru jedinica 8, pa on ne može biti kvadrat prirodnog broja. (Nijedan kvadrat prirodnog broja ne završava se ciframa: 2, 3, 7, 8.) Otuda zaključujemo da je tačan prvi deo Dušanove izjave: broj je deljiv sa 9. Prema tome, to je jedan od sledećih brojeva: 108, 198, 288, 378, 468, 558, 648, 738, 828, 918. Na osnovu Nikoline izjave, naš broj je ili manji od 400, ili je baš 468, jer je $468 = 13 \cdot 36$. Krug kandidata se sužava Zoranovom izjavom: preostaju samo dva kandidata:. 288 i 468. Broj 288 otpada jer zadovoljava obe Zoranove izjave, a mora biti tačna samo jedna. Prema tome, na tabli je zapisan broj 468.

140. Označimo sa n proizvod svih prostih brojeva manjih od 17, odnosno $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Tada su svi sledeći brojevi: $n+2$, $n+3$, $n+4, \ldots, n+16$, složeni. Svaki od njih je deljiv bar sa jednim od navedenih prostih brojeva: $n+2$ sa 2, $n+3$ sa 3, $n+4$ sa 2, itd.

141. Označimo slovima m, n, p broj kabina redom sa 2, 3, 4 ležaja. Tada je $2m+3n+4p = 86$. Ako bi broj n bio neparan, i zbir $2m+3n+4p$ bio bi neparan i ne bi bilo 86 ležaja. Dakle, n, broj trokrevetnih kabina, mora biti parni broj.

142. "Poznavati se" predstavlja simetričnu relaciju, tj. poznanstva podrazumevaju parove. Dakle, ukupan broj poznanstava je uvek paran broj. Ako bi se svaki od 9 gostiju poznavao odranije sa 3 gosta, onda bi između tih 9 gostiju ukupno bilo $3 \cdot 9 = 27$ poznanstava, tj. neparan broj, što nije moguće.

143. Zbir brojeva na karticama iznosi 39, neparan je, pa se ne mogu dobiti dva jednaka zbira. Ali, ako za 180° okrenemo karticu sa brojem 9, dobićemo broj 6. Sada je zbir brojeva na kraticama paran, iznosi 36, pa možemo udesiti da u oba reda bude zbir 18. (Dovoljno je da kartice 6 i 8 zamene mesta.)

144. Slično **zadatku 142.** Svaka direktna linija ima dva kraja, tj. dve veze. Prema uslovu, sve linije treba da budu direktne, a broj veza je $2015 \cdot 13$, tj. broj veza je neparan, pa izlazi da broj linija nije celi broj: $\dfrac{2015 \cdot 13}{2}$. Dakle, opisano povezivanje nije mogućno.

145. Označimo učenike, prema rednom broju, od 1 do 100. Mesta menjaju učenici čiji se brojevi razlikuju za 2. Prema tome, učenik sa početka reda, tj. učenik broj 1, može menjati mesta sa učenicima čiji su brojevi: 3, 5, 7, ..., dakle, sa učenicima koji imaju neparni redni broj. Nijednog trenutka on ne može zauzeti parnu poziciju, pa ne može doći na suprotni kraj reda, tj. na broj 100.

146. a) Nulu dobijamo jednostavnim postupkom. Svaki par uzastopnih brojeva zamenimo njihovom razlikom $(1,2) \Rightarrow 1$, $(3,4) \Rightarrow 1$, $(1995,1996) \Rightarrow 1$. Sada je na tabli 998 jedinica. U sledećem koraku brišemo po dve jedinice i umesto njih pišemo nule. Sada dobijemo 499 nula, itd.

b) Zbir svih brojeva na tabli je: $1+2+3+\cdots+1994+1995+1996 = (1+1996)+(2+1995)+(3+1994)+\cdots = 998\cdot 1997$, a to je parni broj. Ako izbrišemo dva broja, recimo m i n, i zamenimo ih njihovom razlikom, tada će se ukupan zbir brojeva na tabli promeniti za $(m+n)-(m-n)=2n$, tj. promeniće se za parni broj. To znači da će na tabli u svakom momentu biti parni zbir, pa se ne može nikad desiti da ostane samo broj 1995.

147. Neka je Dušan ulovio m riba. Toliko je ulovio i njegov sin Lazar. Ako je Vladin sin ulovio n riba, onda je Vlada ulovio $3n$ riba. Ulovili su svi zajedno $2m+4n=25$. Ovo nije moguće, jer je $2m+4n$ parni broj, a 25 neparni broj. Jedina mogućnost, koja dovodi do rešenja, jeste da je Dušan sin Vladin. Tada imamo uslov: $m+m+3m=25$. Znači Dušan i Lazar su ulovili po 5 riba, a Vlada 15.

148. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da smo u jednom trenutku dobili 9 nula i da se to dogodilo prvi put. To znači da smo u prethodnom koraku imali ispisane takve cifre, da su svake dve susedne bile jednake, a to znači da su svih devet cifara jednake, i to, po pretpostavci, svih 9 su jedinice. Sada zaključujemo da su u koraku pre ovih 9 jedinica, svake dve susedne cifre bile različite. Ako brojevima od 1 do 9 numerišemo mesta na kojima su upisane cifre, sledi da su na svim neparnim mestima bile jednake cifre, a na parnim mestima su cifre različite od neparnih. Međutim, prva i deveta cifra su susedne, a jednake su, što dovodi do kontradikcije. Znači, početna pretpostavka je pogrešna.

149. Svaki od sabiraka $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$ ima vrednost $+1$ ili -1 i ima ih ukupno n. Da bi njihov zbir bio 0, mora biti jednak broj pozitivnih i negativnih. Ako je negativnih k, onda je $n=2k$. Izračunajmo proizvod svih ovih sabiraka: $(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}x_n)\cdot(x_nx_1)=x_1^2\cdot x_2^2\cdot\ldots\cdot x_{n-2}^2\cdot x_n^2=1$, jer je $1^2=(-1)^2=1$. Odavde zaključujemo da broj negativnih sabiraka mora biti paran broj, tj. $k=2p$. (Ako bi bio neparan broj negativnih sabiraka, proizvod bi morao biti -1.) Prema tome: $n=2k=4p$.

150. Među prva četiri člana datog niza tri broja su neparna, pa je i njihov zbir neparan. Zbog toga je neparan i peti član. Iz istih razloga je neparan i šesti član. Tek sedmi član će biti parni broj, jer je zbir prethodna četiri neparna člana parni broj. Dalje se, iz opisanih razloga stalno pojavljuju četiri neparne cifre, pa peta parna: 1, 2, 3, 5, 1, 1, 0, 7, 9, 7, 3, 6, 5, ...Četvorka 1, 2, 3, 4 ne može se pojaviti, jer se u datom nizu parne i neparne cifre ne pojavljuju naizmenično.

151. Ostaci deljenja sa 101 mogu biti: 0, 1, 2, ..., 99, 100. Ako 1996 odabranih brojeva podelimo u grupe, tako da svi brojevi jedne grupe imaju isti ostatak pri deljenju sa 101, ovih grupa biće sto jedna. Kako je $1996=19\cdot 101+77$, prema Dirihleovom principu zaključujemo da postoji grupa od najmanje 20 brojeva, koji pri deljenju sa 101 daju isti ostatak. Razlika bilo koja dva od njih deljiva je sa 101. (Na primer, neka su $n_1=101m+r$ i $n_2=101p+r$, dva broja iz odabrane grupe. Tada je $n_1-n_2=101m+r-101p-r=101m-101p$, deljivo sa 101.)

152. Pretpostavimo da to nije tačno, tj. pretpostavimo da postoji učenik šestog razreda, Uroš, koji poznaje 11 učenika, a da među ovih 11 ne postoje dva, koja imaju još jednog zajedničkog poznanika. Tada bi svaki od njih imao još po 10 poznanika, i to svaki ima 10 različitih poznanika. To nije mogućno, jer bi tada bilo $1 + 11 \cdot 10 = 111$ učenika šestog razreda. Dakle, početna pretpostavka je pogrešna, pa svaki učenik ima bar dva poznanika kojima je on zajednički proznanik.

153. Za svakog od preostalih učenika postoji 13 mogućnosti, pa ćemo ih rasporediti u 13 grupa, prema tome da li su tačno rešili test, ili su načinili 1, ili 2, ..., ili 12 grešaka. Kako je $29 = 2 \cdot 13 + 3$, zaključujemo da postoji grupa od najmanje 3 učenika, koji su napravili isti broj grešaka (ili nemaju grešaka).

154. Cifra jedinica prostog broja može biti: 1, 2, 3, 5, 7 ili 9. Pritom, cifrom 2 završava se samo prosti broj 2 i cifrom 5 završava se samo prosti broj 5. Ostalih 2005 prostih brojeva završava se jednom od četiri cifre: 1, 3, 7, 9. Kako je $2005 = 4 \cdot 501 + 1$, po Dirihleovom principu sledi da postoji bar 502 prosta broja koji se završavaju jednom istom cifrom.

155. Ako bi svaki učenik dobio različit broj klikera, tada bismo morali imati najmanje: $0 + 1 + 2 + \cdots + 62 + 63 = 2016$ klikera. Ovo je nemoguće, jer imamo manje klikera.

156. Svaki prirodni broj pri deljenju sa 1999 može imati jedan od sledećih 1999 ostataka: 0, 1, 2, ..., 1998. Uočimo niz od 2000 prirodnih brojeva: 1, 11, 111, 1111, ..., 11...1. (Poslednji broj je zapisan pomoću 2000 jedinica.) Od ovih 2000 brojeva bar dva moraju imati isti ostatak pri deljenju sa 1999. Razlika ta dva broja je deljiva sa 1999, a ima oblik $11\ldots10\ldots0$.

157. Dobijeni zbirovi mogu biti: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ukupno 11 mogućnosti. Međutim, imamo 5 vrsta, 5 kolona i 2 dijagonale, ukupno 12 zbirova, pa ne mogu biti svi različiti među sobom.

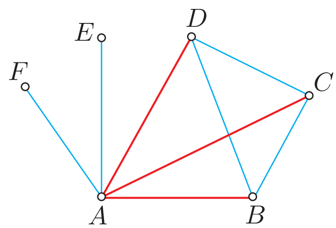
158. Od 10 uzastopnih prirodnih brojeva 5 su parni. Od ostalih 5 neparnih, postoji bar jedan koji nije deljiv ni sa 3, ni sa 5, ni sa 7. (Vidi rešenje **zadatka 108**.) Taj nije deljiv ni sa 2, pa je uzajamno prost sa ostalih devet brojeva, jer zajednički prosti delilac brojeva, čija je razlika najviše 9, može biti samo jedan od brojeva: 2, 3, 5, 7.

159. Neka su dati brojevi: $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{1000}$. Formirajmo sledeći niz: n_1, $n_1 + n_2$, $n_1 + n_2 + n_3 \ldots, n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{1000}$. Ovaj niz ima 1000 članova. Ako je neki od njih deljiv sa 1000, zadatak je rešen. Ako nijedan član niza nije deljiv sa 1000, onda svaki od njih pri deljenju sa 1000 može dati jedan od 999 različitih ostataka: $1, 2, 3, \ldots, 999$. Dakle, od 1000 članova niza bar dva će imati isti ostatak deljenja, pa je njihova razlika deljiva sa 1000, a ova razlika je u svakom slučaju jedan od datih brojeva, ili predstavlja zbir nekoliko prvobitnih brojeva.

160. Dati brojevi su različiti, i neka je: $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < k_{n+1}$. Formirajmo niz od n različitih brojeva: $k_2 - k_1$, $k_3 - k_1, \ldots, k_n - k_1$, $k_{n+1} - k_1$. Ovom nizu priključimo niz sledećih n različitih brojeva: $k_2, k_3, \ldots, k_n, k_{n+1}$. Sada imamo $2n$ prirodnih brojeva manjih od $2n$. Po Dirihleovom principu, među njima postoje dva jednaka broja. Jedan od njih je iz prvog, a jedan iz drugog niza. Neka su to brojevi $k_m - k_1$ i k_p. Tada iz $k_m - k_1 = k_p$, dobijamo: $k_m = k_1 + k_p$.

161. Pretpostavimo da je učenik prvog dana rešio n_1 zadataka, u toku prva dva dana n_2 zadataka, ..., u toku prvih 77 dana n_{77} zadataka. Uz niz različitih brojeva: $n_1, n_2, \ldots, n_{77}$, dodajmo novih 77 različitih brojeva: $n_1+20, n_2+20, \ldots, n_{77}+20$. (Različiti su, jer je učenik svakog dana rešio bar jedan zadatak.) U 77 dana ima 11 sedmica, pa je $n_{77} \leqslant 11 \cdot 12 = 132$, a $n_{77} + 20 \leqslant 152$. U ova dva niza ima 154 broja, pa kako su svi manji od 153, moraju postojati dva jednaka. Zato što su jednaki, moraju biti jedan iz prvog i jedan iz drugog niza. Neka su to n_p i $n_q + 20$. Tada iz $n_p = n_q + 20$, dobijamo: $n_p - n_q = 20$, što znači da je učenik u toku $(q+1)$-og, $(q+2)$-og, ..., p-og dana rešio ukupno 20 zadataka.

162. Neka su A, B, C, D, E, F temena konveksnog šestougla, slika desno. Uočimo duži AB, AC, AD, AE, AF. Ima ih 5, a obojene su dvema bojama. Dakle, moraju bar tri biti obojene jednom bojom. Neka su to AB, AC i AD, i neka su one "crvene". Ako bi bar jedna od duži BC, BD, CD bila "crvena", imali bismo "crveni" trougao sa temenom A. U suprotnom su duži BC, BD, CD "plave", pa imamo "plavi" trougao BCD.



163. Vidi rešenje prethodnog zadatka.

164. Pretpostavimo da Zoran ne poznaje nijednog takmičara. Tada, prema broju poznanika, učesnike možemo razvrstati u grupe onih koji imaju: 0, 1, 2, ..., 33 poznanika, ukupno 34 grupe. Kako takmičara ima 35, bar dva moraju biti u istoj grupi.

Ako svako poznaje bar jednog takmičara, onda ih možemo svrstati u grupe onih koji imaju: 1, 2, 3, ..., 34 poznanika, a to su ponovo 34 grupe. Isto važi za bilo koji broj učesnika, pa i za broj 7.

165. Uočimo razlike broja 1998 sa svakim od izabranih 501 različitih neparnih brojeva. To su novih 501 neparnih brojeva, koji su među sobom različiti. Sada imamo ukupno 1002 neparna broja. Ako od 501 brojeva dobijenih oduzimanjem, izuzmemo moguće brojeve 1997 i 999 (moguće je dobiti $1998 - 1 = 1997$ i $1998 - 999 = 999$), ostaje 1000 neparnih brojeva manjih od 1996, a takvih ima najviše 998 različitih. Sledi da među ovih 1000 moraju biti neka dva jednaka. Jedan od njih, označimo ga sa m, mora biti iz prvobitno odabranih, a drugi je neka razlika, recimo $1998 - n$, gde je $m \neq 999$, $n \neq 999$ i $m \neq 1$ (1997 i 999 su isključeni). Sada iz $1998 - n = m$, sledi $1998 = m + n$.

Skupovi i kombinatorika

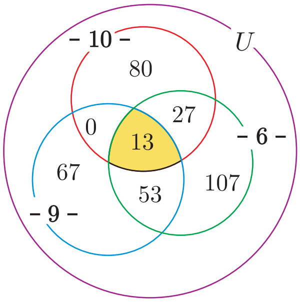
166. Iz $A \cap X = \{3, 4\}$ zaključujemo da $3 \in X$ i $4 \in X$, a brojevi 1, 2, 5, 6 i 8 nisu elementi traženog skupa. Zatim, iz skupa $B \cup X$ utvrdimo da su elementi skupa X i brojevi 7 i 9. Dakle $X = \{3, 4, 7, 9\}$.

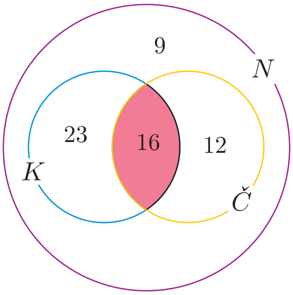
167. Uslov $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing$ je ekvivalentan sa: $(A \cup B) \cap C = \varnothing$, odakle sledi da je C disjunktan sa A i B, pa iz $C \setminus B = \{2, 4\}$, sledi da je $C = \{2, 4\}$, itd. Rešenje: $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{6\}$. (Koristi Ojler-Venove dijagrame.)

168. Slično prethodnom zadatku. Može biti $C = \{1,4\}$ ili $C = \{1,3,4\}$.

169. $S = \{b,e\}$.

170. Zadatak rešavamo pomoću dijagrama, sledeća slika levo. Sa U označili smo skup prvih 1200 prirodnih brojeva, sa **-10-** skup brojeva koji se završavaju nulom, sa **-6-** skup brojeva deljivih sa 6 i sa **-9-**, skup brojeva koji su deljivi sa 9. Na slici upišemo brojeve elemenata za svaki presek skupova. Prvo izračunamo broj elemenata obojenog dela. To je zajednički deo svih skupova i sadrži brojeve deljive sa 90 ($S(10,6,9) = 90$). Ovih brojeva ima 13 (jer je $1200 : 90 = 13, \ldots$). Zatim odredimo koliko ima. brojeva koji su deljivi sa 6 i 9, a nisu deljivi sa 10. Deljivih sa 6 i 9, a to znači deljivih sa 18 (jer je $S(6,9) = 18$), ima $1200 : 18$, tj. 66. Od njih $66 - 13$, tj. 53, nisu deljivi sa 10. Slično se odredi da su 27 brojeva deljivi sa 6 i 10, a nisu deljivi sa 9. Sada odredimo koliko je brojeva deljivo sa 6, a nije deljivo sa 9 i 10. Ima 200 brojeva deljivih sa 6, jer je $1200 : 6 = 200$. Od ovog broja oduzmemo 13, 53 i 27. Samo sa 6 je deljivo 107 brojeva, itd. Koristeći podatke sa slike, sada prebrojimo koliko je brojeva izbrisano: $13+53+27+0+107+80+67 = 347$. Ostala su neizbrisana 853 broja.





171. Na slici gore desno sa N smo označili skup svih nastavnika, sa K skup onih koji piju kafu, a sa $\check{C}$ skup nastavnika koji piju čaj. Sada prvo upišemo one koji piju i kafu i čaj (crveno obojeno na slici); njih je 16. Dalje popunjavamo sliku slično prethodnoj. Tako utvrdimo da 9 nastavnika ne pije ni kafu, ni čaj.

172. Slično prethodnom zadatku. a) 32 učenika; b) 5 učenika.

173. Slično **zadatku 170**. a) 56; b) 15; c) 40.

174. Slično **zadatku 170**. a) 5%; b) 45%.

175. Označimo sa K, F, R i O skupove učenika koji igraju redom košarku, fudbal, rukomet, odbojku. Tada uslov a) možemo zapisati sa: $(K \cup O) \subset F$, a uslov b) kao: $R \subset O$. Iz uslova b) sledi da je $R \cup O = O$, pa uslov a) prelazi u: $(K \cup R \cup O) \subset F$. Odavde sledi: $K \subset F$, $R \subset F$ i $O \subset F$, što znači da se fudbal igra najviše.

Uslov c) zapisujemo kao $(F \cap R) \subset K$. Međutim, iz $R \subset F$ sledi da je $F \cap R = R$, pa iz uslova c) dobijamo da je $R \subset K$. Prethodno smo već imali $R \subset O$, pa zaključujemo da se najmanje igra rukomet.

176. Tačke S, A i M određuju 3 duži: SA, SM i AM. Slično, trojke tačaka S, B, N, zatim S, C, P, pa S, D, Q, određuju, svaka po 3 duži, što iznosi $4 \cdot 3$, tj. 12 duži. Zatim, četvorka tačaka A, B, C i D, određuje 6 duži. To su: AB, AC, AD, BC, BD i CD. Takođe, četvorka tačaka M, N, P i Q, određuje 6 duži. Dakle, imamo ukupno 24 duži.

Trouglove inožemo prebrojati ovako: tačka S sa svakom od duži, koje određuju četvorke A, B, C i D, odnosno P, Q, R i S, određuje po jedan trougao. Prema tome, trouglova ima 12.

177. Duži su određene sa 6 trojki kolinearnih tačaka: (A, P, B), (B, M, C), (C, N, A), (A, O, M), (B, O, N), (C, O, P). Ukupno ima $6{\cdot}3$, tj. 18 duži, (Vidi rešenje prethodnog zadatka.)

Pored trougla ABC, sa temenom C, nad AB, imamo još 2 trougla: APC i BPC. Slično je i sa temenima A i B. To je, do sada, ukupno 7 trouglova. Uključujući tačku O, kao zajednički vrh, slično **zadatku 176**, nalazimo još 3 puta po 3, tj. još 9 trouglova. To je ukupno 16 trouglova.

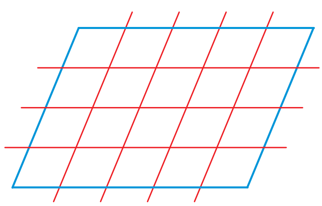
Četvorouglova ima 3. To su: $APON$, $BMOP$ i $CNOM$.

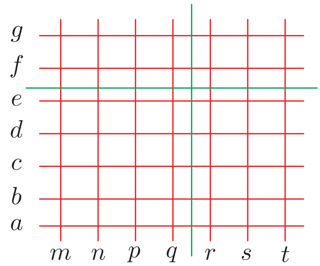
178. Ima 10 trouglova.

179. Duži ima 36 (tj. $6 \cdot 6$ - vidi rešenje **zadatka 176**). Ima tri romba. Svaki sadrži po dva naspramna, od šest, spoljašnjih temena,

180. Sa malo truda uočićete da kvadrata koji sadrže po jedno polje ima 64, tj. 8^2, kvadrata koji sadrže po 4 polja, ima 49, tj. 7^2, itd. Ukupan broj kvadrata je: $8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204$. (Vidi i sledeći zadatak.)

181. Prema slici dole levo, imamo 5 horizontalnih i 6 kosih pravih. Svake dve horizontalne prave, u preseku sa bilo koje dve kose prave, određuju jedan paralelogram. Od 5 horizontalnih pravih moguće je načiniti $\dfrac{5 \cdot 4}{2}$ parova. Od 6 kosih pravih moguće je načiniti $\dfrac{6 \cdot 5}{2}$ parova. Prema tome, ukupan broj paralelograma je $10 \cdot 15$, tj. 150.





182. Na slici gore desno sa: a, b, c, d, e, f, g, označili smo horizontalne prave, a sa: m, n, p, q, r, s, t, vertikalne prave, koje, kao u prethodnom zadatku, određuju sve moguće pravougaonike na ovoj figuri. Među ovim pravougaonicima, obe zelene linije seku pravougaonike, koje određuju 5 horizontalnih pravih (a, b, c, d,

e) sa dve horizontalne prave (f i g), kombinujući se sa parovima vertikalnih pravih (određenih kombinovanjem m, n, p, q sa r, s, t). Ovih, duplo sečenih pravougaonika ima $(5 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3)$, tj. 120.

183. Iz A u C može se stići na $5 \cdot 3$ načina, a za povratak ima $3 \cdot 4$ načina. Ukupan broj mogućnosti odlaska iz A u C i povratka u A ima $15 \cdot 12$, tj. 180.

184. Ispred cifre 4 može biti bilo koji dvocifren broj, a njih ima 90.

185. Druga, treća, četvrta i peta cifra mogu biti svaka od 10 raspoloživih cifara. Traženih šestocifrenih brojeva ima $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, tj. ima ih 10000.

186. Tražimo četvorocifrene brojeve koji imaju dve parne i dve neparne cifre. Od neparnih cifara možemo načiniti 10 dvojki sa različitim ciframa i 5 dvojki jednakih cifara: 13, 15, 17, 19, 35, 37, 39, 57, 59, 79 i 11, 33, 55, 77, 99. Slično računamo i parne dvojke. Svaka od prvih 10 neparnih sa svakom od prvih 10 parnih dvojki daje $10 \cdot 10$, tj. 100 četvorki različitih cifara, od kojih svaka daje po 24 broja. To je ukupno $100 \cdot 24 = 2400$ brojeva. Dalje, dve različite neparne sa dve jednake parne cifre formiraju $10 \cdot 5$, tj. 50 četvorki i isto toliko ima četvorki sa dve različite parne i dve jednake neparne cifre. Svaka od ovih četvorki formira po 12 traženih brojeva, što daje ukupno $2 \cdot 50 \cdot 12 = 1200$ brojeva. (Npr. od četvorke 1124 imamo sledeće brojeve: 1124, 1142, 1214, 1241, 1412, 1421, 2114, 2141, 2411, 4112, 4121, 4211.) Imamo još $5 \cdot 5$, tj. 25 četvorki, koje obrazuju dve jednake neparne sa dve jednake parne cifre. Svaka od njih daje po 6 brojeva, a to je ukupno $25 \cdot 6$, tj. 150 brojeva. (Na primer, od 1122 imamo brojeve: 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211.) Dakle imamo ukupno: $2400 + 1200 + 150 = 3750$ četvorocifrenih brojeva. Treba još izostaviti one koje počinju nulom, jer su to trocifreni brojevi. Sve su cifre ravnopravne, pa nulom počinje svaka deseta kombinacija. Takvih je 375. Dakle, traženih četvorocifrenih brojeva ima 3375.

187. Prvo lice ima 9 mogućnosti. Kada ono zauzme jednu stolicu, drugom preostaju 8 mogućnosti, itd. Ukupan broj mogućnosti je: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$.

188. Zbir cifara svakog od traženih brojeva mora biti 9. Takvih brojeva ima 16, a ispisujemo ih ciframa: 1, 2, 3, 3 ili 2, 2, 2, 3.

189. Ciframa 0, 1, 2, možemo zapisati $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$ petocifrena broja. (Nula ne može biti prva cifra.) Izračunajmo koliko među njima ima onih kojima su svake dve susedne cifre različite. Za prvu cifru imamo dve mogućnosti (1 ili 2). Svaka sledeća cifra ima dve mogućnosti (jer se prethodna cifra ne može ponoviti). Dakle, ovih brojeva ima: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, pa preostaju 130 brojeva, kojima su bar dve susedne cifre iste.

190. Prvi učenik može da se rasporedi na 3 načina, drugi takođe na 3 načina, a isto tako i ostala dva. Rezltat je: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ način.

191. Pošto se rukuje svako sa svakim, to je uz učestvovanje n lica bilo $\dfrac{n(n-1)}{2}$ rukovanja. U našem slučaju je $n(n-1) = 240 = 16 \cdot 15$. Sledi da je $n = 16$. Nikola je imao 15 gostiju.

192. Tri boje možemo rasporediti na 6 načina $(3 \cdot 2 \cdot 1)$. Zatim, možemo premeštati međusobno knjige iste boje. Ukupan broj razmeštaja je $6 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 6 = 1728$. (4 plave knjige mogu se međusobno raspoređivati na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina, itd.)

193. Čelni igrač je ili "plavi" ili "crveni", to su dve mogućnosti. Dalje se naizmenično pojavljuju: "plavi", "crveni", "plavi", ...Pet igrača u jednoj ekipi mogu se između sebe rasporediti na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina. Ukupan broj mogućnosti je: $2 \cdot 120 \cdot 120 = 28800$.

194. Na slici plavim kružićima označili smo dečake. Žuti kvadratići označavaju 5 mogućih mesta za raspoređivanje 3 devojčice. One se mogu rasporediti na svega $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. (Vidi rešenje **zadatka 187**.) Dečaci mogu da se rasporede na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Ukupan broj mogućnosti je $24 \cdot 60 = 1440$.

195. Slično prethodnom zadatku. Kad se skinu 3 slike, ostaće na zidu 5 (kao na prethodnoj slici, imamo pet plavih kružića). Slike koje skidamo mogu se naći na 6 mesta (6 žutih kvadratića kao na prethodnoj slici). Dakle, 3 slike možemo skinuti na $6 \cdot 5 \cdot 4$, odnosno na 120 načina.

196. Prvom licu možemo dati 2 predmeta na $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ načina. Od preostalih 7, drugom licu možemo dati 3 predmeta na $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ načina. Treće lice dobije 4 preostala predmeta. Svaki od 36 načina prve podele, kombinuje se sa svakim od 35 načina druge podele, pa je ukupan broj mogućnosti: $36 \cdot 35 = 1260$.

197. Slično **primeru C**. Rešenje je: 70 načina.

198. Kupovinu jedne kifle označićemo brojem 1. Ako kupimo dve kifle prve vrste, pišemo 11, itd. Zatim upisujemo jedinice za drugu kiflu, pa za treću. Da bismo znali na koje kifle se odnose upisane jedinice, između dve vrste kifla ubacimo razdvajajuću cifru, recimo 0. Ako neku vrstu kifle ne kupujemo, jednostavno ne pišemo nista. Tako ako smo napisali 10110, to znači da je Nada kupila 1 "praznu" kiflu i 2 sa sirom. Ili, broj 00111 označava da je kupila samo 3 kifle sa džemom. (Pre prve nule su "prazne" kifle, između dve nule kifle sa sirom i iza nula sa džemom.) U svakom slučaju izbor se zapisuje sa 3 jedinice i 2 nule, a takvih brojeva ima $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10$. (Vidi **primer B**.)

199. Moguća su tri slučaja.

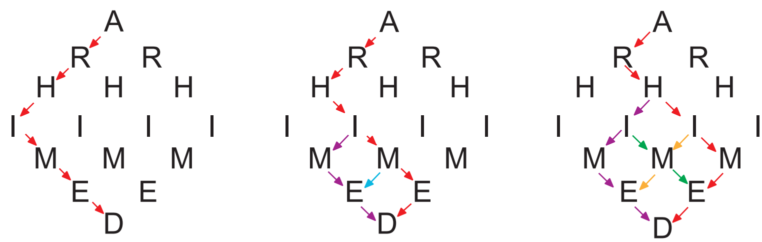
a) Zoran poziva 3 druga, a Maja 3 drugarice. Broj različitih slučajeva je: $4 \cdot 4 = 16$.

b) Zoran poziva 2 druga i 1 drugaricu, a Maja jednog druga i dve drugarice. Broj mogućnosti je $(6 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 6) = 144$.

c) Zoran poziva 1 druga i 2 drugarice, a Maja 2 druga i 1 drugaricu. Broj mogućnosti je $(4 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 4) = 16$.

Ukupan broj različitih mogućnosti je $16 + 144 + 16$, odnosno 176.

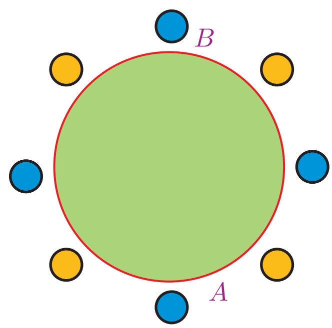
200. Na šemama dole prikazana su tri slučaja, koja mogu nastati kad prvi korak ide ulevo. Na šemi a), prvo skretanje udesno je od slova I. Tu imamo samo 1 mogućnost. Na šemi b), prvo skretanje udesno vrši se kod slova H. Sada iz slova I možemo levo (i do kraja nema novih mogućnosti) ili desno do slova M. U tom drugom slučaju, iz M opet imamo dva izbora. Na šemi b) ima, dakle, 3 mogućnosti. Na šemi c) prikazano je prvo skretanje udesno kod slova R. (Produžavanje levo daje prethodno razmatrane mogućnosti sa šeme a) i šeme b)). Sada iz H možemo levo (i do kraja imamo 3 mogućnosti) ili desno (i ponovo 3 mogućnosti). Na šemi c) imamo ukupno 6 mogućnosti. Do sada smo prebrojali $1+3+6 = 10$ mogućnosti. Isto toliko mogućnosti postoji ako je prvi korak udesno, od A ka desnom slovu R, itd. Prema tome, imamo ukupno 20 mogućnosti.



a) b) c)

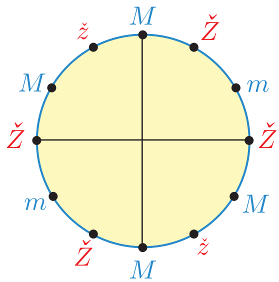
201. "Rasecimo sto" na mestu na koje treba da sedne jedan od državnika. Ostala četvorica mogu se rasporediti na preostala četiri mesta na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Savetovanje je završeno 24. januara.

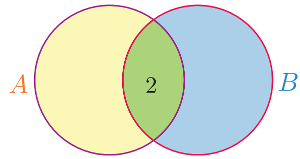
202. Da bi nasuprot svakog od 4 muškarca sedela žena, moraju se za stolom rasporediti tačno 4 žene, i to tako da između svake dve žene bude po jedan muškarac. Neka je AB jedan prečnik okruglog stola, slika desno. Ako je A muškarac, B je žena. Međutim, levo i desno od prečnika AB moraju sedeti po 3 osobe. No, tada B mora biti muškarac što protivreči uslovu da dijametralno suprotno muškarcu sedi žena. Dakle, šef sale nije uspeo da načini traženi raspored gostiju.



203. Broj osoba za stolom mora biti deljiv sa 3, jer imamo tročlane porodice, a mora biti parni broj, jer nasuprot svake osobe sedi osoba istog roda. Najmanji takav broj je 6, ali je tada nemoguće ispuniti treći uslov. Potrebno je najmanje 12 osoba. Raspored je prikazan na sledećoj slici levo. (M, $Ž$, m, $ž$ su oznake redom za: muža, ženu, muško dete i žensko dete.)

204. "Rasečemo sto" na mestu gde sedi jedan dečak i "razvijemo sto u niz". Dalje rešavamo slično **zadatku 194**. Ima 72 načina.





205. Slično **primeru A**, samo što se ovde ne zahteva da se među svake tri uzastopne osobe nalaze jedan nastavnik, jedan dečak i jedna devojčica. Ako bismo raspoređivali trojke: nastavnik, dečak, devojčica i to baš u tom redosledu, imali bismo $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ načina. Međutim, svaka od ovih trojki može da ima i raspored: nastavnik, devojčica, dečak. Svakom ovakvom promenom u jednoj trojci, broj mogućnosti se duplira. Za naše tri trojke broj mogućnosti se povećava $2 \cdot 2 \cdot 2$, tj. 8 puta. Dakle, imamo $72 \cdot 8$, tj. 576 mogućnosti.

206. Rešenje se razlikuje od **primera B**, jer su alke numerisane, dakle, nisu ravnopravne. Broj mogućnosti je: $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : 2$, što iznosi 1440.

207. Postavimo za okrugli sto jednu naspram druge Anu i Bobu, koje se ne poznaju. Označimo početnim slovima, sa A i B, skupove osoba koje se poznaju sa Anom, odnosno sa Bobom, poslednja slika. Unija ova dva skupa ima 98 osoba (isključene su Ana i Boba). Međutim, skup A sadrži najmanje 50 osoba, a isto tako i skup B. To je moguće samo ako presek ova dva skupa (na slici zeleno) sadrži bar 2 osobe. Postavimo te dve osobe za okrugli sto, jednu levo, jednu desno od Ane.

208. Zamislimo da vitezovi sede na temenima jednog konveksnog dvanaestougla. Tada je broj dvočlanih delegacija jednak broju dijagonala tog dvanaestougla. To je broj duži određenih sa 12 tačaka, umanjen za 12 (12 stranica mnogougla): $\dfrac{12 \cdot 11}{2} - 12 = 54$.

209. "Rasečemo sto" na mestu gde sedi ser Lanselot, pa rešavamo slično **zadatku 194**. U jednom slučaju nalazimo rešenje bez učešća ser Lanselota. Tada dolaze u obzir i njegovi susedi, tj. od 11 vitezova biramo 3, ali tako da među izabranima nema suseda. To možemo učiniti na $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6}$, tj. na 84 načina. U drugom slučaju, kada ser Lanselot učestvuje u oslobađanju princeze, njegovi susedi ne dolaze u izbor, pa od 9 biramo 2 koji nisu susedi. To se može učiniti na $\dfrac{8 \cdot 7}{2}$, tj. na 28 načina. Dakle, oslobodioce možemo izabrati na 112 načina $(84 + 28)$.

210. Ako bi bar dva suseda govorila uvek istinu, onda bi prvi od njih rekao da njegov sused ne laže. Ako bi bar dva suseda bili lažovi, tada bi opet prvi rekao da njegov sused ne laže. (On zna da je sused lažov, ali, pošto i sam laže, neće to reći.) Prema odgovorima koje su dali strancu, jasno je da su vitezovi za stolom raspoređeni naizmenično: lažov, istinoljubiv, lažov, itd. U tom slučaju, jednih ima

7, a dugih 6. Otuda je jasno da: je Merlin lažov, jer ne može biti jednih za 3 više od drugih. Iz prve izjave Merlina sledi da je i kralj Artur lažov. Lažova ima 7, a istinoljubivih 6.

211. Ima deset različitih slova, što znači da se među nepoznatim jednocifrenim brojevima nalazi i nula. Imenilac ne može biti jednak nuli. Znači, brojilac je jednak nuli, pa je i vrednost razlomka nula.

212. Videti **zadatke 83** i **84**. Prvi broj je $\frac{3456}{36} = 96$ ili $\frac{3852}{36} = 107$, a drugi $\frac{4275}{45} = 95$ ili $\frac{4770}{45} = 106$.

213. a) $\frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 9}{17 \cdot 9} = \frac{117}{153} > \frac{117}{154}$.

b) $\frac{1}{181} = \frac{11}{181 \cdot 11} = \frac{11}{1991} > \frac{11}{1996}$.

c) $\frac{1994}{1995} = 1 - \frac{1}{1995}$, a $\frac{1995}{1996} = 1 - \frac{1}{1996}$. Kako je $\frac{1}{1995} > \frac{1}{1996}$, to je $1 - \frac{1}{1995} < 1 - \frac{1}{1996}$, tj. $\frac{1994}{1995} < \frac{1995}{1996}$.

214. $\frac{1919}{9696} = \frac{19 \cdot 101}{96 \cdot 101} = \frac{19}{96}$ i $\frac{191919}{969696} = \frac{19 \cdot 10101}{96 \cdot 10101} = \frac{19}{96}$. Sva tri razlomka su jednaka.

215. Neka je $\frac{a}{b}$ traženi broj. Treba izabrati što manje a i što veće b, i da su $\frac{a}{b} : \frac{35}{396}$ i $\frac{a}{b} : \frac{28}{297}$ celi brojevi. Drugim rečima, treba da budu celi $\frac{a}{b} \cdot \frac{396}{35}$ i $\frac{a}{b} \cdot \frac{297}{28}$. Tražimo najmanji broj a, koji je deijiv sa 35 i 28, a to je $S(35,\ 28) = 140$ i najveći broj b, kojim mogu da se podele 396 i 297, a to je $D(396,\ 297) = 99$. Traženi broj je $\frac{140}{99}$.

216. Slično prethodnom zadatku: $a = D(8, 12, 20) = 4$ i $b = S(15, 35, 21)$, tj. $b = 105$, pa je traženi broj: $\frac{a}{b} = \frac{4}{105}$.

217. $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ i $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$, odnosno $\frac{3}{4} = \frac{90}{120}$ i $\frac{4}{5} = \frac{96}{120}$. Jedno od rešenja je, dakle: $\frac{91}{120}, \frac{92}{120}, \frac{93}{120}, \frac{94}{120}, \frac{95}{120}$, tj. $\frac{91}{120}, \frac{23}{30}, \frac{31}{40}, \frac{47}{60}$ i $\frac{19}{24}$.

218. Traženi razlomci su: $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ i $\frac{7}{8}$.

219. Iz $\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5}$, tj. iz $\frac{5}{15} < \frac{3-3n}{15}$, dobijamo $3 - 3n > 5$, pa je $n < -\frac{2}{3}$. Zatim, iz $\frac{1-n}{5} < \frac{11}{12}$, tj. iz $\frac{12-12n}{60} < \frac{55}{60}$, dobijamo $12 - 12n < 55$, odakle je $n > -\frac{43}{12}$. Sledi da je $-\frac{43}{12} < n < -\frac{2}{3}$, tj. $n = -1$, ili $n = -2$ ili $n = -3$.

220. Uzimajući recipročne vrednosti, dobijamo nejednakost: $\frac{194}{3} < p < \frac{145}{2}$, tj. $64 < p < 73$. Traženi prosti brojevi su 67 i 71.

221. Na desnoj strani jednakosti imenilac je 35, pa je $a = 5$. Tada imamo: $\frac{14+5b}{35} = \frac{30+c}{35}$, odakle je $14 + 5b = 30 + c$, tj. $5b = c + 16$. Jednocifreni brojevi koji zadovoljavaju ovu relaciju su: $b = 4$, $c = 4$ ili $b = 5$, $c = 9$.

222. Iz date jednakosti dobijamo: $\frac{6}{y} = 10 - x^2$. Kako je vrednost izraza na desnoj strani $(10 - x^2)$ celi broj, sledi da je i $\frac{6}{y}$ celi broj. Dakle: $y \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$. Odgovarajuće vrednosti za $x^2 = 10 - \frac{6}{y}$ su redom: 16, 4, 13, 7, 12, 8, 11, 9. Onda je $x^2 \in \{16, 4, 9\}$, pa je $x \in \{-4, 4, -2, 2, -3, 3\}$. Traženi parovi (x, y) su: $(-4, -1)$, $(4, -1)$, $(-2, 1)$, $(2, 1)$, $(-3, 6)$, $(3, 6)$.

223. $\frac{1\cdot2\cdot4 + 2^3\cdot1\cdot2\cdot4 + 3^3\cdot1\cdot2\cdot4 + \cdots + 100^3\cdot1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot9 + 2^3\cdot1\cdot3\cdot9 + 3^3\cdot1\cdot3\cdot9 + \cdots + 100^3\cdot1\cdot3\cdot9} =$
$\frac{1\cdot2\cdot4(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3)}{1\cdot3\cdot9(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3)} = \frac{1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot9} = \frac{8}{27}$.

224. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Koristeći se ovom jednakošću, izračunaćemo izraze a) i b).

a) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{97\cdot98} + \frac{1}{98\cdot99} + \frac{1}{99\cdot100} =$
$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

b) $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} = \frac{1}{4\cdot5} + \frac{1}{5\cdot6} + \frac{1}{6\cdot7} + \frac{1}{7\cdot8} + \frac{1}{8\cdot9} + \frac{1}{9\cdot10} =$
$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{5}{20} - \frac{2}{20} = \frac{3}{20}$.

225. Uočimo da je $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \ldots, \frac{97}{98} < \frac{98}{99}$, $\frac{99}{100} < \frac{100}{101}$. Zbog toga je $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{100}{101}$. Neka je $x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot97\cdot99}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot98\cdot100}$. Poslednja nejednakost daje: $x < \frac{1}{101x}$. Odavde je $x^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$, pa iz $x^2 < \frac{1}{100}$ dobijamo $x < \frac{1}{10}$.

226. Kad je Novica dobio $\frac{1}{10}$, ostalo je $\frac{9}{10}$ torte. Ilija je dobio $\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ torte, pa je Milica dobila $\frac{1}{8}$ od $\frac{8}{10}$, tj. $\frac{1}{10}$ torte. Takođe su Dara i Milan dobili po $\frac{1}{10}$ torte, pa je za Radmilu i njenu decu ostalo pola torte.

227. Loptica odskoči do visine x mm, ako je prethodno bila na visini $\frac{4}{3}x$ mm. Prema tome, ako je u trećem odskoku imala visinu 648 mm, onda je početna visina $\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot 648$ mm, odnosno 1536 mm. Četvrti odskok je $\frac{3}{4}\cdot 648$, a peti $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 648$, tj. 364,5 mm.

228. Iz uslova dobijamo jednakosti: $b+c=\frac{5}{2}$, $a+c=\frac{59}{16}$ i $a+b=\frac{5}{3}$. Saberemo ove tri jednakosti i dobićemo: $2(a+b+c)=\frac{5}{2}+\frac{59}{6}+\frac{5}{3}=14$, pa je $a+b+c=7$. Dalje je: $a=7-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$, $b=7-\frac{59}{6}=-\frac{17}{6}$ i $c=7-\frac{5}{3}=\frac{16}{3}$.

229. Neka su A i B ta dva broja. Iz uslova nalazimo: $\frac{5}{12}(A-B)=\frac{3}{8}$. Odavde je $A-B=\frac{3}{8}:\frac{5}{12}=\frac{3}{8}\cdot\frac{12}{5}=\frac{9}{10}$, pa je $\frac{4}{7}A-\frac{4}{7}B=\frac{4}{7}(A-B)=\frac{4}{7}\cdot\frac{9}{10}=\frac{18}{35}$.

230. Za jedan minut prva cev napuni $\frac{1}{15}$ bazena, druga $\frac{1}{20}$ i treća $\frac{1}{30}$. Sve tri zajedno za jedan minut napune $\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{3}{20}$ bazena. Znači, ceo bazen će se napuniti za $\frac{20}{3}$ minuta, odnosno za 6 minuta i 40 sekundi, ako ga pune sve tri cevi istovremeno.

231. Označimo cene tašne, knjige i olovke sa t, k i o. Tada važe jednakosti: $\frac{t}{5}+\frac{k}{2,5}+\frac{o}{2}=1600$ i $\frac{t}{2}+\frac{k}{3}+\frac{o}{4}=2400$. Pomnožimo prvu jednačinu sa 10, drugu sa 12 i dobijemo: $2t+4k+5o=16000$ i $6t+4k+3o=28800$. Saberemo ove dve jednačine i dobijemo: $8(t+k+o)=44800$, pa je $t+k+o=5600$ dinara. Toliko treba platiti za tašnu, knjigu i olovku.

232. Ako jedan broj x oduzmemo brojiocu i dodamo ga imeniocu, zbir brojioca i imenioca neće se promeniti. Ako sa k označimo broj kojim je dobijeni razlomak skraćen, imaćemo uslov: $2k+3k=1997-x+1998+x=1997+1998$, tj. $5k=3995$, pa je $k=799$. Pre skraćivanja imali smo: $\frac{2k}{3k}=\frac{1598}{2397}=\frac{1997-399}{1998+399}$. Broj 399 je oduzet brojiocu i dodat imeniocu.

233. Prema uslovu, treba da budu $\frac{25*3-x}{6776-x}=\frac{4k}{13k}$, gde je x traženi broj. Oduzmimo brojilac od imenioca. Dobićemo jednakost: $6776-25*3=9k$, gde je k celi broj. Da bi leva strana bila deljiva sa 9, moramo $*$ zameniti cifrom 7, pa dobijemo: $6776-2573=9k$, odnosno $4203=9k$. Dakle, $k=467$. Sledi da je $\frac{4k}{13k}=\frac{1868}{6071}=\frac{2573-x}{6776-x}$, odakle je traženi broj $x=705$. (To je $2573-1868$, odnosno $6776-6071$.)

234. Duško je dolio mleko tri puta: $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ šoljice, a to je puna šoljica. Dakle, popio je jednake količine mleka i kafe.

235. Puna šolja sadrži V cm^3 mleka. Kada je Nikola popio $\frac{1}{5}$ mleka i dopunio kafom, dobili smo: $V = \frac{4}{5}V$ mleka $+\frac{1}{5}V$ kafe. Pošto je ponovo otpio $\frac{1}{5}$ šolje $\left(\frac{1}{5}V\right.$ bele kafe$\left.\right)$ i dolio kafu, imamo: $V = \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}V \text{ mleka } +\frac{1}{5}V \text{ kafe}\right) +\frac{1}{5}V$ kafe, odnosno $\left(\frac{16}{25}V \text{ mleka } +\frac{9}{25}V \text{ kafe}\right)$. Kada je Nikola treći put popio $\frac{1}{5}$ šoljice (bele kafe), u šoljici je ostalo $\frac{4}{5}\left(\frac{16}{25}V \text{ mleka } +\frac{9}{25}V \text{ kafe}\right) = \left(\frac{64}{125}V \text{ mleka } +\frac{36}{125}V \text{ kafe}\right)$. Mleka ima za $\frac{28}{125}V$ više nego kafe, a to je po uslovu 28 cm^3, tj. $\frac{28}{125}V = 28$ cm^3. Odavde zaključujemo da je zapremina šolje 125 cm^3.

236. Kada bi svih 39 boca bilo od $\frac{4}{5}$ litra, imali bismo $39 \cdot \frac{4}{5} = 31\frac{1}{5}$ litara soka, što je za $\frac{6}{5}$ litara više. Ako jednu veću bocu zamenimo manjom, količina soka se smanji za $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$ litra. Prema tome, uzeto je $\frac{6}{5} : \frac{1}{20} = 24$ manje boce.

237. Slično **zadatku 230**. Za 48 minuta napuni se: $48 \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) = \frac{4}{5}$ kade. Kada se nije prelila.

238. Iz prve cisterne uzeto je $\frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8}$ tečnosti, što iznosi $\frac{5}{12}$ od ukupnog kapaciteta veće cisterne. Za drugu, duplo manju cisternu, to je $\frac{5}{6}$ zapremine. Znači, $\frac{1}{6}$ manje cisterne iznosi 24 litra, pa je manja cisterna od $6 \cdot 24$, tj. od 144 litra, a veća od 288 litara.

239. Označimo sa a, b i c količine jabuka u ove tri gajbe. Tada je $\frac{a}{3}+\frac{3b}{5}+\frac{3c}{4} = 160$. Kako je $a + b + c = 300$, to je $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 100$. Oduzimanjem treće od prve jednakosti dobićemo: $\frac{a}{3} + \frac{3b}{5} + \frac{3c}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3} = 60$, odnosno $\frac{4b}{15} + \frac{5c}{12} = 60$. Pomnožimo ovu jednačinu sa $\frac{3}{2}$ i dobićemo: $\frac{2}{5}b + \frac{5}{8}c = 90$ jabuka, što se i tražilo.

240. $\frac{2}{7}$ vode teži $\frac{1}{4}$ kg, pa ukupna količina vode teži $\frac{7}{8}$ kilograma, odnosno 875 grama. Sud ima masu 125 grama.

241. U sudu A ima 15 litara tečnosti, od čega je $\frac{7}{15}$ vode. Slično, $\frac{9}{20}$ tečnosti iz suda B je voda. Kad iz suda A izvadimo 7 litara tečnosti, tu će biti $7 \cdot \frac{7}{15}$, odnosno $\frac{49}{15}$ litara vode, a u sudu A će ostati $\frac{56}{15}$ litara vode. Slično izračunamo: iz suda B

je izvađeno $\frac{63}{20}$ litara vode, a u sudu je ostalo $\frac{117}{20}$ litara. Posle presipanja iz jednog u drugi sud, u sudu A će biti $6\frac{53}{60}$, a u sudu B ima $9\frac{7}{60}$ litara vode.

242. $\frac{3}{8}$ jabuka i $\frac{3}{10}$ krušaka iznose 60 kg, a tri puta veće količine, tj. $\frac{9}{8}$ jabuka i $\frac{9}{10}$ krušaka iznose 180 kg. Ovde je $\frac{1}{8}$ jabuka višak, a $\frac{1}{10}$ krušaka manjak, pa ako oduzmemo $\frac{1}{8}$ jabuka i dodamo $\frac{1}{10}$ krušaka, ukupna količina kilograma neće se promeniti. Dakle, $\frac{1}{8}$ jabuka i $\frac{1}{10}$ krušaka imaju istu masu. Znači, jabuka je bilo 80 kg, a krušaka 100 kg.

243. Vladi je ostalo $\frac{2}{5}$, odnosno $\frac{4}{10}$ sume koju je dobio, a Lazaru je ostalo $\frac{4}{7}$ njegovog dela. Dakle, $\frac{1}{10}$ Vladinog dela je jednaka $\frac{1}{7}$ Lazarevog dela. Vlada je dobio $10 \cdot \frac{816}{17}$, tj. 480 dinara, a Lazar 336 dinara.

244. Slično prethodnom zadatku, zaključimo da je $\frac{1}{12}$ Zoranovog dela jednaka $\frac{1}{10}$ Dušanovog dela i $\frac{1}{15}$ Nikolinog dela. Dakle, $\frac{Z}{12} = \frac{D}{10} = \frac{N}{15} = x$, pa je $Z = 12x$, $D = 10x$ i $N = 15x$. Onda je $Z + D + N = 12x + 10x + 15x = 37x = 2220$. Odavde je $x = 60$ dinara. Zoran je poneo 720 dinara, Dušan 600 dinara i Nikola 900 dinara.

245. Luka je kucao tekst 320 minuta, a Filip 280 minuta. Brzine kucanja se odnose kao $\frac{1}{320} : \frac{1}{280} = 7 : 8$. Znači, od 15 strana Luka otkuca 7, a Filip 8. Kako je Filip otkucao 3 strane više, to znači da je Luka otkucao 21 stranu, a Filip 24 . strane. Ceo tekst je 45 strana.

246. a) Jednu jabuku treba iseći na dvanaesetine i 6 jabuka na polovine.

b) Četiri jabuke treba iseći na trećine, a tri na četvrtine.

247. Iz presipanja zaključujemo da polovini drugog suda odgovaraju $\frac{2}{3}$ trećeg, tj. $\frac{4}{3}$ trećeg suda odgovaraju drugom sudu. Sledi da $\frac{5}{3}$ trećeg suda odgovara prvom sudu, itd. Rešenje je: prvi sud je od 50 litara, drugi od 40 i treći od 30.

248. Uočimo da je:

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}.$$

Dakle: $x = 1$, $y = 5$ i $z = 2$.

249. Računamo unazad! Na kraju su svi imali po x zlatnika. Pre nego što je četvrti gusar podelio zlatnike ostalim, imali su: prvi $\frac{x}{2}$, drugi $\frac{x}{2}$, treći $\frac{x}{2}$ i četvrti

$\frac{5x}{2}$. Pre nego što je treći podelio svoje zlatnike imali su: prvi $\frac{x}{4}$, drugi $\frac{x}{4}$, treći $\frac{9x}{4}$ i četvrti $\frac{5x}{4}$, itd. Pre nego što je prvi podelio svoje zlatnike imali su: prvi $\frac{33x}{16}$, drugi $\frac{17x}{16}$, treći $\frac{9x}{16}$ i četvrti $\frac{5x}{16}$. Dakle $x = 16$, pa su na početku imali: prvi 33 zlatnika, drugi 17, treći 9 i četvrti 5.

250. Trčeći napred pešak će pretrčati još $\frac{3}{8}$ dužine mosta do trenutka kada automobil stigne u tačku A. Preostalu četvrtinu dužine mosta, to je $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$, pešak će pretrčati dok automobil pređe ceo most. Dakle, automobil se kreće četiri puta brže od pešaka, pa pešak trči brzinom od 15 km/h.

251. Poznato je, ako je s put, v brzina i t vreme, onda je $t = \frac{s}{v}$. Ako se brzina poveća za 50%, nova brzina će biti $v_1 = 1,5v$, pa je novo vreme $t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{1,5v} = \frac{1}{1,5}t = 0,67t$. Znači, vreme putovanja se smanji za približno 33%.

252. Neka je k dužina Nemanjinog koraka. Tada je Nikolin korak dužine $0,9k$. Ako je Nemanja do škole načinio n koraka, tada je Nikola načinio $1,1n$ koraka. Nemanja je do škole prešao put dužine $k \cdot n$, a za to vreme je Nikola prešao $0,9k \cdot 1,1n = 0,99kn$. Znači, Nemanja je stigao prvi.

253. Neka je k ukupna količina robe, a c nabavna cena i x cena po kojoj treba prodati ostatak robe. Ostatak je $k - \frac{k}{6} - \frac{k}{2} = \frac{k}{3}$. Na prodatoj robi je ostvaren prihod: $\frac{k}{6} \cdot 1,2c + \frac{k}{2} \cdot 0,9c = 0,65kc$, što znači da ostatak treba prodati za $0,35kc$. Dakle, treba da je $\frac{k}{3} \cdot x = 0,35kc$, odnosno $k \cdot x = 1,05kc$. Odavde je $x = 1,05c$, što znači da cena za ostatak robe treba da bude za 5% veća od nabavne cene.

254. Na polugodištu ima devojčica za 10 više nego dečaka, a to je 2% od ukupnog broja učenika u školi (51% devojčica i 49% dečaka). Znači da je na polugodištu bilo 500 učenika. Na početku školske godine bilo ih je za 20 manje i to 240 dečaka i 240 devojčica.

255. U 40 litara morske vode ima 2 kg soli ($40 \cdot 0,05 = 2$). Ova 2 kg će predstavljati 2% u rastvoru od 100 litara. Treba doliti još 60 litara vode.

256. U 420 g rastvora ima $420 \cdot 0,2 = 84$ g soli. U novom rastvoru, na 300 g, ova so predstavlja deo $84 : 300 = 0,28$. Dakle, sada imamo 300 g rastvora sa 28% soli.

257. Od svežeg grožđa dobijamo suvo grožđe isparavanjem vode. “Suva materija” ostaje u istoj količini. U suvom grožđu “suva materija” predstavlja 88%. Na 16 kg, to je $16 \cdot 0,88$ kg $= 14,08$ kg. Ova ista količina je 20% od mase svežeg grožđa. Dakle, svežeg grožđa treba pet puta više, tj. $5 \cdot 14,08$ kg $= 70,4$ kg.

258. Slično prethodnom zadatku. Kod svežih jagoda je 9% "suve materije", što iznosi 9 kg. Zbog isparavanja, ovih 9 kg čine 10% jagoda, što znači da je sada 90 kg jagoda. (10 kg je isparilo.)

259. Pretpostavimo da je cena lopte 100 dinara. Trebalo je da Ivan plati 25 dinara. Kad je došao Marko, Ivanov deo se smanjuje na 20 dinara. Ušteda je 5 dinara, a to je petina od 25 dinara, odnosno 20%.

260. Označimo sa x broj članova grupe. "Sedmaka" je manje od 30%, tj. manje od $0,3x$. Kako su Aca i Nemanja "sedmaci", to je $0,3x \geqslant 2$, odakle je $x \geqslant 6,6$. Najmanji broj članova grupe je 7.

261. Ako je ranije broj posetilaca bio n, prihod je iznosio $180n$. Kad se broj n uvećao za 50%, tj. kad se povećao na $1,5n$, sa novom cenom x, prihod se povećao za 25%, pa iznosi: $1,25 \cdot 180n = 225n$. Dakle: $1,5n \cdot x = 225n$. Odavde je nova cena $x = 150$ dinara.

262. Cena preostalog dijamanta iznosi 0,64% od cene celog komada i kako je srazmerna kvadratu mase, zaključujemo da ostatak predstvlja 0,8 od prvobitne mase dijamanta. Komadić koji se odlomio predstavlja 20% prvobitne mase dijamanta.

263. 12% od 2000 g, tj. od mase napunjene posude iznosi $0,12 \cdot 2000$ g, odnosno 240 g, a to predstavlja 20% mase vode. Vode ima $5 \cdot 240$ g $= 1200$ g. Prazna posuda ima masu 800 g.

264. Označimo sa x, $x < 1$, deo posude koji je ispunjen 85-procentnim rastvorom alkohola. Neispunjeni deo je $(1 - x)$. Posle prvog dolivanja u posudi je bilo $85x + 21(1 - x) = 64x + 21$ procenata alkohola. Posle odlivanja broj procenata se smanji za $(1 - x)(64x + 21)$ i iznosi: $64x + 21 - (1 - x)(64x + 21) = 64x^2 + 21x$. Novim dolivanjem broj procenata alkohola se poveća za $21(1-x)$ i iznosi 70. Dakle: $64x^2 + 21x + 21(1 - x) = 70$. Odavde je $64x^2 = 49$, pa je $x = \dfrac{7}{8}$. Pre prvog dolivanja bilo je ispunjeno $\dfrac{7}{8}$ posude.

265. Ako je u šest odeljenja bilo n učenika, onda ih je u ostalim odeljenjima bilo za $0,15n$ više. Broj $0,15n$ je ceo, pa n mora biti deljivo sa 20 (jer je 20 najmanji broj, takav da je $0,15n$ celi broj). Mora n biti deljiv sa 6 (zbog jednakog broja učenika u šest odeljenja), veći od 150 i manji od 200. To je zapravo broj 180. U školi je bilo 387 učenika.

266. Prognoze su: A: $ABDC$ B: $BACD$ C: $CBDA$ D: $DCBA$

Sva četiri učenika su različito prognozirala pobednika trke, što znači da je neko sigurno pogodio ko je prvi, a ostala mesta niko nije pogodio. Vidimo da niko nije predvideo da će D biti drugi, niti da će A biti treći, niti da će B biti četvrti. Dakle, redosled na kraju trke bio je: $CDAB$.

267. Olovka A je plava, B je crvena i C je bela.

268. Pošto u trećoj kutiji nije ni bela, ni zelena, sledi da je u njoj crna kuglica. U prvoj nije bela, nego zelena, a u drugoj nije crna, nego bela.

269. Treba izvući kuglicu iz sive kutije, itd.

270. Nada je sportista, Vera rukovodi sekcijom za matematiku, a Lidija sekcijom za hemiju.

271. Odgovor je negativan. Zamislimo da su kockice sira obojene crno-belo, i to tako da su svakoj beloj susedne crne kockice, a svakoj crnoj bele kockice. Ako su, na primer, kockice u temenima velike kocke bele, tada je centralna kockica crna. Miš počinje da gricka belu kockicu i dalje jede crnu, pa belu, pa crnu, i tako do kraja. Znači, svaka neparna pojedena kockica je bela, a centralna je 27 – a, dakle neparana, a crna je.

272. Moguće je! Na prvi zvižduk učenik broj 1 ostaje na mestu, a zamene se 2 i 40, 3 i 39, itd, 20 i 22, a broj 21 ostane na mestu. Dobijemo nov raspored: 1, 40, 39, ..., 3, 2. Na drugi zvižduk se zamene: 1 i 40, 2 i 39, 3 i 38, itd. Dobijemo traženi redosled.

273. a) Primenimo Dirihleov princip: treba izvući najmanje 7 kuglica.

b) Može se desiti da najpre izvučemo sve plave i sve crvene. Treba, dakle, izvući najmanje $1997 + 1998 + 3$, tj. 3998 kuglica.

c) $1998 + 1997 + 1 = 3996$.

274. Prvo je pojeden miš broj 2. Ovo možemo odrediti računanjem unazad, tj. ako krenemo od belog miša, i brojimo u suprotnom smeru brišući svakog petog.

275. Marko je trećinu doručka platio 8 dinara, pa je vrednost celog doručka 24 dinara, što znači, svaka riba vredi 3 dinara. Nenad je ulovio za 9 dinara, a pojeo je za 8 dinara. Stoga njemu pripada 1 dinar, a Predragu 7 dinara (ulovio za 15 dinara, a za 8 jeo).

276. Od 1. januara do 1. aprila ima 90 dana ili 91 dan, zavisno od toga da li godina nije ili jeste prestupna. Ako je 1. januara i 1. aprila bio četvrtak, tada je broj dana između ova dva datuma deljiv sa 7. To je broj 91, pa imamo prestupnu godinu. Ona ima 52 nedelje i još 2 dana. Kako je 2. januar bio petak, to znači da u toj godini ima 53 petka, a svaki mesec ima 4 ili 5 petaka. Znači 5 meseci je bilo sa 5 petaka i 7 sa 4 petka.

277. Datumi između dve susedne subote se razlikuju za 7, pa smo između tri parne imali i 2 neparne subote, ukupno 5 subota. Prva mora biti parna, što je moguće jedino ako je to 2. dana u mesecu. Zbog toga je 25. dan pao u ponedeljak.

278. Zapišimo pretpostavke na sledeći način:

Zoran: 5 7 4 6 9 8;

Maja: 7 8 6 9 4 5;

Milica: 4 5 6 7 8 9.

Kako se Zoranova i Majina pretpostavka ne poklapaju ni u jednoj cifri, to znači da su oni pogodili po 3 različite cifre. Zbog toga je cifra, koju je pogodila Milica na istom mestu kao kod Zorana ili kao kod Maje. Vidimo da je to cifra 6 kod Maje. Znači, Zoran nije pogodio četvrtu cifru, pa je pogodila Maja – to je cifra 9, itd. Traženi broj je 576948.

279. Olja ima 4 prababe i svaka od njih ima po 4 prababe. Dakle, rešenje je: 16 prababa.

280. Dati zbir može da se napiše u obliku:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}) - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{100}),$$

a to je jednako nuli, jer je zbir u prvoj zagradi (tj. zbir vrsta) jednak zbiru svih 10000 upisanih brojeva, a toliki je i zbir u drugoj zagradi (zbir kolona).

281. Uočimo iz svake škole po jednog učenika i pretpostavimo da je prvi rešio 1 zadatak, drugi 2 zadatka, treći 3 zadatka, itd, i na kraju, osmi je rešio 8 zadataka. U tom slučaju, ovih osam učenika rešilo je ukupno 36 zadataka. Onda je od naših 22 učenika preostalo još 14, a kako je rešeno ukupno 50 zadataka, izlazi da su ovih četrnaest učenika rešili tačno 14 zadataka, svaki po 1 zadatak. Konačno, po jedan zadatak rešilo je 15 učenika.

282. Prvi igrač treba da uzme iz kutije C 3 kuglice, tako da kutije sadrže redom 3, 2, 1 kuglicu. Ma kako odigrao drugi, prvi igrač će udesiti da posle njegovog drugog poteza jedna kutija ostane prazna, a u drugim dvema je isti broj kuglica. Posle toga prvi sigurno pobeđuje.

283. Računaćemo unazad. Pre prolaska kroz šestu kapiju Carević je morao imati $2 \cdot (1 + 1)$, tj. 4 zlatnika. (Oduzeli su mu pola od 4 i još 1, tj. 3 zlatnika.) Pre prolaska kroz petu kapiju imao je $2 \cdot (4 + 1)$, tj. 10 zlatnika, itd. Pre prolaska kroz prvu kapiju Carević je imao 190 zlatnika.

284. Slično prethodnom zadatku, računamo unazad. Pre ulaska u četvrti restoran Mića je imao 3 dinara (platio je garderobu 1 dinar, potrošio pola od 2 dinara, tj. 1 dinar i preostalim, poslednjim dinarom, častio je konobara), itd. Kad je krenuo u veselje, Mića je imao 45 dinara.

285. Suzana je u Parizu provela prvi dan u mesecu, jer ako taj utorak nije prvi dan u mesecu, onda je on prvi utorak posle prvog ponedeljka. Onda bi Suzana provodila dan istovremeno u Parizu i na Floridi, što je nemoguće. Isto tako, Suzana je prvi dan sledećeg meseca provela u Beogradu. Dakle, dva uzastopna meseca počinju redom utorkom, pa sredom, što je moguće samo ako prvi mesec ima 29 dana. Sledi zaključak da je bila prestupna godina, kad februar ima 29 dana, a prvi mart je u sredu. Dakle, Suzana je 8. mart provela u Ulcinju (prva sreda posle prvog utorka).

286. Mika je propustio priliku da zaradi još 700 dinara. Toliko vredi polovina posla. Znači, kosa vredi 400 dinara.

287. Nije teško uveriti se da je turnir započelo 10 šahista. U prvih 5 kola je odigrano $5 \cdot 5$, tj. 25 partija. Ako su Fića i Šonsi odigrali partiju između sebe, onda je u preostala 4 kola odigrano još 12 partija, a to bi bilo 37 partija ukupno. Ako Fića i Šonsi nisu igrali međusobno, onda u jednom od preostalih kola treba da se odigraju 4 partije, pa je u zadnja 4 kola odigrano 13 partija. To bi bilo 38 partija ukupno $(25 + 13)$, kao što je i zadato. Dakle, Fića i Šonsi nisu igrali međusobno.

288. Četiri poslednja igrača su odigrala međusobno 6 partija, pa su zajedno osvojili bar 6 poena. Zbog toga je drugoplasirani učesnik osvojio 6 ili više od 6 poena. Međutim, svaki igrač je odigrao po 7 partija. Drugoplasirani, ako ima više od 6 poena, mora pobediti sve slabije plasirane igrače (njih šest), a prvoplasiranog pobediti ili s njim remizirati. To nije moguće, jer bi tada prvoplasirani imao manji ili jednak broj poena u odnosu na drugoplasiranog. Ovo se nikako ne može uklopiti, pa sledi da je drugoplasirani osvojio tačno 6 poena. Samim tim, četiri poslednja igrača su osvojila ukupno 6 poena, pa su izgubili sve partije odigrane sa prva četiri igrača. Prema tome, treći je pobedio sedmog.

289. Kako 188 nije deljivo sa 3, to ćemo posao podeliti ravnomerno na 3 čoveka, na sledeći način. Najpre prva dva čoveka oboje po četiri strane na dve kocke i ostave ih trećem da dovrši njihovo bojenje. Za to vreme je treći obojio četiri strane na trećoj kocki. (Njemu su ostavljene takođe četiri strane prvih dveju kocki, koje on završi na kraju.) Osim toga, svaki oboji po 62 cele kocke. Na taj način je svaki obojio po 376 strana kocki $(62 \cdot 6 + 4)$. Posao su završili za 1880 sekundi $(376 \cdot 5)$, odnosno za 31 minut i 20 sekundi.

290. Rasporedimo konje u pet grupa po 12 konja (grupe A, B, C, D i E). U prvih 5 minuta izvršavanja posla svih 48 potkivača potkuju po jedno kopito konja iz grupa A, B, C i D. U sledećih 5 minuta svaki potkuje po jedno kopito konja iz grupa B, C, D i E. Zatim, u novih 5 minuta potkuju po jedno kopito konja iz grupa C, D, E i A. U četvrtom koraku oni potkivaju po jedno kopito konja iz grupa D, E, A i B. U petom koraku potkuju po jedno prestalo kopito konja iz grupa E, A, B i C. Celi posao završe za $5 \cdot 5$, odnosno 25 minuta.

291. Ukoliko manje štuka bude pojedeno, više će ih ostati. Zato treba nastojati da bude pojedeno što više gladnih štuka. To je moguće na sledeći način. Najpre jedna štuka pojede drugu štuku. U tom momentu u bazenu imamo 24 štuke. Ako sada 6 najjačih štuka pojede po 3 druge, među njima i onu koja je već pojela jednu štuku, u bazenu će ostati 6 sitih štuka, koje se neće napadati međusobno.

292. Treba mrežom uloviti ribe na nekoliko mesta i na neki način obeležiti ulovljene šarane stare godinu dana (na primer, vezivanjem nekog končića iza repa). Neka ih je bilo, na primer, 360. Zatim, vratimo sve u ribnjak. Posle nekoliko dana na isti način i na istim mestima ulovimo ribe i ponovo prebrojimo šarane stare godinu dana. (Neka ih je bilo 240, od kojih je označeno 48.) Smatrajući da su se označeni šarani ravnomerno rasporedili po ribnjaku, računamo: $x : 360 = 240 : 48$. Odavde je $x = 1800$, što znači da je u ribnjaku bilo približno 1800 šarana starih godinu dana.

293. Slično **zadatku 289**. Potrebno je 3 minuta prženja. Najpre 1 minut pržimo dve prženice sa jedne strane. Sledećeg minuta pržimo drugu stranu prve prženice i jednu stranu treće. (Drugu prženicu, kojoj smo jednu stranu već ispržili, izvadimo iz tiganja.) U trećem minutu dovršimo dve nepržene prženice.

294. Ideja je slična rešavanju prethodnog zadatka. Pre prve operacije hirurg navuče na obe ruke po 2 rukavice. Posle prve operacije, skine spoljašnji par rukavica, pa operiše drugog pacijenta. Zatim, prevrne skinute rukavice i navuče ih preko rukavica kojim je vršio drugu operaciju. (Morao je, naravno, prebaciti levu prevrnutu rukavicu na desnu ruku, i obrnuto.) Sada je spoljašnjost prevrnutih rukavica sterilna, pa se može izvršiti i treća operacija.

295. Ako 70 krava popase livadu za 24 dana, to znači da je bilo $70 \cdot 24$, tj. 1680 obroka. Međutim, 30 krava popase tu livadu za 60 dana, a to je 1800 obroka. Razlika u broju obroka nastaje zbog viška od 36 dana. Za to vreme je trava rasla i dobilo se 120 obroka više ($1800 - 1680 = 120$).

Za 60 dana livada je imala 1800 kravljih obroka, a za 96 dana (36 dana više) imaće 1920 obroka (120 obroka više). Kako je $1920 : 96 = 20$, zaključujemo da bi 20 krava popaslo livadu za 96 dana.

296. Napišimo brojeve veće od 10, kao što je prikazano u tabeli.

$0+1$	$0+2$	$\cdots$	$0+10$
$10+1$	$10+2$	$\cdots$	$10+10$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$90+1$	$90+2$	$\cdots$	$90+10$

U svakoj vrsti prvi sabirak je isti kod svih deset brojeva. (Na primer, u drugoj vrsti to je broj 10, u trećoj 20, itd.) U svakoj koloni je svaki drugi sabirak isti kod svih brojeva. (Na primer, u drugoj koloni to je broj 2.)

Kako je u svakoj vrsti pet brojeva negativno, to će zbir svih prvih sabiraka u svim vrstama biti nula. Iz istih razloga je i zbir svih drugih sabiraka u svim kolonama nula. Samim tim je zbir svih brojeva u tabeli jednak nuli.

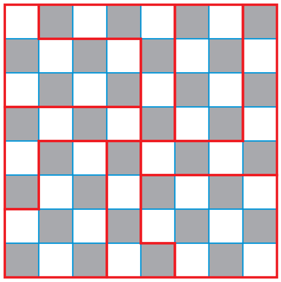
297. Neka su Voja, Ratko i Mile rešili redom: v, r, m zadataka. Dati uslovi su: $v + 5 = r + m$ i $r + 9 = v + m$. Kad saberemo ove dve jednakosti, dobijamo: $m = 7$. Zbog toga je $v = r + 2$. Iz ostalih uslova vidimo da je Mile Milovanović. Jedan od brojeva v ili r treba da bude 11, a drugi deljiv sa 3. Dakle $v = 11$, a $r = 9$, pa su ostala dva dečaka Ratko Tošić i Voja Petrović.

298. Neka je devojčica koja se preziva Kahari popila A čaša, Jerotić B čaša, Babić C čaša i Ćamilović D čaša. Kahari (dečak) i njegova sestra zajedno su popili $2A$ čaša, Jerotić i njegova sestra popili su $3B$ čaša (sestra B i brat $2B$), itd. Tako dobijamo uslov: $2A+3B+4C+5D = 32$, gde su A, B, C i D prirodni brojevi, manji od 5. Očigledno je da su B i D oba parna, ili oba neparna. Proverom utvrdimo da sve uslove ispunjavaju brojevi: $A = 3$, $B = 4$, $C = 1$, $D = 2$.

Dakle, na izletu su bile: Iva Babić, Jela Jerotić, Suzana Kahari i Maja Ćamilović.

299. Neka je na takmičenju učestvovalo x učenika. Tada je popijeno $\frac{x}{2}$ boca mineralne vode, $\frac{x}{3}$ boca limunade i $\frac{x}{4}$ boca voćnog soka. Kako je bilo ukupno 50 boca, dobijamo jednačinu: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + x = 50$. Odavde je $\frac{25}{12}x = 50$, pa je $x = 24$. Na takmičenju je učestvovalo 24 učenika.

300. Jedno rešenje vidimo na slici. (Ivice 8 spojenih delova su crvene.)



301. Četiri mačke ulove 4 miša za 4 dana, a 25 puta više mačaka (100 mačaka) za isto vreme ulove 25 puta više (tj. 100) miševa. Odgovor je: za 4 dana.

302. Mačka i po, za dan i po, ulovi miša i po. Šest puta više (tj. 9) mačaka, za dan i po, ulovi šest puta više (tj. 9) miševa. Za četiri puta više dana, 9 mačaka ulovi četiri puta više (tj. 36) miševa. Odgovor je 36 miševa.

303. Slično prethodnom zadatku. Da bi smazale osam puta više miševa ($8 \cdot 3,5 = 28$), trebaće osam puta više dana. Četiri puta više mačaka ($4 \cdot 3 = 12$), smazaće ih četiri puta brže. Rešenje je: $(8 \cdot 3,5) : 4 = 7$ dana.

304. Ako mačka i po za tri i po dana ulovi četiri i po miša, tada će pola mačke (tri puta manje mačaka) za tri i po dana uloviti tri puta manje miševa, a to je $4,5 : 3 = 1,5$ miševa, itd, slično **zadatku 302**. Rezultat je 99 miševa.

305. Imamo 40 puta više mačaka i 24 puta više dana. Odgovor je: 960 miševa.

306. Slično **zadatku 329**. Odgovor: 2520 miševa.

307. Ako 10 mačaka za 5 minuta smažu 10 miševa, onda će 20 mačaka za 5 minuta smazati 20 miševa, a 20 mačaka za 10 minuta smazaće 40 miševa.

308. Ako 3 mačke za 4 dana smažu 5 miševa, tada 3 mačke za 1 dan smažu $\frac{5}{4}$ miševa, a za 7 dana smažu $\frac{35}{4}$ miševa. Tada će 4 puta više, tj. 12 mačaka, za 7 dana smazati 4 puta više, tj. 35 miševa. Za 140 miševa, a to je $4 \cdot 35$, treba 4 puta više mačaka. Dakle, potrebno je 48 mačaka.

309. Da bi dve i po mačke bile site tri dana, potrebno je dva puta više miševa, a to je 21 miš. Za četiri puta više mačaka, tj. za 10 mačaka, za 3 dana treba 84 miša ($21 \cdot 4$). Pošto u podrumu ima dva puta više miševa, to je za 10 mačaka obezbeđeno po 6 pansiona.

310. Polazimo od poslednje mačke. Kad je ona smazala sedminu preostalih miševa, podrum je ostao prazan. To je moguće ako je prethodni ostatak bio nula miševa. Kako je pretposlednja mačka pojela izvestan broj miševa i sedminu preostalih, to je poslednjoj mački ostalo $\frac{6}{7}$ od tih preostalih. Znači, broj miševa, koje je pojela zadnja mačka, deljiv je sa 6. Uverićemo se da uslove zadatka ispunjava broj

6. Znači, bilo je 6 mačaka, jer je zadnja pojela $6 + \frac{0}{7} = 6$ miševa. Ostale mačke su pojele (računajući unazad): $5 + 1$ $\left(\text{tj. } 5 + \frac{7}{7}\right)$, zatim $4 + 2$ $\left(\text{tj. } 4 + \frac{14}{7}\right)$, $3 + 3$ $\left(\text{tj. } 3 + \frac{21}{7}\right)$, $2 + 4$ $\left(\text{tj. } 2 + \frac{28}{7}\right)$ i $1 + 5$ $\left(\text{tj. } 1 + \frac{35}{7}\right)$.

Sve su mačke bile jednako gladne. Njih 6 je pojelo po 6 miševa.

311. Prvim merenjem razdelimo brašno na dva jednaka dela od 4,5 kilograma. Drugim merenjem, jedan od ova dva dela podelimo na dva jednaka dela, od 2 kilograma i 250 grama. Trećim merenjem od 2 kg 250 oduzmemo 250 grama.

312. *Prvo merenje*. Stavljajući teg od 7 kilograma na jedan tas, a teg od 3 kilograma i šećer na drugi tas, trgovac je izmerio 4 kilograma šećera. Sa još 3 merenja je podelio preostalih 16 kilograma šećera na 4 gomile od 4 kilograma. (Prepolovi 16 kg na 8 kg + 8 kg, kao u prethodnom zadatku, pa sa još dva merenja prepolovi 8 kg i 8 kg.) *Peto merenje*. Sipajući ravnomerno na levi i na desni tas, podelio je 4 kilograma na 2 jednaka dela. U sledeća 4 merenja prepolovio je i ostale gomile sa 4 kilograma šećera.

313. Prvo izmerimo 1 g šećera. Zatim, stavljajući na jedan tas taj gram šećera i teg, izmerimo još 2 g šećera. Dalje, koristeći se tegom i sa 3 izmerena grama, izmerimo nova 4 g šećera. Postupajući dalje slično, merimo redom: 8 g, 16 g, 32 g, posle čega smo sa 6 merenja odmerili ukupno 63 g šećera. U sledećem merenju izmerimo 62 g, tako što na jedan tas stavimo 63 g već izmerenog šećera, a na drugi stavimo teg i dopunimo sa 62 g šećera. Sada imamo izmerenih 63+62, tj. 125 grama, pa u naredna tri merenja dobijamo redom: 250 g, 500 g, 1000 g.

314. Stavimo na levi i desni tas po jednu kuglicu. Ako je na terazijama najteža kuglica, ona će da pretegne. Ako su terazije u ravnoteži, najteža je treća kuglica.

315. Koristimo rezultat prethodnog zadatka. U prvom merenju stavimo na levi i na desni tas po 3 žetona. Iz položaja terazija lako zaključimo koja od 3 trojke žetona sadrži najlakši žeton. Zatim, postupimo kao u prethodnom zadatku.

316. U prvom merenju stavljamo na levi i desni tas po 50 žetona. Sa one strane koja pretegne, odbacimo 19, a uzmemo 31 (ispravan) žeton. Sada imamo 81 žeton, sa jednim neispravnim, lakšim žetonom. U drugom merenju stavljamo na levi i desni tas po 27 žetona. Na osnovu položaja terazija odredimo koja grupa od 27 žetona sadrži neispravni žeton. U trećem merenju, od izabranih 27, stavljamo na levi i desni tas po 9 žetona. Iz položaja terazija utvrdimo koja grupa od 9 žetona sadrži lakši. Dalje postupamo kao u prethodnom zadatku.

317. Neophodna su 3 merenja. U prvom stavimo na levi i desni tas po jedan medaljon. Drugim merenjem otkrićemo koji je pozlaćen. Ako su u prvom merenju terazije u ravnoteži, tada su oba medaljona zlatna. Skinemo jedan i stavimo treći medaljon, da izvršimo drugo merenje. Ako je ponovo ravnoteža, četvrti medaljon je pozlaćen, a ako nije ravnoteža, treći medaljon je pozlaćen. Ako je, pak, u prvom merenju jedna strana, recimo desna, pretegla, onda su treći i četvrti medaljon zlatni. Skinemo sa desnog tasa medaljon koji se pokazao težim i stavimo umesto njega treći medaljon. Slično prethodno razmatranom slučaju, ovim, drugim merenjem otkrivamo pozlaćeni medaljon. U trećem merenju uporedimo jedan zlatan sa pozlaćenim medaljonom i utvrdimo da li je ovaj drugi lakši ili teži.

318. Označimo ispravni novčić sa b, a ostale sa a_1, a_2, a_3 i a_4.

1) *Na levi tas stavimo a_1 i a_2, a na desni a_3 i b.*

Ako je ravnoteža, onda je a_4 neispravan i u sledećem merenju uporedimo ga sa jednim ispravnim da utvrdimo da li je lakši ili teži.

Ako pretegne leva strana, tada ili je a_3 neispravan (lakši) ili je jedan od a_1 i a_2 neispravan (teži).

2) *Uporedimo a_1 i a_2.*

Ako je ravnoteža, neispravan, lakši je a_3, a ako nije ravnoteža, neispravan je a_1 ili a_2, onaj koji pretegne. Slično postupamo i ako je u prvom merenju pretegla desna strana.

319. 1) *Uporedimo a_1 i a_2.*

Ako je ravnoteža onda uporedimo a_1 sa a_3, te utvrdimo da li su lakši a_1 i a_2 ili a_3 i a_4. Ako nije ravnoteža u prvom merenju, do rešenja dolazimo istim putem, tj. drugo merenje je:

2) *Uporedimo a_1 i a_3.*

320. Označimo novčiće sa $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$.

Prvo merenje. Stavimo A_1, A_2, A_3 na levi i B_1, B_2, B_3 na desni tas. Ako su terazije u ravnoteži, onda su ovih šest novčića ispravni, a u sledeća dva merenja uporedimo A_4 i B_4 sa ispravnim novčićem A_1. Tako otkrijemo neispravan novčić, kao i da li je lakši, odnosno teži. Ako terazije nisu u ravnoteži, pretpostavimo da je pretegla leva strana. Tada je jedan od novčića A_1, A_2, A_3 teži, ili je jedan od novčića B_1, B_2, B_3 lakši.

Drugo rnerenje. Skinemo A_3 i B_3 s terazija, A_2 premestimo na desni tas, a na levi tas, uz A_1 stavimo još i ispravne novčiće A_4 i B_4. Ako pretegne desna strana, A_2 je teži novčić, ako pretegne leva strana, onda je A_1 teži, ili je jedan od novčića B_1, B_2 lakši.

Treće merenje. Ako je u drugom merenju pretegla leva strana, tada stavimo B_1 na levi i B_2 na desni tas. Ako je A_1 teži novčić, ovde će biti ravnoteža. Ako pretegne B_1, onda je B_2 neispravan – lakši novčić, i obrnuto. Ako je u drugom merenju bila ravnoteža, onda je neispravan A_3 ili B_2. Da bismo došli do konačnog zaključka, dovoljno je u trećem merenju uporediti A_3 sa ispravnim novčićem A_1.

321. Postupamo slično rešavanju prethodnog zadatka. Novčiće podelimo u tri grupe i označimo ill sa tri slova: A_1, A_2, A_3, A_4, zatim B_1, B_2, B_3, B_4 i C_1, C_2, C_3, C_4.

Prvo merenje. Na levi tas stavljamo: A_1, A_2, A_3, A_4, a na desni B_1, B_2, B_3, B_4.

Drugo merenje. 1) Ako je prethodno uspostavljena ravnoteža, neispravan je jedan od novčića C_1, C_2, C_3, C_4. Stavimo na levi tas C_1, C_2, a na desni C_3 i A_1. Dalje postupamo kao u prethodnom zadatku.

2) Ako je pretegla recimo leva strana pri prvom merenju, tada su C_1, C_2, C_3, C_4 ispravni, a jedan od novčića A_1, A_2, A_3, A_4 je teži, ili je jedan od novčića B_1, B_2, B_3, B_4 lakši. Tada skinemo A_4 i C_4 sa terazija, prebacimo B_3 na levi tas, i A_1, A_2 na desni tas. Na levi tas stavimo još i ispravne novčiće C_1 i C_2.

Treće merenje. Razmišljajući slično kao u slučaju 8 novčića, u trećem merenju lako utvrdimo koji je novčić neispravan i kakav je.

322. 1) *Na levi tas stavimo a_1, a_2 i a_3, a na desni a_4, a_5 i a_6.*

Ako je ravnoteža, tada je od tri novčića na levoj strani jedan lakši, a takođe i na desnoj. Dalje, kao u **zadatku 314** u sledeća dva merenja otkrivamo jedan po jedan neispravni novčić.

Ako je, na primer, leva strana pretegla, tada su novčići a_1, a_2 i a_3 ispravni, a od preostala četiri novčića izdvojićemo neispravne, kao u prethodnom zadatku.

323. Neophodno je izvršiti samo jedno merenje. Stavićemo na vagu 1 novčić sa prve gomilice, 2 novčića sa druge, 3 novčića sa treće, ..., 9 novčića sa devete gomile, dakle, ukupno 45 novčića. Ako su svi izmereni novčići ispravni, vaga će pokazati tačno 450 grama. Tada su neispravni novčići sa desete gomilice. Ako je masa veća za 1 gram, za 2 grama, itd, tada su neispravni novčići sa prve, sa druge, itd, gomilice.

324. Ćupove označimo brojevima 1, 2, 3, 4, 5. Iz prvog ćupa uzmemo 1 zlatnik (2^0), iz drugog 2 zlatnika (2^1), iz trećeg 4 zlatnika (2^2), iz četvrtog 8 zlatnika (2^3) i iz petog 16 zlatnika (2^4), ukupno 31. Izmerimo ove zlatnike i od dobijene mase oduzmemo 155 g ($31 \cdot 5 = 155$). Razliku izrazimo u obliku $n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 4 + n_4 \cdot 8 + n_5 \cdot 16$, gde je svaki od brojeva n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, ili 0 ili 1. Na primer, ako je izmerena masa 168 g, tada imamo $13 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 16$. Ovo znači da su u drugom i petom ćupu zlatnici od 5 grama ($n_2 = 0$, $n_5 = 0$), a u prvom , trećem i četvrtom od 6 grama ($n_1 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$). (Ako je $n_i = 0$, odgovarajući ćup sadrži zlatnike od 5 grama, a ako je $n_i = 1$, odgovarajući ćup sadrži zlatnike čija je masa 6 grama.)

325. Može! Označimo ćupove brojevima. od 1 do 5. Iz prvog uzmemo 1 zlatnik, iz drugog 3, iz trećeg 9, iz četvrtog 27 i iz petog 81, pa to izmerimo. Ako su svi zlatnici mase 9 grama, tada će ovih 121 izdvojenih zlatnika imati masu 1089 grama. Ako vaga pokaže više, recimo $1089 + n$, tada se broj n može izraziti u obliku $n_5 \cdot 81 + n_4 \cdot 27 + n_3 \cdot 9 + n_2 \cdot 3 + n_1 \cdot 1$. Ako je $n_i = 0$, odgovarajući ćup sadrži zlatnike mase 9 grama; ako je $n_i = 1$, odgovarajući zlatnici imaju masu od 10 grama i ako je $n_i = 2$, masa zlatnika je 11 grama.

326. Prema uslovu je $MC - NC = MN$, sledeća slika levo. Kako je $MC = BC + MB = BC + AM$ i $NC = AN$, dobijamo: $BC + AM - AN = MN$, odnosno $BC - (AN - AM) = MN$. Međutim, $AN - AM = MN$, pa konačno iz $BC - MN = MN$ dobijamo $BC = 2MN$.

327. Prema poslednjoj slici je:
$\frac{1}{2}BC = NB = MB - MN = \frac{k}{2} - \frac{2k}{5} = \frac{k}{10}$, pa je $BC = \frac{k}{5}$. Sledi: $AC = \frac{4}{5}k$.

328. Neka je AC manji deo i S središte duži AC. Tada je $AB = 6AS$, a $BC = 2AC$. Po uslovu je $BC - AC = 1$ cm, odakle je $AC = 1$ cm, pa je $AB = 3$ cm.

329. Od 9 jednakih delova duži MN, prvi odsečak sadrži 2 dela, drugi 3 i treći 4. Od središta prvog do središta trećeg odsečka imamo 6 takvih delova, što iznosi 30 cm. Dakle, devetina dužine duži MN iznosi 5 cm, pa je dužina duži MN tačno 45 cm.

330. Tačke C, D, E dele duž AB na četiri dela, čija su središta redom M, N, P, Q. Prema uslovu je $NP = 6$ cm, pa je $CE = 12$ cm. Kako je $MQ = 16$ cm, to je $\frac{1}{2}(AC + EB) = 16 - 12 = 4$ cm, itd. Konačno je $AB = 20$ cm.

331. $NP = 1,5$ cm, $AP = 4$ cm, $MN = 1$ cm.

332. Slično **zadatku 330**. Rešenje je 13 cm.

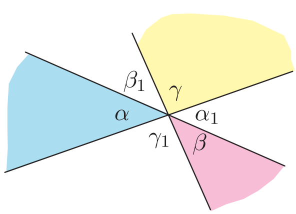
333. Slično **zadatku 330**. Rešenje je $MN = 60$ cm.

334. Duž B_1B_{10} čine 9 jednakih odsečaka, a duž A_1A_{100} čine 99 istih tolikih odsečaka. Prema tome: $A_1A_{100} = 11 \cdot B_1B_{10} = 110$ cm.

335. Ako je neka tačka iz prvog skupa simetrična nekoj tački iz drugog skupa, kao tačke C_1 i D_1 na slici dole levo, tada je $AC_1 = BD_1$, zbog simetričnosti.

Ako prvi skup sadrži dve među sobom simetrične tačke, kao C_2 i C_3 na slici, tada je $AC_3 = BC_2$. Zbog $AC_2 + BC_2 = AB$, zaključujemo da je $AC_2 + AC_3 = AB$. Svakom paru simetričnih tačaka prvog skupa odgovara par međusobno simetričnih tačaka drugog skupa. Lako je dokazati da je i za par takvih tačaka, na primer D_2 i D_3, ispunjeno: $BD_2 + BD_3 = AB$.

Ovo su jedine dve mogućnosti izbora tačaka, pa je time tvrđenje dokazano.



336. Nesusednim uglovima α, β, γ na slici gore odgovaraju redom unakrsni uglovi α_1, β_1, γ_1. Kako su unakrsni uglovi jednaki, to iz $(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) = 360°$, dobijamo: $2(\alpha+\beta+\gamma) = 360°$, pa je $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

337. Ugao α_1, unakrsni sa α je: $\alpha_1 = 360° - 325° = 35°$. Ugao uporedan uglu α je 145°.

338. Prema **primeru B** je $\alpha + \beta = 180°$. Sabiranjem ove i date jednakosti dobijamo $2\alpha = 210°10'20''$, odakle je $\alpha = 105°5'10''$, pa je $\beta = 74°54'50''$.

339. Neka je β ugao suplementan sa α. Prema uslovu je $\frac{5}{6}\beta = 90°$, pa je $\beta = 108°$ i $\alpha = 72°$. (Vidi rešenje **primera C**.)

340. $\alpha = 180° - \beta$, pa je $(180° - \beta) - \beta = 56°$. Odavde je $\beta = 62°$. Sledi da je $\gamma = 28°$.

341. Prema uslovu je $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{7} = x$, pa je $\alpha = 5x$ i $\beta = 7x$. Iz $\alpha + \beta = 180°$, dobijamo $5x + 7x = 180°$, odnosno $12x = 180°$. Dvanaestina opruženog ugla je $15°$, pa je $\alpha = 5 \cdot 15° = 75°$, a njemu suplementan ugao je $\beta = 7 \cdot 15° = 105°$. Komplement ugla α je $15°$.

342. Slično **zadatku 340**. Traženi ugao je $90°30'$.

343. Neka je $\alpha+\beta=90°$. Tada je $(180°-\alpha)+(180°-\beta)=360-(\alpha+\beta)=270°$.

344. Da bi dva suplementna ugla imala komplementne uglove, oni moraju biti pravi. Dakle: $\varphi = \theta = 90°$ i $\alpha = \beta = 0°$.

345. Iz datog uslova: $(180 - \alpha) - \alpha = \alpha - (90° - \alpha)$, dobijamo $\alpha = 67°30'$.

346. Neka je $\alpha_1 + \beta_1 = 270°$. Međutim, kako je $\alpha_1 = \beta + \gamma$ i $\beta_1 = \alpha + \gamma$, to je $\alpha_1 + \beta_1 = (\beta + \gamma + \alpha) + \gamma = 180° + \gamma$, odnosno $270° = 180° + \gamma$, pa je $\gamma = 90°$. (Ili: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$, pa je $270° + \gamma_1 = 360°$, odakle je $\gamma_1 = 90°$ i $\gamma = 90°$.)

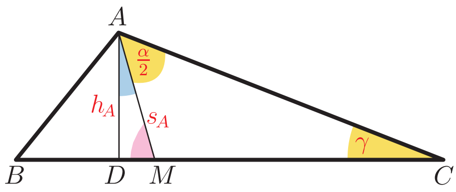
347. Neka je O presečna tačka simetrala uglova α i β trougla ABC, slika levo. Spoljašnji ugao trougla ABO jednak je uglu γ, pa je: $\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, odnosno $\alpha + \beta = 2\gamma$. Kako je $(\alpha + \beta) + \gamma = 180°$, sledi da je $3\gamma = 180°$, odnosno $\gamma = 60°$.

348. Unutrašnji uglovi trougla BCD su: $\beta + \frac{\beta_1}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ i $\sphericalangle BDC$, pa je $\sphericalangle BDC = 180° - \left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right) - \frac{\gamma}{2}$. Zamenimo $\frac{\beta_1}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ i $180° = \alpha + \beta + \gamma$, pa dobijamo: $\sphericalangle BDC = \alpha + \beta + \gamma - \left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

349. Neka se simetrale uglova α i β trougla ABC seku u O, slika gore levo, tako da je $\sphericalangle AOB = 135°$. Primenjujući teoremu o zbiru unutrašnjih uglova na trougao ABO, dobijamo: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 135° = 180°$, odakle je $\alpha + \beta = 90°$. Sledi da je $\gamma = 90°$.

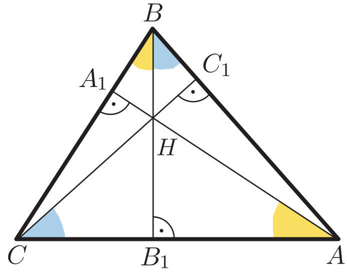
350. Kako je $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$, to relacija $\alpha - \beta = 3\gamma$ daje: $\alpha - (180^\circ - \alpha - \gamma) = 3\gamma$, odakle je $2\alpha - 2\gamma = 180^\circ$, odnosno $\alpha - \gamma = 90^\circ$.

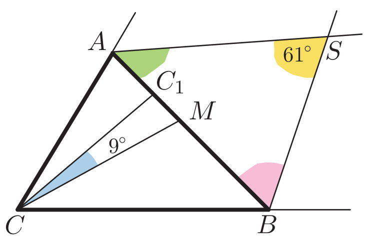
351. Iz datog uslova $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 9 : 16 : 20$, sledi da je $\alpha_1 = 9\theta$, $\beta_1 = 16\theta$, $\gamma_1 = 20\theta$. Nepoznati ugao θ odredićemo iz zbira spoljašnjih uglova: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$, odnosno $45\theta = 360^\circ$. Dakle, $\theta = 8^\circ$, pa je $\alpha_1 = 72^\circ$, $\beta_1 = 128^\circ$ i $\gamma_1 = 160^\circ$. Unutrašnji uglovi su $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 52^\circ$ i $\gamma = 20^\circ$, a najveći među njima je ugao α. Neka je AD visina i AM simetrala ugla (slika). Trougao ADM je pravougli, pa je traženi ugao komplementan uglu DMA. Prema teoremi o spoljašnjem uglu, iz trougla ACM nalazimo: $\sphericalangle DMA = \gamma + \dfrac{\alpha}{2}$. Prema tome $\sphericalangle DAM = 90^\circ - \left(\gamma + \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Međutim, kako je $90^\circ = \dfrac{180^\circ}{2} = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$, to je $\sphericalangle DAM = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} - \left(\gamma + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = 16^\circ$.



352. $\alpha_1 + \beta_1 = (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = 180^\circ + \gamma$. Prema datom uslovu, ova relacija se menja u: $\alpha_1 + 45^\circ + \beta_1 - 35^\circ = 180^\circ + \gamma + \dfrac{\gamma}{5}$, odnosno $\alpha_1 + \beta_1 + 10^\circ = 180^\circ + \gamma + \dfrac{\gamma}{5}$. Odavde sledi da je $\dfrac{\gamma}{5} = 10^\circ$, pa je $\gamma = 50^\circ$.

353. Neka je H presečna tačka visina AA_1 i CC_1, slika dole levo. Tačka H je ortocentar, pa je prava BH, odnosno BB_1, treća visina trougla. Kako je $BB_1 \perp AC$ i $BC \perp AA_1$, zaključujemo da je $\sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CAA_1$ (sa normalnim kracima). Takođe je $\sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle ACC_1$, iz istih razloga. Prema tome: $\beta = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBB_1 + \sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle CAA_1 + \sphericalangle ACC_1$, što se i tvrdi.





354. Prema rešenju **zadatka 351**, traženi ugao je $\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}$.

355. Prema prethodnom zadatku je $\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 9^\circ$, pa je $\alpha - \beta = 18^\circ$. Iz trougla ABS, poslednja slika desno, dobijamo: $\dfrac{\alpha_1}{2} + \dfrac{\beta_1}{2} = 119^\circ$, odnosno $\alpha_1 + \beta_1 = 238^\circ$. Prema rešenju **zadatka 346** je $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ + \gamma$, što znači da je $\gamma = 58^\circ$. Prema tome je i $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, odnosno $\alpha + \beta = 122^\circ$. Ova relacija i $\alpha - \beta = 18^\circ$ daju rešenja: $\alpha = 70^\circ$ i $\beta = 52^\circ$.

356. a) Dati trougao je jednakokraki i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. Ali, ugao ACB je spoljašnji ugao trougla ACD, pa je $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ADB$. Otuda sledi da je $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$.

b) Prema dokazi iz a), u trouglu ABD je $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$. Zbog toga je $AD > AB$. Kako je $AB = AC$, sledi da je $AD > AC$.

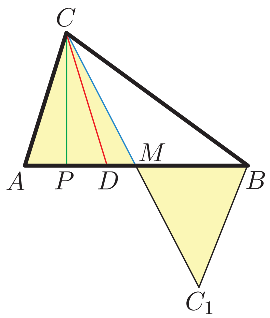
357. Po teoremi, za svaku stranicu a trougla ABC važi nejednakost: $a < b+c$. Dodajmo na obe strane nejednakosti a i dobićemo: $2a < a + b + c$. Odavde je $a < \frac{1}{2}(a + b + c)$.

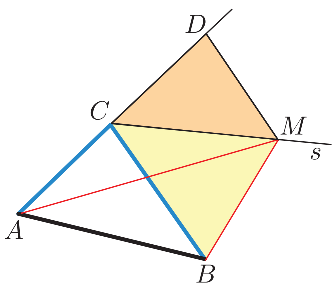
358. Za trougao ABP važi nejednakost: $AP + BP > AB$. Slično, iz trouglova BCP i ACP dobijamo: $BP + CP > BC$ i $AP + CP > AC$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo: $2(AP + BP + CP) > AB + BC + CA$, odnosno:
$AP + BP + CP > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$.

359. Dokaz nejednakosti $AM + BM + CM > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ izvodimo kao u prethodnom zadatku.

Za drugu nejednakost, $AM + BM + CM < AB + BC + CA$, koristimo rešenje **primera B**. Prema njemu je, kao što se vidi na slici: $AM + BM < AC + BC$. Slično je $BM + CM < BA + AC$ i $AM + CM < AB + BC$. Saberemo ove tri nejednakosti, zatim skratimo sa 2 i dobićemo traženu nejednakost.

360. Neka je CD simetrala ugla u trouglu ABC, slika dole levo. Tada je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle BCD$ (jer je $\sphericalangle ADC$ spoljašnji ugao trougla BCD). Kako je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD$, sledi da je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ACD$, pa je $AC > AD$. Slično dokazujemo da je $BC > BD$.





361. Neka je, na primer, $BC > AC$. Tada je $\alpha > \beta$. Dokazaćemo da je tačka M između B i D, tj. da je $\sphericalangle BCM < \sphericalangle BCD$. Odredimo tačku C_1, takvu da je tačka M središte duži CC_1, poslednja slika levo. Kao u **primeru D**, lako se dokazuje podudarnost, trouglova ACM i BC_1M. Iz ove podudarnosti zaključujemo da je $BC_1 = AC$ i $\sphericalangle BC_1C = \sphericalangle ACM$. Kako je $BC > AC$, to je $BC > BC_1$, pa je u trouglu BCC_1 ugao BC_1C veći od ugla BCM. Zbog toga je i $\sphericalangle ACM > \sphericalangle BCM$. Otuda sledi da je $\sphericalangle ACM > \frac{\gamma}{2}$ tj. $\sphericalangle ACM > \sphericalangle ACD$, pa je tačka M između D i B.

Obratimo sada pažnju na uglove trougla CDM. Ugao CDM je spoljašnji ugao trougla ACD, pa je $\sphericalangle CDM = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Ugao CMD je spoljašnji ugao trougla BCM, pa je $\sphericalangle CMD = \beta + \sphericalangle BCM$. Međutim, pošto je $\alpha > \beta$ i $\frac{\gamma}{2} > \sphericalangle BCM$, sledi da je $\sphericalangle CDM > \sphericalangle CMD$. Otuda zaključujemo da je $CM > CD$.

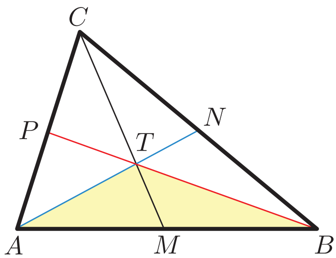
362. Iza C u odnosu na A izaberimo tačku D, takvu da je $CD = CB$, poslednja slika. Lako se dokazuje da je $\triangle CDM$ podudaran sa $\triangle CBM$, pa je $DM = BM$. U trouglu AMD je $AM + MD > AD$, tj. $AM + BM > AD$.

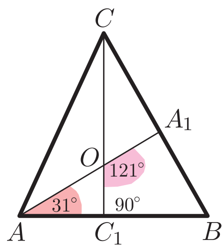
Kako je $AD = AC + CD = AC + CB$, to je i $AM + BM > AC + CB$.

363. *Dokaz*. Neka je C_1 tačka na produžetku duži CM, takva da je $MC_1 = CM$ (vidi sliku iz **zadatka 360**). Lako se dokazuje da su trouglovi AMC i BMC_1 podudarni, pa je $\sphericalangle BC_1C = \sphericalangle ACM$ i $BC_1 = AC$. Kako je $BC > AC$, to je i $BC > BC_1$, pa je $\sphericalangle BC_1C > \sphericalangle BCC_1$ odakle sledi da $\sphericalangle ACM > \sphericalangle BCM$, što se i tvrdi.

364. Neka je u trouglu ABC ispunjen uslov: $AC < BC$. Ako su M, N, P redom središta stranica AB, BC, CA, dokazaćemo da je $AN < BP$, slika dole levo.

Najpre, kao u **zadatku 363**, dokazaćemo da je $\sphericalangle ACM > \sphericalangle BCM$. Uočimo sad trougao ABT. Nije moguća jednakost $AT = BT$, jer je u tom slučaju lako dokazati da je $\sphericalangle AMT = \sphericalangle BMT$. Takođe nije moguća nejednakost $AT > BT$, jer bi tada, kao u trouglu ABC, bilo $\sphericalangle ATM < \sphericalangle BTM$, što takođe nije tačno. Dakle, mora biti $AT < BT$, odnosno $\frac{2}{3}AN < \frac{2}{3}BP$, odakle sledi da je $BP > AN$.

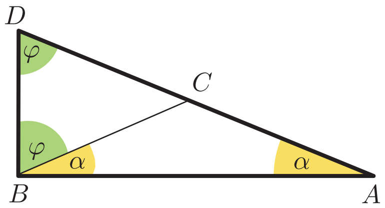


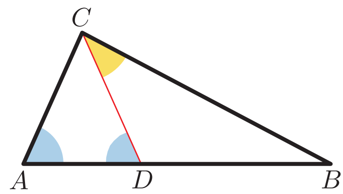


365. U pravouglom trouglu AOC_1 je $\sphericalangle OAC_1 = 31°$, slika gore desno. Pretpostavimo da je $AB > AC$. Tada je, prema **zadatku 363**: $\sphericalangle CAA_1 < \sphericalangle BAA_1$. Istovremeno je $\sphericalangle CAB > 62°$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$, pa je $\sphericalangle ACB < 56° < \sphericalangle BAC$. Zbog toga je $BC = AC > AB$, što je kontradikcija.

Ne može biti ni $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle CAA_1$, jer dati trougao nije jednakostranični (jer bi tada bilo $\sphericalangle A_1OC_1 = 120°$), pa je prema prethodnom zadatku tačno: $AC > AB$.

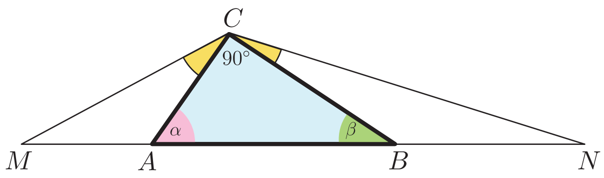
366. Po uslovu, trougao BCD je jednakokraki, pa je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = \varphi$. Kako je u datom trouglu $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \alpha$, slika dole levo, to je u trouglu ABD zbir unutrašnjih uglova: $\alpha + \alpha + \varphi + \varphi = 180°$, odakle je $\alpha + \varphi = 90° = \sphericalangle ABD$.

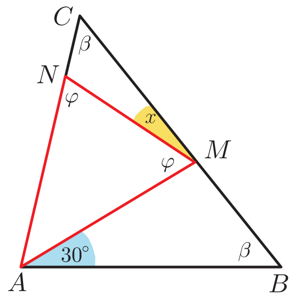




367. Kako je $AC = CD$, to je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD$. U trouglu BCD je $\sphericalangle ADC$ spoljašnji, slika desno, pa je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD$, odakle je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABC = 37°$.

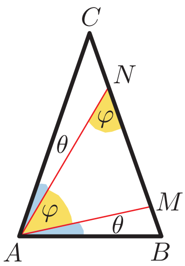
368. Trouglovi ACM i BCN su po konstrukciji jednakokraki. U trouglu ACM važi: $\sphericalangle ACM = \sphericalangle AMC$. Budući da je α spoljašnji ugao ovog trougla, to je $\alpha = \sphericalangle ACM + \sphericalangle AMC = 2\sphericalangle ACM$, slika dole levo. Odavde je $\sphericalangle ACM = \dfrac{\alpha}{2}$. Slično se dokazuje da je $\sphericalangle BCN = \dfrac{\beta}{2}$. Prema tome: $\sphericalangle MCN = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACM + \sphericalangle BCN = 90° + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 90° + 45° = 135°$,jer je $\alpha + \beta = 90°$.

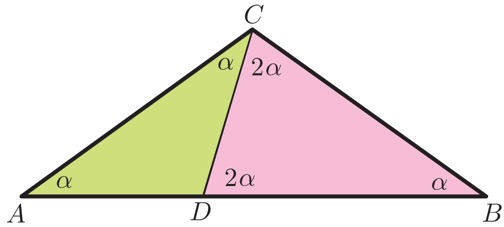




369. U jednakokrakom trouglu ABC su uglovi kod temena B i C jednaki, na slici desno označeni sa β, a u jednakokrakom trouglu AMN uglovi kod temena M i N jednaki su među sobom i na slici označeni sa φ. Primenjujući teoremu o spoljašnjem uglu, najpre na trougao CMN, a onda na trougao ABM, dobijamo: $\varphi = \beta + x$ i $\varphi + x = \beta + 30°$. Zamenimo φ u drugoj jednakosti i dobijemo: $\beta + x + x = \beta + 30°$, tj. $2x = 30°$, pa je $x = \sphericalangle CMN = 15°$.

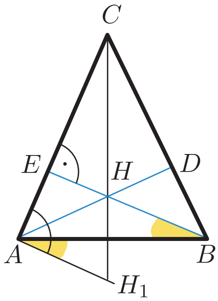
370. U jednakokrakom trouglu AMN neka je: $\varphi = \sphericalangle MAN = \sphericalangle MNA$. Uvedimo oznaku: $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN = \theta$. Ugao AMB je spoljašnji ugao trougla AMN, pa je stoga $\sphericalangle AMB = 2\varphi$. U datom trouglu ABC je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \varphi + 2\theta$. Prema teoremi o zbiru unutrašnjih uglova u trouglu ABM imamo: $\theta + (\varphi + 2\theta) + 2\varphi = 180°$, a odavde je $\theta + \varphi = 60° = \sphericalangle BAN$ (sledeća slika levo).

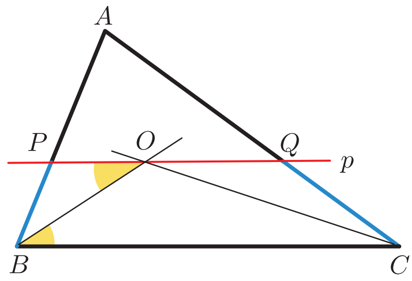




371. Pošto se zahteva da trouglovi ACD i BCD nisu podudarni, zaključujemo da je, na primer, AC osnovica trougla ACD, a BC je krak trougla BCD, slika gore desno. Uglovi na osnovici AC trougla ACD su $\alpha = \sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$. Ugao BDC je spoljašnji ugao trougla ACD, pa je $\sphericalangle BDC = 2\alpha$, a jednak njemu je i $\sphericalangle BCD$. Primenimo teoremu o zbiru unutrašnjih uglova na trougao ABC i dobićemo: $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$, odakle je $\alpha = 36°$. Unutrašnji uglovi trougla ABC su $36°$, $36°$ i $108°$.

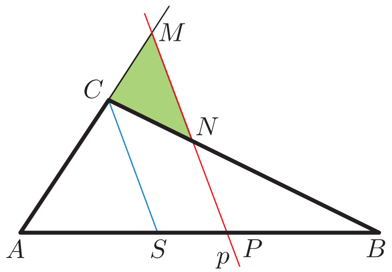
372. Neka su AD i BE visine trougla ABC, slika. Pravougli trouglovi ABD i ABE imaju jednake unutrašnje uglove, jer je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$, pa je $\sphericalangle HAB = \sphericalangle HBA$. Zbog simetričnosti je $\sphericalangle BAH_1 = \sphericalangle BAH$, pa je $\sphericalangle BAH_1 = \sphericalangle ABH$. Tačke H i H_1 su sa raznih strana prave AB, pa su $\sphericalangle BAH_1$ i ABH sa paralelnim kracima. Dakle, AH_1 je normalno na AC, jer je BE visina trougla ABC. Prema tome $\sphericalangle CAH_1 = 90°$.

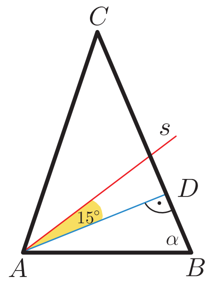




373. Uglovi CBO i BOP jednaki su, kao uglovi sa paralelnim kracima, slika desno. Međutim, $\sphericalangle PBO = \sphericalangle CBO$, jer su to polovine ugla β, pa je $\sphericalangle PBO = \sphericalangle BOP$. Dakle, trougao BOP je jednakokraki i $BP = PO$. Slično se dokazuje da je i $CQ = OQ$. Otuda sledi da je $PQ = PO + OQ = BP + CQ$.

374. Uglovi SCN i CNM su jednaki (paralelni kraci) i uglovi ACS i AMN su jednaki, takođe sa paralelnim kracima, sledeća slika. Kako je $\sphericalangle SCN = \sphericalangle ACS$ (kao polovine ugla ACB), to je i $\sphericalangle CNM = \sphericalangle CMN$. To potvrđuje da je trougao CMN jednakokraki.



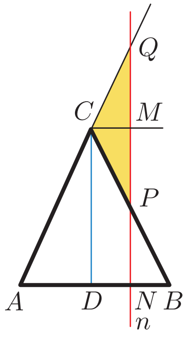


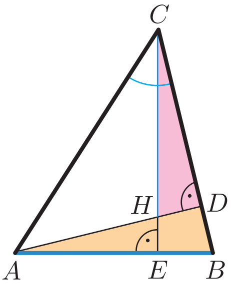
375. Unutrašnji uglovi trougla ABD su: $\dfrac{\alpha}{2} - 15°$, α i $90°$. Prema tome, iz $\dfrac{\alpha}{2} - 15° + \alpha = 90°$, dobijamo $\alpha = 70°$. Dakle: $\sphericalangle ACB = 40°$, slika gore.

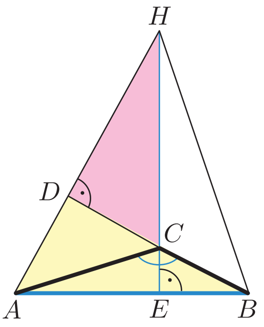
376. Oštri uglovi su $33°$ i $57°$. (Vidi i **primer D**.)

377. Prema **zadatku 349**, simetrale uglova α i β seku se pod uglom od $135°$, pa je ugao između simetrale i težišne linije $27°$. Prema slici uz **primer D** je $\sphericalangle MCS = 27°$, pa je $\alpha = 45° - \sphericalangle MCS = 18°$. Drugi oštri ugao je $\beta = 72°$.

378. Prava n je paralelna simetrali ugla ACB, pa se, kao u **zadatku 374** lako dokaže da je trougao CPQ jednakokraki. Neka je CD visina trougla ABC, a CM visina trougla CPQ, sledeća slika. Četvorougao $CDNM$ je pravougaonik, pa je $MN = CD$. Kako je $MP = MQ$, dobijamo: $NP + NQ = (NM - PM) + (NM + MQ) = 2MN = 2CD$, a ovo je stalna veličina (dvostruka visina datog trougla).





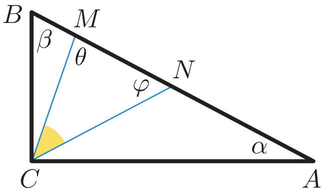


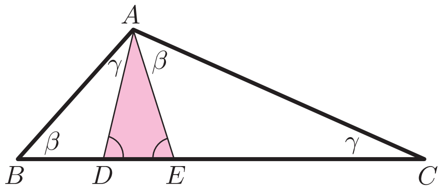
379. Razlikovaćemo slučajeve kad je ugao ACB oštar ili tup. U slučaju oštrog ugla, slika u sredini, pravougli trouglovi ABD i CHD podudarni su ($AB = CH$, $\sphericalangle D = 90°$ i $\sphericalangle BAD = \sphericalangle HCD$, uglovi sa normalnim kracima). Otuda sledi da je $AD = CD$, pa je ACD pravougli jednakokraki trougao i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB = 45°$.

U slučaju tupog ugla ACB, slika desno, slično se dokazuje da su trouglovi ABD i CHD podudarni i $AD = CD$. Otuda $\sphericalangle ACD = 45°$, pa je $\sphericalangle ACB = 135°$.

380. Trougao ACM je jednakokraki, pa kako je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACM = \theta$, a $\sphericalangle CAM = \alpha$, biće $\theta = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Slično, iz trougla BCN je $\sphericalangle BNC = \varphi = 90° - \dfrac{\beta}{2}$.

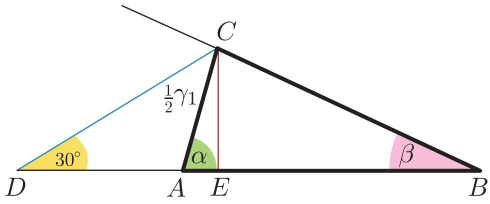
Sada iz trougla CMN (slika levo), dobijamo: $\sphericalangle MCN + \theta + \varphi = 180^\circ$, odnosno $\sphericalangle MCN + 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ - \dfrac{\beta}{2} = 180^\circ$. Odavde dobijamo: $\sphericalangle MCN = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 45^\circ$.

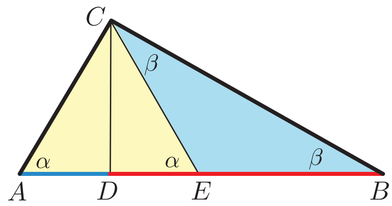




381. Na slici gore označeni su uglovi trougla ABD i ACE. Ugao ADE je spoljašnji za trougao ABD, pa je: $\sphericalangle ADE = \beta + \gamma$. Slično je $\sphericalangle AED = \beta + \gamma$, odnosno $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED$, što pokazuje da je trougao ADE jednakokraki.

382. Prema rešenju **primera B** je $\sphericalangle CDE = 30^\circ$, slika dole levo. Ugao BAC, tj. ugao α, je spoljašnji ugao trougla ACD, pa je $\alpha - \dfrac{\gamma_1}{2} = 30^\circ$, odnosno $\alpha - \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 30^\circ$. Odavde dobijamo $\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 30^\circ$, tj. $\alpha - \beta = 60^\circ$.

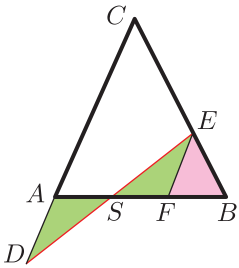


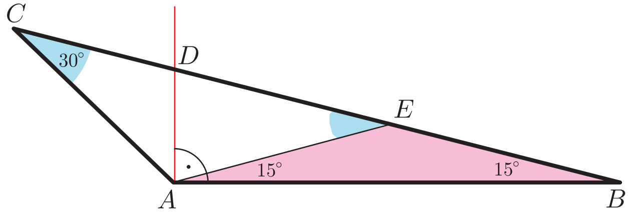


383. Neka je AC manja kateta, AB hipotenuza i CD hipotenuzina visina, a E tačka između B i D, takva da je $DE = AD$. Lako se dokazuje podudarnost trouglova ADC i EDC, pa je $CE = AC$, slika desno. Prema uslovu zadatka je $DB - AD = AC$, odnosno $BD - DE = AC$, pa je $BE = AC$. Dakle, trouglovi ACE i BCE su jednakokraki, pa je α, kao spoljašnji ugao trougla BCE, dva puta veći od ugla β, tj. $\alpha = 2\beta$. Kako je $\alpha + \beta = 90^\circ$, odnosno $3\beta = 90^\circ$, zaključujemo da su oštri uglovi trougla ABC: $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 30^\circ$.

384. Neka je S presečna tačka osnovice AB i duži DE, a F tačka osnovice, takva da je $EF \| AC$, sledeća slika. Tada je $\sphericalangle BFE = \sphericalangle BAC$, kao uglovi sa paralelnim kracima, pa je i $\sphericalangle BFE = \sphericalangle FBE$. Sledi da je trougao BEF jednakokraki i $EF = BE$. Zbog toga je i $EF = AD$. Sada zaključujemo da su trouglovi ADS i FES podudarni (po stavu USU), pa je $DS = SE$.

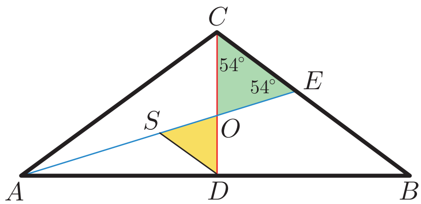
385. Trougao ABD je pravougli. Neka je E središte hipotenuze BD, sledeća slika desno. Prema **primeru C**, trouglovi ABE i ADE su jednakokraki i $BD = 2AE$. U trouglu ABE je ugao AED spoljašnji, pa je $\sphericalangle AED = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$. Zbog toga je trougao ACE jednakokraki i $AC = AE$. Otuda sledi da je $BD = 2AC$.

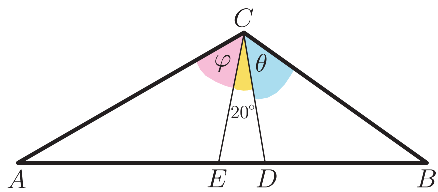




386. Neka je AE simetrala ugla na osnovici, a CD visina na osnovicu, kao na slici dole levo. Dati ugao može biti samo naspram osnovice AB, pa su uglovi kod temena A i B od $36°$. Označimo sa O presečnu tačku visine i simetrale ugla. Kako je $\sphericalangle ECO = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 54°$, a $\sphericalangle CAE = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 18°$, što povlači da je $\sphericalangle AEC = 54°$, to je trougao COE jednakokraki i $CO = OE$.

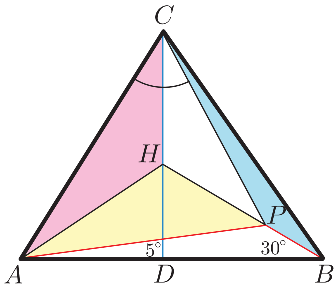
Označimo sa S središte duži AE. Kako je i D središte duži AB, to je $SD \| BC$, pa su uglovi trougla DOS jednaki uglovima trougla COE. Zbog toga je trougao DOS jednakokraki, pa je $OD = OS$. Odavde sledi da je $OS + OE = OD + OC$, tj. $ES = CD$. Dakle: $AS = 2ES = 2CD$.

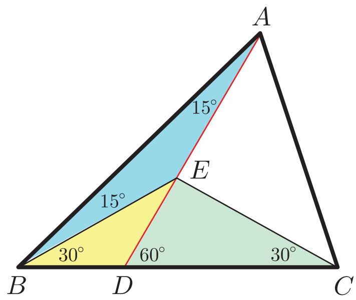




387. Neka je $\sphericalangle ACE = \varphi$ i $\sphericalangle BCD = \theta$, slika gore desno. Ugao na osnovici CD jednakokrakog trougla ACD je: $\varphi + 20° = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Slično je $\theta + 20° = 90° - \frac{\beta}{2}$. Iz ove dve jednakosti dobijamo: $\varphi + 20° + \theta + 20° = 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2}$, a odavde $\varphi + \theta + 20° = 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 70°$. Kako je $\varphi + \theta + 20° = \gamma$, a $90° = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, dobijamo jednakost: $\gamma = \frac{\gamma}{2} + 70°$, pa je $\gamma = \sphericalangle ACB = 140°$.

388. Neka je CD visina na osnovicu i H presečna tačka ove visine i prave BP, sledeća slika levo. Tada je $BH = AH$ i $\sphericalangle BAH = 30°$, odnosno $\sphericalangle HAD = 30°$, a $\sphericalangle HAP = 25°$. Kako je ugao na osnovici $\sphericalangle CAB = 55°$, to je i $\sphericalangle CAH = 25°$. U trouglu ABP je $\sphericalangle APH = 30° + 5° = 35°$, kao spoljašnji ugao. Sem toga je $\sphericalangle ACD$ polovina datog ugla od $70°$, tj. $\sphericalangle ACD = 35°$. Sada su trouglovi AHP i AHC podudarni, jer imaju zajedničku stranicu AH i jednake uglove. Otuda je $AP = AC$, pa je APC jednakokraki trougao i zbog $\sphericalangle PAC = 50°$, sledi da je $\sphericalangle ACP = 65°$. Zbog toga je $\sphericalangle BCP = 5°$. Međutim, znamo da je $\sphericalangle PBC = 25°$, pa je traženi ugao: $\sphericalangle BPC = 150°$.

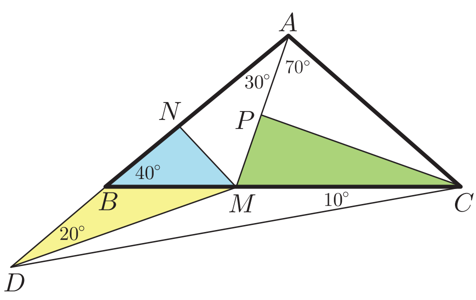


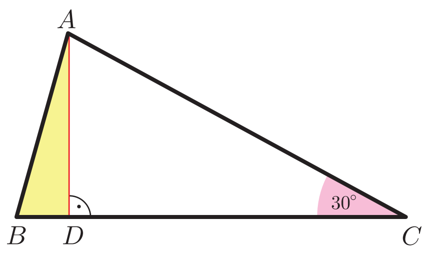


389. Neka je E podnožje normale iz C na AD, slika desno. Trougao CED je pravougli sa oštrim uglovima od $30°$ i $60°$, pa je $CD = 2DE$ (vidi **primer B**). Zbog toga je $DE = BD$, pa je trougao BDE jednakokraki. Spoljašnji ugao ovog trougla je $\sphericalangle CDE = 60°$, pa je $\sphericalangle DBE = \sphericalangle DEB = 30°$. Sada je i trougao ABE jednakokraki, jer je $\sphericalangle ABE = 45° - 30° = 15°$ i zbog jednakosti $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD$ je $\sphericalangle BAD = 15°$. Otuda je $AE = BE$. Ali, zbog $\sphericalangle ECB = 30° = \sphericalangle EBC$, sledi da je i $EC = BE$. Prema tome, važi jednakost: $AE = EC$. Zbog toga je trougao AEC jednakokraki pravougli (sa oštrim uglovima od $45°$). Konačno, unutrašnji uglovi trougla su $75°$ i $60°$.

390. Neka je M tačka stranice BC, takva da je $CM = AC$, tj. da je trougao ACM jednakokraki, slika dole. Uglovi na osnovici AM su: $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CMA = 70°$. Zbog toga je $\sphericalangle BAM = 30°$.

Kako je $BM = BC - CM$, a $BD = AD - AB$ i $CM = AC = AB$, to je $BM = BD$, pa je BMD jednakokraki trougao, sa spoljašnjim uglom od $40°$ kod vrha B. Zbog toga je $\sphericalangle BDM = \sphericalangle BMD = 20°$. Neka je N podnožje normale iz M na AB. Sada je AMN pravougli trougao sa oštrim uglom od $30°$, pa je $MN = \frac{1}{2}AM$. Uočimo visinu CP trougla CAM. Sada je $MP = \frac{1}{2}AM = MN$ i $\sphericalangle MCP = 20° = \sphericalangle MDN$. Sledi da su pravougli trouglovi CMP i DMN podudarni, pa je $CM = MD$. Dakle, trougao CDM je jednakokraki sa spoljašnjim uglom $\sphericalangle BMD = 20°$, pa je $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 10°$. Konačno, traženi uglovi su: $\sphericalangle ACD = 50°$, $\sphericalangle ADC = 30°$ i $\sphericalangle BAC = 100°$.





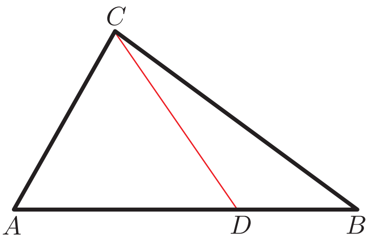
391. a) U pravouglom trouglu ABD je $\sphericalangle ABD = 75°$, kao ugao na osnovici datog trougla ABC. Dalje je $\sphericalangle BAD = 90° - 75° = 15°$, poslednja slika.

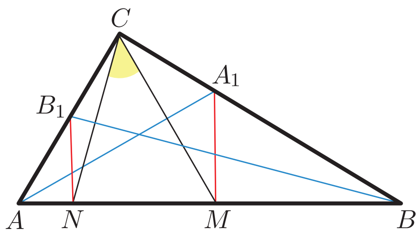
b) U pravouglom trouglu ACD, sa oštrim uglom od $30°$, hipotenuza AC je dva puta veća od katete AD, tj. $AC = 2AD$. Kako je $BC = AC$, to je i $BC = 2AD$.

392. U pravouglom trouglu ACD je duž DM težišna linija hipotenuze AC, pa je $MD = MC$ i $\sphericalangle MDC = \sphericalangle MCD$. (Vidi **primer C** iz odeljka 5.4) Slično je i $\sphericalangle CDN = \sphericalangle DCN$. Kako je $\sphericalangle MCD + \sphericalangle DCN = \sphericalangle ACB = 90°$, to je i $\sphericalangle MDC + \sphericalangle CDN = 90°$.

393. Neka je P presečna tačka pravih m i p. Pravougli trouglovi ABP i MBP podudarni su, po stavu USU. (BP zajednička kateta i jednaki oštri uglovi ABP i MBP, kao polovine ugla α_1.) Otuda sledi da je $MB = AB$. Slično se dokazuje da je $CN = AC$, pa je $MN = MB + BC + CN = AB + BC + CA$.

394. Na osnovu datih obima dobijamo jednakosti: $CA + AD + CD = 45$ i $CD + DB + BC = 35$, slika dole. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo: $CA + (AD + DB) + BC + 2CD = 80$. Kako je $AD + DB = AB$, to je $CA + (AD + DB) + BC = CA + AB + BC = 50$, pa dobijamo jednakost $50 + 2CD = 80$, Odavde sledi da je $CD = 15$ cm.

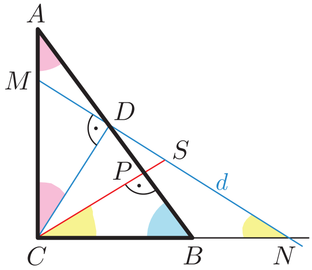


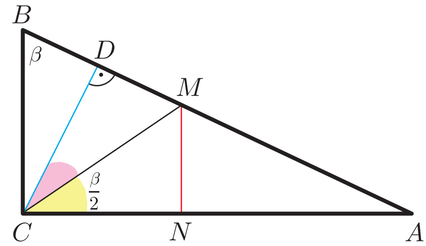


395. Pravougli trouglovi AMA_1 i ACA_1 podudarni su (imaju jednake uglove i zajedničku hipotenuzu), slika gore desno. Zbog toga je $AM = AC$. Slično se dokazuje da je $BN = BC$. Dalje, kao u **zadatku 380**, izračunavamo: $\sphericalangle MCN = 45°$.

396. Lako se dokazuje da su trouglovi SMP i SNQ podudarni, odakle sledi da je $MP = NQ$. Sada možemo dokazati da su podudarni trouglovi KMP i LNQ, odakle je $KP = LQ$, itd.

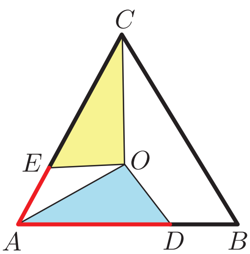
397. Trougao CMN je pravougli, a duž CS je njegova težišna linija. Prema rešenju **primera C** iz **odeljka. 5.4**, trougao CSN je jednakokraki i zbog toga je $\sphericalangle SCN = \sphericalangle SNC$. Iz sličnih razloga je i trougao ACD jednakokraki, pa je i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = \alpha$, sledeća slika levo. Kako je $DC \perp DN$ i $AC \perp CN$, sledi da su jednaki uglovi ACD i SNC, pa je $\sphericalangle SCN = \sphericalangle SNC = \alpha$. Označimo sa P presečnu tačku duži CS i AB. U trouglu BCP znamo dva ugla: $\sphericalangle CBP = \beta$ i $\sphericalangle BCP = \alpha$. Kako je $\alpha + \beta = 90°$, sledi da je $\sphericalangle BPC = 90°$, što znači da je $CS \perp AB$.

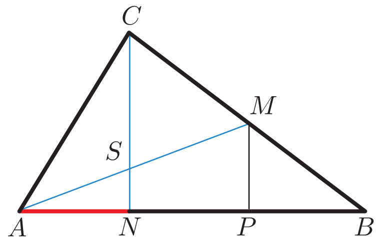




398. Trougao BCM je jednakokraki, pa je $\sphericalangle BCM = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$ odakle sledi da je $\sphericalangle MCN = \dfrac{\beta}{2}$, poslednja slika. Neka je CD hipotenuzina visina. (Po pretpostavci je $CD = CN$.) Tada je $\sphericalangle ACD = 90^\circ - \alpha = \beta$, pa je $\sphericalangle DCM = \dfrac{\beta}{2}$. Otuda sledi da su trouglovi CDM i CNM podudarni (stav SUS, jer je CM zajednička hipotenuza), pa kako je $\sphericalangle CDM = 90^\circ$, to je i $\sphericalangle CNM = 90^\circ$.

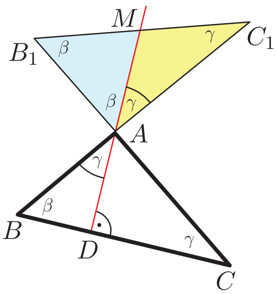
399. Iz uslova $AD + AE = AB = AD + DB$, sledi da je $AE = DB$, pa je i $CE = AD$. Sem toga je $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OCE = 30^\circ$ i $OA = OC = R$, gde je R poluprečnik opisanog kruga (slika dole). Dakle, trouglovi OAD i OCE podudarni su (stav SUS), pa je $OD = OE$ i $\sphericalangle DOA = \sphericalangle EOC$. Znamo da je $\sphericalangle AOC = 120^\circ$, pa je $\sphericalangle DOE = \sphericalangle DOA + \sphericalangle AOE = \sphericalangle EOC + \sphericalangle AOE = 120^\circ$.

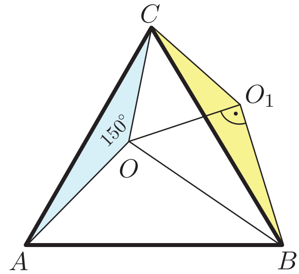




400. Neka je P tačka stranice AB, takva da je $MP \| CN$, slika desno. U trouglu BCN duž MP je srednja linija pa je $NP = PB$. (Tačka M je središte stranice BC i $MP \| CN$.) Označimo sa S središte duži AM. Na isti način je SN srednja linija trougla AMP, pa je $AN = NP$. Prema tome: $AN = NP = PB$, pa je $BN = 2AN$.

401. Neka je M tačka preseka prave AD i duži B_1C_1, sledeća slika. Dokazaćemo da je $B_1M = MC_1$. Najpre, uočavamo da su trouglovi ABC i AB_1C_1 podudarni. Zbog toga je $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle ACB = \gamma$. Ali i $\sphericalangle BAD = \gamma$ (komplement ugla β). Kako je $\sphericalangle C_1AM = \sphericalangle BAD$ (kao unakrsni), zaključujemo da je $\sphericalangle C_1AM = \sphericalangle AC_1M$. Dakle, trougao AC_1M je jednakokraki i $C_1M = AM$. Slično dokažemo da važi: $B_1M = AM$, pa je $C_1M = B_1M$.

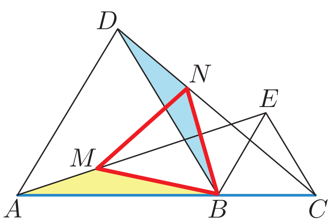


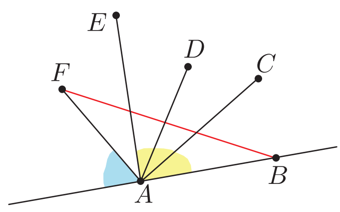


402. Neka je O_1 tačka kao na slici, takva da je trougao COO_1 jednakostranični. Trouglovi AOC i BO_1C podudarni su (SUS: $AC = BC$, $CO = CO_1$ – stranice jednakostraničnih trouglova, $\sphericalangle ACO = 60^\circ - \sphericalangle OCB = \sphericalangle BCO_1$.) Otuda je $O_1B = AO$. Osim toga je i $OO_1 = OC$. Ugao OO_1B je prav jer: $\sphericalangle OO_1B = \sphericalangle BO_1C - \sphericalangle OO_1C = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$. Dakle, trougao OBO_1 je pravougli, a stranice su mu redom jednake dužima OB, OA i OC.

403. Duži EG i FG su srednje linije trougla ABC. Zbog toga je $EG \| AC$ i $EG = \dfrac{1}{2}AC = FN$, a $FG \| AB$ i $FG = \dfrac{1}{2}AB = EM$. Otuda su jednaki i uglovi: $\sphericalangle CFG = \sphericalangle CAB = \sphericalangle BEG = \alpha$, pa je $\sphericalangle MEG = \sphericalangle MEB + \sphericalangle BEG = 90^\circ + \alpha = \sphericalangle GFN$. Prema tome, trouglovi MEG i GFN su podudarni. Zbog toga je $GM = GN$.

404. Trouglovi ABE i DBC su podudarni (SUS, jer je $AB = DB$, $BE = BC$ i $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.) Otuda je $AE = DC$, pa je i $AM = DN$ i $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NDB$. Otuda sledi da su podudarni među sobom trouglovi AMB i DNB (slika dole). Na osnovu ove podudarnosti slede jednakosti: $MB = BN$ i $\sphericalangle ABM + \sphericalangle MBD = \sphericalangle ABD = 60^\circ = \sphericalangle MBD + \sphericalangle DBN = \sphericalangle MBN$. U trouglu MBN je $MB = BN$ i $\sphericalangle MBN = 60^\circ$, pa je on jednakostranični.





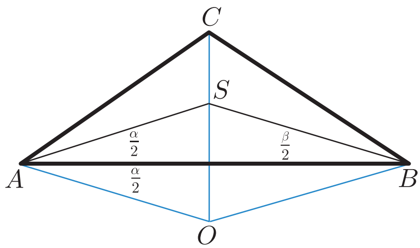
405. U svakom slučaju, od datih tačaka mogu se odabrati dve, kao A i B na poslednjoj slici, takve da ostale četiri tačke budu sa iste strane prave AB. Konstruišemo i duži AC, AD, AE, AF.

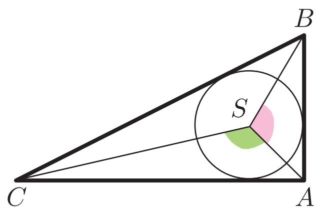
Prema rasporedu sa slike, razlikujemo dva slučaja.

Ako je $\sphericalangle BAF \geqslant 120^\circ$, tada je zbir dva ostala unutrašnja ugla trougla ABF manji ili jednak 60°, što znači da je jedan od ova dva ugla manji ili jednak 30°.

Ako je $BAF < 120°$, tada je bar jedan od četiri ugla: BAC, CAD, DAE, EAF, manji od $30°$ (zbir ova četiri ugla manji je od $120°$), pa je to ugao traženog trougla.

406. Neka je S centar upisanog i O centar opisanog kruga trougla ABC, slika levo. Prava OS je simetrala duži AB, pa je $OA = OB$. Zbog toga je $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, pa je $\alpha = \beta$. Znači, trougao ABC je jednakokraki i $AC = BC$, a tačka C pripada pravoj OS. Poluprečnici OA i OC opisanog kruga su jednaki, pa je $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$, tj. $3\frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$, tj. $\gamma = 3\alpha$. Sada iz zbira unutrašnjih uglova dobijamo $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$, tj. $\alpha = 36°$, pa je $\gamma = 108°$.

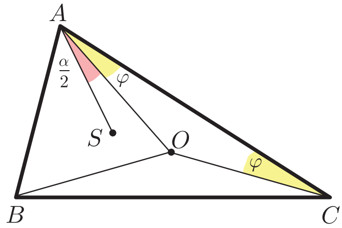


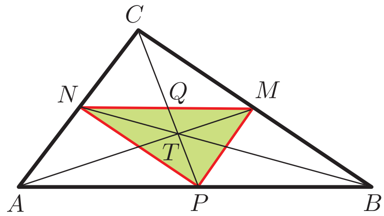


407. U trouglu ASB je $\sphericalangle ASB = 180° - 45° - \frac{\beta}{2}$, a u trouglu ASC je $\sphericalangle ASC = 180° - 45° - \frac{\gamma}{2}$ ($\sphericalangle SAB = \sphericalangle SAC = 45°$), slika desno. Prema uslovu je: $180° - 45° - \frac{\gamma}{2} - \left(180° - 45° - \frac{\beta}{2}\right) = 20°$, odakle je $\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 20°$, odnosno $\beta - \gamma = 40°$. Kako je $\beta + \gamma = 90$, biće dakle: $\beta = 65°$, $\gamma = 25°$.

408. Prema sledećoj slici traženi ugao je $\sphericalangle SAO = \frac{\alpha}{2} - \varphi$, gde je $\varphi = \sphericalangle CAO$. Izrazićemo ugao φ preko unutrašnjih uglova α, β i γ. Razmatramo slučaj oštrouglog trogula ABC, uz napomenu da se istim rezonom i vrlo slično rešava u slučaju neoštrouglog trougla.

Trouglovi AOC, BOC i AOB su jednakokraki, jer su OA, OB, OC poluprečnici opisanog kruga. Stoga $\sphericalangle BCO = \gamma - \varphi = \sphericalangle CBO$, pa je $\sphericalangle ABO = \beta - (\gamma - \varphi) = \beta - \gamma + \varphi = \sphericalangle BAO$. Sada iz $\alpha = \sphericalangle BAO + \varphi = \beta - \gamma + 2\varphi$, dobijamo: $\varphi = \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}$.
Dakle: $\sphericalangle SAO = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

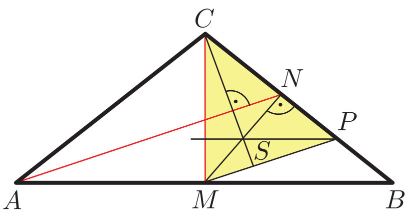


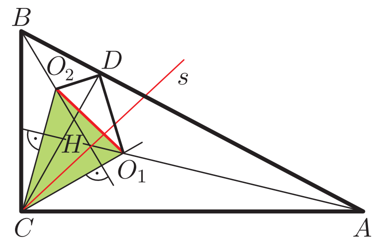


409. Označimo sa Q presečnu tačku težišne linije CP i srednje linije MN, poslednja slika desno. Duž NQ je srednja linija trougla ACP, pa je $CQ = QP$ i $NQ = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{4}AB$. Slično zaključujemo da je $MQ = \frac{1}{4}AB$, pa je $NQ = QM$, tj. PQ je težišna linija trougla MNP. Kako je $CT = \frac{2}{3}CP$ i $CQ = \frac{1}{2}CP$, to je $QT = \frac{2}{3}CP - \frac{1}{2}CP = \frac{1}{6}CP$. Međutim, $TP = \frac{1}{3}CP = \frac{2}{6}CP = 2QT$, pa je T težište trougla MNP.

410. Tačka C ne pripada pravoj AB, jer bi u protivnom postojale dve normale iz D na pravu AB. To su DC i DB. Prema tome, postoji trougao ABC, kome su CD i BD visine na stranice AB i AC. Tačka D je ortocentar, pa je AD visina stranice BC, tj. $AD \perp BC$.

411. Označimo sa P središte duži BN, slika dole levo. Duž PS je srednja linija trougla MBN, pa je prava SP paralelna osnovici AB, a samim tim je $PS \perp CM$. Osim toga je $MN \perp CP$ po pretpostavci, pa je S ortocentar trougla CMP. Otuda sledi da je $CS \perp MP$. Međutim, $MP \| AN$, jer je MP srednja linija trougla ABN. Zbog toga je $CS \perp AN$.

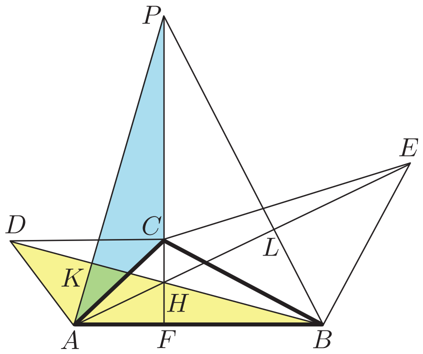


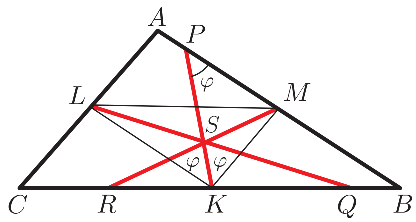


412. Simetrale dvaju uglova sa normalnim kracima takođe su normalne među sobom. Zbog toga je BO_2, kao simetrala ugla CBA, normalna na simetralu CO_1 ugla ACD. Iz istih razloga je simetrala AO_1 ugla CAB normalna na simetralu CO_2 ugla DCB, slika desno. Dakle, presečna tačka simetrala uglova trougla ABC, na slici tačka H, je ortocentar trougla CO_1O_2, pa je $CH \perp O_1O_2$, kao treća visina.

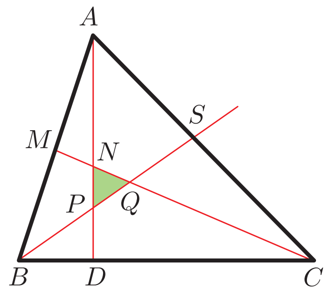
413. Označimo sa K presek prave BD i normale na BD povučene iz A. Slično, L je tačka duži AE, takva da je $BL \perp AE$. Neka je F podnožje visine CF trougla ABC (vidi sledeću sliku). Najpre ćemo dokazati da prave AK, BL i CF imaju jednu zajedničku tačku.

Neka je P presečna tačka pravih AK i CF. Trouglovi ABD i CPA podudarni su ($AD = AC$, a unutrašnji uglovi su sa normalnim kracima). Otuda je $AB = CP$. Označimo sa P_1 presečnu tačku pravih BL i CF. Slično prethodnom dokazu utvrdimo da je $AB = CP_1$. Sada sledi da je $CP = CP_1$, što znači da je $P \equiv P_1$. Uočimo trougao ABP. U njemu su BD, AE i CF visine, pa prema tome, imaju jednu zajedničku tačku.





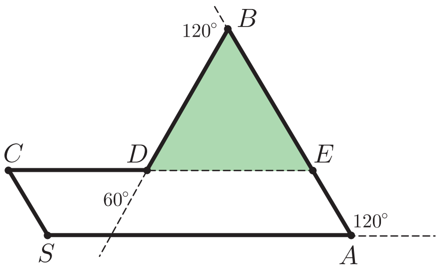
414. Iz $BP = \dfrac{BA + AC}{2} = \dfrac{BA}{2} + \dfrac{AC}{2} = BM + \dfrac{AC}{2} = BM + MP$, sledi da je $MP = \dfrac{AC}{2}$. Ali, KM je srednja linija trougla ABC, pa je $KM = \dfrac{AC}{2}$. Sledi da je $PM = KM$, pa u trouglu KMP je $\sphericalangle KPM = \sphericalangle PKM$. Duž KL je srednja linija trougla ABC, pa je $KL \| AB$ i $\sphericalangle LKP = \sphericalangle KPM$ sa paralelnim kracima, slika gore desno. Dakle, iz $\sphericalangle LKP = \sphericalangle PKM$, zaključujemo da je KP simetrala ugla LKM trougla KLM. Sličnim rezonovanjem dolazimo do zaključka da je LQ simetrala ugla KLM i MR simetrala ugla LMK. Dakle, ove prave se seku u jednoj tački, u tački S na slici gore.

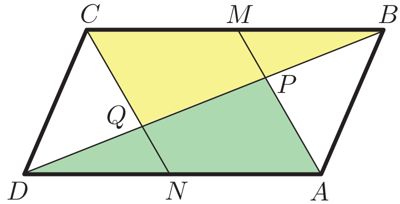


415. Neka je AD visina, BS simetrala ugla i CM težišna linija. Njihove presečne tačke označimo sa N, P, Q. Pretpostavimo da je trougao NPQ jednakostraničan. Onda je $\sphericalangle BPD = 60°$, pa je $\sphericalangle PBD = 30° = \sphericalangle ABP$ i $\sphericalangle ABC = 60°$. Tada je trougao BQM pravougli, jer je $\sphericalangle BQM = 60°$ i $\sphericalangle MBQ = 30°$. Kako je M središte stranice AB, sledi da su trouglovi BCM i ACM podudarni i $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM = 30°$. Tada je i $\sphericalangle ACB = 60°$, pa je trougao ABC jednakostranični. Međutim, tada bi se tačke N, P i Q poklapale: $N = P = Q$, što je suprotno datom uslovu o postojanju trougla NPQ. Dakle, nije moguće da trougao NPQ bude jednakostranični.

416. Na sledećoj slici levo vidimo da je izviđač veći deo puta išao po stranicama jednog jednakostraničnog trougla. Trougao BED takođe je jednakostranični sa stranicom 2 km, pa je $EA = 1$ km $= CS$, jer je četvorougao $AECS$ paralelogram. Dakle, $CS = 1$ km je traženo rastojanje.

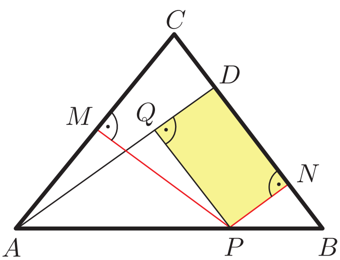
417. Četvorougao $AMCN$ je paralelogram ($AN = CM$ i $AN \| CM$). Kako je tačka M središte duži BC i $AM \| CN$, sledi da je tačka P u kojoj AM seče dijagonalu BD, središte duži BQ, sledeća slika desno, tj. MP je srednja linija trougla BCQ. Dakle, $BP = PQ$. Slično, u trouglu ADP dokazuje se da je i $DQ = PQ$, što se i tvrdilo.

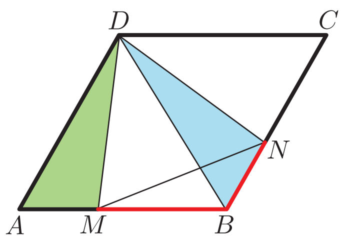




418. Najpre nalazimo unutrašnje uglove romba, 60° i 120°. Manja dijagonala deli romb na dva jednakostranična trougla, pa navedene visine polove naspramne stranice romba. Dalje, rešavamo kao u prethodnom zadatku.

419. a) Označimo sa Q podnožje normale iz tačke P na pravu AD. Kako je i $BC \perp AD$, to je $PQ \| BC$. Sledi, da je tačka Q između A i D, ako je P između A i B, slika levo, a ako je B između A i P, onda je i D između A i Q. Četvorougao $DNPQ$ je pravougaonik, pa je $PN = QD$. Sem toga, pravougli trouglovi APM i PAQ su podudarni (imaju zajedničku hipotenuzu AP i $\sphericalangle QPA = \beta$, zbog $PQ \| BC$, pa je $\sphericalangle QPA = \alpha = \sphericalangle MAP$). Otuda je $PM = AQ$, pa je $PM + PN = AD$ ili $PM - PN = AD$, zavisno od položaja tačke P na pravoj AB (slučaj b)).





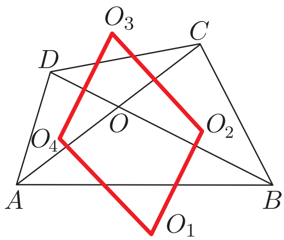
420. Vidi rešenje **zadatka 417**. Rezultat je $AM = 6$ cm.

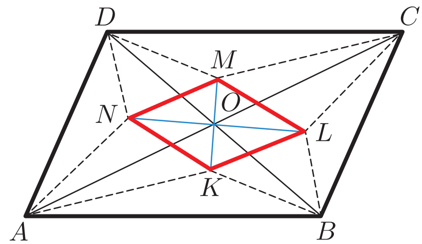
421. Neka je N središte stranice CD. Četvorouglovi $AMND$ i $MBCN$ su rombovi, pa su njihove dijagonale CM i DM simetrale suplementnih uglova BMN i NMA. Zbog toga je $\sphericalangle CMD = 90°$. (Vidi i rešenje **primera B** u **odeljku 5.1.**)

422. Dijagonala BD deli romb na dva jednakostranična trougla. Iz uslova $MB + BN = AB = AM + MB$, sledi da je $AM = BN$. Kako je $AD = BD$ i $\sphericalangle DAM = 60° = \sphericalangle DBN$, to su podudarni trouglovi AMD i BND, slika gore. Otuda sledi da je $DM = DN$ i $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDN$. Daljim izračunavanjem nalazimo da je $\sphericalangle MDN = \sphericalangle MDB + \sphericalangle BDN = \sphericalangle MDB + \sphericalangle ADM = \sphericalangle ADB = 60°$. Trougao DMN je jednakokraki, sa uglom od 60° između krakova DM i DN, pa je i ugao na osnovici 60°, tj. trougao DMN je jednakostranični.

423. Označimo sa O_1, O_2, O_3, O_4 centre ovih krugova, sledeća slika. Ove tačke dobijaju se u presecima simetrala odgovarajućih stranica. Zbog toga je $O_1O_2 \perp BD$

i $O_3O_4 \perp BD$, pa je $O_1O_2 \| O_3O_4$. Slično se dokazuje da je $O_2O_3 \| O_1O_4$. Dakle, četvorougao $O_1O_2O_3O_4$ je paralelogram.



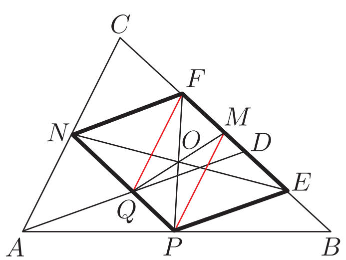


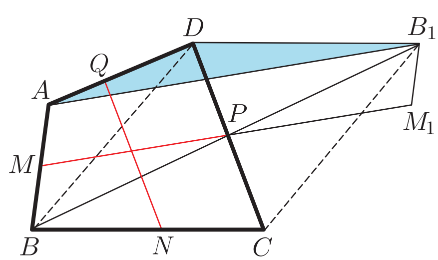
424. Neka su K, L, M, N centri ovih krugova, slika desno. Kako se ove tačke nalaze u presecima simetrala odgovarajućih uglova, a susedni uglovi u preseku dijagonala su suplementni, to su dijagonale KM i NL četvorougla $KLMN$ normalne. Sem toga, podudarni su trouglovi AKO i CMO. ($AO = CO$ i uglovi su jednaki, unakrsni ili sa paralelnim kracima). Odavde sledi da je $OK = OM$. Slično se dokazuje i da je $OL = ON$. Otuda sledi da je četvorougao $KLMN$ romb.

425. Označimo sa N podnožje normale iz C na BB_1. Lako se dokazuje da su pravougli trouglovi BCN i ADA_1 podudarni, pa je $BN = AA_1$. Četvorougao CC_1B_1N je pravougaonik, pa je $B_1N = CC_1$.

Otuda sledi da je $BB_1 = BN + NB_1 = AA_1 + CC_1$.

426. Duž PE je srednja linija trougla ABD, pa je ona paralelna i jednaka polovini duži AD. To isto zaključujemo za duž FN u trouglu ACD, pa su duži PE i NF paralelne i jednake. Zbog toga je četvorougao $EFNP$ paralelogram. Njegove dijagonale PF i NE se polove. Zajedničko središte im je tačka O, slika dole. Dalje izračunavamo: $FM = CM - CF = \frac{1}{2}(BC - CD) = \frac{1}{2}BD$. Međutim, u trouglu ABD je PQ srednja linija, pa je $PQ = \frac{1}{2}BD$ i $PQ \| BD$. Zbog toga je četvorougao $PMFQ$ paralelogram, sa dijagonalama MQ i PF, pa središte duži FP (i NE) ujedno je i središte duži MQ.





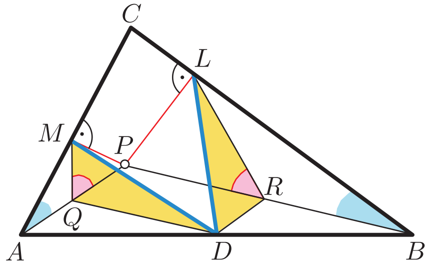
427. Neka su B_1 i M_1 tačke, takve da je tačka P središte duži BB_1 i duži MM_1, slika gore. Četvorougao BMB_1M_1 je paralelogram (dijagonale se polove), pa je M_1B_1 jednako i paralelno sa BM, a samim tim i sa AM. Zbog toga je i četvorougao AMM_1B_1 paralelogram, pa je $AB_1 = MM_1 = 2MP$ i $AB_1 \| MP$. I četvorougao BCB_1D je paralelogram (dijagonale se polove), pa je $B_1D = BC$ i $B_1D \| BC$. Sada za trougao AB_1D važi: $AB_1 \leqslant AD + DB_1$, odakle je $2MP \leqslant AD + BC$. Međutim, po uslovu zadatka je $2MP = AD + BC$, a to je moguće samo ako je D tačka duži AB_1. Ali, tada je $AD \| MP$ i $B_1D \| MP$, pa je i $BC \| MP$. Sledi da je $AD \| BC$.

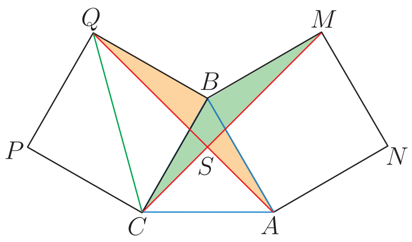
Slično se zaključuje da iz uslova $2NQ = AB + CD$ sledi da je $AB \| CD$. Prema tome, četvorougao $ABCD$ je paralelogram.

428. Prema rešenju prethodnog zadatka je $2MP + 2NQ \leqslant (AD + BC) + (AB + CD)$, pa sledi da je $2MP + 2NQ = AD + BC + AB + CD$, ako i samo ako je $2MP = AD + BC$ i istovremeno $2NQ = AB + CD$, pa je $ABCD$ paralelogram.

429. Uglovi AKD i KDC jednaki su kao uglovi sa paralelnim kracima, pa je, prema uslovu i $\sphericalangle DKC = \sphericalangle CDK$. Sledi da je trougao CDK jednakokraki, pa je duž CS visina na osnovicu DK.

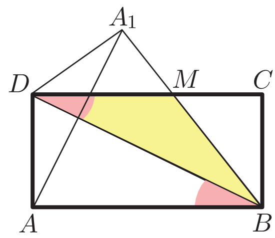
430. Neka su tačke R i Q središta duži BP i AP. U pravouglom trouglu APM težišna linija MQ jednaka je polovini hipotenuze: $MQ = AQ = PQ$, pa je u jednakokrakom trouglu MAQ ugao MQP spoljašnji i $\sphericalangle MQP = 2\sphericalangle MAP$, leva slika. Slično zaključujemo da je $LR = PR$ i $\sphericalangle LRP = 2\sphericalangle LBP$. Dakle, važi: $\sphericalangle MQP = \sphericalangle LRP$. Duži DQ i DR su srednje linije trougla ABP, pa je četvorougao $PQDR$ paralelogram. Odatle sledi da je $PQ = DR$, $PR = DQ$ i $\sphericalangle PQD = \sphericalangle PRD$. Dakle, zaključujemo sledeće: $MQ = QP$ i $QP = DR$ povlači da je $MQ = DR$ i slično da je $QD = LR$. Sem toga, iz jednakosti $\sphericalangle MQP = \sphericalangle PRL$ i $\sphericalangle PQD = \sphericalangle PRD$, sledi da je $\sphericalangle MQD = \sphericalangle DRL$. Sledi da su trouglovi MQD i DRL podudarni, pa je $MD = DL$.





431. Vidi rešenje **zadatka 429**. Slično se ovde dokaže da je trougao ABM jednakokraki, pa je $BM = AB = 2BC$. Zbog toga je u pravouglom trouglu BCM ugao BMC jednak 30°. Prema tome, $\sphericalangle BMD = 150^\circ$, pa je $\sphericalangle AMB = 75^\circ$.

432. Trouglovi ABQ i CBM su jednakokraki i podudarni ($AB = BQ = BC = BM$ i $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBQ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \sphericalangle CBM$). Sledi da je $AQ = CM$ i $\sphericalangle BAQ = 15^\circ = \sphericalangle BQA = \sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC$, slika gore desno. Onda je $\sphericalangle ACS = \sphericalangle ACB - \sphericalangle BCM = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. Slično utvrdimo i da je $\sphericalangle CAS = 45^\circ$. Dakle, $\sphericalangle ASC = 90^\circ = \sphericalangle CSQ$ i $AS = CS$. Dalje, u pravouglom trouglu CSQ oštri uglovi su 60° i 30°, pa je $CQ = 2CS = 2AS$.



433. Zbog simetrije je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1BD$. Međutim, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$, kao uglovi sa paralelnim kracima, pa je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBM$, slika desno. Dakle, trougao BDM je jednakokraki.

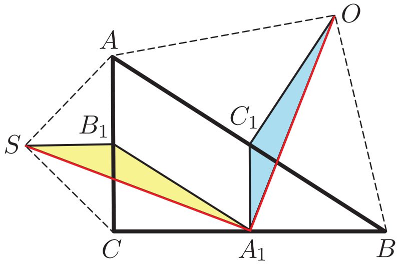
434. Neka su K_1 i N_1 podnožja normala iz K na CD i iz N na BC. Tvrđenje zadatka sledi iz podudarnosti trouglova KK_1M i NN_1L, koja se lako utvrdi (stav USU). (Nacrtaj odgovarajuću sliku.)

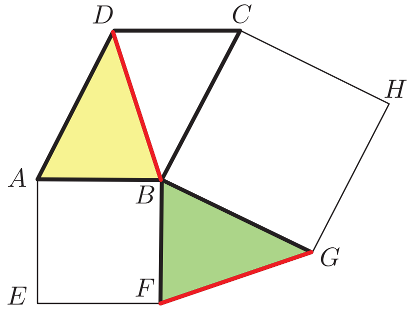
435. Koristeći osobine srednje linije trougla, lako se dokažu sledeće činjenice. Duž MN je paralelna i jednaka polovini duži BC, kao srednja linija trougla BCH. Iz trougla ABC zaključujemo to isto za duž PQ, pa je $MNPQ$ paralelogram. U trouglu ABH duž MQ je srednja linija, pa je $MQ \| AH$. Kako je $AH \perp BC$, a ujedno i $AH \perp MN$, sledi da je $MQ \perp MN$, pa je $MNPQ$ pravougli paralelogram.

436. Trouglovi ABC i LBM podudarni su, jer je $BC = BM$ i $AB = BL$ (stranice odgovarajućih jednakostraničnih trouglova) i $\sphericalangle LBM = \sphericalangle LBA + \sphericalangle ABM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ = \sphericalangle ABC$. Iz podudarnosti sledi da je $AC = LM$.

437. Slično **primeru C**, dokažemo da su trouglovi ABE, FCE i FDA podudarni ($AD = BE = CE$, zatim $AB = CF = DF$ i $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ECF = \sphericalangle ADF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$). Otuda sledi: $AE = EF = FA$.

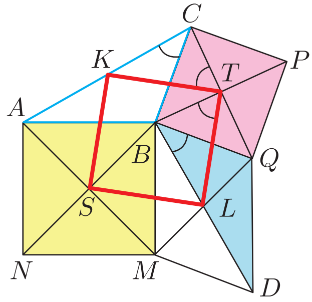
438. Neka je B_1 središte katete AC i C_1 središte hipotenuze, sledeća slika. Označimo sa O i S centre datih kvadrata. Dokazaćemo da su trouglovi OA_1C_1 i A_1SB_1 podudarni. Trougao ABO je jednakokraki pravougli, pa je $OC_1 \perp AB$ i $OC_1 = \dfrac{1}{2}AB$. Duž A_1B_1 je srednja linija trougla ABC, pa je $A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB$ i $A_1B_1 \| AB$. Dakle, $A_1B_1 = OC_1$. Slično dokažemo da je $A_1C_1 = SB_1 = \dfrac{1}{2}AC$ i $A_1C_1 \| AC$. Kako je $\sphericalangle BC_1A_1 = \sphericalangle A_1B_1C$ (sa paralelnim kracima), to je i $\sphericalangle OC_1A_1 = 90^\circ + \sphericalangle BC_1A_1 = 90^\circ + \sphericalangle A_1B_1C = \sphericalangle A_1B_1S$. Dakle, trouglovi OA_1C_1 i A_1SB_1 su podudarni, pa je $OA_1 = A_1S$.





439. Nije bitno da li jedan ili oba kvadrata delimično preklapaju dati paralelogram. Neka su ovi kvadrati kao na poslednjoj slici. Tada su trouglovi ABD i

FBG podudarni ($AB = BF$, $AD = BC = BG$ i $\sphericalangle FBG = \sphericalangle BAD$, kao uglovi sa normalnim kracima), pa je $BD = FG$.



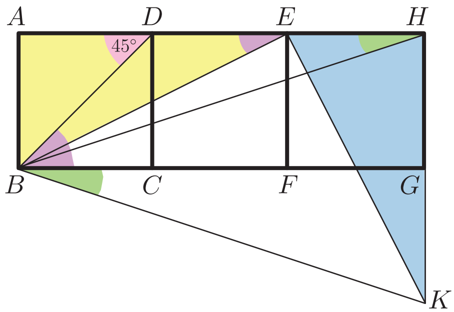
440. Neka je K središte duži AC i L središte duži MQ, a S i T centri kvadrata $ABMN$ i $BCPQ$. Tačke, K, T, L i S su središta stranica četvorougla $ACQM$, pa je četvorougao $KTLS$ paralelogram, slika desno. (Vidi **primer A** iz prethodnog odeljka).

Dokažimo da su stranice četvorougla $KTLS$ jednake među sobom. Odredimo tačku D, tako da je L središte duži BD. Tada je četvorougao $BQDM$ paralelogram, a $DQ = BM = AB$ i $DQ \| BM$, odnosno $DQ \perp AB$. Kako je $BQ \perp BC$ i $BQ = BC$, to je i $\sphericalangle BQD = \sphericalangle ABC$ (sa normalnim kracima), a trouglovi ABC i DQB su podudarni. Otuda sledi da je $\sphericalangle LBQ = \sphericalangle BCK$ i $BL = CK = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}BD$. Sada su podudarni trouglovi CKT i LBT ($CK = BL$, $CT = BT = \dfrac{1}{2}BP$ i $\sphericalangle KCT = \sphericalangle KCB + 45^\circ = \sphericalangle LBQ + 45^\circ = \sphericalangle LBT$). Otuda sledi da je $KT = LT$, pa su sve stranice četvorougla $KTLS$ jednake među sobom. Takođe je i $\sphericalangle CTK = \sphericalangle BTL$, pa je $\sphericalangle KTL = \sphericalangle KTB + \sphericalangle BTL = \sphericalangle KTB + \sphericalangle KTC = \sphericalangle BTC = 90^\circ$. Dakle, četvorougao $KTLS$ je kvadrat.

441. Neka se dijagonale romba seku u tački O. Duži AC i BD su uzajamno normalne. Lako se dokazuje da su trouglovi ANO i BNO podudarni, pa je $OA = OB$, itd. Dakle, četvorougao $ABCD$ ima uzajamno normalne i jednake među sobom dijagonale, koje se polove, pa je on kvadrat.

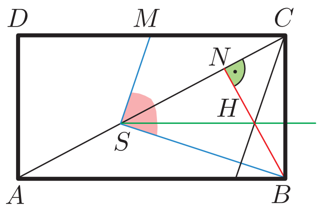
442. Vidi rešenje **zadatka 424**. Treba dokazati još i da je $OK = OL$.

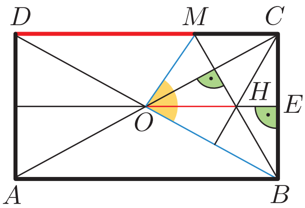
443. Duž BD je dijagonala kvadrata $ABCD$, pa je $\sphericalangle ADB = 45^\circ$. Treba dokazati da je $\sphericalangle AEB + \sphericalangle AHB = 45^\circ$.



Neka je K tačka takva da je G središte duži KH. Nije teško dokazati da su podudarni pravougli trouglovi ABE i HEK. Odatle sledi da je $BE = EK$ i $\sphericalangle HKE = \sphericalangle AEB$, pa je trougao BEK pravougli jednakokraki ($\sphericalangle BEK = 180^\circ - (\sphericalangle AEB + \sphericalangle HEK) = 180^\circ - (\sphericalangle HKE + \sphericalangle HEK) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$). Dakle, $\sphericalangle EBK = 45^\circ = \sphericalangle EBG + \sphericalangle GBK = \sphericalangle AEB + \sphericalangle GBK$. (Uglovi EBG i AEB su sa paralelnim kracima.) Međutim, iz podudarnosti pravouglih trouglova BGK i BGH (koja se jednostavno dokazuje) zaključujemo da je $\sphericalangle GBK = \sphericalangle GBH$, a $\sphericalangle GBH = \sphericalangle AHB$, jer su sa paralelnim kracima. Sledi da je $\sphericalangle GBK = \sphericalangle AHB$, pa je $\sphericalangle AEB + \sphericalangle GBK = \sphericalangle AEB + \sphericalangle AHB = 45^\circ$.

444. Konstruišimo iz S normalu na BC i sa H označimo tačku u kojoj ova normala seče duž BN, slika dole levo. Tačka H je ortocentar trougla BCS, pa je prava CH normalna na BS. Iz $SH \perp BC$ i $AB \perp BC$, zaključujemo da je $SH \| AB$, pa je SH srednja linija trougla ABN. Zbog toga je $SH = \frac{1}{2}AB = CM$. Sada iz $SH = CM$ i $SH \| AB$, odnosno $SH \| CM$, zaključujemo da je četvorougao $SHCM$ paralelogram, pa je $MS \| CH$, a samim tim je $MS \perp SB$ i $\sphericalangle BSM = 90°$.

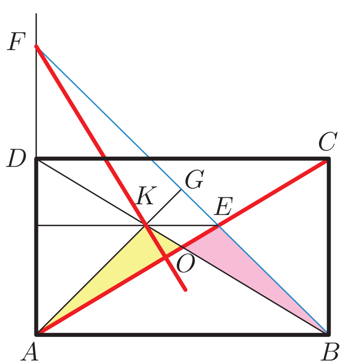


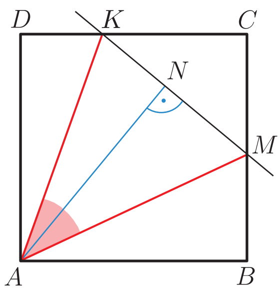


445. Slično prethodnom zadatku. Neka je H tačka duži BM, takva da je $OH \| CD$. Tada je $OH \perp BC$, slika gore desno. Tačka H je ortocentar trougla OBC, pa je $CH \perp OB$. Po konstrukciji OH je srednja linija trougla BMD, pa je $OH = \frac{1}{2}DM = MC$. Prema tome, četvorougao $OHCM$ je paralelogram i $OM \| CH$, pa je $OM \perp OB$ i $\sphericalangle BOM = 90°$.

446. Koristimo ortocentar trougla AEF kao u prethodnim zadacima.

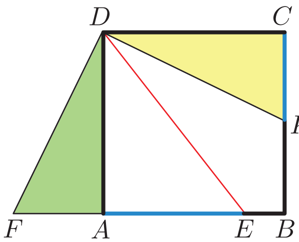
Označimo sa O presek dijagonala i sa G presek prave AK sa BF, sledeća slika. Kako je $KE \| AB$, a dijagonale pravougaonika su jednake među sobom, trouglovi ABO i KEO su jednakokraki, pa $AO = OB$ i $KO = EO$. Onda su trouglovi AKO i BEO podudarni, zbog čega je $AE = BK$ i $AK = BE$. Dakle, trouglovi ABK i BAE takođe su podudarni, pa je $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ABE = 45°$. Trougao ABG ima dva ugla po $45°$, pa je $\sphericalangle AGB = 90°$. Sem toga je prava KE paralelna sa AB, odakle sledi da je $KE \perp AD$. Sada u trouglu AEF imamo dve visine, AG i EK i one se seku u tački K. Prema tome, K je ortocentar trougla AEF, pa je FK treća visina i $FK \perp AE$.

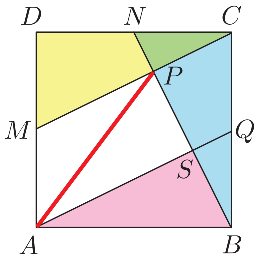




447. Neka je N podnožje normale iz A na KM, poslednja slika. Pravougli trouglovi AMB i AMN podudarni su (zajednička hipotenuza AM i jednaki oštri uglovi. kod M), pa je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MAN$ i $AN = AB$. Sada vidimo da su i pravougli trouglovi AKN i AKD podudarni (zajednička hipotenuza i $AN = AD$), odakle zaključujemo da je $\sphericalangle KAN = \sphericalangle KAD$. Znači, AM i AK su simetrale dvaju komplementnih uglova, pa je: $\sphericalangle KAM = \sphericalangle KAN + \sphericalangle NAM = \frac{1}{2}\sphericalangle DAN + \frac{1}{2}\sphericalangle BAN = \frac{1}{2}(\sphericalangle DAN + \sphericalangle BAN) = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 45^\circ$.

448. Na pravoj AB odredimo tačku F, takvu da je tačka A između B i F i $AF = KC$. Trouglovi ADF i CDK su podudarni, pa je $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDK$, sledeća slika. Kako je DK simetrala ugla CDE, to je $\sphericalangle ADF = \sphericalangle KDE$. Odavde je: $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FDA + \sphericalangle ADE = \sphericalangle CDK + \sphericalangle ADE = \sphericalangle KDE + \sphericalangle ADE = \sphericalangle ADK$. Međutim, $\sphericalangle ADK = \sphericalangle CKD$ (sa paralelnim kracima) pa je $\sphericalangle FDE = \sphericalangle CKD = \sphericalangle DFE$. (Uglovi DKC i DFA su jednaki zbog podudarnosti trouglova ADF i CDK.) Dakle, trougao DEF je jednakokraki i $DE = EF = AE + AF = AE + KC$.

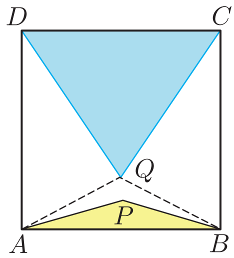


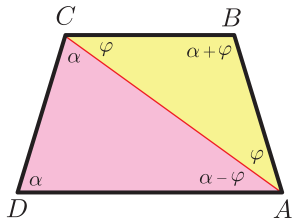


449. Pravougli trouglovi BCN i CDM podudarni su (imaju jednake katete), pa imaju jednake oštre uglove. Kako je $\sphericalangle BNC = \sphericalangle CMD$, a sem toga važi da je $\sphericalangle CMD + \sphericalangle MCD = 90^\circ$, biće $\sphericalangle BNC + \sphericalangle MCN = 90^\circ$, pa je u trouglu CNP ugao CPN prav. Dakle, prava CM je normalna na pravu BN.

Konstruišimo duž AQ, gde je Q središte stranice BC, slika gore. Jasno je da je četvorougao $AMCQ$ paralelogram, pa je $AQ \perp BP$ i $AQ \| CP$. Označimo sa S presečnu tačku duži AQ i BP. Po konstrukciji je duž QS srednja linija trougla BCP, pa je $BS = SP$. Zbog toga su podudarni pravougli trouglovi ASB i ASP, odakle sledi da je $AP = AB$.

450. Neka je Q tačka u kvadratu, takva da je trougao CDQ jednakostraničan, sledeća slika. Tada je $CQ = BC$, pa je trougao BCQ jednakokraki i $\sphericalangle BCQ = 30^\circ$. Sledi da je $\sphericalangle CBQ = 75^\circ$, što znači da poluprava BQ sadrži tačku P. Međutim, slično dokazujemo da je $\sphericalangle DAQ = 75^\circ$, tj. poluprava AQ sadrži tačku P. To znači da se AQ i BQ seku u tački P, a otuda sledi da je $P \equiv Q$. Dakle, trougao CDP je jednakostranični.

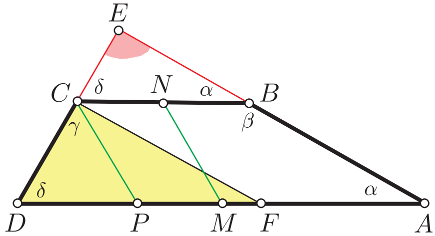


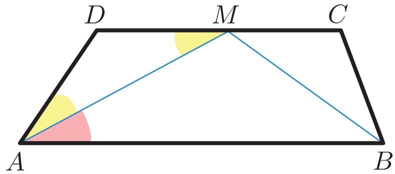


451. Dijagonala AC je osnovica jednakokrakog trougla ABC, a krak jednakokrakog trougla ACD, slika gore desno. Ako jednake uglove trapeza kod temena A i D označimo sa α, onda su uglovi jednakokrakih trouglova kao na slici. Dobijamo jednakosti $3\alpha - \varphi = 180^\circ$ i $3\varphi + \alpha = 180^\circ$. Odavde dobijamo $\alpha = 72^\circ$, pa su uglovi trapeza: 72°, 108°, 108° i 72°.

452. Neka je dijagonalom AC prepolovljen ugao DAB jednakokrakog trapeza $ABCD$, kome je CD manja osnovica. Tada je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$, a kako je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ (sa paralelnim kracima), biće $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$, pa je krak jednak manjoj osnovici. Iz datog obima izračunavamo da je veća osnovica AB dva puta veća od manje osnovice CD. Neka je tačka S središte veće osnovice. Tada je četvorougao $SBCD$ romb, a trougao ASD je jednakostranični. Zbog toga su uglovi datog trapeza: 60°, 60°, 120°, 120°.

453. Odredimo tačku P takvu da je četvorougao $MNCP$ paralelogram. Tada je $CP = MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$ i $PM = CN = \frac{1}{2}BC$. Onda je $DP = DM - PM = \frac{1}{2}(AD - BC) = CP$, sledeća slika. Neka je, zatim, F tačka, takva da je četvorougao $ABCF$ paralelogram. Tada je $AF = BC$, pa je $DF = AD - BC$. Sledi da je $PF = \frac{1}{2}(AD - BC) = DP = PC$. Dakle, trougao DFC je pravougli (duž CP je hipotenuzina težišna linija). Kako je $CF \| AB$, zaključujemo da je $\sphericalangle AED = \sphericalangle FCD = 90^\circ$.





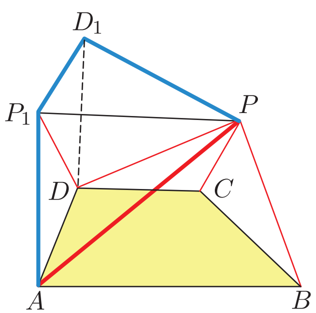
454. Neka su M i N središta osnovica AB i CD jednakokrakog trapeza $ABCD$. Trouglovi AMD i BMC su podudarni, pa je $DM = CM$ i trougao CDM je jednakokraki, sa osnovicom CD, pa je njegova težišna linija MN normalna na CD i normalna na AB.

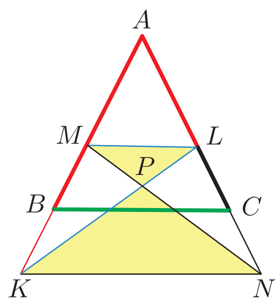
455. Neka je $ABCD$ trapez kome je kraća osnovica CD jednaka zbiru krakova AD i BC, slika gore desno. Uočimo tačku M na duži DC, takvu da je $DM = AD$. Tada je i $CM = BC$. Trougao AMD je jednakokraki, pa je $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DAM$. Međutim, $\sphericalangle DMA = \sphericalangle MAB$, kao uglovi sa paralelnim kracima, pa je $\sphericalangle DAM = \sphericalangle MAB$, što znači da je AM simetrala ugla BAD. Slično se dokazuje da je i prava BM simetrala ugla ABC.

456. Neka su M i N središta krakova, a P i Q presečne tačke dijagonala sa srednjom linijom MN. Prema uslovu je $PQ = MP + QN$, a $MP = QN = \frac{1}{2}CD$ (srednje linije trouglova ACD i DBC), Dakle, $PQ = CD$, pa je $MN = 2DC$. Kako je $2MN = AB + CD$, biće $4CD = AB + CD$. Odavde je $AB = 3CD$.

457. Neka je E tačka u kojoj se seku produžeci krakova AB i CD, kao na prethodnoj slici levo. U trouglu BCE unutrašnji uglovi su: $\sphericalangle CBE = \sphericalangle BAD = \alpha$ i $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ADC = \delta$ (uglovi sa paralelnim kracima), a spoljašnji su uglovi: $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCD = \gamma$; to su uglovi na manjoj osnovici trapeza. Prema osobinama spoljašnjih uglova trougla, imamo nejednakosti: $\beta > \delta$ i $\gamma > \alpha$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo: $\beta + \gamma > \alpha + \delta$.

458. Sa one strane prave AB sa koje je P odredimo tačku P_1, takvu da je $AP_1 = BP$ i $DP_1 = CP$, sledeća slika. Ako je četvorougao $APDP_1$ konveksan, onda je tvrđenje zadatka potvrđeno. Pretpostavimo da nije tako i da je unutrašnji ugao $\sphericalangle PDP_1$ veći od $180°$. Tada odredimo tačku D_1, simetričnu sa D u odnosu na PP_1. Sada je četvorougao APD_1P_1 konveksan i $PD_1 = PD$, $P_1D_1 = PC$, $AP_1 = BP$.

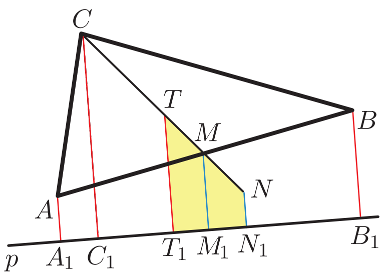




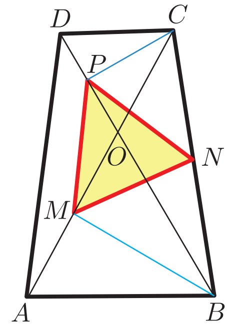
459. Neka je B između A i K. Tada je L između A i C, slika desno, i $CL = BK$. Uočimo tačke M i N, takve da je B središte duži MK i C središte duži LN. Dobijamo jednakokraki trapez $KNLM$, kome je BC srednja linija, a dijagonale su $KL = MN$. Neka je P presečna tačka dijagonala. Iz trouglova LMP i KNP dobijamo: $LP + MP > LM$ i $KP + NP > KN$. Saberemo ove nejednakosti: $LP + MP + KP + NP > LM + KN$. Kako je $KP + LP = MP + NP = KL$, a u trapezu $KNLM$ je $LM + KN = 2BC$ dobijamo: $2KL > 2BC$, odakle je $BC < KL$.

460. Neka je CM težišna linija, T težište trougla ABC i N tačka, takva da je M središte duži TN, sledeća slika. Na osnovu osobina težišta trougla, znamo da je $CT = 2TM$, pa je T središte duži CN. Označimo sa M_1 i N_1 podnožja normala iz

M i N na p. Koristeći osobinu srednje linije trapeza, zaključujemo najpre iz trapeza CC_1N_1N da je $CC_1 + NN_1 = 2TT_1$. Dodamo TT_1 na obe strane ove jednakosti i dobijemo: $(TT_1+NN_1)+CC_1 = 3TT_1$. Iz trapeza TT_1N_1N je $TT_1+NN_1 = 2MM_1$, a iz trapeza AA_1B_1B je $2MM_1 = AA_1 + BB_1$. Tako dobijemo:
$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1$.

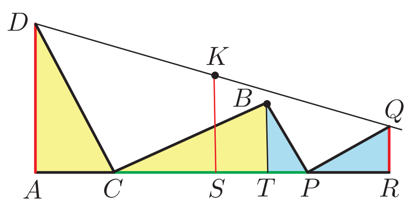


,



461. Trouglovi ABO i CDO su jednakokraki sa uglom od $60°$, odakle sledi da su oni jednakostranični, slika gore. Zbog toga su središta M i P duži AO i DO istovremeno i podnožja visina, pa su trouglovi BCM i BCP pravougli sa zajedničkom hipotenuzom BC. Duži MN i PN su hipotenuzine težišne linije, pa je $MN = \frac{1}{2}BC = PN$. Sem toga, u trouglu AOD duž MP je srednja linija i $MP = \frac{1}{2}AD$. Međutim, $AD = BC$, pa je $MP = MN = PN$.

462. Označimo sa B, C i P bor, čempres i palmu, slika. Prvi znak treba postaviti u tačku D, tako da je trougao BCD jednakokraki pravougii. Slično se određuje i jednakokraki pravougli trougao BPQ. Neka su A, T i R podnožja normala iz D, B i Q na pravu CP. Sada dokažemo da su podudarni trouglovi ACD i TBC, a takođe trouglovi PQR i BPT. Otuda sledi da je $AD = CT$, $QR = TP$, pa je $AD + QR = CT + TP = CP$. Sem toga je $AC = BT = PR$, pa je središte S duži AR istovremeno i središte duži CP.



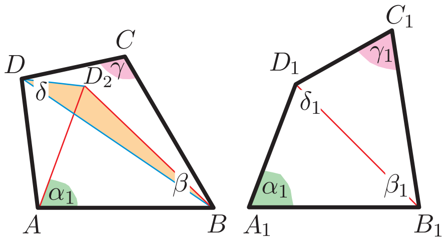
Blago je zakopano u tački K, koja predstavlja središte duži DQ. Četvorougao $ADQR$ je trapez, a duž SK je njegova srednja linija i $SK = \frac{1}{2}(AD+QR) = \frac{1}{2}CP$. Vidimo da za određivanje tačke K nije potreban bor, tj. tačka B. Dovoljno je odrediti središte S duži CP i konstruisati normalu SK jednaku polovini duži CP. Naš gusar je mogao odmah pronaći blago, ili, u najnepovoljnijem slučaju da prvo kopa u tački K_1, simetričnoj sa K u odnosu na CP, jer na osnovu izloženog dokaza jedino nije jednoznačno određeno sa koje strane prave CP leži tačka K.

463. Pretpostavimo da je $AB > AC$, odnosno $AC < AB$. Tada je $AC+BD < AB + BD \leqslant AC + CD$, tj. $AC + BD < AC + CD$, pa je $BD < CD$. Međutim, iz $AB > AC$ sledi da u trouglu ABC važi: $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACB$. Otuda zaključujemo: $\sphericalangle DBC < \sphericalangle ABC < \sphericalangle ACB < \sphericalangle DCB$, odnosno $\sphericalangle DBC < \sphericalangle DCB$. Međutim, tada bi u trouglu BCD moralo biti $CD < BD$, a to je kontradikcija. Znači, nije moguća relacija, $AB > AC$, pa mora biti $AB \leqslant AC$.

464. Produžimo AD i BC do preseka E. Tačka E će biti sa one strane prave AB sa koje su C i D, ako su uglovi α i β oštri. Tada je u trouglu CDE ugao EDC manji od ugla DCE (jer je ugao suplementan sa EDC veći od ugla suplementnog sa DCE), pa je $CE < DE$. Kako je trougao ABE jednakokraki i $AE = BE$, to je $BE - CE = BC > AD = AE - DE$.

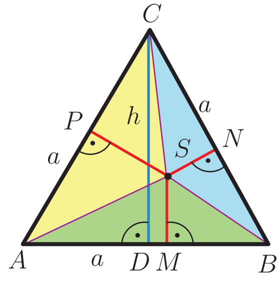
Ako su α i β pravi uglovi, tada je $AD \| BC$, onda konstruišemo tačku E na BC, takvu da je $DE \| AB$, itd.

Ako su α i β tupi uglovi, tada se AC i BD seku sa one strane prave AB sa koje nisu C i D. Tada je u trouglu CDE stranica CE naspram većeg ugla u odnosu na stranicu DE, pa je $CE > DE$. Trougao ABE je jednakokraki i $AE = BE$, pa je $CE - AE = BC > AD = DE - AE$.



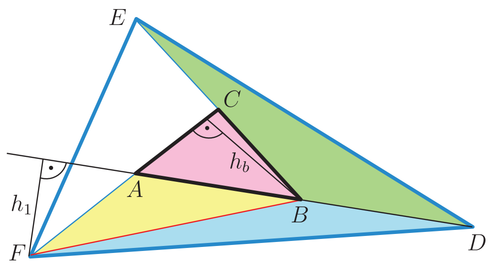
465. U uglu α konstruišimo tačku D_2, takvu da je $\sphericalangle BAD_2 = \alpha_1$ i $AD_2 = A_1D_1 = AD$. Trougao AD_2D je jednakokraki, pa $\sphericalangle ADD_2 = \sphericalangle AD_2D$. Očigledno je $\sphericalangle BDD_2 < \sphericalangle ADD_2$ i $\sphericalangle BD_2D > \sphericalangle AD_2D$, zbog čega je u trouglu BDD_2 ugao BD_2D veći od ugla BDD_2 i $BD > BD_2$. Iz podudarnosti trouglova ABD_2 i $A_1B_1D_1$ sledi da je $B_1D_1 = BD_2$, pa je $B_1D_1 < BD$. Onda mora biti $\gamma > \gamma_1$, jer bi u protivnom, na osnovu izloženog dokaza moralo biti $B_1D_1 > BD$. Dalje, kako je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1$ i $\alpha + \gamma > \alpha_1 + \gamma_1$, mora biti $\beta + \delta < \beta_1 + \delta_1$, odakle zaključujemo da je npr. $\beta < \beta_1$. Na osnovu prethodnog izlaganja, iz uslova $\beta < \beta_1$ sledi da je i $\delta < \delta_1$.

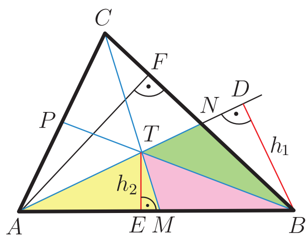
466. Površina trougla ABC jednaka je zbiru površina trouglova ABS, BCS i CAS (vidi sliku desno). Visina trougla ABC je $h = CD$, a visine tri manja trougla su redom: SM, SN, SP. Dakle, važi jednakost $\frac{1}{2}a \cdot SM + \frac{1}{2}a \cdot SN + \frac{1}{2}a \cdot SP = \frac{1}{2}a \cdot h$. Kad levu i desnu stranu jednakosti skratimo sa $\frac{1}{2}a$, ostaje: $SM + SN + SP = h$.



467. Neka su stranice trougla: $a = 6$ cm, $b = 3$ cm i c. Odgovarajuće visine su: h_a, h_b, h_c i $\frac{1}{2}(h_a + h_b) = h_c$, odnosno $h_a + h_b = 2h_c$. Iz formula za površinu trougla dobijamo veze: $b \cdot h_b = a \cdot h_a = c \cdot h_c$. Onda iz $b \cdot h_b = a \cdot h_a$ dobijamo uslov: $3h_b = 6h_a$, odakle je $h_b = 2h_a$. Dalje, iz $h_a + h_b = 2h_c$ sledi: $3h_a = 2h_c$, odnosno $h_a = \frac{2}{3}h_c$. Iz veze: $a \cdot h_a = c \cdot h_c$ biće: $a \cdot \frac{2}{3}h_c = c \cdot h_c$, odnosno $\frac{2}{3}a = c$. Kako je $a = 6$, biće $c = 4$ cm.

468. Konstruišimo visinu h_b trougla ABC, slika dole levo. To je ujedno i visina trougla ABF, pa kako je $AC = AF$, trouglovi ABC i ABF imaju jednake površine. Onda je površina trougla ABF jednaka 1 dm^2. Uočimo visinu h_1 iz temena F trougla ABF. To je ujedno i visina trougla BDF. Kako je $AB = BD$, zaključujemo da trouglovi ABF i BDF imaju jednake površine, oba po 1 dm^2. Dakle, površina trougla ADF je 2 dm^2. Slično se pokaže i da trouglovi BDE i CEF imaju površine 2 dm^2. Dakle, površina trougla DEF je 7 dm^2.





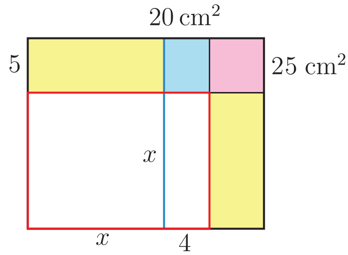
469. Uočimo visinu AF trougla ABC, slika desno. Ona je zajednička visina trouglova ABN i ACN. Ova dva trougla imaju jednake odgovarajuće osnovice $BN = CN$, pa su im jednake i površine. Prema tome površina trougla ABN je polovina površine trougla ABC i iznosi 3 cm^2. Obratimo pažnju na visinu $BD = h_1$ trougla ABN, koja je ujedno i visina trougla BNT. Prema osobini težišta, $NT = \frac{1}{3}AN$, pa je $P_{BTN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AN \cdot h_1 = \frac{1}{3}P_{ABN} = 1$ cm^2. Dalje, trouglovi AMT i BMT imaju jednake osnovice, $AM = BM$, i zajedničku visinu $h_2 = TE$, pa imaju jednake površine, po 1 cm^2. Slično se pokaže da i trouglovi ATP, CTP i CTN imaju površine po 1 cm^2. Dakle, imamo šest manjih trouglova i površina svakog od njih je 1 cm^2.

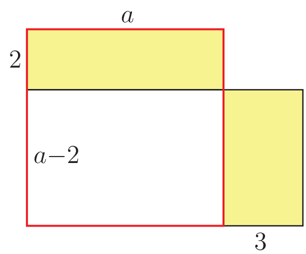
470. Dužina travnjaka, recimo x m, istovremeno je i unutrašnja ivica betonske staze, a dužina spoljašnje ivice staze je $(x + 4)$ m. Za obe ograde utrošeno je ukupno $4x + 4(x + 4) = 216$ metara bodljikave žice. Odavde je $8x + 16 = 216$, pa je $x = 25$ metara. Površina travnjaka je $P = 25^2 = 625$ m^2.

471. Ako je manja stranica dužine x cm, onda je duža stranica $5x$ cm. Iz površine je $5x \cdot x = 720$, odakle je $x^2 = 144$. Dakle, manja stranica je 12 cm, a veća 60 cm. Obim je 144 cm.

472. Ako bi ovih 15 pravougaonika imali različite celobrojne površine, onda bi dati papir imao površinu veću ili jednaku: $(1+2+3+4+\cdots+13+14+15) = 120$ cm^2. Međutim, naš papir nije dovoljan, jer mu je površina $P = 9 \cdot 13 = 117$ cm^2.

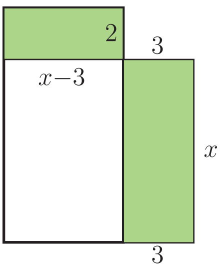
473. Označimo sa x cm dužinu manje stranice. Tada je veća stranica $(x+4)$ cm. Kakve promene nastaju sa povećanjem stranica za 5 cm, vidimo na slici levo. Rešavamo slično **primeru A**. Iz obojenog dela nalazimo da je: $5x + 20 + 25 + 5x = 135$, t.j. $10x = 90$, pa je $x = 9$ cm. Površina datog pravougaonika je 117 cm^2.

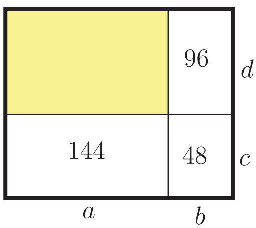


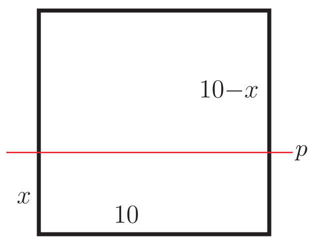


474. Prema slici gore desno, iz jednakosti obojenih površina, dobijamo jednakost $2a = 3(a-2)$. Odavde je $a = 6$ cm.

475. Očigledno je širina pravougaonika veća od dužine. Iz obojenih površi na sledećoj slici postavljamo jednakost: $3x = 2(x-3)+15$, gde je x cm dužina stranice dobijenog kvadrata. Odavde je $x = 9$ cm, pa je dužina pravougaonika 6 cm, a širina 11 cm.







476. Odsečeni kvadrat ima stranicu dužine 9 cm, a stranice odsečenog pravougaonika su 9 cm i 7 cm, pa je stranica datog kvadrata $(9+7)$ cm. Tražena površina je 256 cm^2.

477. Označimo stranice pravougaonika kao na slici u sredini. Tad je $a \cdot c = 144$ cm^2, $b \cdot c = 48$ cm^2 i $b \cdot d = 96$ cm^2, a ne znamo koliko je $a \cdot d$. Pomnožimo prvu i treću jednakost, pa dobijemo: $a \cdot c \cdot b \cdot d = 144 \cdot 96$ cm^4. Kako je $b \cdot c = 48$ cm^2 imamo: $a \cdot 48 \cdot d = 144 \cdot 96$. Odavde je $a \cdot d = 288$ cm^2. Dakle, površina kvadrata je: $144 + 48 + 96 + 288 = 576$ cm^2, pa je stranica 24 cm.

478. Obimi kvadrata i pravougaonika su jednaki, pa je dužina stranice kvadrata 50 cm, a površina je 2500 cm^2.

479. Prema poslednjoj slici, obim manjeg pravougaonika je $20 + 2x$, a obim većeg $20 + 20 - 2x$. Prema uslovu je $2(40 - 2x) = 3(20 + 2x)$. Odavde je $x = 2$ cm, pa su traženi obimi 24 cm i 36 cm.

480. Površina poda je $200 \cdot (22 \cdot 11) = 48400$ cm^2. Površina kvadratne pločice je $20 \cdot 20 = 400$ cm^2, pa je potreban broj ovih pločica $48400 : 400 = 121$ komad.

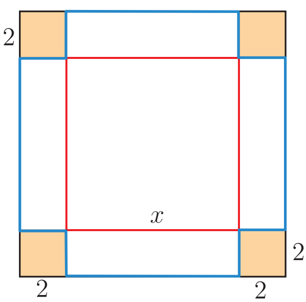
481. Slično **primeru A**. Rezultat: $P = 25$ cm^2.

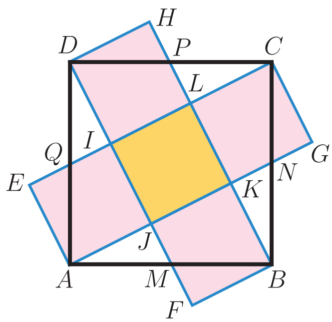
482. Ako spojimo središta naspramnih stranica datog pravougaonika, uverićemo se da je površina traženog četvorougla jednaka polovini površine datog pravougaonika. Iz obima, izraženog preko kraće stranice x, dobijamo: $6x = 72$ cm, odakle je $x = 12$ cm, itd. Rezultat: $P = 144$ cm^2.

483. a) Najmanji obim ima kvadrat stranice 30 cm.

b) Najveći obim ima pravougaonik čije su stranice 3 cm i 300 cm.

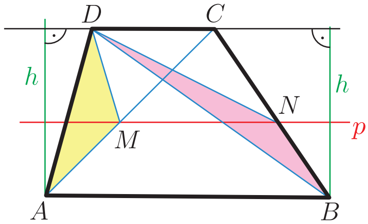
484. Ako "krst" dopunimo sa četiri obojena kvadrata površina 4 cm^2, kao na slici levo, dobićemo kvadrat stranice $(x + 4)$ cm, gde smo sa x označili dužinu stranice datog kvadrata. Tada imamo jednakost: $(x + 4)^2 = 105 + 4 \cdot 4$, odnosno $(x + 4)^2 = 121$. Sledi da je $x + 4 = 11$, pa je stranica datog kvadrata $x = 7$ cm.

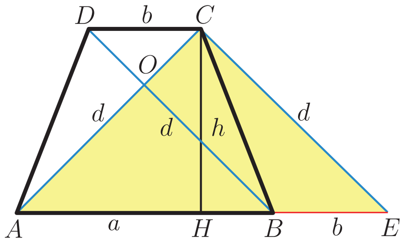




485. Dopunimo datu sliku trouglovima AEQ, BFM, CGN i DHP, kao što je prikazano na slici desno. Budući da je $AQ = CN$ i $AQ \| CN$, zaključujemo da je $AN \| CQ$. Slično dokažemo da je $BH \| DF$. Dakle, žuto obojeni četvorougao $IJKL$ je paralelogram. Trouglovi AEQ, BFM, CGN, DHP podudarni su međusobno, ali su takođe podudarni sa trouglovima AMJ, BNK, CPL, DQI. Odatle sledi da je zbir površina pet obojenih četvorouglova, koji su podudarni međusobno, jednak površini kvadrata $ABCD$. Dakle, $5P = 100$ cm^2, pa je površina žuto obojenog četvorougla $P = 20$ cm^2.

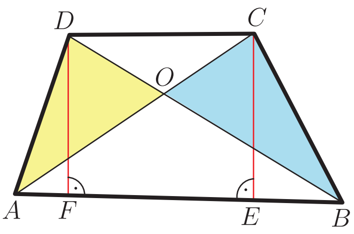
486. Trouglovi ACD i BCD imaju zajedničku osnovicu CD i jednake odgovarajuće visine (visina trapeza $ABCD$), pa imaju jednake površine, sledeća slika levo. Slično, trouglovi CDM i CDN imaju međusobno jednake površine (zajednička osnovica CD i jednake visine, visinu trapeza $CDMN$). Zbog toga su jednake površine trouglova ADM i BDN (razlike jednakih površina).

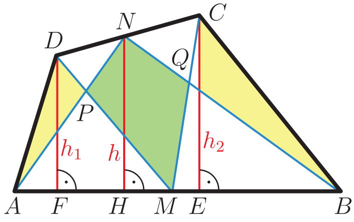




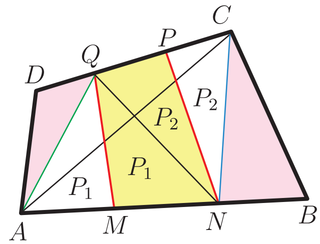
487. Na produžetku osnovice $a = AB$ odredimo tačku E, kao na slici desno, tako da je $BE = CD = b$. Četvorougao $BECD$ je po konstrukciji paralelogram, pa je $CE = BD = d$ i $CE \| BD$. Onda je $\sphericalangle ACE$ jednak uglu između dijagonala, uglu AOB. Površina trapeza je $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = h^2$, pa je $\frac{1}{2}(a+b) = h$. Trougao AEC na slici je jednakokraki sa osnovicom $AE = AB + BE = a + b$. Visina $h = CH$ ovog trougla polovi osnovici, pa je $AH = \frac{1}{2}(a + b) = h$. Onda je trougao ACH jednakokraki pravougli, pa je $\sphericalangle CAH = 45^\circ$ i takođe je $\sphericalangle AEC = 45^\circ$. Sledi da je ugao između dijagonala trapeza $\sphericalangle ACE = 90^\circ$.

488. Uočimo visine CE i DF trouglova ABC i ABD, kao na slici dole levo. Iz uslova da su površine trouglova ADO i BCO jednake, sledi da su jednake površine trouglova ABD i ABC (imaju zajednički deo ABO). Kako je AB zajednička osnovica, sledi da su visine trouglova ABD i ABC jednake, t.j. $DF = CE$. Onda je četvorougao $CDFE$ pravougaonik, pa je $CD \| EF$. Stranice četvorougla $ABCD$ su različite, pa stranice BC i AD nisu paralelne. Prema tome, $ABCD$ je trapez, sa osnovicama $AB \| CD$.





489. Uočimo visine h, h_1 i h_2, trouglova redom: ABN, AMD i BCM. Četvorougao $CDFE$ je pravougli trapez kome je $h = NH$ srednja linija, pa je $h_1 + h_2 = 2h$. Označimo sa P_1, P_2 i P_3 površine trouglova redom: AMD, BCM i ABN, slika gore desno. Imamo: $P_1 + P_2 = \frac{1}{2}AMh_1 + \frac{1}{2}BMh_2$. Označimo dužinu stranice AB sa a. Onda je $P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}h_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2h = \frac{1}{2}a \cdot h = P_3$. Dakle: $P_{AMD} + P_{BCM} = P_{ABN}$. Ako izostavimo iz ovih trouglova AMP i BMQ (zajednički deo), ostaje jednakost: $P_{APD} + P_{BCQ} = P_{MPNQ}$.

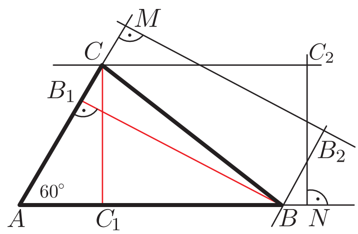


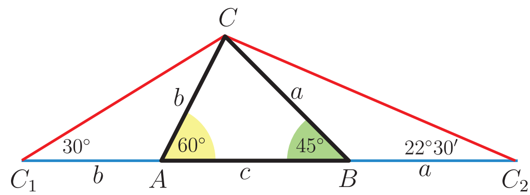
490. Trouglovi AMQ i MNQ imaju jednake površine ($AM = MN$ i zajednička visina iz temena Q), koje smo označili sa P_1. Slično odredimo da su površine trouglova CPN i PQN jednake i označimo ih sa P_2. Onda je površina četvorougla $MNPQ$ jednaka $P_1 + P_2$, a površina četvorougla $ANCQ$ je dva puta veća. Kako je $AB = 3NB$, trougao BCN ima tri puta manju površinu od trougla ABC. Slično, površina trougla ADQ je trećina površine trougla ACD. Dakle, zbir površina dva trougla, koji su na slici roze obojeni, predstavlja trećinu površine četvorougla $ABCD$, pa iznosi 1 dm^2. Onda je površina četvorougla $ANCQ$ jednaka 2 dm^2. Konačno, tražena površina četvorougla $MNPQ$ je 1 dm^2.

491. Analiza. Na produžetku katete AC preko C odredimo tačku B_1, tako da je $B_1C = BC$. Trougao BCB_1 je jednakokraki pravougli, pa je $\sphericalangle BB_1C = 45°$. Kako je duž $AB_1 = a + b$, možemo konstruisati trougao ABB_1.

492. Analiza. Pravougli trouglovi ABB_1 i ACC_1 određeni su i mogu se konstruisati. (Date su visine, duži BB_1 i CC_1.)

Konstrukcija. Na jednom kraku ugla od $60°$ i sa temenom A, odredimo proizvoljnu tačku M, pa konstruišemo normalu na krak u tački M. Na toj normali odredimo tačke B_2 i B_3, tako da je $MB_2 = MB_3 = 4$ cm, slika levo. Jedna od pravih kroz tačke B_2 i B_3, paralelnih sa krakom AM konstruisanog ugla, seče drugi krak u tački B. Slično se konstruiše teme C (vidi sliku).



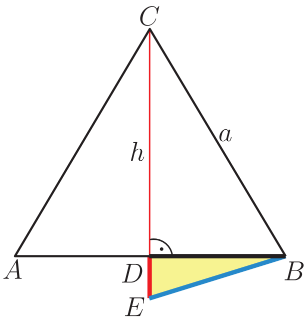


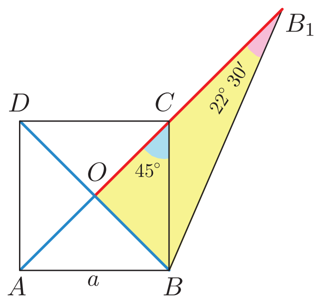
493. Analiza. Neka je $AA_1 = h_a$ i T težište. Možemo najpre konstruisati pravougli trougao AA_1M. Zatim se odredi tačka T, tako da je $MT = 1$ cm. Zatim konstruišemo tačku B, tako da je $BT = 3$ cm, itd.

494. Kao u prethodnom zadatku, konstruišemo trougao AA_1M. Normala na pravu A_1M, konstruisana u tački M, je simetrala stranice BC. Sada se može konstruisati centar O opisanog kruga, ($AO = R$) itd.

495. Na pravoj AB odredimo tačke C_1 i C_2, kao na slici gore desno, tako da je $AC_1 = AC$ i $BC_2 = BC$. Trougao ACC_1 je jednakokraki, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$, pa kako je dati ugao $\alpha = 60°$ spoljašnji ugao ovog trougla, zaključujemo da je $\sphericalangle AC_1C = 30°$. Slično utvrdimo da je $\sphericalangle BC_2C = 22°30'$, pa možemo odmah konstruisati trougao CC_1C_2. Simetrale duži CC_1 i CC_2 određuju tačke A i B.

496. Produžimo visinu CD do tačke E, kao na sledećoj slici, tako da je $CE = BC = a$. Onda je $DE = a - h = 6$ mm. Trougao BDE je pravougli i možemo ga konstruisati, jer možemo odrediti njegove oštre uglove. Naime, trougao BCE je jednakokraki sa uglom kod vrha: $\sphericalangle BCE = 30°$. Onda je $\sphericalangle BEC = 75° = \sphericalangle CBE$, itd.





497. Analiza. Neka je M tražena tačka i A_1 tačka u kojoj normala na osnovicu u tački M seče krak, recimo AB. Neka je, dalje, C_1 tačka osnovice, takva da je tačka M središte duži BC_1. Tada je trougao A_1BC_1 jednakokraki, a tačka M je jednako udaljena od krakova A_1B i A_1C_1. Prema tome, rastojanje između paralelnih pravih A_1C_1 i AC treba da bude jednako polovini kraka. Konstrukcija prave A_1C_1 jednostavna je. Ima dva rešenja.

498. Analiza. Neka je E tačka na produžetku osnovice AB, iza B, takva da je $AE = a + b$. Tada je četvorougao $BECD$ paralelogram i $EC = AC = d$. Dakle, može se konstruisati jednakokraki trougao AEC, pa tačka B itd.

499. Slično prethodnom zadatku.

500. Analiza. Neka je O presečna tačka dijagonala kvadrata $ABCD$, poslednja slika desno. Data je duž $d + 2a = 5$ cm. Produžimo dijagonalu AC preko C za $CB_1 = a$. Tada je trougao BB_1C jednakokraki, sa oštrim uglom $\sphericalangle BB_1C = 22°30'$. (Spoljašnji ugao ovog trougla je $\sphericalangle BCO = 45°$.) Sem toga je $OB_1 = \dfrac{d}{2} + a = \dfrac{1}{2}(d + 2a) = 2,5$ cm, pa se pravougli trougao BB_1O može konstruisati.

501. Analiza. Neka je data stranica AB pravougaonika $ABCD$ i zbir stranice BC i dijagonale. Neka je E tačka iza C u odnosu na B, takva da je $CE = AC$. Trougao ABE može se konstruisati na osnovu datih podataka, a tačka C je na simetrali duži AE.

502. Centar traženog kruga je presečna tačka simetrale duži AB i prave n koja sadrži tačku A i normalna je na datu pravu.

503. Centar kruga koji dodiruje dve prave pripada simetrali ugla određenog ovim pravim. Centre traženih krugova (dva rešenja) nalazimo presekom prave n, koja sadrži tačku A i normalna je na pravu a i simetrala unakrsnih uglova određenih datim pravim.

504. Analiza. Prava m, koja sadrži tačku M i normalna je na poluprečnik OM datog kruga, predstavlja zajedničku tangentu datog i traženog kruga.

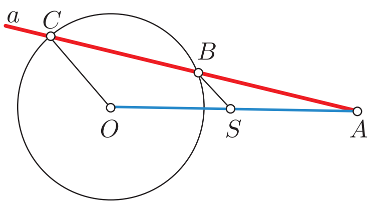
Konstrukcija. Centar traženog kruga je presečna tačka prave OM i simetrale (simetrala) ugla određenog pravim m i p, itd.

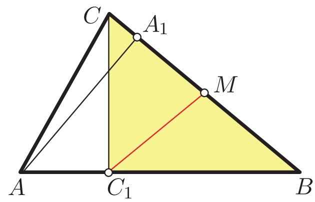
505. Slično prethodnom zadatku. Centar traženog kruga pripada simetrali duži AB.

506. Analiza. Pretpostavimo da je zadatak rešen, kao što se vidi na sledećoj slici. Neka je O centar datog kruga i S središte duži AO. Tada je u trouglu AOC duž SB srednja linija, pa je $SB = \frac{1}{2}OC$, a to je polovina poluprečnika datog kruga.

Konstrukcija. Lako je konstruisati najpre tačku S, pa tačku B.

Diskusija. Imamo dva rešenja, ako krug sa centrom S, koji je van datog kruga, i poluprečnika $\frac{1}{2}OC$ seče dati krug, a nema rešenja ako se ovi krugovi ne seku.





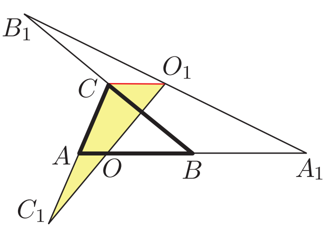
507. Analiza. Duž MN je srednja linija traženog trougla i paralelna je stranici AB. Osim toga prava MN polovi visinu h_c.

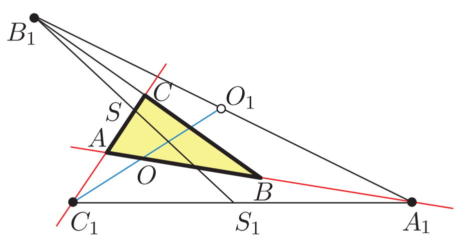
Konstrukcija. Prava koja sadrži tačku C_1 i paralelna je sa MN, je prava AB, itd.

508. Analiza. Pretpostavimo da je zadatak rešen (vidi sliku gore desno). Trougao BCC_1 je pravougli, a duž C_1M je hipotenuzina težišna linija i znamo da je hipotenuza dva puta duža od svoje težišne linije.

Konstrukcija. Prava A_1M sadrži tačke B i C. Konstruišemo ovu pravu i na njoj odredimo tačke B i C, takve da je $MB = MC = MC_1$, itd.

509. Analiza. Neka je ABC trougao kojeg treba konstruisati i A_1, B_1, C_1 tačke koje su date (pod postavljenim uslovima), slika dole levo. Uočimo središte O_1 duži A_1B_1. U trouglu A_1BB_1 duž CO_1 je srednja linija, pa je $CO_1 \| A_1B$. Središte duži C_1O_1, tačka O, mora zbog sličnih razloga pripadati pravoj AA_1. Možemo konstruisati tačku O na opisani način, pa ćemo iskoristiti činjenicu da tačke A_1 i O određuju pravu AA_1. Slično se odredi i pravu CC_1.

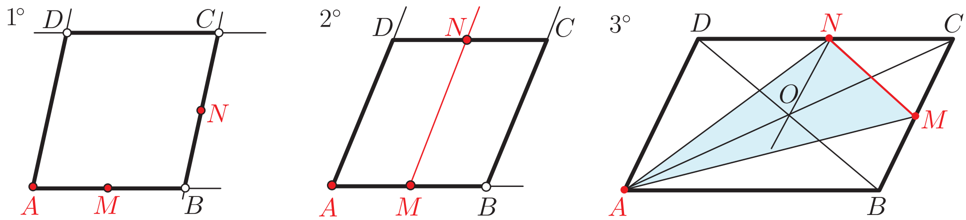




Konstrukcija. Konstruišemo tačku O, kao što je uočeno u analizi. (Tačka O_1 je središte duži A_1B_1 i tačka O je središte duži O_1C_1.) Zatim, konstruišemo pravu A_1O. Dalje, odredimo tačku S_1, središte duži A_1C_1, poslednja slika desno, pa tačku S, središte duži B_1S_1. Prave C_1S i A_1O seku se u tački A, itd.

510. Nije utvrđeno kojim stranicama su data središta M i N. Razlikujemo tri slučaja, prikazana na sledećim slikama.

1° Neka je M središte stranice AB, a N središte stranice BC. (Slično postupamo i kada su M i N središta stranice AD i CD.) Odredimo tačku B, tako da je $AM = MB$, pa odredimo C, tako da je $BN = NC$, itd.



2° Ako je M središte stranice AB i N središte stranice CD, odredimo tačku B kao u prethodnom slučaju. Zatim, konstruišemo pravu kroz N, paralelnu sa AB i prave kroz A i B paralelne sa MN, itd.

3° Ako je M središte stranice BC i N središte stranice CD, tada je središte dijagonale AC, tačka O na slici 3°, težište trougla AMN, itd.

511. Analiza. Tačka C_1, simetrična sa C u odnosu na pravu p, leži na pravoj AB, kao i tačka C_2, simetrična sa C u odnosu na q (osobina simetrale ugla). Tačke C_1 i C_2, koje možemo konstruisati, određuju pravu AB, itd.

512. Svaki paralelogram je simetričan u odnosu na presečnu tačku dijagonala. Tražena prava je određena tačkom u kojoj se seku dijagonale pravougaonika P i tačkom u kojoj se seku dijagonale pravougaonika P_1.

513. Preslikamo tačku A u tačku A_1, simetričnu u odnosu na s. Ako prava A_1B seče s, onda je to tražena prava b, itd.

514. Analiza. Koristimo ideju iz **primera B**. Tačke A i B su simetrične u odnosu na tačku C.

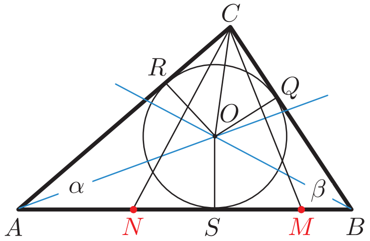
Konstrukcija. Konstruišemo pravu a_1, simetričnu pravoj a u odnosu na C. Prave a_1 i b, ako se seku, određuju tačku B, itd.

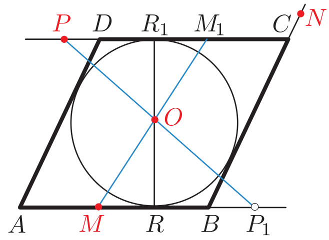
515. Slično prethodnom zadatku. Tačke A i B su simetrične u odnosu na pravu c.

516. Analiza. Četvorouglovi ABA_2B_1 i $A_1A_2B_1B$ su paralelogrami, pa se može konstruisati tačka B itd.

517. Kao u **zadatku 515**, konstruišu se tačka A na pravoj a i tačka B na pravoj b. Zatim se oko tačke A konstruiše krug sa centrom A, poluprečnika AB. Presek ovog kruga i prave c određuje tačku C.

518. Analiza. Neka su Q, R i S dodirne tačke upisanog kruga sa stranicama redom BC, CA i AB, trougla ABC. Tačka R je simetrična sa S u odnosu na simetralu ugla α, sledeća slika levo, pa je duž SM simetrična sa RC. Zbog toga je $SM = CR$. Slično, na osnovu simetrije u odnosu na simetralu ugla β, dokazujemo da je $SN = CQ$. Kako je $CR = CQ$ (sledi iz podudarnosti pravouglih trouglova CQO i CRO), sledi da je $SM = SN$. Tačka S je središte duži MN. Iz analize sledi **konstrukcija** i **dokaz**.





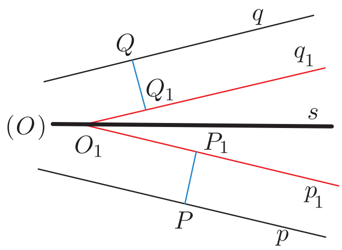
519. Tačka O je centar simetrije romba. Zbog toga tačka M_1, simetrična sa M u odnosu na O, leži na pravoj CD. Slično, tačka P_1 leži na pravoj AB. Prema tome, konstruišemo najpre tačke M_1 i P_1, pa prave MP_1 i M_1P, slika desno. Zajednička normala ovih pravih kroz tačku O, duž RR_1, je prečnik upisanog kruga traženog romba. Tangenta ovog kruga konstruisana iz date tačke N, određuje temena B i C, itd.

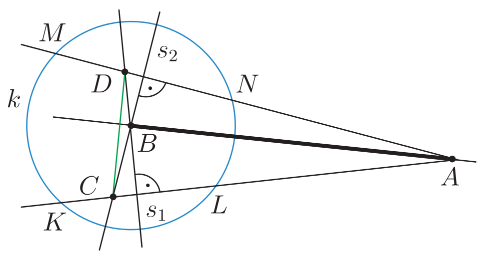
520. Analiza. Ako su C i C_1 presečne tačke prave a sa datim krugovima, onda su C i C_1 simetrične u odnosu na tačku A, jer je $CA = AC_1$.

Konstrukcija. Krug k_1', simetričan sa k_1 u odnosu na tačku A, u preseku sa k određuje tačku C, itd.

521. Postupamo slično *primeru A*. Neka su date prave a i b, koje određuju nedostižnu tačku (N). Neka data prava m seče a i b u tačkama A i B. Konstruišemo ortocentar H trougla $AB(N)$ (visine iz A i B seku se u H), itd.

522. Izaberemo tačku P na pravoj p i tačku Q na pravoj q, proizvoljno. Zatim, u uglu konstruišemo tačke P_1 i Q_1, takve da je $PP_1 = QQ_1$ i $PP_1 \perp$p, a $QQ_1 \perp q$, slika dole levo. Zatim, konstruišemo pravu p_1, kroz tačku P_1, pravu q_1, kroz tačku Q_1, tako da je $p_1 \| p$ i $q_1 \| q$. Ako se p_1 i q_1 seku u dostižnoj tački O_1, tada je simetrala ugla $O_1 p_1 q_1$ tražena prava. Ako je O_1 nedostižna tačka, konstruišemo slično tačke P_2 i Q_2, itd. Dokaz konstrukcije prepuštamo čitaocu.





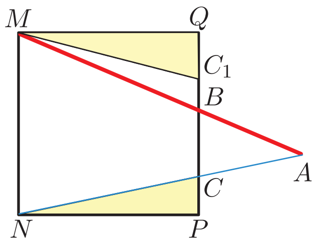
523. Konštruišemo najpre pravu n, normalnu na datu pravu p, postupajući kao u **zadatku 521**. Zatim, kroz tačku (A) konstruišemo pravu normalnu na n. To je tražena prava.

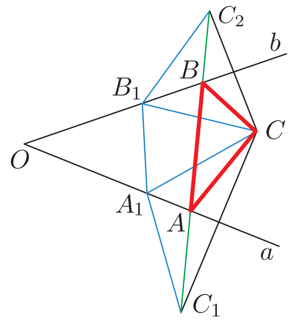
524. Oko tačke B opišemo krug k. Zatim, postupajući kao u **primeru B**, konstruišemo dve poluprave iz A, koje seku krug k, određujući pri tome tetive KL i MN, poslednja slika desno. Konstruišemo simetrale s_1 i s_2 tetiva KL i MN. Pri tome s_1 seče MN u tački D, a s_2 seče KL u tački C. Sada je tačka B ortocentar trougla ACD. Duž AB pripada trećoj visini ovog trougla, koju nacrtamo produžavajući je počevši od B.

525. Kao u **primeru B**, najpre konstruišemo središte S duži AB. Zatim, ako je $AS > 20$, konstruišemo duž AS, kao u prethodnom zadatku. Potom, konstruišemo pravu s kroz S, normalnu na AS. To je tražena simetrala.

526. Označimo sa O presek dijagonala AC i BD. Neka je M proizvoljna tačka. Tada je $MA + MC \geqslant AC = AO + OC$ i $MB + MD \geqslant BD = BO + OD$. Odavde je $MA + MB + MC + MD \geqslant AO + BO + CO + DO$, što znači da je O tražena tačka.

527. Ako tačka A pripada pravoj MP ili NQ, onda je ta prava rešenje zadatka. Ako nije taj slučaj, onda je rešenje jedna od pravih AM, AN, AP, AQ, koja seče dve paralelne stranice kvadrata. Na slici levo, to je AM ili AN. Rešenje je prava koja bližu stranicu kvadrata seče pod manjim oštrim uglom. Ovde je to prava AM. Neka je C_1 tačka takva da je $QC_1 = PC$. (Trouglovi CNP i C_1MQ su podudarni, pa je $NC = MC_1$. Ugao BC_1M je tup, pa je $BM > MC_1$, itd.)

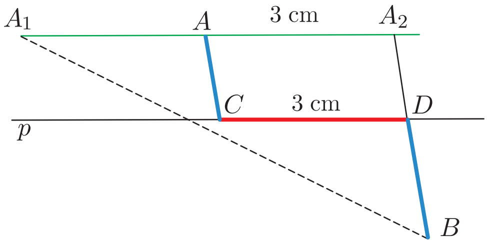




528. Neka je $CMNP$ traženi pravougaonik. Teme N pripada hipotenuzi AB, pa je dijagonala CN najmanja u slučaju kada je CN hipotenuzina visina.

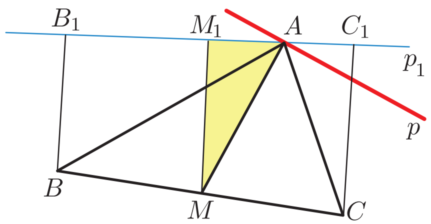
529. Koristićemo simetriju u odnosu na pravu, slično **primeru A**. Konstruišemo tačke C_1 i C_2 simetrične sa C u odnosu na krake datog ugla. Prava C_1C_2 seče krake u tačkama A i B. Dokazaćemo da je obim trougla ABC minimalan. Uočimo tačke A_1 i B_1 na kracima datog ugla, takve da je $A_1 \neq A$ ili $B_1 \neq B$, slika gore desno. Zbog simetrije je $AC = AC_1$, $BC = BC_2$, $A_1C = A_1C_1$ i $B_1C = B_1C_2$. Prema tome, obim trougla ABC je $AB + BC + CA = AB + BC_2 + AC_1 = C_1C_2$, a obim trougla A_1B_1C je: $A_1B_1 + B_1C + CA_1 = A_1B_1 + B_1C_2 + A_1C_1$. Poslednji zbir je dužina plave izlomljene linije $C_1A_1B_1C_2$, a to je sigurno uvek veće od duži C_1C_2, tj. od obima trougla ABC.

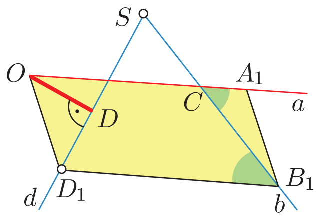
530. Dužina izlomljene linije je $AC + CD + DB = AC + DB + 3$ cm, što znači da treba udesiti minimalan zbir $AC + DB$. Postupićemo slično prethodnim zadacima. Na pravoj kroz A, paralelnoj sa p, odredimo tačke A_1 i A_2, takve da je A središte duži A_1A_2 i $A_1A_2 = 6$ cm. Kraća od duži A_1B i A_2B seče pravu p u traženoj tački D. Neka je to duž A_2B, kao na slici. Odredimo tačku C na pravoj p, tako da bude $AC \| BD$, itd.



531. Tačku N preslikamo simetrično u odnosu na datu pravu, u tačku N_1. Sada imamo prethodni slučaj (**zadatak 530**), jer su tačke M i N_1 sa raznih strana prave a. Dalji rad prepuštamo čitaocu.

532. Neka je p_1 proizvoljna prava kroz A, van datog trougla ABC, slika dole levo, i neka su B_1 i C_1 podnožja normala iz B i C na p_1. Neka je, dalje, AM težišna linija, a M_1 podnožje normale iz M na p_1. Četvorougao BCC_1B_1 je pravougli trapez, koji ima srednju liniju MM_1, pa je $BB_1 + CC_1 = 2MM_1$. Da bi traženi zbir, $BB_1 + CC_1$, bio najveći, treba da je najveća duž MM_1. Uočimo pravougli trougao AMM_1. Njegova je hipotenuza duž AM, pa je $MM_1 \leqslant AM$. Dakle, uvek važi nejednakost: $BB_1 + CC_1 \leqslant 2AM$. Otuda dobijamo rešenje zadatka: prava p je normalna na težišnu liniju AM datog trougla.





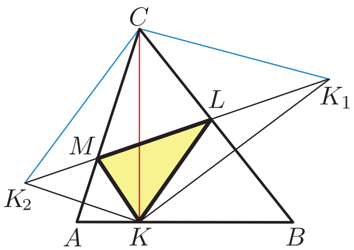
533. *Analiza.* Uočimo tačku A_1 na polupravoj Oa i tačku B_1 na polupravoj Sb, takve da je $OA_1 = SB_1$. Konstruišimo tačku D_1, takvu da je četvorougao $OA_1B_1D_1$ paralelogram, slika gore. Tada je $OD_1 = A_1B_1$ i $B_1D_1 = OA_1 = SB_1$. Trougao SB_1D_1 je jednakokraki, a $\sphericalangle B_1SD_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle SB_1D_1$. Obzirom da je ugao SB_1D_1 jednak uglu između a i b ($\sphericalangle SB_1D_1 = \sphericalangle A_1CB_1$, sa paralelnm kracima), a ugao između a i b je određen, sledi da možemo konstruisati polupravu Sd.

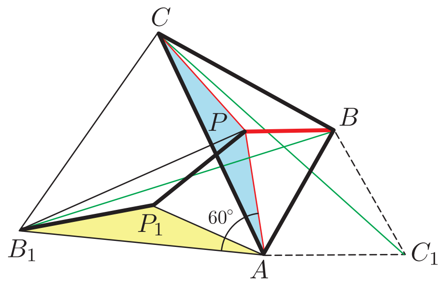
Konstrukcija. Prvo konstruišemo polupravu Sd, kao što je uočeno u analizi. Kako je $A_1B_1 = OD_1$, tj. $AB = OD$, da bi AB bilo najkraće, treba izabrati tačku D da bude podnožje normale iz O na Sd, itd.

534. Analiza. Pretpostavimo da je tačka K na stranici AB konstruisana, sledeća slika. Tada se tačke L i M konstruišu kao u **zadatku 529**. Obim trougla KLM, slično pomenutom **zadatku 529**, jednak je duži K_1K_2. Odredićemo uslove pri kojima je ova duž najmanja.

Zbog simetrije su podudarni trouglovi CK_1L i CKL, pa je $CK = CK_1$ i $\sphericalangle KCL = \sphericalangle K_1CL$. Slično se dokaže da je $CK_2 = CK$ i $\sphericalangle KCM = \sphericalangle K_2CM$. Kako je $\sphericalangle KCL + \sphericalangle KCM = \gamma$, to je $\sphericalangle K_1CK_2 = 2\gamma$, dakle, $\sphericalangle K_1CK_2$ je tačno određen. Trougao CK_1K_2 je jednakokraki, sa stalnim uglom između krakova, pa će mu osnovica K_1K_2 biti najmanja ako je krak najmanji. Obzirom da su kraci jednaki duži CK, sledi da duž CK treba biti najmanja. To će biti u slučaju kad je CK visina trougla.

Konstrukcija. Tačke K, L, M su podnožja visina trougla ABC.



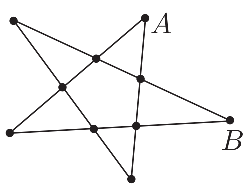


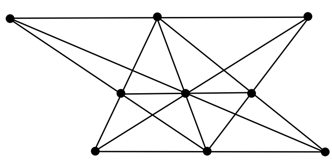
535. Analiza. Neka je P tražena tačka u trouglu ABC, slika gore desno. Zbir duži PA, PB i PC konstruišimo na sledeći način: izaberimo tačke P_1 i B_1, kao na slici, tako da su trouglovi APP_1 i ACB_1 jednakostranični. Tada je $PP_1 = PA$. Kako je $\sphericalangle B_1AP_1 + \sphericalangle P_1AC = 60^\circ = \sphericalangle P_1AC + \sphericalangle CAP$, sledi takođe jednakost: $\sphericalangle B_1AP_1 = \sphericalangle CAP$. Sem toga je: $AP_1 = AP$ i $AB_1 = AC$, pa su trouglovi AB_1P_1 i ACP podudarni. Sledi da je $B_1P_1 = CP$. Prema tome dužina izlomljene linije B_1P_1PB predstavlja zbir duži PA, PB i PC. Ova dužina će biti minimalna ako umesto izlomljene linije imamo duž B_1B (tj. P_1, $P \in B_1B$).

Konstrukcija. Konstruišemo jednakostranični trougao AB_1C, nad stranicom AC. Tačka P pripada duži BB_1. Slično, konstruišemo jednakostranični trougao ABC_1. Tačka P je presečna tačka duži BB_1 i CC_1.

536. Vidi rešenje **primera A**. Odgovor: najmanje 3 prave.

537. Moguće je! Petokraka na slici dole levo jedno je od mogućih rešenja.





538. Rešenje je dato na poslednjoj slici.

539. Svake dve tačke određuju jednu duž. Svaka od 9 datih tačaka određuje sa ostalim tačkama po 8 duži, što čini ukupno $9 \cdot 8$ duži. Kako smo na ovaj način svaku duž računali po dva puta (npr. AB i BA), to je stvarni broj duži $\dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

Svaka duž na pravoj a, sa jednom tačkom na pravoj b određuje jedan trougao, i obrnuto, duž sa prave b i tačka sa prave a, određuju trougao. Ovih trouglova ima $10 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 70$. (Pet tačaka na pravoj a određuju $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ duži, itd.)

540. Biramo jednu po jednu tačku. Prvu tačku možemo izabrati na 9 načina, drugu na 8 (već smo jednu tačku izdvojili) i treću na 7 načina. To je ukupno $9 \cdot 8 \cdot 7$ trouglova. Međutim, u ovom ukupnom broju svaki trougao je uzet u obzir 6 puta. (Na primer, trougao ABC je ušao u ukupan broj kao: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB i CBA). Dakle, ukupan broj trouglova je $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$.

541. Slično **zadatku 539**. Zamislimo da su crvene tačke na jednoj pravoj, a plave na drugoj. Ima 640 trouglova.

542. Najviše trouglova će biti ako su svake tri tačke sa raznih pravih nekolinearne, tj. određuju trougao. Takvih trouglova ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Osim toga, svaka duž sa jedne prave (a ima ih 10), sa svakom od preostalih 10 tačaka, određuje po jedan trougao. Njih ima 300. Ukupno ima 425 trouglova.

543. Svaka duž sa prave a, (ima ih 6) sa svakom duži sa prave b (ima ih 3) određuje po jedan četvorougao. Ima ukupno $6 \cdot 3 = 18$ četvorouglova.

544. Mogu sve tačke pripadati jednoj pravoj, jedinoj koju određuju u tom slučaju.

Ako su četiri tačke na jednoj pravoj, onda uz ovu pravu postoje još četiri, koje određuje peta tačka sa svakom od prve četiri. Dakle, određeno je ukupno 5 pravih.

Ako su tačke raspoređene na dve prave, tako da se npr. prave AB i CD seku u tački E, tada je određeno ukupno $2 + 2 \cdot 2 = 6$ pravih.

Ako su tačke na dvema pravim, npr. A, B, C na jednoj i D, E na drugoj, tada je određeno $2 + 2 \cdot 3 = 8$ pravih.

Ako ne postoje tri tačke koje pripadaju jednoj pravoj, tada je određeno najviše: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ pravih.

545. a) Kada izaberemo bilo koji trougao, preostale 4 tačke određuju jedan četvorougao. Dakle, svakom odabranom trouglu odgovara jedan određeni četvorougao. Onda je broj trouglova jednak broju četvorouglova. Ima ih po $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

b) Da bi trougao i četvorougao bili disjunktni kao na slici, temena trougla moraju biti uzastopna, idući po krugu. Prema tome, trouglovi moraju biti: ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGA i GAB, ukupno 7 trouglova. Traženih kombinacija ima 7.

546. Sa tri strane obojene su kocke koje sadrže temena velike kocke, njih 8.

Sa dve strane obojene su ivične kocke (osim 8 prethodno pomenutih). Njih ima po 8 na 12 ivica, ukupno 96.

Kad skinemo “spoljašnji obojeni sloj”, debljine 1 cm, ostaće kocka ivice 8 dm, potpuno neobojena, a ona je izdeljena na $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ manjih kocki.

547. Ovih 9 tačaka određuju 36 pravih. Kroz proizvoljno izabranu tačku P konstruišimo 36 pravih, paralelnih sa naših 36 pravih. Ove paralele, ako nema poklapanja, određuju 72 ugla sa zajedničkim temenom P. Njihov zbir je 360°, pa po Dirihleovom principu postoji bar jedan ugao koji nije veći od 5° (jer je $360 : 72 = 5$). Ako ima poklapanja, onda su odgovarajuće prave paralelne, pa određuju ugao od 0°. Time je tvrđenje dokazano.

548. Rezanjem datog kvadrata po linijama koje su paralelne stranicama, možemo dati kvadrat podeliti na $7 \cdot 7$, tj. na 49 kvadrata stranice 1 cm. Po Dirihleovom principu, od 100 razbacanih tačaka, bar u jednom od 49 jediničnih kvadrata, moraju se naći najmanje 3 plave tačke (jer je $100 = 2 \cdot 49 + 2$).

549. Jednakostranični trougao stranice 7 cm, povlačenjem pravih paralelnih stranicama, možemo podeliti na 49 jednakostraničnih trouglova stranice 1 cm. Po Dirihleovom principu, ma kako rasporedili 247 tačaka u velikom trouglu, mora postojati bar jedan od 49 jednakostraničnih trouglova stranice 1 cm, u kojem se nalazi najmanje 6 od 247 tačaka (jer je $247 = 5 \cdot 49 + 2$). Dalje, kao u **zadatku 162** dokazujemo da ovih šest tačaka određuju bar jedan “plavi” ili “crveni” trougao.

550. Površina datog pravougaonika je 45 cm^2. Kada bi svih 10 pravougaonih delova imali različite površine, njihov zbir bi mogao biti najmanje $1 + 2 + 3 + 4 + {} +5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$, što je više od površine datog pravougaonika. Dakle, ne mogu svi delovi biti različitih površina. (vidi **zadatak 472**.)

551. Kao u **primeru B** prebrojimo nepreklapajuće trouglove određene temenima datog pravougaonika i razbacanim tačkama. Ovih trouglova ima 1502. Ako bi svi oni imali površine veće ili jednake 1 cm^2, tada bi pokrivali više od 1502 cm^2. Ovo nije moguće, jer je površina celog pravougaonika jednaka $30 \cdot 50$ cm^2, tj. 1500 cm^2. Sledi da neki od nepreklapajućih trouglova ima površinu manju od 1 cm^2.

552. Ako sve “crvene” lukove preslikamo simetrično u odnosu na centar kruga, tada će svi “crveni” lukovi, prvobitni i preslikani, pokriti deo, ali ne celi krug. To znači da su neke “plave” tačke ostale plave. I njima simetrične tačke su “plave”, pa dve simetrične “plave” tačke određuju “plavi” prečnik.

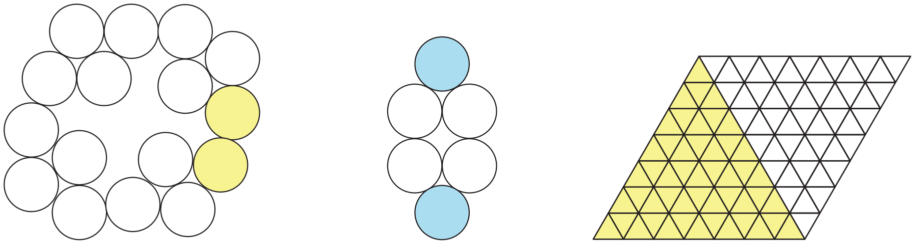
553. Neka su E i F središta stranica AB i CD kvadrata $ABCD$, stranice 7 cm. Za pokrivanje svih tačaka svake od duži BC, AD i EF, na opisani način, potrebna su najmanje tri kvadrata stranice 3 cm, jer jedan kvadrat stranice 3 cm ne može pokrivati tačke dveju od ove tri duži. Za pokrivanje svih tačaka ovih triju duži treba najmanje 9 kvadrata stranice 3 cm.

554. Rešenje je dato na sledećoj slici levo.

555. a) Moguće je postaviti 500 grupa od po 4 novčića, tako da se svake dve dodiruju, kao u prethodnom zadatku, na slici levo.

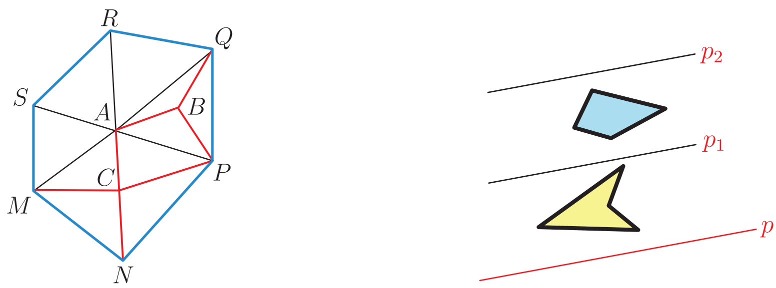
b) Nije moguće! Zaista, ako bi to bilo moguće, onda bi bilo ukupno $2001 \cdot 3$ dodira. Međutim, broj dodira u svakoj tački je 2 (2 kruga se dodiruju), pa bi ukupan broj dodira morao biti paran, a $2001 \cdot 3$ je neparan broj.

c) Moguće je! U lanac, formiran slično slici dole levo, ugradi se 499 grupa od po 4 kruga i jedna šestorka prikazana na slici u sredini, tako da se dodiruju po jedan "plavi" i jedan "žuti" novčić. (Dva "žuta" se prethodno razdvoje.)



556. Dopunimo dati trougao jednim podudarnim trouglom sa zajedničkom stranicom. Tako dobijemo romb, koji se može pravim paralelnim stranicama iseći na $2000 \cdot 2000$, tj. na $4\,000\,000$ rombova stranice 1 dm, poslednja slika. Svaki od ovih malih rombova može se popločati sa dva jednakostranična trougla stranice 1 dm. Za pokrivanje celog romba treba $2 \cdot 4\,000\,000$ takvih pločica. Naš trougao je polovina velikog romba, pa se može popločati sa $4\,000\,000$ pločica.

557. Kao u **primeru B** utvrdimo da temena šestougla i 663 tačke u unutrašnjosti određuju ukupno 1330 nepreklapajućih trouglova. (Nije moguće da nepresecajuće duži zatvaraju neki drugi mnogougao, jer bi se tada postupak povlačenja ovih duži mogao nastaviti konstruisanjem dijagonala iz jednog temena tog mnogougla.) Računajući da svaki od ovih trouglova ima po tri stranice, dobijamo $3 \cdot 1330 = 3990$ stranica. Pri tome smo sve stranice, osim stranica šestougla brojali po dva puta. Sledi daje broj nepresecajućih duži jednak: $3984 : 2 + 6 = 1998$.

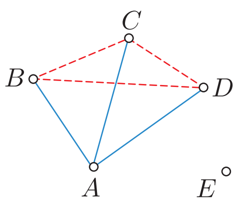


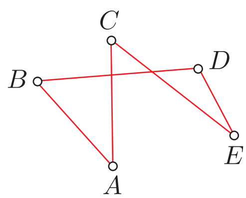
Drugi način. Stranice šestougla $MNPQRS$ na slici predstavljaju prvih 6 nepresecajućih duži. Neka je A prva od 663 unutrašnjih tačaka, koja spajanjem sa temenima šestougla daje novih 6 duži. Ako je sledeća tačka u nekom od šest dobijenih trouglova, kao tačka B na slici, njenim spajanjem sa temenima trougla dobijamo još 3 nepresecajuće duži. Ako je sledeća tačka na nakoj od povučenih duži, kao tačka C na slici, tada umesto jedne duži (na slici duži AN) dobijamo četiri nove (na slici CA, CM, CN i CP). Dakle, svakim povezivanjem narednih tačaka broj nepresecajućih duži povećava se za 3. Prema tome, ukupan broj duži je: $12 + 662 \cdot 3 = 1998$.

558. Zamislimo da konstruišemo sve prave određene datim tačkama. Broj ovih pravih je konačan, pa možerno konstruisati pravu p, koja nije paralelna ni jednoj od njih, tako da su sve date tačke sa iste strane prave p. Sada pomeramo pravu p paralelno početnom položaju, sve dok ne prođe redom kroz prve 4 tačke. Prava dolazi u položaj p_1, a ove četiri tačke određuju prvi (žuti) četvorougao, poslednja slika desno. Zatim, nastavimo sa pomeranjem prave p do položaja p_2, konstruišemo drugi (plavi) četvorougao, itd. Sa slike je jasno zašto se 500 ovako dobijenih četvorouglova ne presecaju.

559. Neka je n prava normalna na datu pravu p. Uočimo prečnike svih krugova paralelne pravoj n. Povlačenjem pravih paralelnih sa p, kroz krajeve svih prečnika, dobićemo na pravoj n projekcije svih prečnika. Ove projekcije su podudarne projektovanim prečnicima. Projekcija najvećeg prečnika je duž od 3 cm, a projekcije prečnika svih unutrašnjih, manjih krugova, padaju na ovu duž od 3 cm. Zbir dužina svih unutrašnjih projekcija je 25 cm, pa je prečnik od 3 cm, mestimično prekriven unutrašnjim projekcijama više od osam puta. Zbog toga, na projekciji velikog kruga, dužine 3 cm, postoji tačka koja pripada projekcijama od bar 9 unutrašnjih krugova (Dirihleov princip). Prava q, koja sadrži ovu tačku i normalna je na n (znači i paralelna sa p) je tražena prava.

560. a) Iz svake tačke polaze tačno po četiri duži, pa je dovoljno dokazati da ne postoji tačka iz koje polaze tri ili četiri istobojne duži. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji tačka iz koje polaze bar tri plave duži. Neka su to duži AB, AC i AD, slika levo. Tada ni jedna od duži BC, BD i CD ne može biti plava, jer bi u protivnom zatvorila "plavi" trougao, sa onim dvema dužima čije krajeve spaja. Međutim, tada je trougao BCD "crveni". Ovo je, prema postavljenom zadatku nemoguće, pa pretpostavka otpada. Dakle, iz svake tačke polaze tačno po dve plave i dve crvene duži.





b) Neka su tačke A i B spojene crvenom duži, slika desno. Iz B polazi tačno još jedna duž crvene boje. Neka to bude BD. Iz tačke D polazi još tačno jedna crvena duž. To ne može biti duž AD, jer bi onda trougao ABD bio "crven". Neka to bude duž DE. Iz E polazi još tačno jedna crvena duž. To ne može biti BE, zbog trougla BDE, a ne može biti ni AE, jer bi u tom slučaju dve crvene duži iz C zatvorile neki crveni trougao. Dakle, to je duž EC. Iz tačke E polazi još tačno jedna crvena duž, duž AC. Iz navedenih razloga to ne može biti ni BC, ni CD.

10.2. Rešenja zadataka sa takmičenja

Kengur bez granica

A) 5. i 6. razred

Tabela tačnih odgovora

Zadaci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A)	B	D	B	B	E	C	D	A	D	D	E	D	D	E	D	A	B	B	B	D	D	C	D	E	A	C	C	E	E	A
B)	C	C	B	D	E	B	C	D	A	E	D	D	B	B	D	D	D	C	D	C	E	C	D	C	C	B	C	D	B	C
C)	C	D	D	A	A	D	B	B	B	C	E	B	D	B	B	D	A	D	E	A	D	A	E	C	E	D	B	C	B	E

A1. Pošto je $\blacktriangle + 2005 + 2007 = \blacktriangle + 2006 - 1 + 2006 + 1 = \blacktriangle + 2006 + 2006$, a treba da je $\blacktriangle + 2005 + 2007 = 3 \cdot 2006$. Dobijamo da je $\blacktriangle = 2006$. (B)

A2. Prva cifra je 2, pa 3, itd. (D)

A3. Sa dve strane stola pravougaonog oblika može da sedi po 10 ljudi, a na dva čela stola po 1, što je ukupno 22 osobe. (B)

A4. Cena jednog štapa i jednog paka iznosi 1500 dinara, pa je cena dva štapa i dva paka 3000 dinara. Ako za dva štapa i tri paka treba da platimo 3300 dinara, zaključujemo da cena jednog paka iznosi $3300 - 3000 = 300$ dinara. (B)

A5. Svaki sat na slici pokazuje "pun sat". Mala kazaljka tokom 12 sati obiđe pun krug, što iznosi $360°$, pa se za jedan sat pomeri za $360° : 12 = 30°$. Pošto je $150 : 30 = 5$, kazaljke na satu zaklapaju $150°$ u 5 sati. (E)

A6. Ako bi sa desne strane ulice bile kuće i sa brojevima 36 i 38, onda bi u ulici bilo ukupno 39 kuća. Pošto ta dva broja nedostaju, u ulici se nalazi ukupno 37 kuća. (C)

A7. U kocki na slici izvađena su dva mala dela, koji se nalaze na paralelnim ivicama koje nisu na istoj strani kocke. Odgovor B ne odgovora ovom opisu, jer se isečeni delovi ne nalaze na paralelnim ivicama. Kod odgovora A i C vidimo da se isečeni delovi nalaze na susednim ivicama, te ni ove mreže ne odgovaraju navedenim uslovima. Od mreže pod odgovorom D možemo formirati telo na slici. (D)

A8. Svaka strana potpune kocke sastoji se od 9 kvadrata, pa se na površini kocke nalazi ukupno $6 \cdot 9 = 54$ kvadrata. Za bojenje kocke, tih 54 kvadrata, potroši se 9 kg boje, tako da sa 1 kg možemo obojiti $54 : 9 = 6$ kvadrata. Sa desne strane slike na telu imamo 12 belih kvadrata za čije bojenje treba 2 kg boje. (A)

A9. Nakon 20 godina sve tri su starije za 20 godina, što znači da se zbir njihovih godina povećao za 60, i sad iznosi 120. (D)

A10. Do rešenja možemo doći ako isprobamo svaku mogućnost. Pošto nema puno mogućnosti, zadatak možemo brzo rešiti. Ako primetimo da do svake cifre možemo stići od gore ili sa leve strane, primećujemo da do svake cifre možemo stići na onoliko načina na koliko smo stigli do cifre pre nje (od gore ili sleva). Tako do gornje i donje šestice možemo stići na po 1 način, a do šestica na sredini po 3 načina, što ukupno iznosi $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ načina.

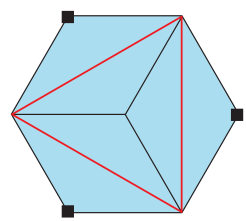
Drugi način: Krećući od 2 ka bilo kojoj šestici u svakom koraku, a ukupno ih je tri, možemo ići desno ili dole, dakle na dva načina. Svih tih mogućnosti ima $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. (D)

A11. Broj 72 možemo zapisati u obliku proizvoda dva prirodna činioca na sledeće načine: $1 \cdot 72$, $2 \cdot 36$, $3 \cdot 24$, $4 \cdot 18$, $6 \cdot 12$, $8 \cdot 9$. Odatle vidimo da zbir činilaca može da bude 73, 38, 27, 22, 18 ili 17, ali 24 ne. (E)

A12. Pošto se jednaki krugovi poluprečnika 5 cm međusobno dodiruju i dodiruju stranice kvadrata, stranica kvadrata je dužine jednake kao četiri poluprečnika, što iznosi 20 cm. Trouglovi na slici su jednakostranični i njihove stranice su jednake stranicama kvadrata. Obim zvezde sastoji se od 8 stranica dužine 20 cm, što je ukupno 160 cm. (D)

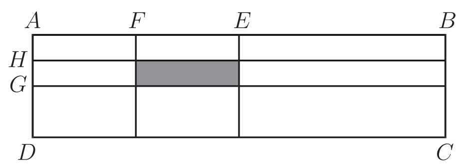
A13. Za bojenje koristimo 5 boja, i to redom: crvenu, belu, plavu, zelenu i ljubičastu. Počinjemo u gornjem levom uglu i bojimo dijagonalno. Tako u prvom redu na desetom (poslednjem) mestu koristimo ljubičastu boju. Bojeći dijagonalno u poslednjoj koloni koristimo se istim redosledom boja: nakon ljubičaste bojimo crvenom, belom, plavom, zelenom bojom. Pošto, tim redom, na petom mestu koristimo zelenu, i na poslednjem, desetom mestu treba da bojimo zelenom bojom. Rešenje možemo i da ilustrujemo. Ako nemamo pet boja, možemo umesto njih koristiti početna slova svake boje. (D)

A14. Označena temena treba da se poklope u centru pravilnog šestougla, što znači da se savijanje vrši preko malih (crvenih) dijagonala šestougla (vidi sliku). Tako dobijemo jednakostranični trougao. (E)



A15. Zbir prvih 1000 pozitivnih parnih brojeva je $2+4+6+\cdots+2000$, a zbir prvih 1000 pozitivnih neparnih brojeva je $1+3+5+\cdots+1999$. Prvi parni broj je veći za 1 od prvog neparnog broja, drugi parni je takođe veći za 1 od drugog neparnog broja, itd. To nam pokazuje da je zbir prvih 1000 pozitivnih parnih brojeva za 1000 veći od zbira prvih pozitivnih neparnih brojeva, što određuje njihovu razliku. (D)

A16. Površinu osenčenog pravougaonika možemo izračunati na dva načina. Prvo: zbog deljenja stranica velikog pravougaonika na pola, pa njih opet na pola, stranice malog pravougaonika su četvrtine od stranica velikog, odnosno 4 cm i 1 cm, te je tražena površina 4 cm^2.



Drugo rešenje: Površina velikog pravougaonika je $16 \cdot 4 = 64$ cm^2. Podelimo stranice velikog pravouganika na četiri jednaka dela, a potom pravouganik dužima paralelnim njegovim stranicama na 16 podudarnih pravougaonika. Osenčeni pravouganik je jedan od njih, pa tako njegova površina iznosi $64 : 16 = 4\ \text{cm}^2$. (A)

A17. Vidimo da je: $1111111111 - 111111111 = 1000000000$, $11111111 - 1111111 = 10000000$, $111111 - 11111 = 100000$, $1111 - 111 = 1000$ i $11 - 1 = 10$. Zbir tih razlika je 1010101010. (B)

A18. Anini brojevi su 12 i 99, Brankovi brojevi su 10 i 98. Pošto su Anini brojevi redom veći za 2 i 1, njen zbir je za 3 veći od Brankovog. (B)

A19. Na "Kengur" kocki 3 crvene (ili bele) strane mogu da se nađu na dva načina: sve tri ili imaju ili nemaju zajedničko teme. Dakle, postoje dve različite "Kengur" kocke. (B)

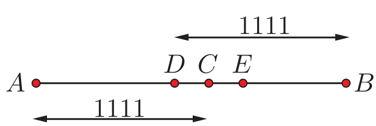
A20. Pošto je baklava sa desne strane i to pored kutije sa štrudlama, znači da kutije ŠB stoje jedna do druge, tim redosledom. Pošto su medenjaci levo od kiflica, a kiflice nisu na desnom kraju, onda su obe kutije, u redosledu MK, ispred prethodne dve. Tako se dobija redosled kutija MKŠB. (D)

A21. Kako je zbir prvih pet prirodnih brojeva $1+2+3+4+5 = 15$, zaključujemo da ne možemo podeliti na više od 5 delova različite celobrojne dužine. Dakle, štap je izlomljen na 5 delova. (D)

A22. Dijagonala velikog pravougaonika na slici je upravo prečnik kruga i iznosi 10 cm. Pošto su mali pravougaonici podudarni, četiri njihove dijagonale čine dijagonalu velikog pravougaonika. Figura označena debelom linijom sastoji se od osam malih dijagonala. Stoga je njen obim dva puta veći od prečnika kruga, što iznosi 20 cm. (C)

A23. Zbog 4. tvrđenja znamo da figura može biti kvadrat ili krug. Ako je kvadrat, onda je zbog 2. tvrđenja crveni, ali to je nemoguće zbog 5. tvrđenja iz kojeg saznajemo da je figura plava ili žuta. Dakle, figura nije kvadrat nego krug. Ako bi bila žuta, onda zbog 3. tvrđenja treba da bude kvadrat, a kako to sigurno nije, nije ni žute boje nego plave. Sada sa sigurnošću možemo reći da nastavnica u ruci drži plavi krug. (D)

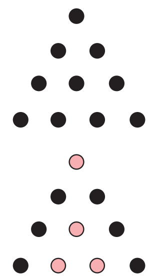
A24. Znamo da je duž AE dve trećine duži AB, a to znači da je duž EB jedna trećina duži AB i da je tačka E bliže tački B nego tački A. AC je dužine 1111, što je veće od 1003 (polovina od 2006, što je dužina AB), ali je manje od dve trećine od 2006, pa je tačka C bliže tački A nego tačka E. Tačka D je najbliža tački A, što znači da je tačka D levo od tačke C. Tačan redosled je $ADCEB$. (E)



A25. Kvadrat dimenzija 30×30 dopunićemo tako što ćemo dodati jedan red kvadrata gore i jednu kolonu kvadrata sa desne strane. Izračunajmo koliko šibica stavljamo vodoravno i uspravno. Da bismo dobili 31 kvadrat, gore s leva na desno ređamo 32 "uspravne" šibice, pa onda na dole još 30 "uspravnih" šibica. Ukupno 62 šibice dodajemo uspravno. Na isti način dodajemo "vodoravne" šibice, pa je njihov broj jednak broju “uspravnih”. Dakle, za ovo dopunjavanje potrebne su 124 šibice $(62+62)$. (A)

A26. Broj 12 je deljiv sa 2, sa 3 i sa 4. Ako je razlika dva broja 12 ili sadržalac broja 12, dobićemo isti ostatak, ako ih podelimo sa 12. To znači, ako je razlika dva broja 12 ili njegov sadržalac, onda ćemo ih podvući isto puta. Dovoljno je da pogledamo među prvih 12 brojeva koliko smo ih podvukli tačno dva puta. Ti brojevi su 4, 6 i 8, imamo tri takva broja. Pošto $2006 = 167 \cdot 12 + 2$, imamo 167 perioda dužine 12, od toga dobijemo da smo $167 \cdot 3 = 501$ brojeva podvukli tačno dva puta. Brojeve 2005 i 2006 nismo podvukli dva puta, pošto ni brojevi 1 i 2 nisu podvučeni dva puta. (C)

A27. Na slici ima ukupno 15 jednakostraničnih trouglova (9 stranice dužine 1, 3 stranice dužine 2, 1 stranice dužine 3, i 2 čija su temena trojke nesusednih temena pravilnog šestougla na sredini). Prvo brišemo tačku u centru, jer je ona teme šest malih trouglova (ostale tačke su temena manjem broju jednakostraničnih trouglova). Ovako “pokvarimo” šest trouglova. Svaka preostala tačka je teme tri jednakostranična trougla. Treba da obrišemo najmanje tri da bismo “pokvarili” ostalih 9 trouglova. Moramo izbrisati jedno teme velikog trougla, bar jedno koje pripada jednom od trouglova dužine stranice dva, i bar jedno koje pripada šestouglu. Jedno rešenje je prikazano na slici, a ostala dva dobijamo okretanjem trougla. (C)



A28. Slanina se prži na 15 drvenih trupaca, što je tačno 5 na svakog od 3 dečaka. Tako gledano, Dejan treba bombonama da “otkupi” 5 trupaca, a da bi Aci i Peri ostalo po pet, 2 kupuje od Pere, a 3 od Ace. Dejan za jedan trupac plaća $30 : 5 = 6$ bombona. Aca će tako dobiti 18, a Pera 12 bombona, što znači da će Aca dobiti 6 bombona više. (E)

A29. Na levoj mreži vidi se da suprotno od slova F stoji C, a suprotno od slova D stoji A. Dakle, na mesto upitnika možemo upisati B ili E, a ispod upitnika je C. Pošto sa leve strane kvadrati D i C imaju zajedničko teme sa kvadratom E, umesto upitnika treba da stoji slovo E. (E)

A30. Od datih brojeva imamo tri para koje ne smemo upisati u susedne kvadrate. To su: 1 i 4, 2 i 5, 3 i 6. U veliki kvadrat možemo upisati bilo koji broj i za to imamo 6 mogućnosti, ali onda par ovog broja moramo upisati u gornji desni kvadrat. U gornji levi kvadrat sad možemo upisati bilo koji od ostala četiri broja, za to je 4 mogućnosti. Par ovog broja moramo upisati u neki od kvadrata sa desne strane, a za to ima 2 mogućnosti. Preostali par na dva načina možemo upisati u preostala dva kvadrata. Ukupni broj načina popunjavanja kvadrata po datom pravilu je: $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 3$. (A)

B) 5. i 6. razred

B1. Najmanje je $2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 8$ jer je vrednost tog izraza jednaka 0, a vrednosti svih ostalih izraza su veće od nule. (C)

B2. Zbog komutativnosti množenja lako se vidi da je $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$. Kengura treba zameniti sa $2 \cdot 3$. (C)

B3. $(3 + 2) \cdot 3 - 1 = 14$. Dakle, redosled operacija je PMN. (B)

B4. Znak ♣ treba zameniti sa 0: $1 + 101 - 2 = 100$. (D)

B5. Nije moguće dobiti prave uglove. (E)

B6. Pošto zbir bilo koja dva od datih brojeva nije 9, to u prvu prstu treba upisati traženi broj. U drugoj vrsti su brojevi čiji je zbir 6, a to su 2 i 4. Dakle, u prvoj vrsti je broj 3. Da bi zbir brojeva u prvoj vrsti bio 9 u nju treba upisati još i broj 6. (B)

B7. Na prvoj zastavi crna boja prekriva $\frac{3}{8}$, na drugoj $\frac{3}{5}$ na trećoj $\frac{2}{3}$, na četvrtoj $\frac{3}{5}$, na petoj $\frac{1}{2}$ zastave. Dve zastave zadovoljavaju postavljeni uslov. (C)

B8. Ako je Pavle pre grudvanja pripremio x grudvi, onda je $x + 17 - 21 = 15$, odakle dobijamo da je $x = 19$. (D)

B9. Kako se u prvoj vrsti tablice sa znakom pitanja nalaze brojevi 35 i 63, a njihov jedini zajednički delilac je broj 7, to u prvo polje ispod znaka $\times$ treba upisati broj 7. Onda desno od znaka $\times$ treba upisati redom brojeve $35 : 7 = 5$ i $63 : 7 = 9$, pa u polje ispod 7 broj $30 : 5 = 6$. Konačno, u polje sa znakom pitanja treba upisati broj $6 \cdot 9 = 54$. (A)

B10. Od belih cigli napravljen je drugi i četvrti sprat. Sa slika vidimo da je za drugi sprat potrebno 13 cigli, a da je za četvrti sprat potrebna 1 cigla, pa je ukupno potrebno 14 belih cigli. (E)

B11. U svakom trouglu zbir dužina dve stranice mora biti veći od treće stranice. Od 7 palidrvaca možemo napraviti trougao kod koga su stranice dužina, na primer 2, 2 i 3 palidrvca (ili 1, 3 i 3), od 6 palidrvaca možemo napraviti trougao kod koga su sve tri stranice dužine po 2 palidrvca, od 5 palidrvaca trougao sa stranicama 2, 2 i 1 palidrvce, od 3 palidrvca opet jednakostranični trougao stranice dužine 1 palidrvce. Od četiri palidrvca nije moguće formirati trougao jer se broj 4 može razložiti na zbir tri prirodna broja samo na jedan način: $4 = 1 + 1 + 2$, a taj način ne omogućava formiranje trougla. (D)

B12. Pošto u 4. kutiji ima samo jedna kartica sa slovom U, ona će ostati u 4. kutiji, a iz 1. i 2. kutije izvadiće kartice sa slovom U. Tako u 1. kutiji ostaje samo kartica sa slovom E, pa će kartice sa slovom E izvaditi iz 2, 3. i 5. kutije. U 3. kutiji ostaje samo slovo A, pa iz 2. i 5. kutije može izvaditi kartice sa slovom A. Tada u 2. kutiji ostaje samo kartica sa slovom I, pa kada iz 5. izvadi i karticu sa slovom I, u svakoj kutiji će biti po jedna kartica i u različitim kutijama će biti kartice sa različitim slovima. U 5. kutiji će biti kartica sa slovom O. (D)

B13. Obimi kvadrata i trougla jednaki su po 16 cm. Obim cele figure jednak je zbiru obima trougla umanjenog za stranicu kvadrata i obima kvadrata umanjenog za jednu stranicu. Traženi obim jednak je $16 - 4 + 3 \cdot 4 = 24$ cm. (B)

B14. Kako je zapremina sirupa od pomorandže dva puta veća od zapremine sirupa od višnje, to je zapremina sirupa od višnje jednaka trećini ukupne zapremine napunjenih boca. Ako bi boca od 16 ml bila prazna, tada bi ukupna zapremina punih boca bila 130 ml, što je nemoguće jer 130 nije deljivo sa 3. Ako bi boca od 18 ml bila prazna, tada bi ukupna zapremina punih boca bila 128 ml, što je opet nemoguće, jer ni 128 nije deljivo sa 3. Na isti način se zaključuje da nisu mogući ni slučajevi da boce od 24 ml i 34 ml budu prazne. Ako bi boca od 22 ml bila prazna, tada bi ukupna zapremina punih boca bila 124 ml, što takođe nije deljivo sa 3. Ostaje još mogućnost da boca od 32 ml bude prazna. Tada je ukupna zapremina sirupa jednaka 114 ml, pa je zapremina sirupa od višnje 38 ml, a zapremina sirupa od pomorandže 76 ml. To znači da je sirup od višnje u bocama od 16 i 22 ml. (B)

B15. Pošto prilikom prvog račvanja u jedan rukavac odlazi $\frac{1}{3}$ vode, u drugi rukavac odlazi $\frac{2}{3}$ vode. Od toga prilikom drugog račvanja u prvi rukavac odlazi $\frac{3}{4}$, pa u drugi rukavac odlazi $\frac{1}{4}$. To znači da od ukupne količine vode kroz tačku B protiče $\frac{1}{4}$ od $\frac{2}{3}$ vode tj. $\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$ od ukupne količine vode. (D)

B16. Promašaj obeležimo sa 0. Mogući su sledeći rezultati: $0+0$, $0+2$, $0+3$, $0+6$, $2+2$, $2+3$, $2+6$, $3+3$, $3+6$ i $6+6$. Međutim, rezultat $3+3$ jednak je rezultatu $0+6$, pa možemo postići 9 različitih rezultata. (D)

B17. U kutije je spakovala ukupno $3 \cdot 7 = 21$ disk. To znači da na policu nije moglo da stane $21 + 2 = 23$ diska, a kako je to trećina od ukupnog broja diskova koje je imala, zaključujemo da je Radmila imala ukupno $23 \cdot 3 = 69$ diskova. (D)

B18. Nije moguće dobiti građevinu C). Čitaocima predlažemo da uzmu 5 kocki i pokušaju da dobiju sve ostale građevine. (C)

B19. Poredak tačaka $A - B - C$ nije moguć jer bi tada bilo $AC = 24$, što je nemoguće zbog datih rastojanja CD i DA. Dakle, mora biti poredak $A - C - B$. Tada je $AC = 2$, pa tačka D mora biti sa suprotne strane tačke C u odnosu na tačku A. Tada su najudaljenije tačke D i B, i rastojanje između njih je $DB = DA + AB = 12 + 13 = 25$. (D)

B20. Neka sin sada ima x i ćerka y godina. Tada prema uslovima zadatka važi $x + 2 = 2(x - 2)$, odakle je $x = 6$ i $y + 3 = 3(y - 3)$, odakle je $y = 6$. Dakle, sada sin i ćerka imaju isto godina. (C)

B21. Znaci $*$ i & predstavljaju dva različita jednocifrena broja deljiva sa tri, takva da je i njihov zbir jednocifreni broj. To znači da oni predstavljaju cifre 3 i 6, pa znak $\frown$ predstavlja njihov zbir, tj. cifru 9. (E)

B22. Pošto doktor nema ni sestru ni brata, a Filip je oženjen Stefanovom sestrom, zaključujemo da Stefan nije doktor. Pošto je Filip stariji od inženjera, a doktor je najmlađi među prijateljima, zaključujemo da ni Filip nije doktor. Dakle, doktor je Rade. Filip sigurno nije inženjer jer je stariji od inženjera, pa Filip mora biti muzičar, a Stefan inženjer. (C)

B23. Lako se nalazi put koji polazi iz bilo kog obojenog kvadrata koji zadovoljava uslove zadatka. Pokažimo da takav put ne postoji ako se pođe iz bilo kog belog kvadrata. Obzirom da je dozvoljeno kretanje samo horizontalno i vertikalno, tada se iz jednog kvadrata uvek prelazi u kvadrat koji je druge boje. Dakle, da bismo došli u plavi kvadrat, pre toga moramo biti u belom kvadratu. Kako plavih kvadrata ima 5, a belih 4, to ne možemo obići sve kvadrate polazeći iz belog. (D)

B24. Od zbira prve dve linije oduzimamo treću liniju: $(CD+DE+EF+FG+GH+HC)+(AB+BC+CF+FG+GH+HA)-(AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH+HA)=17+12-20$. Sređivanjem dobijamo: $FG+GH+HC+CF=9$ km. Dakle, četvrta linija je dužine 9 km. (C)

B25. U prvom trenutku valjak je krajnje desno, a kupa krajnje levo, zatim je valjak iza kupe, pa kupa krajnje desno, a valjak krajnje levo i konačno je kupa iza valjka. Redosled je 2143. (C)

B26. Prvi mudrac je očigledno izvukao tri parna broja: 2, 4 i 6. (B)

B27. Neka su dimenzije starog ekrana $4x$ i $3x$. Njegova površina je tada $12x^2$. Dimenzije filma na starom ekranu su $4x$ i $4x\cdot\frac{9}{16}$, pa je površina filma na starom ekranu jednaka $4x\cdot 4x\cdot\frac{9}{16}$. Dakle, površina filma je $9x^2$, pa je neiskorišćeni deo ekrana površine $12x^2-9x^2=3x^2$, što predstavlja $\frac{1}{4}$ površine starog ekrana. (C)

B28. Kod dvocifrenih brojeva kojima su cifre desetica i cifre jedinica jednake, razlika između tih cifara je 0, pa takve razlike ne utiču na traženi zbir. Posmatrajmo dvocifrene brojeve kod kojih se cifre desetica i jedinica razlikuju. Svaki od dvocifrenih brojeva koji u svom zapisu ne sadrži cifru 0 ima odgovarajući dvocifreni broj napisan ciframa u obrnutom poretku. Tada će zbir dobijenih razlika koje odgovaraju tim brojevima biti jednak nuli (na primer broju 12 odgovara broj 21, razlike su -1 i 1 pa je njihov zbir jednak 0). Preostaju još brojevi koji imaju cifru jedinica jednaku 0, tj. brojevi 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 i 90. Prema tome, traženi zbir je jednak $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. (D)

B29. Pošto različitim slovima odgovaraju različite cifre, zbirovi $N+A$ i $A+G$ ne mogu se završavati istom cifrom, pa mora biti $N+A>10$ i $G+1=N$. Takođe mora biti $R=K+1$. To znači da je $RN-KG=11$. (B)

B30. Da obrišemo što je moguće više cifara, treba da zadržimo što je moguće više najvećih cifara. Pošto je dati broj 1000-cifren, to se u njemu cifra 8 pojavljuje 250 puta. Kako je $8\cdot 250=2000$, da zbir bude 2008 potrebno je zadržati sve osmice i još 4 dvojke. To znači da ostaju 254 cifre, a obrisano je $1000-254=746$ cifara. (C)

C) 5. i 6. razred

C1. Za okretanje slova K u pravilan položaj potrebna su 2 pritiska na karticu, zatim za prvo slovo A 1, za slovo N 1 i za drugo slovo A 2. Aleksa tpeba da pritisne kartice $2+1+1+2=6$ puta. (C)

C2. Najveći deo je polovina torte, pa teži 450 g. (D)

C3. Vidi ono što je prikazano na slici D). (D)

C4. Kako je $2+3+4=9$ i $1+1+1=3$, sledi da je zbir cifara koje nedostaju jednak 0. (A)

C5. Razlika je 1 ($1 = 10000 - 9999$). (A)

C6. Dužina stranice kvadrata je $48 : 4 = 12$ cm, pa je obim pravougaonika $2 \cdot 12 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 60$ cm. (D)

C7. Za trougao će potrošiti $3 \cdot 6 = 18$ palidrvaca, na joj za kvadrat ostaje $38 - 18 = 20$, što znači da stranica kvadrata ima $20 : 4 = 5$ palidrvaca. (B)

C8. Najmanji broj belih perli koje mora da skine je 3 (dve sive i jednu belu perlu sa leve strane i tri sive i dve bele perle sa desne strane). (B)

C9. Marko je redom prošao krugove za 31 s, 28 s, 34 s, 35 s i 29 s. Dakle, drugi krug je prošao za najkraće vreme. (B)

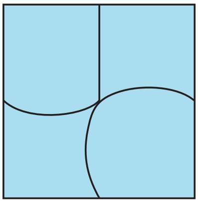
C10. Krajnja desna cifra na levom satu može biti: 1, 3 ili 7, a na desnom 4 ili 9. Razlika između njih treba da bude 1, pa zaključujemo da se u momentu kada je Branko pogledao umesto cifre 3 pojavila cifra 4, tj. na desnom satu je trebalo da bude 12.44. (C)

C11. Neka je površina jedne pločice (jednog malog kvadratića) jednaka 1. Tada je površina sivih delova $6 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$, a površina belih delova $2 + 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$. Kako je razlika tih površina jednaka 2 nemoguće je dodavanjem jedne pločice površine 1 postići da one budu jednake. (E)

C12. Kosta je došao u tačku koja je u odnosu na početnu tačku 2 km +1 km=3 km na zapad i 4 km $-$ 1 km $=$ 3 km na jug. Vuk je došao u tačku koja je u odnosu na početnu 4 km $-$ 1 km $=$ 3 km na zapad i 4 km na jug. Da bi došao u tačku u kojoj je Kosta, Vuk treba da ide još 4 km $-$ 3 km $=$ 1 km na sever. (B)

C13. Juče je sladoled jelo 7 učenika koji jedu sladoled svaki dan i $13 - 7 = 6$ učenika koji jedu sladoled svaki drugi dan, pa će danas sladoled jesti 7 učenika koji jedu sladoled svaki dan i $9 - 6 = 3$ koji jedu svaki drugi dan. Dakle, danas $7 + 3 = 10$ učenika jede sladoled. (D)

C14. Kenguri A i E su jedan pored drugog i na početku i na kraju, što znači da oni međusobno menjaju mesta. Isto važi i za kengure C i D. Dakle, kengur B se nije pomerio. (B)



C15. Neupotrebljen ostaje deo B (vidi sliku). (B)

C16. Kako je $135 = 3 \cdot 5 \cdot 9$, to su jedina tri jednocifrena broja čiji je proizvod jednak 135, pa je traženi zbir $3 + 5 + 9 = 17$. (D)

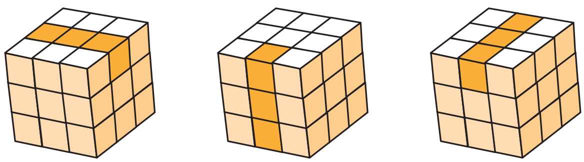
C17. Za stolove sa 6 stolica može da sedne ukupno $72 - 36 = 36$ osoba, što znači da ima $36 : 6 = 6$ takvih stolova. Preostali stolovi, njih $16 - 6 = 10$ su sa 3 ili 4 stolice. Neka je x broj stolova sa 3 stolice. Tada je $3x + 4(10 - x) = 36$, odakle dobijamo da je $x = 4$. (A)

C18. Iz datih podataka računamo $AB = AF - BD - DF = 35 - 11 - 16 = 8$ i $BE = AE - AB = AC + CE - AB = 12 + 12 - 8 = 16$. (D)

C19. Najmanji zajednički sadržalac brojeva 3 i 5 je 15, pa Julija ima $15k+2$ kamenčića, gde je k neki prirodni broj. Ako ona doda n kamenčića imaće ih ukupno $15k+2+n$. Taj broj treba da bude deljiv i sa 3 i sa 5, tj. sa 15. Kako je $15k$ deljivo sa 15, to i $2+n$ mora biti deljivo sa 15, a najmanji prirodni broj n za koji to važi je 13. (E)

C20. Od četiri strane susedne strani obeleženoj brojem 1, tri su obeležene brojevima 5, 6 i 2, pri čemu su strane obeležene sa 2 i 5 susedne strani obeleženoj brojem 6. Četvrta strana susedna strani obeleženoj brojem 6 (koja nije susedna strani broj 1) obeležena je brojem 4. Dakle, strana suprotna strani obeleženoj brojem 4, obeležena je brojem 1. (A)

C21. Na slici su redom tamnijom bojom obojene po tri male kocke koje treba skloniti da bi se videlo ono što treba kada se gleda s desne strane, odozgo i spreda. Od tih 9 malih kocki jedna se ponavlja na drugoj i trećoj slici, što znači da treba skloniti 7 malih kocki. (D)



C22. Emitovanje svih pet pesama traje 13 min. To znači da se za jedan sat blok od tih 5 pesama emituje 4 puta ($4 \cdot 13 = 52$) i do momenta kada se Adam vratio prošlo je još 8 min. Pesma C traje 2 min, pesme D i E traju zajedno 5 min 30 s i pesma A 3 min, što znači da će se nakon 8 min od momenta kada se emituje pesma C emitovati pesma A. (A)

C23. Broj 5 ne može biti upisan u polje između polja sa brojevima 1 i 3 jer bi onda i u centralnom polju morao biti upisan broj $9 - 1 - 3 = 5$. Takođe, broj 5 ne može biti upisan ni između 3 i 4 ($9 - 3 - 4 = 2$), ni između 2 i 4 ($9 - 2 - 4 = 3$). Ostaju dve mogućnosti za broj 5 – ili centralno polje ili polje između 1 i 2. Centralno polje nije moguće, jer bi onda u susednim poljima bili brojevi 6, 7, 8 i 9. Dakle, broj 5 je u polju između polja sa brojevima 1 i 2, pa je u centralnom polju broj $9 - 1 - 2 = 6$. Zbir brojeva u poljima susednim polju broja 6 je $5 + 7 + 8 + 9 = 29$. (E)

C24. Javora ima $60 : 2 = 30$. Svako treće stablo, dakle njih $60 : 3 = 20$, su lipe ili javori, pri čemu je svako šesto stablo, tj. ukupno njih $60 : 6 = 10$, već računato u broj javora. Prema tome, javora i lipa ima $30 + 20 - 10 = 40$, pa je breza $60 - 40 = 20$. (C)

C25. Slika E ne prikazuje kocku ni iz jedne perspektive. (E)

C26. Prvi izaslanik se vrati u dvorac za 30 min, tj. 60 min + 30 min=90 min od polaska ka letnjoj bašti. Za svaki sat kasnijeg polaska nazad put je 5 km duži nego što je bio prethodnom izaslaniku, tj. potrebno je 30 min više vremena do dolaska u dvorac u odnosu na prethodnog izaslanika. To znači da izaslanici stižu u dvorac na svakih 90 min. (D)

C27. Predstavimo broj 36 u obliku proizvoda tri jednocifrena broja od kojih je jedan obavezno 3. Kako je $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 3$, lako vidimo da je Ratko mogao da obriše broj $15 - 2 - 6 = 7$ ili $15 - 4 - 3 = 8$. (B)

C28. Zec je 2 dana jeo po 9 šargarepa i 3 dana po 1 kupus i 4 šargarepe. To znači da je $(9 - 3 \cdot 1) : 2 = 3$ dana jeo samo kupus. Preostala $10 - 2 - 3 - 3 = 2$ dana jeo je samo travu. (C)

C29. Neka je k broj kraljeva i ℓ broj lažljivaca. Pošto kmetovi naizmenično govore istinu i lažu sa n ćemo obeležiti broj kmetova koji su na prvo pitanje dali lažan odgovor, a istinit na drugo pitanje. Tada je $k+\ell+n = 17$ i $\ell+n = 12$, odakle jednostavno dobijamo da je $k = 17 - 12 = 5$. (B)

C30. Kako je $180 = 18 \cdot 10 = 36 \cdot 5$, Alisa će imati najmanje godina ako ostali imaju što više godina. To važi ako unučad imaju 17, 19, 16, 20, 15, 21, 14, 22, 13, 23 godina. Tada Alisa ima 23 godine. (E)

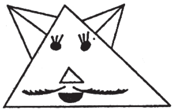
Misliša

D) 5. razred

D1. D) 4. Dve polovine jabuke čine jednu celu jabuku, a četiri četvrtine čine još jednu celu jabuku. Sa dve cele jabuke koje Jasna već ima, to čini ukupno 4 cele jabuke.

D2. E) 8. Iz podatka da guska i po košta 6 dinara treba da izračunamo koliko košta 1 guska. To se može uraditi, na primer, tako što prvo izračunamo koliko koštaju 3 guske (dvostruko više), pa zatim odredimo cenu jedne guske (3 puta manje) i konačno cenu za 2 guske (dva puta više).

D3. A) 8, (nos i lice po 1, a na ušima po 3, i to 2 mala i 1 veći).



D4. B) 4, jer se u svakom uglu sobe nalazi po jedan dečak koji u svakom trenutku vidi ostalu trojicu.

D5. D) 5, jer je $C = R \cup S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

D6. C) 15. Uslov zadatka može se i ovako zapisati: $a \cdot b = 15a$, a dalje se lako vidi da je drugi činilac $b = 15$.

D7. C) 5. Kako se zna proizvod njihovih godina, to znači da tražimo dva broja čiji je proizvod 24, a to su $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Kako mora biti ispunjen još i uslov da je zbir njihovih godina 11, jedini brojevi koji to ispunjavaju su brojevi 3 i 8. Iz teksta zadatka znamo da je Marica starija. Dakle, Marica je imala 5 godina kad se Ivica rodio.

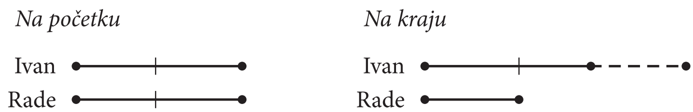
D8. C) 3. Greške su napravljene u primerima b) i c):

b) $(2+8) \cdot 2 + 8 = 10 \cdot 2 + 8 = 20 + 8 = 28$ c) $0,9 + 0,10 = 1$

D9. B) 4. Ako Maja zatvorenih očiju uzme iz fioke 3 čarape, onda, u najnepovoljnijem slučaju, one mogu biti različitih boja. Četvrta izvučena čarapa je onda ili bela ili crvena ili roze. Kako je jedna čarapa takve boje (bela, crvena ili roze) već izvučena, Maja može biti sigurna da će imati jedan par istobojnih čarapa kad izvuče 4 čarape.

D10. C) III razlomak. Vrednost prvog razlomka je 1. Vrednost drugog razlomka je $\frac{0}{10} = 0$. Vrednost trećeg razlomka je $\frac{2008}{10} = 200,8$. Vrednost četvrtog razlomka je $\frac{10}{2008}$. Prema tome, najveću vrednost ima treći razlomak.

D11. B) 3 puta. Pogledaj sliku!

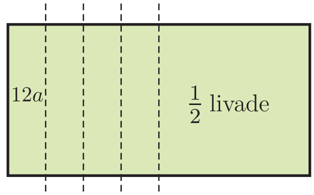


D12. E) 14. Nije veći, znači: manji ili jednak! Kako se radi o proizvodu cifara, znači da u našem slučaju on može biti 0, 1, 2 ili 3. Pokušajmo redom da ispišemo sve te brojeve: 10, 20, 30, 11, 12, 21, 13, 31, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Dakle, ima ih ukupno 14.

D13. D) 6. Trouglove treba brojati po planu: npr. od najmanjih, pa redom preko sve većih (onih koji se sastoje od 2 manja trougla) do najvećeg. U ovom slučaju to bi značilo $3 + 2 + 1 = 6$.

Učinićemo i jednu važnu napomenu. Na ovoj slici ima tačno onoliko trouglova koliko se duži može izbrojati na osnovici velikog trougla. Svaka od tih duži predstavlja osnovicu jednog trougla, a treće teme svakog od tih trouglova je tačka (pri vrhu) nasuprot osnovice velikog trougla.

D14. A) 96. Sa slike se vidi da pokošenih 12 ari predstavlja osminu čitave livade, pa je: $12 \text{ ari} \cdot 8 = 96$ ari.



D15. C) 50. U zadatku se traži trećina i polovina od trećine broja 100. To se može zapisati i ovako:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 100 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50.$$

D16. B) Q. Skup P ima 3 elementa, skup Q ima 4 elementa, skup R ima 3 elementa, S ima 1, a T ima 2 elementa. Najviše elemenata ima skup Q.

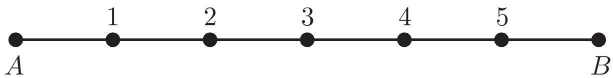
D17. E) 33. Prema uslovima zadatka, ispred Vesne, Ivane i Ane stoji 6 trojki, a iza njih 4 trojke. Ukupno red čeka 11 trojki, pa je $11 \cdot 3 = 33$ učenika.

D18. B) 49. Poslednja stranica koja nedostaje mora biti obeležena parnim brojem (pri čemu to ne može biti broj 132, jer je manji od 215). To znači da u Lukinoj knjizi nedostaju stranice: 215, 216, 217,..., 311, 312. Nedostaje, dakle, ukupno $312 - 214 = 98$ stranica. Kako jedan list ima dve stranice, zaključujemo da je iz Lukine knjige ispalo $98 : 2 = 49$ listova.

D19. A) 1. Vrednost izraza treba tražiti postupno. Početi od $(100 - 99)$.

D20. A) 20. U svakom od 4 najmanja kvadrata ima po 4 prava ugla, a osim toga ima još 4 prava ugla u srednjem kvadratu. Dakle, $4 \cdot 4 + 4 = 20$.

D21. B) 15 dl.



Vode ima u oazama A i B, a beduin treba da pije vodu kada dođe u mesta označena tačkama 1, 2, 3, 4, 5. Dakle, beduin treba da popije $5 \cdot 3$ dl $= 15$ dl.

D22. A) $A = 4$; zbir cifara je 13. Do rešenja ćemo lakše stići ako zadatak napišemo u obliku

$$4 \cdot \text{VODA} = \text{DAVI}$$

Prvi zaključak koji odavde sledi je da se iza reči DAVI krije četvorocifreni broj deljiv sa 4. To dalje znači da dvocifreni završetak broja DAVI, tj. broj VI mora biti deljiv sa 4.

Međutim, tu sad imamo ograničenje, zbog toga što su brojevi VODA i DAVI četvorocifreni. Naime, to znači da mora biti $V \in \{1, 2\}$, jer da je V veći broj, onda bi dobijeni rezultat množenja bio petocifren broj.

Ako je $V = 1$, onda je $I \in \{2, 6\}$, a da bi poslednja cifra broja DAVI, bila 2 ili 6, cifra koja se krije iza A (u broju VODA) mora biti $A \in \{3, 4\}$. Analizom dolazimo do jedinog rešenja $\underline{4 \cdot 1354 = 5416}$.

Ako je $V = 2$, onda $I \in \{0, 4, 8\}$ i $A \in \{5, 1, 7\}$ ili $A \in \{5, 1, 2\}$ ili $A \in \{5, 6, 7\}$ ili $A \in \{5, 6, 2\}$. U svim ovim slučajevima dolazimo do protivrečnosti.

D23. B) 2. Posmatrajmo prve “terazije”, pa umesto psa stavimo 2 konopca (jer nam to dozvoljava ravnoteža prikazana na drugoj slici), a umesto dva bureta stavimo 2 ovčice i 2 konopca (jer nam to dozvoljava ravnoteža prikazana na trećoj slici). Tada će na levoj strani prvih terazija biti akrobata i 2 konopca, a na desnoj 2 ovce i dva 2 konopca. Terazije će ostati u ravnoteži i kada i sa leve i sa desne strane uklonimo po 2 konopca. Tada će se videti da je dečak u ravnoteži sa 2 ovčice.

D24. E) R, B, P, K, V, M. Pažljivim čitanjem teksta i razmatrašem svih slučajeva, prema datim uslovima, dolazimo do rešenja: Ranko, Bora, Pera, Kosta, Vasa, Marko.

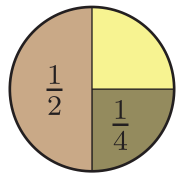
D25. E) Nedostaje 16. Ivan je za pravljenje svoje figure upotrebio 28 kockica, a Dejan 20 kockica. Kad ih udruže, imaće zajedno $28 + 20 = 48$ kockica. Od 48 kockica ne može se složiti nova kocka. Prva sledeća (veća) kocka koja se može složiti je kocka sastavljena od 64 kockice (jer je $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$). Tako zaključujemo da Ivanu i Dejanu ukupno nedostaje $64 - 48 = 16$ kockica.

E) 5. razred

E1. E) 12078. Ovaj izraz možemo drugačije zapisati i u obliku:

$$2013 + 2 \cdot 2013 + 3 \cdot 2013 = 6 \cdot 2013 = 12078$$

E2. D) četvrtina. Prikaži crtežom!



E3. C) tačke A i B.

E4. E) duž MN.

E5. E) 4. Ovo su dva jednaka skupa. Prikaži ih Venovim dijagramom!

E6. D) 6, jer je $3 + 2 + 1 = 6$.

E7. E) 4. To su brojevi: 9, 27, 33, 129. (Zbir cifara svakog od njih je deljiv sa 3.)

E8. A) 5. Zamišljeni broj označimo sa x. Kad dobijemo još toliko, imamo $2x$, kad dobijemo još 10 imamo $2x + 10$, tj. $2(x + 5)$ i kad to prepolovimo, ostaje nam $x + 5$. Drugu treba da vratimo njegovo, tj. x, znači, ostaje nam tačno 5.

E9. B) 9. Pošto je prva cifra uvek 4, zadatak se sastoji u tome da prebrojimo koliko se dvocifrenih brojeva može napisati koristeći cifre 5, 8 i 9. Odgovor je $3 \cdot 3 = 9$.

To su brojevi:

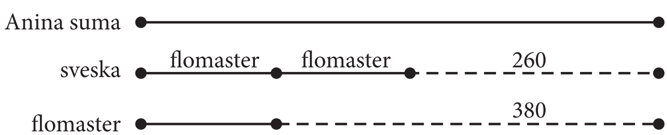
455, 458, 459

485, 488, 489

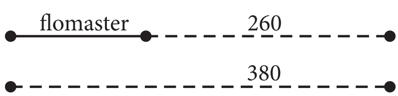
495, 498, 499

E10. E) 9. Zaista, za brojeve $111, 222, 333, \ldots, 888, 999$ važi da im je zbir cifara deljiv sa 3, što znači da je svaki od njih deljiv sa 3.

E11. D) 500. Zadatak rešavamo metodom duži.



Na crtežu je Anina suma prikazana pomoću jedne duži, a zatim se može videti, prema uslovima zadatka, u kakvom su odnosu cene sveske i flomastera i sume koja bi Ani ostala posle kupovine. Korisno je još i da posebno izdvojimo samo deo crteža:



sa koga se jasno vidi cena jednog flomastera:

$$\text{flomaster} = 380 - 260 = 120 \text{ (dinara)}.$$

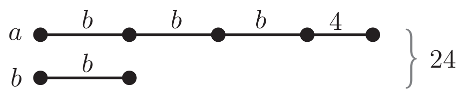
Do konačnog rešenja zadatka imamo samo još jedan korak. Naime, slika nam jasno kazuje da je Anina suma jednaka zbiru cene flomastera i 380 dinara (koji bi joj ostali da je kupila flomaster). Prema tome, Ana ima $120 + 380 = 500$ (dinara).

E12. E) 21. Jelica je cifru 1 napisala 10 puta na mestu cifre jedinica (1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91), zatim 10 puta u ulozi cifre desetica (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19) i konačno, samo jednom u ulozi cifre stotina. Dakle, Jelica je napisala cifru 1 tačno 21 put.

E13. C) 294, jer je $267 + 27 = 294$.

E14. B) 44. Ako je 12 zastavica raspoređeno na jednakim rastojanjima, onda između njih ima ukupno 11 razmaka. Ako je Joca trčao od prve do četvrte zastavice (tri razmaka) za 12 sekundi, znači da on jedan razmak prelazi za $12 : 3 = 4$ sekunde. Sad je jasno da će Joca stići do 12. zastavice kad savlada 11 rastojanja. Za svako od njih potrebne su mu po 4 sekunde. Dakle $11 \cdot 4 = 44$ (sekunde).

E15. E) 5 i 19.



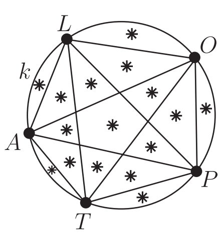
Slikom smo prikazali da se manji broj b u većem broju a sadrži 3 puta i da postoji i ostatak 4. Kako je zbir ta dva broja 24, slika nam pokazuje da se broj 24 sastoji iz 4 jednaka dela (svaki je b) i ostatka (4). To znači da možemo pisati jednačinu: $4b + 4 = 24$, odakle je $b = 5$, a dalje se lako izračunava da je $a = 19$.

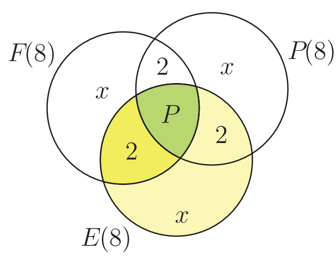
E16. A) 3. Rastavljanjem broja 2013 na proste činioce dobijamo $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ što znači da postoje 3 prosta činioca broja 2013.

E17. D) 160 ari. Ako njivu prikažemo u obliku pravougaonika, i onda odgovarajuće delove (tj. polovinu i osminu), videćemo da površina od 60 ari predstavlja 3/8 površine njive, odakle sledi da 1/8 njive ima 20 ari, cela njiva $8 \cdot 20$ ari $= 160$ ari.

		20 ari	20 ari
			20 ari

E18. D) 16. Potrebno je nacrtati sliku, svaki deo kruga označiti (na primer zvezdicom) i pažljivo brojati!





E19. D) 3. Veliku pomoć, kao i obično, predstavlja nam upotreba Venovih dijagrama. Na slici sa P smo označili broj učenika koji uče sva tri jezika, tj. koji se nalaze u preseku sva tri skupa. Prema zadatim uslovima svaki od delova na slici označen je slovom ili brojem. Posmatrajmo samo skup učenika koji uče engleski. Oni se nalaze unutar obojenog skupa.

Sa slike vidimo na koji su se način oni rasporedili, u okviru skupa učenika koji uče engleski jezik. Van skupa E(8), t.j. van skupa svih učenika koji uče engleski, na slici vidimo da još x učenika uče samo francuski, 2 učenika koji uče francuski i ruski, i još x učenika koji uče samo ruski. Svi oni čine ukupan broj od 12 učenika. Ovaj deo naših zaključaka možemo zapisati u obliku jednačine: $8+x+2+x=12$. Rešavanjem ove jednačine dobijamo $x=1$, što znači da samo po jedan od tri jezika uči samo po jedan učenik. Ako se sada vratimo na skup učenika koji uče engleski, vidimo da sada važi jednačina: $1+2+P+2=8$, odakle je $P=3$.

Tako smo došli do konačnog odgovora: sva tri jezika uče 3 učenika.

E20. E) 4. To su brojevi 2, 20, 110 i 200

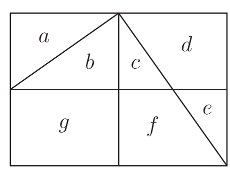
E21. E) 26 učenika, 15 klupa. Kad 11 učenika koji su u prvom rasporedu sedenja ostali bez mesta, dobiju svoje mesto u drugom rasporedu, to znači da su njih 11 popunili mesta u 11 klupa (t.j. sada u 11 klupa sede po 2 učenika), ali u tekstu piše i da su 2 klupe ostale prazne. Šta to znači? To znači da su 2 učenika iz tih klupa (iz prvog rasporeda sedenja) napustili te dve klupe i otišli da popune mesta kod svojih drugara. Tako su još dve klupe popunjene, tj. i u njima sede parovi učenika. Na taj način, imamo $11+2=13$ popunjenih klupa i osim toga još 2 prazne klupe, što čini ukupno 15 klupa u toj učionici. Lako je izračunati da u 13 popunjenih klupa sedi ukupno $13\cdot 2=26$ učenika!

E22. D) 4. Na slici ima ukupno 10 malih kvadrata. Petinu od svih njih čine 2 mala kvadrata, pa tri petine od svih malih kvadrata iznosi 6. Da bi bilo osenčeno ukupno 6 kvadrata, treba osenčiti još 4 kvadrata.

E23. D) 6. Kada od druge vrste oduzmemo prvu, dobijamo $♥-*=2$, odnosno $♥=*+2$. Sada prva kolona daje jednačinu: $*+*+*+*+*+2=12$ pa je $5\cdot *=10$, odnosno $*=2$. Onda je $♥=*+2=4$. Zatim redom otkrivamo ostale cifre: $\varnothing$ – cifra 3, ♦ – cifra 5 i konačno Δ – cifra 6. Kad sve znakove zamenimo ciframa, popunjena tabela izgleda ovako.

2	2	2	3	3	12
2	2	3	3	4	14
2	5	2	3	4	16
2	3	4	6	3	18
4	2	5	3	6	20
12	14	16	18	20	

E24. D) Joca. Brojanje, kao i obično, treba vršiti pažljivo, po unapred utvrđenom planu (na primer: od manjih (osnovnih) figura – kao što su trouglovi koje možemo označiti slovima a, b, c, e, a zatim ka figurama koje se sastoje, najpre od dva trougla: figure bc, cf, de, a zatim posmatramo pravougaonike: g, ab, cd, ef, abg, efg, $abcd$, $cdef$, $abcdefg$. Tako smo izbrojali 7 trouglova i 9 pravougaonika, slika desno.



E25. A) jedno. Kralj prvo treba da obeleži ćupove brojevima od 1 do 5 (da bi mogao tačno da zna iz kog ćupa uzima zlatnike).

Zatim, dolazi glavni deo posla. Kralj treba iz prvog ćupa da uzme 1 zlatnik, iz drugog 2 zlatnika, iz trećeg 3 zlatnika iz četvrtog 4 zlatnika i iz petog ćupa 5 zlatnika To čini ukupno 15 zlatnika. Sve te zlatnike stavi na jedan tas terazija i izmeri (tj. na drugi tas stavi onoliko tegova koliko je potrebno da terazije budu u ravnoteži).

Kada bi svi zlatnici imali po 20 grama, na drugom tasu terazija bili bi tegovi, ukupno 300 grama. Međutim, zna se da u jednom ćupu zlatnici imaju po 21 gram. To znači da će terazije pokazivati da na desnom tasu ima više od 300 grama. Broj koji pokazuje koliko grama ima više (preko 300 grama) predstavlja redni broj ćupa iz kojeg je kralj uzeo zlatnike za merenje.

(*Na primer*: Ako bi na desnom tasu bilo 302 grama, značilo bi da je kralj uzeo 2 zlatnika iz ćupa broj 2, tj. da u ćupu broj 2 svaki zlatnik ima po po 21 gram, itd.)

F) 6. razred

F1. E) $(2+0)\cdot(0-7)=-14$. Svi ostali brojevi su veći, i to $\geqslant 0$.

F2. E) 11, jer je $1-5(-2)=1+10=11$.

F3. E) 16, jer 8 cm predstavlja tačno polovinu dužine celog repa.

F4. B) 0, jer je $a+0=a-0=a$, za svako a.

F5. A) -98, jer iz $x:(-7)=14$, sledi $x=(-7)\cdot 14=-98$.

F6. B) đevrek. Lako se proverava!

F7. D) 1. Iz jednačine $-x+3=10$ dobijamo $-x=7$ (nepoznati sabirak), pa je $x=-7$

F8. $3-n$. Izvrši proveru na nekoliko primera! Pazi: $-n$ je pozitivan broj!

F9. B) 2. Netačna su rešenja zadataka označenih sa a) i b). Treba da bude:

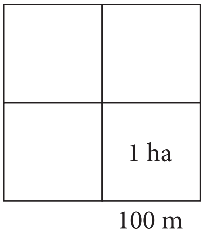
a) $8+12:4-4=8+3-4=7$

b) $0,88+0,2=1,08$

F10. D) 4015. Nisu manji – znači veći ili jednaki, a nisu veći – znači manji ili jednaki. Dakle, levo od 0 ima 2007 celih brojeva, desno takođe 2007 brojeva, a još ne treba zaboraviti broj 0. To znači da celih brojeva u ovom slučaju ima $2007+2007+1=4015$.

F11. D) $x=4$. Rešenje:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot x=3 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot x=3 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot x=3 \Rightarrow x=4.$$



F12. D) 200 m. Kvadrat čija je površina 1 hektar ima stranicu dužine 100 metara. Kvadrat o kome je reč sastoji se iz 4 manja kvadrata (svaki površine 1 hektar) kao na slici desno. Dakle, stranica velikog kvadrata duga je 200 m.

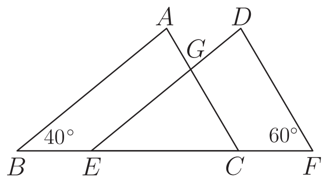
F13. C) 250. U ukupnom zbiru, koji iznosi 900, sadržana su 3 jednaka dela (jednaka trećoj duži, označimo je sa x) i još $3 \cdot 50 = 150$, pa je $3x + 150 = 900 \Rightarrow x = 250$.

F14. E) 21. Prebrojavanja figura obavezno treba vršiti po planu (na primer, od najmanjih prema sve većim i većim pravougaonicima, slično rešenju zadatka E24). Ne zaboravite: i kvadrati su pravougaonici!

F15. D) 6. Da bi na slici desno postojao logičan raspored figura, u trećem vodoravnom i trećem uspravnom redu nedostaje "čovečuljak" sa četvrtastim licem, sa oblim šeširom i sa "minđušama". Takav lik obeležen je, među ponuđenim likovima, brojem 6.

F16. C) $45°$, $45°$, $90°$. Najjednostavnije rečeno, radi se o trouglu koji predstavlja polovinu kvadrata. Nacrtajte sliku! Kako je, prema uslovu zadatka, $h_a = \frac{a}{2}$, na slici ćemo uočiti dva mala (podudarna) jednakokraka pravougla trougla, pa dalje lako dolazimo do tačnog odgovora.

F17. D) $80°$. S obzirom da su trouglovi podudarni, svi uglovi jednog trougla jednaki su uglovima drugog trougla, pa zato u trouglu ABC ugao kod temena C iznosi $60°$, a ugao kod temena E iznosi $40°$. Sada nam ostaje da u trouglu ECG odredimo još treći ugao, ako dva ugla već znamo, tj. $180° - (40° + 60°) = 80°$.



F18. B) 6. Označimo najpre sa a broj u srednjoj koloni i poslednjoj vrsti:

	3	24
	15	
$*$		12

	3	24
	15	
$*$	a	12

Pošto se, prema uslovima zadatka, radi o magičnom kvadratu, zbirovi brojeva u poslednjoj vrsti i srednjoj koloni treba da budu jednaki, a pri tome imaju zajednički sabirak a, možemo pisati:

$$3 + 15 + a = * + a + 12.$$

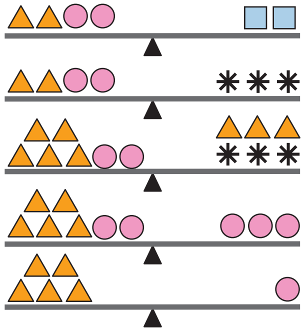
Da bi leva i desna strana bile jednake, mora biti

$$18 = * + 12, \quad \text{tj.} \quad * = 6.$$

F19. D) $502 \cdot (-2)$. Među prvih 2008 brojeva imamo 1004 parna i 1004 neparna broja. U ovom zadatku učestvuju samo neparni brojevi, među kojima su znakovi $+$ i $-$ raspoređeni tako da svaki par, idući redom, vredi -2. Od 1004 neparna broja formirana su 502 para od kojih svaki vredi -2, pa je konačno rešenje $502 \cdot (-2)$.

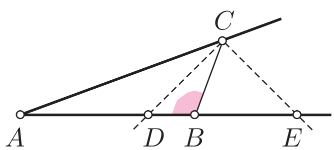
F20. D) 20. Označimo drugi broj sa x. Tada je prvi broj $7x$. Razlika između prvog i drugog je $6x$ i iznosi 150. Odavde je $6x = 150$, tj. $x = 25$. Prvi broj je $7 \cdot 25 = 175$, pa je Vladin srećni broj 17525. Zbir cifara Vladinog srećnog broja je $1 + 7 + 5 + 2 + 5 = 20$.

F21. A) 5. Možemo razmišljati. na primer, ovako:

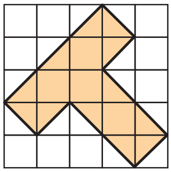


F22. D) 19. Prema uslovu, 5 devojčica čine ne više od $\frac{3}{11}$ ukupnog broja članova sekcije, pa tada $\frac{1}{11}$ ukupnog broja članova nije manja od $\frac{5}{3}$, što znači da $\frac{11}{11}$ ukupnog broja članova (cela sekcija) nije manje od $\frac{5}{3} \cdot 11 = \frac{55}{3} = 18,333\ldots$ Pošto taj broj mora biti celi, to je najmanji mogući broj članova sekcije 19. (Direktno: pošto 5 devojčica čini ne više od $\frac{3}{11}$ broja članova sekcije, to cela sekcija ima članova ne manje od $5 : \frac{3}{11} = 18,333\ldots$, a najmanji celi broj koji zadovoljava taj uslov je 19.)

F23. E) 110°. Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod jednog temena u svakom trouglu, grade prav ugao. Kako, osim toga, prema našim uslovima, te dve simetrale sa pravom AB grade jednake uglove, znači da je trougao DEC jednakokraki pravougli, pa je $\sphericalangle EDC = 45^\circ$ i, kao spoljašnji ugao trougla ADC, jednak zbiru dva unutrašnja njemu nesusedna ugla. Kako je $\sphericalangle CAB = 20^\circ$, to je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = 25^\circ$, pa je $\sphericalangle ACB = 50^\circ$ i konačno $\sphericalangle ABC = 110^\circ$.



F24. A) 2,5 cm^2. Veliki kvadrat u kojem je smešteno slovo "T", prema uslovu zadatka, ima površinu $25 \cdot 0,25 = 6,25$ (cm^2). Površina slova "T" sastoji se iz "kvadratića" i "trouglića". Zadatak ćemo tačno rešiti ako ih pravilno prebrojimo i ako uzmemo u obzir da se od svaka 2 trouglića može sastaviti jedan kvadratić. Kvadratića ima 4, a od 12 trouglića može se formirati još 6 kvadratića, tako da možemo smatrati da se slovo "T" sastoji od ukupno 10 kvadratića. Tražena površina je, dakle, 20 trouglića = 10 kvadratića, što iznosi $10 \cdot 0,25 = 2,5$ (cm^2).



F25. B) 287 g. pre n. e. $212 + 75 = 287$.

G) 6. razred

G1. E) 126, jep je $60 : \frac{1}{2} = 60 \cdot 2 = 120$.

G2. E) 620, jep je $25 : \frac{1}{25} - 25 \cdot \frac{1}{5} = 25 \cdot 25 - 5 = 625 - 5 = 620$.

G3. E) 3000, jep je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 100 = 3000$ (Radi se o brojevima dva, tri, pet i sto.)

G4. A) 8. Popunjena "šestica" izgleda ovako:

2	•	3	=	6
+				
5	+	4	=	9
=				
7	+	1	=	8

G5. D).

Slika (A)): Naspram većeg ugla nalazi se manja stranica.

Slika (B)): Naspram jednakih stranica nalaze se različiti uglovi.

Slika (C)): Nije ispunjena nejednakost trougla (odnos stranica).

Slika (D)) Ispunjeni uslovi o dužinama stranica.

Slika (E)): Ako bi naspram jednakih stranica bili jednaki uglovi, onda bi i treći ugao bio od 60°, a onda bi to bio jedakostranični trougao.

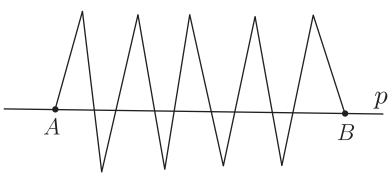
G6. C) 50, jer 4 jednaka dela traženog broja vrede 40, što znači da jedan deo vredi 10, a celi broj 50.

G7. C) 1, jer je $|x - y - z| = |-3 - 2 - (-4)| = |-3 - 2 + 4| = |-1| = 1$

G8. E) 63, jep je $3 \cdot 4 = 12$, $5 \cdot 5 = 25$, $7 \cdot 6 = 42$, $9 \cdot 7 = 63$.

G9. E) -1. Kako Acin zamišljeni broj treba da ispuni uslov $x \cdot x + \frac{x}{x} = 2$, $x < 0$ i kako je $x \neq 0$, zaključujemo da je $\frac{x}{x} = 1$, pa zbog toga mora biti $x \cdot x = 1$, $x < 0$, a to je u ovom slučaju moguće samo ako je $x = -1$.

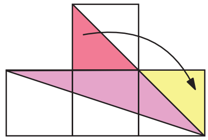
G10. A) 71.



Duži: $2 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + (10 \cdot 9) : 2 = 71$ Na samoj izlomljenoj liniji ima $2 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 26$ duži, a na delu prave p određenom tačkama A i B ima $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ duži, pa je to ukupno 71 duž.

G11. C) 298. Prema uslovu, tražimo broj x takav da važi $2012 = 6 \cdot x + 224$. Odavde je $6 \cdot x = 2012 - 224$, $6 \cdot x = 1788$, $x = 298$. Dakle, $2012 = 298 \cdot 6 + 224$.

G12. B) 3, jer je $5x + 18 = 33 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$.



G13. E) $\frac{3}{8}$. Ako gornji osenčeni trougao premestimo na novo mesto (kako pokazuje strelica), obojena površina ostala je ista i iznosi $\frac{1}{2}$ od $\frac{3}{4}$ figure, tj. $\frac{3}{8}$ figure.

G14. B) 2. Ako Murka isprazni posudu za 6 minuta, to znači da ona za 1 minut pojede $\frac{1}{6}$ hrane iz posude. Na sličan način zaključujemo da Vicko za 1 minut pojede $\frac{2}{6}$ hrane iz posude. Šta će biti sa hranom iz posude, posle 1 minut, ako oni zajedno jedu? Jasno je da će za 1 minut biti pojedeno $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ hrane iz posude. To konačno znači da će ukupna količina hrane iz posude nestati posle 2 minuta.

G15. D). Velja je stigao 15 minuta pre Sime. Izračunaćemo, najpre, koliko je vremena potrebno Simi da stigne na cilj, a da se usput nigde ne odmara. Pošto on prelazi 100 metara svakog minuta, njemu bi bilo potrebno:

$$6000 \text{ m} : 100 \text{ m/min} = 60 \text{ min}.$$

Kako se on usput još i odmarao 30 minuta, znači da je na putu proveo ukupno 90 minuta.

Velja je sve vreme hodao, što znači da mu je do cilja bilo potrebno

$$6000 \text{ m} : 80 \text{ m/min} = 75 \text{ min}.$$

Tako dolazimo do odgovora da je Velja stigao ranije, i to čitavih 15 minuta.

G16. E) 50, jer se u svakom polju koje se nalazi iznad dva polja iz prethodnog reda nalazi broj koji predstavlja zbir brojeva koji se nalaze u ta dva polja ispod.

G17. B). Isti je broj belih i broj crnih kockica. Isti je odgovor i za svaku drugu kocku dimenzije $(n \times n \times n)$, gde je n parni broj.

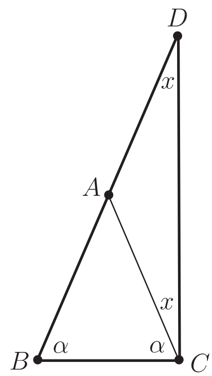
G18. D) 30. Zadatak se može rešiti unazad ("skraja"): U korpi nije ostala nijedna šljiva kad je princeza trećem momku dala polovinu svih šljiva koje su se tada nalazile u korpi i još tri šljive. To znači da te tri šljive predstavljaju polovinu, tj. da je posle drugog momka u korpi ostalo ukupno 6 šljiva. Tih 6 šljiva je ostalo u korpi kada je drugi momak dobio polovinu onog dela šljiva koje su ostale posle prvog momka i još 1 šljivu. Druga polovina je, dakle, umanjena za 1 šljivu. To znači da je polovina iznosila 7, a da je u korpi posle prvog momka bilo 14 šljiva. Taj broj (14) šljiva treba sada najpre uvećati za 1, da bi se dobila polovina (za prvog momka). Polovina je 15, a ukupan broj šljiva u korpi je bio 30.

G19. C) Najmanje 2, najviše 23. Kako plavih klikera ima šest puta više nego crvenih, znači da plavi i crveni klikeri zajedno predstavljaju 7 jednakih delova (njihov ukupan broj je deljiv sa 7), a kako broj 30 nije deljiv sa 7 znači da žuti klikeri predstavljaju dopunu do 30 nekog od brojeva deljivih sa 7 (a koji su manji od 30). Najmanji takav broj je 2 (jer je $4 \cdot 7 = 28$), a najveći 23 (jer je $30 - 23 = 7$), itd.

Konačno: najmanje 2 (tada je crvenih 4, a plavih 24), najviše 23 (tada je crvenih 1, a plavih 6).

G20. E) 9. Traženi broj je jedanaestocifreni broj 11 111 111 100. Naime, da bi broj bio deljiv sa 36, on treba da bude istovremeno deljiv sa 4 i sa 9. Da bi bio deljiv sa 9 zbir njegovih cifara treba da bude deljiv sa 9, pa je ovde jasno, zbog uslova zadatka, da u zapisu toga broja treba da bude 9 jedinica. Da bi broj bio deljiv sa 4 njegov dvocifreni završetak treba da bude deljiv sa 4. Ovoga puta, zbog uslova zadatka (u pitanju je najmanji takav broj), dvocifreni završetak čine dve nule. Dakle, traženi broj je 11 111 111 100.

G21. E) 5. Iskoristićemo prva tri merenja da uredimo po težini tri paketa (upoređujući ih redom, po parovima, na primer 1 i 2, 2 i 3, 1 i 3). Ostao nam je neraspoređen četvrti paket. Zato postupamo ovako: na jedan tas stavimo četvrti paket, a na drugi tas onaj od paketa koji je već raspoređen kao srednji (u prethodna 3 merenja). Šta može biti rezultat tog merenja? Može se pokazati da je četvrti paket ili lakši ili teži od srednjeg. U sledećem, petom merenju, četvrti paket upoređujemo sa najlakšim ili najtežim paketom, u zavisnosti od toga šta je pokazalo četvrto merenje. Dakle, najmanji broj merenja je 5.



G22. C) 90°. Prema uslovima zadatka trouglovi ABC i ACD su jednakokraki, pa uglove označimo kao na slici. Zbir uglova trougla BCD je 180°, pa odatle sledi da je: $2x + 2\alpha = 180^\circ$, odakle je: $\alpha + x = 90^\circ = \sphericalangle BCD$.

G23. B) 3 dana. Posmatrajmo najpre deo posla koji Aca može da uradi sam za 1 dan. Jasno je da je to $\frac{1}{9}$ celog posla. Na isti način zaključujemo da Branko može sam za 1 dan da uradi $\frac{1}{6}$ posla. Kad se udruže na tom poslu, onda njih dvojica mogu za 1 dan da urade $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2+3}{18} = \frac{5}{18}$ posla. Tako su oni radili nekoliko dana, a onda je Aca napustio posao. To je bilo baš u trenutku kada je do kraja ostalo onoliko posla koliko Branko može da uradi sam za 1 dan. Kao što znamo, Branko može da uradi sam za 1 dan $\frac{1}{6}$ posla. To znači da su njih dvojica radila zajedno sve dok nije bilo završeno $\frac{5}{6}$ posla. A to, dalje, znači da mi JOŠ treba da odredimo za koje vreme su njih dvojica, radeći zajedno, uradila $\frac{5}{6}$ posla.

Ako broj dana koje su njih dvojica provela zajedno na poslu označimo sa x, onda je $x \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, odakle se, rešavanjem jednačine, dobija $x = 3$, što znači da su Aca i Branko 3 dana radili zajedno.

G24. D) 3. Posmatrajmo najpre datu jednačinu kao zahtev da proizvod dva izraza bude jednak 0. Kao što znamo, proizvod je jednak 0, ako je bar jedan od činilaca jednak 0. Kad to zapišemo, u našem slučaju imamo:

$$|x+2| - 2 = 0 \quad \text{ili} \quad |x-2| - 2 = 0,$$

pa se zadatak sveo na rešavanje dve jednačine, znatno jednostavnije nego što je polazna jednačina.

Dalje je: $|x+2| = 2$ ili $|x-2| = 2$, pa konačno, imamo:

$$\begin{array}{c} x+2=2 \text{ ili } x+2=-2 \\ x=0 \text{ ili } x=-4 \end{array} \qquad \text{ili} \qquad \begin{array}{c} x-2=2 \text{ ili } x-2=-2 \\ x=4 \text{ ili } x=0 \end{array}$$

Dakle, data jednačina ima tri rešenja: $x \in \{-4, 0, 4\}$.

G25. A) Uvek pobeđuje drugi. U ovoj igri uvek pobeđuje drugi igrač, jer zbir svih brojeva koji ostaju na tabli (posle bilo kog poteza, bilo kog igrača) uvek ostaje paran, tj. nikad neće moći da bude 1, pa prvi igrač nikad neće moći da pobedi!

Školska takmičenja

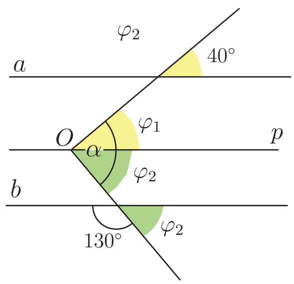
H) 5. razred

H1. Kako je $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, zaključujemo da postoje četiri nepodudarna pravougaonika sa celobrojnim stranicama: $a_1 = 1$ cm, $b_1 = 24$ cm, zatim $a_2 = 2$ cm, $b_2 = 12$ cm, pa $a_3 = 3$ cm, $b_3 = 8$ cm i $a_4 = 4$ cm, $b_4 = 6$ cm.

H2. Iz datih uslova dobijamo: $(\alpha + \gamma) - (\alpha + \beta) = 180° - 90°$, odnosno: $\alpha + \gamma - \alpha - \beta = 90°$, pa je $\gamma - \beta = 90°$. Sledi da je $\alpha = 30°$. Onda je $\beta = 60°$ i $\gamma = 150°$. Dakle, $\alpha + \beta + \gamma = 30° + 60° + 150° = 240°$.

H3. Ako pri deljenju broja 73 sa k dobijamo ostatak 1, to znači da je broj 72 deljiv sa k. Slično zaključimo da su bojevi 90 i 108 takođe deljivi sa k. Dakle, k je NZD za brojeve 72, 90 i 108, a to je $k = D(72,\ 90,\ 108) = 18$.

H4. Kroz teme O ugla α postavimo pravu p paralelnu sa a i b. Tada je, prema slici, $\alpha = \varphi_1 + \varphi_2$. Pritom je $\varphi_1 = 40°$ i $\varphi_2 = 180° - 130° = 50°$ (uglovi s paralelnim kracima). Prema tome: $\alpha = 40° + 50° = 90°$.



H5. Petar bi dobio 60 bodova da je tačno rešio svih 20 zadataka. Izgubio je 24 boda (to je $60 - 36$), za svaki zadatak koji nije rešio po 4 boda. Znači, nije rešio 6 zadataka, a tačno je uradio 14.

I) 5. razred

I1. a) Kako je $5050050 : 50 - 45 = 101001 - 45 = 100956$, to je traženi broj: $100956 - 12 = 100944$.

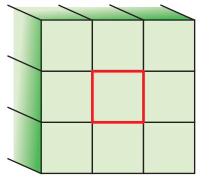
b) $36 \cdot 15 = 540$ i $540 : 20 = 27$, pa je $36 \cdot 15 = 27 \cdot 20$. Sledi da je $36 \cdot 15$ od broja 20 veće 27 puta.

I2. Prema slici, obojeni deo je unija dva dela. Prvi, gornji je $A \setminus (B \cup C)$, a drugi je $B \setminus A$. Dakle, traženi zapis je $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus A)$.

I3. Izrazimo dati ugao u stepenima: $\alpha = 2013' = 33°33'$. Traženi uglovi su: a) $90° - 33°33' = 56°27'$ i b) $180° - 33°33' = 146°27'$.

I4. Duži ima 10: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE i DE. Trouglova ima 9: ABD, ABE, ACD, ACE, BCD, BCE, ADE, BDE i CDE.

I5. Prema slici vidimo da su sve male kocke, koje sadrže deo ivice velike kocke, obojene sa 2 ili sa 3 strane. Jednu obojenu stranu mogu imati samo one male kocke koje ne sadrže delove ivice velike, kao što je na slici označeno crvenim ivicama. Ovakvih kockica je ukupno 6, pa postoji na svakoj strani po jedna takva. To je moguće samo ako je ivica velike kocke 3 cm, kao na slici. Sada znamo odgovore na postavljena pitanja.



a) Površina velike kocke je $P = 6 \cdot 3^2 = 54\ \text{cm}^2$.

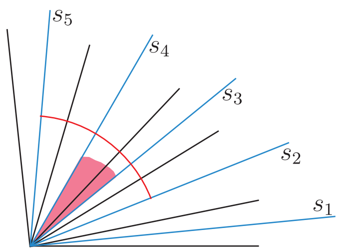
b) Samo jedna, centralna kockica, nema obojenih strana.

J) 6. razred

J1. Izračunamo $x = -6$, pa je $y = 5$. Onda je $|x-1| - |y-2| = |-6-1| - |5-2| = 7 - 3 = 4$.

J2. Broj je deljiv sa 15, ako je deljiv sa 3 i sa 5. Zadati broj je deljiv sa 5, ako je $b = 0$ ili $b = 5$. Biće deljiv i sa 3 ako mu je zbir cifara deljiv sa 3. Za $b = 0$ zbir cifara je: $2+0+1+a+3+0 = 6+a$. Dakle, $a \in \{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$ za $b = 0$. Ako je $b = 5$, onda imamo: $2+0+1+a+3+5 = 11+a$, pa je $a \in \{1,\ 4,\ 7\}$. Ima 6 rešenja za par $(a,\ b)$. To su: $(3,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(9,\ 0)$, $(1,\ 5)$, $(4,\ 5)$ i $(7,\ 5)$. Par $(0,\ 0)$ nije rešenje, jer po uslovu $a \neq b$.

J3. Na slici vidimo da je $\sphericalangle(s_3, s_4) = \dfrac{\alpha_3}{2} + \dfrac{\alpha_4}{2} = \dfrac{\alpha_3+\alpha_4}{2} = \dfrac{40^\circ}{2} = 20^\circ$. Slično nalazimo: $\sphericalangle(s_2, s_5) = \dfrac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 + \alpha_4 + \dfrac{\alpha_5}{2} = \left(\dfrac{\alpha_2}{2} + \dfrac{\alpha_3}{2}\right) + \left(\dfrac{\alpha_3}{2} + \dfrac{\alpha_4}{2}\right) + \left(\dfrac{\alpha_4}{2} + \dfrac{\alpha_5}{2}\right) = 20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ$.



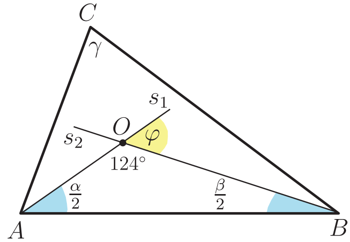
J4. Rasporedimo elemente skupa A od najmanjeg do najvećeg: $A = \left\{-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{7}{8}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right\}$. Zbir prva četiri je najmanji, a zbir poslednja četiri najveći.

a) $-\dfrac{4}{3} + \left(-\dfrac{7}{8}\right) + \left(-\dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{307}{120}$; b) $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{33}{20}$.

J5. Budući da je $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$, u skupu celih brojeva imamo kombinacije: $2013 = 1 \cdot 2013 = -1 \cdot (-2013) = 3 \cdot 671 = -3 \cdot (-671) = 11 \cdot 183 = -11 \cdot (-183) = 33 \cdot 61 = -33 \cdot (-61)$, a to je 8 kombinacija.

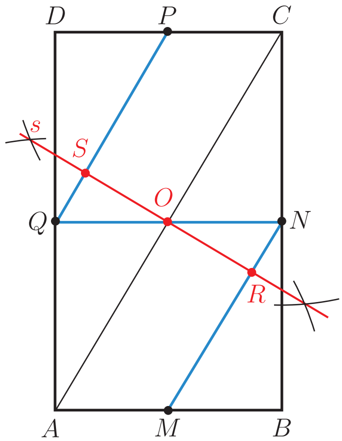
K) 6. razred

K1. Negativno rešenje jednačine je $x = -2008$. Dati izraz jednak je $-4x$, pa je njegova vrednost: $-4 \cdot (-2008) = 8032$.



K2. Simetrale s_1 i s_2 uglova α i β seku se u tački O. U trouglu ABO ugao $\varphi = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$ predstavlja spoljašnji ugao, pa je $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, odnosno $56^\circ = \frac{\alpha + \beta}{2}$, Sledi da je $\alpha + \beta = 112^\circ$, pa je traženi ugao: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 68^\circ$.

K3. Na osnovu nejednakosti trougla je: $7-5 < x < 7+5$, odakle je $2 < x < 12$. Dakle, $x \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Ako je $x > c > b$, t.j. ako je $x \in \{8, 9, 10, 11\}$, onda je $\beta < \gamma < \alpha$. Ako je $x = 5$ cm, onda je $a = b < c$, pa je $\alpha = \beta < \gamma$. Ako je $x = 7$ cm, onda je $a = c > b$, pa je $\alpha = \gamma > \beta$. Ako je $x = 6$ cm, onda je $b < x < c$, pa je $\beta < \alpha < \gamma$. Konačno, ako je $x = 3$ cm ili $x = 4$ cm, onda je $x < b < c$, pa je $\alpha < \beta < \gamma$.



K4. Tražimo razlomak $-\frac{n}{4}$, $n \in N$, takav da je $-\frac{6}{23} < -\frac{n}{4} < -\frac{5}{23}$. Dovedimo razlomke na NZS i dobijemo $-\frac{24}{92} < -\frac{23n}{92} < -\frac{20}{92}$, odakle sledi da je $-24 < -23n < -20$. Ovo je moguće samo za $n = 1$. Traženi razlomak je $-\frac{1}{4}$.

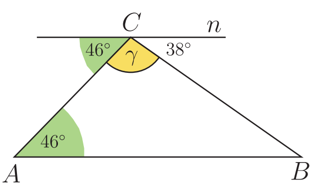
K5. Simetrala s dijagonale AC nacrtanog pravougaonika $ABCD$ seče izlomljenu liniju $MNQP$ u traženim tačkama R, O i S.

Opštinska takmičenja

L) 5. razred

L1. Opisani skupovi slova su: $M = \{\boldsymbol{m, a, t, e, i, k}\}$ i $T = \{\boldsymbol{t, a, k, m, i}$, **č**, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{nj}\}$, pa je $M \cap T = \{\boldsymbol{m, a, t, e, i, k}\} = M$ (jer je $M \subset T$). Skup od 6 elemenata ima $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ dvočlanih podskupova.

L2. Kako je $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, dovođenjem imenilaca na NSZ, data dvostruka nejednakost dobija oblik: $\frac{138}{2001} < \frac{5x}{2001} < \frac{261}{2001}$. Odavde dobijamo uslov: $138 < 5x < 261$. Sledi da je $5x \in \{140,\ 145,\ 150, \ldots, 260\}$. Dakle, $x \in \{28,\ 29,\ 30, \ldots, 52\}$. Prirodni broj x može uzimati 25 različitih vrednosti.



L3. Zbir $2p+3q$ je parni broj, pa mora biti $q = 2$, jer je 2 jedini paran prosti broj. Onda je $2p + 6 = 100$, odnosno $2p = 94$, pa je $p = 47$. Rešenja su: $p = 47$ i $q = 2$.

L4. Na slici vidimo dva ugla označena zelenom bojom, koji su jednaki kao uglovi sa paralelnim kracima. Traženi ugao je: $\sphericalangle ACB = \gamma = 180^\circ - 38^\circ - 46^\circ = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$.

L5. Jelena je platila trećinu od ukupne količine čokolade, što znači da je ukupna vrednost čokolada 240 dinara. Dakle, jedna čokolada staje 30 dinara. Marija je uložila $3 \cdot 30 = 90$ dinara, a pojela je čokolade za 80 dinara. Njoj pripada 10 dinara, a Petru 70 dinara, od 80 dinara koliko je platila Jelena.

LJ) 5. razred

LJ1. Kako je $4 \cdot 2010 = 8040$, a $5 \cdot 2010 - 10050$, sledi da je najmanji petocifreni broj deljiv sa 2010 upravo 10050. Slično, iz $49 \cdot 2010 = 98490$ i $50 \cdot 2010 = 100500$ zaključujemo da je 98490 najveći petocifreni broj deljiv sa 2010.

LJ2. Unakrsnim množenjem $\dfrac{61}{2010} \quad \dfrac{5}{149}$ dobijamo $9089 < 10050$, pa je $\dfrac{61}{2010} < \dfrac{5}{149}$. (Mogli smo brojioce razlomaka dovesti na NZS, $\dfrac{61}{2010} = \dfrac{305}{10050}$ i $\dfrac{5}{149} = \dfrac{305}{9089}$, pa onda izvršiti poređenje datih razlomaka.)

LJ3. Dopisivanjem cifre x dobijamo broj $\overline{x2009x}$. Da bude deljiv sa 12, on mora biti deljiv sa 4 i sa 3. Sa 4 je deljiv ako mu je dvocifreni završetak $\overline{9x}$ ili 92 ili 96, t.j. ako je $x = 2$ ili $x = 6$. Tada imamo dve mogućnosti: 220092 ili 620096. Drugi broj nije deljiv sa 3, a prvi jeste, jer je $2+2+0+0+9+2 = 15$ deljivo sa 3. Traženi broj je 220092.

LJ4. Skupovi $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_9$ sadrže prvih 45 prirodnih brojeva (jer je $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$). Dakle, $S_{10} = \{46, 47, 48, \ldots, 54, 55\}$. Traženi zbir je $46 + 47 + 48 + \cdots + 54 + 55 = 505$.

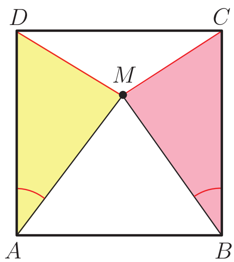
LJ5. U 8 časova ugao između kazaljki 120°. Za 10 minuta velika kazaljka uveća ovaj ugao za 60°. Mala kazaljka je 12 puta sporija od velike i za 10 minuta pomeri se za 5° i za toliko smanji ugao. Dakle, u 8 časova i 10 minuta ugao između kazaljki biće $120^\circ + 60^\circ - 5^\circ = 175^\circ$.

M) 6. razred

M1. Dati izraz imaće vrednost veću od 1 ako je $0 < -5x + 10 < 20$, pa celi broj x može imati vrednosti: -1, 0, 1.

M2. a) Odgovarajući unutrašnji ugao je $180^\circ - 121^\circ = 59^\circ$, dakle, oštar je. Onda on može biti na osnovici ili kod vrha. Tada imamo dva rešenja: 59°, 59° i 62°, ili 59°, $60^\circ 30'$ i $60^\circ 30'$.

b) Odgovarajući unutrašnji ugao je tup: $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, pa on ne može biti na osnovici (ne može trougao imati dva tupa ugla). Tada su unutrašnji uglovi 115°, $32^\circ 30'$ i $32^\circ 30'$.



M3. Trougao CDM je jednakokraki, jer je $CM = DM$. Onda je $\sphericalangle MCD = \sphericalangle CDM$, pa su jednaki i njihovi komplementi: $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ADM$. Sada trouglovi BCM i ADM imaju jednake po dve stranice: $BC = AD$ (stranice kvadrata) i $CM = DM$ (po uslovu), kao i zahvaćeni ugao. Po stavu SUS trouglovi BCM i ADM su podudarni, pa je $\sphericalangle CBM = \sphericalangle DAM$.

M4. Ako je lopta puštena sa visine x metara, ona je u prvom odskoku dostigla visinu od $\frac{2}{5}x$ centimetara. U drugom odskoku dostigla je $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}x\right)$ centimetara, a u trećem $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$ centimetara. Onda je prema uslovu: $\frac{8}{125}x = 32$. Odavde je $x = 500$ centimetara. Visina prvog odskoka je $\frac{2}{5}\cdot 500$ cm $= 200$ cm, a drugog $\frac{2}{5}\cdot 200$ cm $= 80$ cm. U momentu kada je lopta četvrti put dodirnula zemlju, ona je prešla put dužine: $500 + 2\cdot 200 + 2\cdot 80 + 2\cdot 32$, odnosno 1124 centimetara.

M5. Rastavljanjem na proste činioce dobijamo $2002 = 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 1\cdot 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$. Jedina mogućnost za jednocifreni broj je broj 1. Imamo sledeće mogućnosti: $2002 = 1\cdot 14\cdot 143 = 1\cdot 11\cdot 182 = 1\cdot 13\cdot 154$.

N) 6. razred

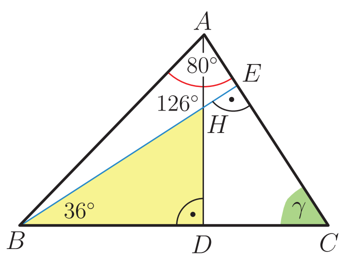
N1. a) Da bi broj bio deljiv sa 5, poslednja cifra mora biti 0 ili 5 (2 mogućnosti). Cifre se mogu ponavljati, pa za prvu cifru imamo 9 mogućnosti (0 ne može biti prva cifra), za drugu i treću po 10 mogućnosti. Ukupno ima $9\cdot 10\cdot 10\cdot 2 = 1800$ traženih četvorocifrenih brojeva.

b) Ako je poslednja cifra 0, onda imamo $9\cdot 8\cdot 7\cdot 1 = 504$ takvih brojeva. Ako je poslednja cifra 5, takvih brojeva je $8\cdot 8\cdot 7\cdot 1 = 448$. Prema tome, ima ukupno 952 četvorocifrenih brojeva koji su deljivi sa 5 i imaju sve cifre različite.

N2. Dati trougao poznat je kao polovina jednakostraničnog trougla. Njegova hipotenuza dva puta je duža od manje katete. U datom slučaju hipotenuza je $c = 2\cdot 9$ cm $= 18$ cm. Sem toga, težišna linija koja odgovara hipotenuzi jednaka je polovini hipotenuze: $t_c = 9$ cm.

a) Ortocentar pravouglog trougla je teme pravog ugla, pa je traženo rastojanje $CT = \frac{2}{3}t_c = 6$ cm. (Sa T označili smo težište.)

b) Kod pravouglog trougla centar opisanog kruga je središte S hipotenuze. Traženo rastojanje je $ST = \frac{1}{3}t_c = 3$ cm.



N3. Dati ugao od 126° je spoljašnji ugao trougla BDH (vidi sliku), pa je $126° = 90° + \sphericalangle DBH$. Odavde je $\sphericalangle DBH = 36°$. Sada uočimo pravougli trougao BCE. Iz njega nalazimo: $\gamma = 180° - 90° - 36° = 54°$. Budući da je zadat ugao $\alpha = 80°$, nalazimo da je treći ugao u trouglu ABC ugao $\beta = 180° - 80° - 54° = 46°$. Najmanjem uglu odgovara najmanja stranica b, a najvećem uglu α odgovara najveća stranica a.

N4. Luka je ukucao broj $\overline{4ab4}$. Prema uslovu je $\overline{4ab4} = 54\cdot\overline{ab}$. Pritom je $\overline{4ab4} = 4004 + 10\cdot\overline{ab}$, pa imamo jednačinu: $4004 + 10\overline{ab} = 54\cdot\overline{ab}$, odakle je $44\overline{ab} = 4004$. Traženi broj je $\overline{ab} = 4004 : 44 = 91$.

N5. Podelimo dati kvadrat na manje kvadrate stranice 1 cm. Manjih kvadrata ima $44 \cdot 44 = 1936$. Kada po datom kvadratu na proizvoljni način rasporedimo 2013 tačaka, po Dirihleovom principu, u nekom od malih kvadrata biće bar dve tačke.

Okružna takmičenja

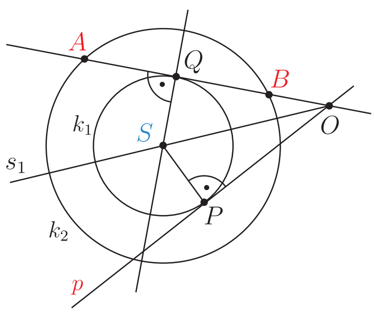
O) 5. razred

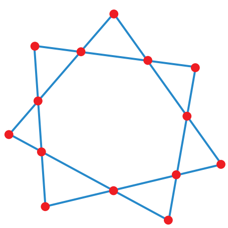
O1. Ako broj koji je Joca zamislio označimo sa x, dobićemo jednačinu $4,5 \cdot x - 12,3 = 5,7$. Odavde je $x = 4$.

O2. Ako preostalom delu kanapa dodamo 0,5 m, imaćemo polovinu manjeg dela dobijenog posle prvog presecanja. To je komad kanapa dužine $2 \cdot 2$ m $= 4$ m. Ovaj komad je za 0,5 m kraći od polovine dužine datog kanapa. Dakle, polovina početne dužine kanapa je 4,5 m, pa je početna dužina kanapa bila 9 metara.

O3. Traženi broj mora biti deljiv sa 4 (dvocifreni završetak je deljiv sa 4), a zbir njegovoih cifara biće deljiv sa 9. Najmanji zbir sedam različitih cifara je: $0+1+2+3+4+5+6 = 21$, pa će najmanji zbir deljiv sa 9 biti 27. Najmanji takav broj je $1023{*}{*}{*}$. Moguće je da poslednje tri cifre budu: $8+7+6 = 9+7+5 = 9+8+4 = 21$. Dvocifreni završetak deljiv sa 4 imamo samo u slučajevima: 68, 76, 48 i 84. Najmanji broj dobijamo u slučaju 768, pa je traženi sedmocifreni broj 1023768.

O4. Centar kružnice k_1, koja dodiruje prave p i AB, pripada simetrali s_1 ugla kojeg određuju prave p i AB. Centar kružnice k_2, koja prolazi kroz tačke A i B pripada simetrali s_2 duži AB. Dakle, konstruišemo simetrale s_1 i s_2, kao što se vidi na slici. One se seku u tački S, zajedničkom centru kružnica k_1 i k_2. Normala SP iz S na p predstavlja poluprečnik kružnice k_1.



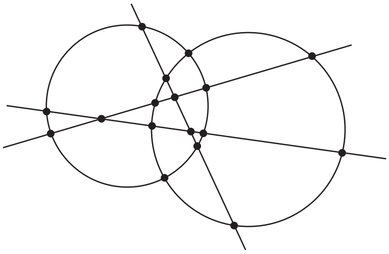


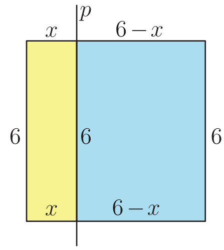
O5. Jedno od mogućih rešenja je zvezdasti sedmougao, prikazan na slici desno.

P) 5. razred

P1. Kako je $2,5 = \frac{5}{2}$, biće $1 : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = 1 : \left(\frac{4}{10} + \frac{1}{10}\right) = 1 : \frac{5}{10} = 2.$

P2. Najviše "simpatičnih" tačaka biće ako se kružnice seku (dve tačke) i svaka prava seče obe kružnice i obe preostale prave (šest tačaka). Tada dobijamo najviše "simpatičnih" tačaka, ukupno 17, kao što je prikazano na slici levo.





P3. Rastavljanjem na proste činioce dobijamo $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, ukupno pet prostih činilaca. Traženih brojeva ima 10. To su $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 7 = 14$, $2 \cdot 11 = 22$, $3 \cdot 5 = 15$, $3 \cdot 7 = 21$, $3 \cdot 11 = 33$, $5 \cdot 7 = 35$, $5 \cdot 11 = 55$, i $7 \cdot 11 = 77$.

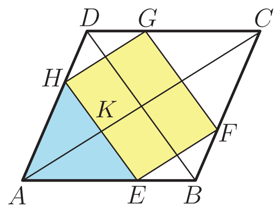
P4. Pravom p dve stranice su podeljene na delove dužina x i $(6 - x)$, kao što je prikazano na slici gore. Prema uslovu, za obime dvaju pravougaonika imamo jednakost: $(2x + 12) + 5 = 2(6 - x) + 12$. Odavde je $x = \frac{7}{4}$. Površina manjeg pravougaonika je $P_1 = 6 \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{2}$ cm^2, a površina većeg je $P_2 = 6 \cdot \frac{17}{4} = \frac{51}{2}$ cm^2.

P5. Ako $\frac{1}{2}$ kg srebra i $\frac{1}{3}$ kg zlata staje 750 000, onda će 6 puta veće količine, t.j. 3 kg srebra i 2 kg zlata stajati $6 \cdot 750\,000$. t.j. 4 500 000 dinara. Ako je 1 kg srebra i $\frac{1}{2}$ kg zlata staje 1 250 000 dinara, onda će tri puta veće količine, t.j. 3 kg srebra i $\frac{3}{2}$ kg zlata stajati $3 \cdot 1\,250\,000$, t.j. 3 750 000 dinara. Ako od 3 kg srebra i 2 kg zlata oduzmemo 3 kg srebra i $\frac{3}{2}$ kg zlata, dobićemo $\frac{1}{2}$ kg zlata, koje staje $(4\,500\,000 - 3\,750\,000)$ dinara, t.j. 750 000 dinara. Onda 1 kg zlata staje 1 500 000 dinara. Sada lako izračunamo da 1 kg srebra staje 500 000 dinara. Dakle, za 1 kg srebra i 2 kg zlata Zlatko je platio 3 500 000 dinara.

Q) 6. razred

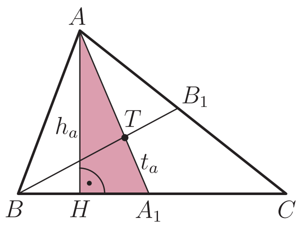
Q1. Uslov $|x| < 3$ zadovoljavaju celi brojevi: -2, -1, 0, 1 i 2. Smenjujući redom ove vrednosti za x u drugi uslov, utvrdimo da je uslov ispunjen samo za $x = 1$ i za $x = 2$.

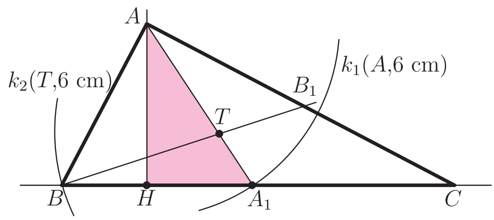
Q2. Zbog $AE = AH$, trougao AEH je jednakokraki, pa je njegova visina AK na osnovicu ujedno i simetrala ugla EAH. Trougao ABD takođe je jednakokraki i njegova visina iz A je simetrala ugla BAD. Dakle, to je prava AK, pa je AK normalno na EH i na BD. Sledi da je EH paralelno dijagonali BD datog romba (slika). Slično se dokaže da je i FG paralleno sa BD, a EF i GH su paralelne sa dijagonalom AC. Dakle, $EFGH$ je paralelogram, pa kako su dijagonale romba normalne međusobno, sledi da je $EFGH$ pravougaonik.



Q3. Iz date jednakosti vidimo da je $7r < 47$, pa je $r = 2$ ili $r = 3$ ili $r = 5$. Ako je $r = 2$, dobijamo: $p + 5q = 33$, pa je obavezno p ili q paran broj, t.j. $p = 2$ ili $q = 2$. Proverom utvrdimo da je $q = 2$, pa je $p = 23$. Ako je $r = 3$, onda je $p+5q = 26$, što je moguće samo za $p = 11$ i $q = 3$. Ako je $r = 5$, tada je $p+5q = 12$, što je moguće samo za $p = 2$ i $q = 2$. Imamo tri rešenja: $p = 23$, $q = 2$, $r = 2$ ili $p = 11$, $q = 3$, $r = 3$ ili $p = 2$, $q = 2$, $r = 5$.

Q4. Uočimo da je $\frac{x}{y} : \frac{11}{210} = \frac{210x}{11y}$ i $\frac{x}{y} : \frac{11}{280} = \frac{280x}{11y}$, pri čemu su izrazi iza znakova jednakosti celi brojevi. Razlomak $\frac{x}{y}$ biće najmanji ako je x najmanji, a y najveći broj. Da bi zadati količnici bili celi brojevi x mora biti deljiv sa 11, pa je upravo $x = 11$. Iz istih razloga y mora biti delilac brojeva 210 i 270, i to najveći. Onda je $y = D(210, 280)$, a to je $y = 70$. Traženi najmanji razlomak je $\frac{x}{y} = \frac{11}{70}$.





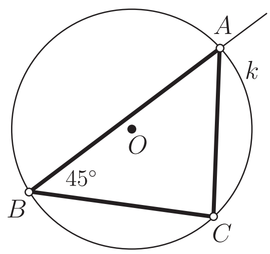
Q5. Na slici gore levo vidimo da zadata visina h_a i težišna linija t_a određuju pravougli trougao AHA_1, koji se može odmah konstruisati. Kad odredimo težište T, tako da je $AT = 4$ cm $= \frac{2}{3}t_a$, onda na pravoj A_1H možemo konstruisati teme B, jer je $TB = 6$ cm $= \frac{2}{3}t_b$. Konačno je $BA_1 = A_1C$. Konstrukciju, prema prethodnom opisu, vidimo na slici gore desno. (Počinjemo od tačke H i visine $h_a = AH = 4$ cm.)

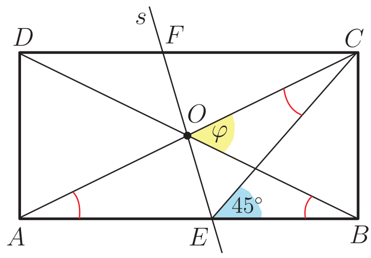
R) 6. razred

R1. Zbir na levoj strani jednakosti je neparan, pa mora biti $p = 2$, ili $q = 2$. Ako je $p = 2$, onda je $497q^2 = 2009$, pa q^2 nije celi broj. Ako je $q = 2$, dobijamo jednakost $p^2 = 25$, pa je $p = 5$. Dakle: $p = 5$ i $q = 2$.

R2. Broj $\overline{xyxyx}$ deljiv je sa 3, pa je njegov zbir cifara $3x + 2y$ takođe deljiv sa 3. Zbog toga je y deljivo sa 3. Dakle, $y \in \{3, 6, 9\}$. Broj $\overline{yxyxyxy}$ deljiv je sa 18, pa mora biti paran. To je moguće samo ako je $y = 6$. Broj $\overline{yxyxyxy}$ mora biti deljiv sa 9, pa mu je zbir cifara $4y+3x = 24+3x$ deljiv sa 9. To je ispunjeno ako je $x = 1$, ili $x = 4$, ili $x = 7$ (a $y = 6$).

R3. Data stranica $BC = a = 5$ cm predstavlja tetivu opisane kružnice i može se konstruisati kad je data kružnica. Na sledećoj slici levo vidimo konstrukciju trougla ABC. Najpre je konstruisana kružnica k i na njoj tetiva $BC = a = 5$ cm. Zatim je konstruisan ugao $\beta = 45°$ sa temenom B. Presek kraka i kružnice je treće teme A traženog trougla.





R4. Data dvostruka nejednakost može se napisati u obliku: $\frac{3}{1} > \frac{1-x}{2} > \frac{4}{3}$. Dovedimo imenioce na NZS. Dobijemo: $\frac{18}{6} > \frac{3(1-x)}{6} > \frac{8}{6}$. Odavde dobijamo da je: $8 < 3(1-x) < 18$, ili $\frac{8}{3} < 1-x < 6$. Traži se rešenje u skupu celih brojeva, pa je $2 < 1-x < 6$. Odavde dobijamo da je $(1-x) \in \{3,\ 4,\ 5\}$, pa je $x = -2$, ili $x = -3$, ili $x = -4$.

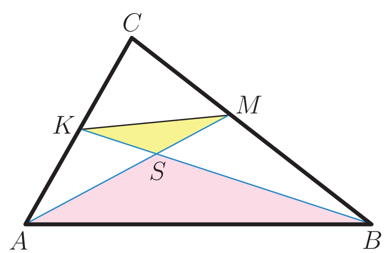
R5. Neka je E presečna tačka simetrale s i stranice AB, takva da je $BE = BC$. Onda je trougao BCE pravougli jednakokraki, pa je $\sphericalangle BEC = 45^\circ$. Tačka E je na simetrali duži AC, pa je ACE jednakokraki trougao i $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ACE$. Kako je $\sphericalangle BEC = 45^\circ$ spoljašnji ugao trougla ACE, zaključujemo da je $\sphericalangle CAE = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22^\circ 30'$. I trougao ABO je jednakokraki (AO i BO polovine jednakih dijagnala), pa je $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO = 22^\circ 30'$. Traženi ugao između dijagonala, na slici gore označen sa φ, predstavlja spoljašnji ugao trougla ABO, pa je $\varphi = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 22^\circ 30' + 22^\circ 30' = 45^\circ$.

Državna takmičenja u Srbiji

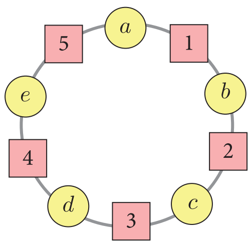
S) 6. razred

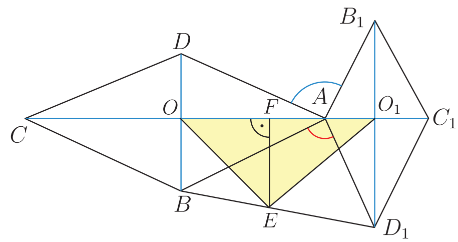
S1. Rastavljanjem na proste činioce dobijamo: $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Zbir $s+t$ ne može biti 2 ili 3. Takođe, $(s+t)$ ne može biti 67 jer $2+65$ ne zadovoljava uslov da su s i t prosti brojevi, a ako prosti broj 2 zamenimo nekim drugim prostim brojem, onda $s+t$ može biti samo parni broj, a ne 67. Dakle, $s+t=5$, pa je $s=2$, $t=3$ ili $s=3$, $t=2$. Onda su $p,q,r \in \{2,3,67\}$. Možemo ih izabrati na šest načina. Kako za $(s+t)$ imamo dve kombinacije, to imamo 12 rešenja: (2,3,67,2,3), (2,3,67,3,2), (2,67,3,2,3), (2,67,3,3,2), (3,2,67,2,3), (3,2,67,3,2), (3,67,2,2,3), (3,67,2,3,2), (67,2,3,2,3), (67,2,3,3,2), (67,3,2,2,3), (67,3,2,3,2).

S2. Pretpostavimo da je moguće da se duži AM i BK polove, i neka je S njihovo zajedničko središte. Onda je četvorougao $ABMK$ paralelogram (dijagonale se polove), pa je AK paralelno sa BM. To nije moguće, jer prave AK i BM sadrže stranice AC i BC trougla ABC. Dakle, pretpostavka da se duži AM i BK polove, pogrešna je.



S3. Označimo tražene brojeve sa a, b, c, d i e, kao na slici levo. Tada je $a+b=1$, $b+c=2$, odnosno $b=2-c$. Zamenimo b u prvoj jednakosti sa $2-c$ i dobijemo: $a+2-c=1$. Dalje, iz $c+d=3$, dobijamo: $c=3-d$. Zamenimo c u prethodnoj jednakosti: $a+2-(3-d)=1$. Odavde je $a+2-3+d=1$, odnosno $a+d=2$. Kako je $d+e=4$ i $e+a=5$, odnosno $d=4-e$ i $e=5-a$, biće $d=4-(5-a)$, t.j. $d=a-1$. Zamenom u jednakost $a+d=2$, dobijamo $a+a-1=2$, odnosno $2a=3$, pa je $a=\frac{3}{2}$. Sada lako nalazimo: $b=1-a=-\frac{1}{2}$, zatim $c=2-b==\frac{5}{2}$, $d=\frac{1}{2}$ i $e=\frac{7}{2}$.





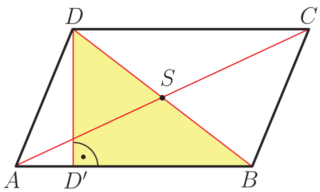
S4. Neka su O i O_1 presečne tačke dijagonala datih rombova i E središte duži BD_1, kao što je označeno na slici gore. Dokažimo da tačka A pripada duži OO_1. Dijagonale romba polove unutrašnje uglove, pa je $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OAB$ i $\sphericalangle O_1AB_1 = \sphericalangle O_1AD_1$. Kako je (po uslovu) $\sphericalangle DAB_1 = \sphericalangle BAD_1$ biće $\sphericalangle OAD + \sphericalangle DAB_1 + \sphericalangle O_1AB_1 = \sphericalangle OAB + \sphericalangle BAD_1 + \sphericalangle O_1AD_1 = \frac{360°}{2} = 180°$. Otuda sledi da je A tačka duži OO_1. Konstruišemo tačku F na duži OO_1, tako da je $\sphericalangle EFO$ prav. Dijagonale romba su normalne međusubno, pa su BO, D_1O_1 i EF normalne na OO_1, pa su paralelne među sobom. Onda je OBD_1O_1 pravougli trapez, pa, kako je E središte kraka BD_1 duž EF biće srednja linija ovog trapeza. Zbog toga je F središte duži OO_1, pa su pravougli trouglovi OEF i O_1EF podudarni po stavu SUS. Otuda sledi da je $OE = O_1E$, pa je trougao OO_1E jednakokraki, što se i tvrdi.

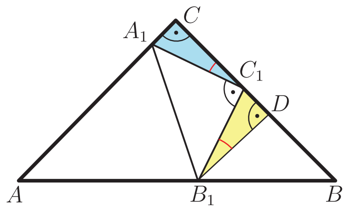
S5. Pretpostavimo da su na takmičenju učenici iz najviše 44 grada i da iz svakog grada ima najviše 44 učenika. To je ukupno 1936 učenika. Na takmičenju je bilo više od 1936 učesnika, pa ako pretpostavimo da je neko od preostalih takmičara iz nekog od datih gradova, on bi bio 45. takmičar iz tog grada. Ako je on iz nekog drugog od ponuđenih gradova, to bi bio 45. grad odakle ima takmičara, pa važi tvrđenje zadatka.

T) 6.razred

T1. Ako je broj deljiv sa 5, sa 7 i sa 11, onda je on deljiv sa $5\cdot7\cdot11$, odnosno sa 385. Ako broj 7002000 podelimo sa 385, dobićemo ostatak deljenja broj 5. Dakle, broj 7002380 deljiv je sa 385. Onda je i broj $7002380+385=7002765$ deljiv sa 385. Broj $7002765+385=7003150$ jeste deljiv sa 385, ali ne počinje ciframa 7002. Dakle, rešenja su: 7002380 i 7002765.

T2. Prema slici levo jasno je da možemo odmah konstruisati pravougli trougao BDD'. (Prvo konstruišemo pravi ugao sa temenom D', pa duž $D'D = 3$ cm. Kružnica $k(D, 4\text{ cm})$ seče drugi krak pravog ugla u tački B.) Središte S hipotenuze BD je zajedničko središte dijagonala AC i BD. Onda, prvo odredimo tačku A (presek kružnice $K_1(S, 3\text{ cm})$ i prave BD', itd.





T3. Na testiranju je učestvovalo 30 dečaka i 270 devojčica. Svi učenici ukupno su osvojili $300 \cdot 84$, odnosno 25200 bodova, dok su devojčice osvojile ukupno $270 \cdot 83$, odnosno 22410 bodova. Sledi da su dečaci osvojili ukupno 2790 bodova. Kako je učestvovalo 30 dečaka, svaki od njih osvojio je po 93 boda.

T4. Neka je D podnožje normale iz B_1 na BC. Tada su jednaki uglovi A_1C_1C i C_1B_1D (sa normalnim kracima). Budući da je $A_1C_1 = B_1C_1$, na osnovu stava USU podudarni su trouglovi A_1C_1C i C_1B_1D. Zbog toga je $A_1C = C_1D$ i $CC_1 = B_1D$. Međutim, u trouglu BB_1D uglovi kod temena B i B_1 su po $45°$, pa je $B_1D = BD$. Otuda zaključujemo da je $CC_1 = BD$. U jednakokrakom trouglu ABC je $AC = BC$, odnosno: $AA_1 + A_1C = CC_1 + C_1D + BD$, pa, zbog $A_1C = C_1D$, zaključujemo da je $AA_1 = CC_1 + BD$. Međutim, $BD = CC_1$ i konačno je $AA_1 = 2 \cdot CC_1$, što se i tvrdi.

T5. Prosti brojevi se mogu završavati cifrom 1, 2, 3, 5, 7 ili 9. Kako se od prostih brojeva cifrom 2 završava samo broj 2, a cifrom 5 samo broj 5, to se bar 2005 od datih prostih brojeva završavaju nekom od cifara 1, 3, 7 ili 9. Kako imamo bar 2005 brojeva i 4 mogućnosti za cifru kojom se završavaju ti brojevi, a $2005 = 4 \cdot 501 + 1$, po Dirihleovom principu bar 502 od tih brojeva završavaju se istom cifrom.

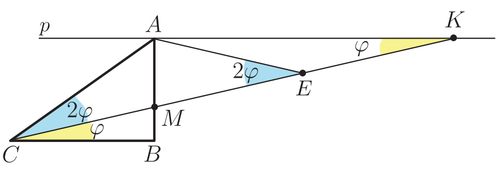
Republička takmičenja u Jugoslaviji

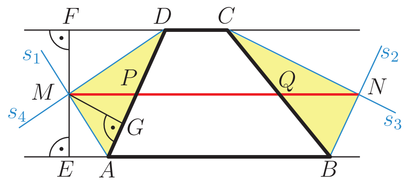
U) 6. razred

U1. Broj jabuka koje prodaje Goca deljiv je sa 3, ali toliko jabuka ima i Nina, pa taj broj mora biti deljiv i sa 2. Taj broj mora biti deljiv i sa 5, zbog uslova prodaje kad sastave obe količine. Kako je NZS za 2, 3 i 5 broj 30, zaključujemo da su Goca i Nina prodavale po $30k$ jabuka. Pri prodaji 3 jabuke za 1 dinar, Goca bi zaradila $10k$ dinara, dok bi Nina zaradila $15k$ dinara. Ukupna zarada bila bi $25k$ dinara. Ako bi sastavile obe gomile, imale bi $60k$ jabuka, i pri prodaji 5 jabuka za 2 dinara zaradile bi $(60k : 5) \cdot 2 = 24k$ dinara. Onda je $25k = 24k + 4$, pa je $k = 4$. Prema tome Goca i Nina su imale po $30k = 120$ jabuka.

U2. Ako Peđa stazu pretrči za 24 minuta, onda on za 9 minuta pretrči $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ staze. Dakle, za to isto vreme Dejan pretrči $\frac{5}{8}$ staze. Ako trče u istom smeru, to znači da za svakih 9 minuta Dejan pobegne Peđi za $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$ dužine staze. Onda će za celi krug pobeći i sustići ga za $4 \cdot 9 = 36$ minuta. Za 36 minuta Peđa pretrči jedan i po krug, a Dejan dva i po kruga. Dakle, u početnoj tački naći će se ponovo posle 72 minuta, kada Peđa pretrči 3, a Dejan 5 krugova.

U3. Neka je E središte duži MK. Trougao AMK je pravougli sa hipotenuzom MK. Duž AE je hipotenuzina težišna linija, pa je jednaka polovini hipotenuze: $AE = EK = EM$ i $AE = AC$, jer je po uslovu $AC = \frac{1}{2}KM$. Označimo sa φ ugao BCK. Onda je $\sphericalangle AKC = \sphericalangle BCK = \varphi$, jer su prave p i BC paralelne. U jednakokrakom trouglu AEK je $\varphi = \sphericalangle AKE = \sphericalangle EAK$. Ugao $\sphericalangle AEC$ je spoljašnji za trougao AEK, pa je $\sphericalangle AEC = 2\varphi$. Međutim, trougao ACE je takođe jednakokraki, jer je $AE = AC$, pa je i $\sphericalangle ACE = 2\varphi$. Konačno je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACE + \sphericalangle BCK = 2\varphi + \varphi = 3\varphi = 3 \cdot \sphericalangle KCB$, što se i tvrdilo.





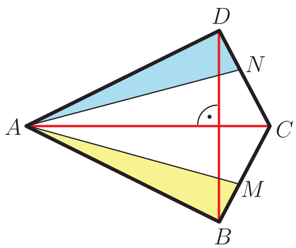
U4. Neka su s_1, s_2, s_3 i s_4 simetrale spoljašnjih uglova trapeza $ABCD$, kao što je prikazano na slici desno. Tačka M je na simetrali s_1 spoljašnjeg ugla kod temena A, pa je jednako udaljena od pravih AB i AD, t.j. $ME = MG$. Tačka M je i na simetrali s_4 spoljašnjeg ugla kod temena D, pa je i $MG = MF$. Dakle, $ME = MF$, pa tačka M pripada pravoj koja polovi krake i sadrži srednju liniju trapeza. Slično se dokaže da ovoj pravoj pripada i tačka N. Trougao ADM je pravougli, jer simetrale s_1 i s_4 polove dva suplementna ugla, pa se seku pod pravim uglom. Neka su P i Q središta krakova AD i BC. Tada je MP težišna linija koja odgovara hipotenuzi AD, pa je $MP = \frac{1}{2}AD$. Slično se dokaže i da je $NQ = \frac{1}{2}BC$. Kako je PQ srednja linija i $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$ zaključujemo da je $MN = MP + PQ + QN = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$, a to je polovina obima trapeza. Prema tome, obim trapeza je $O = 2 \cdot MN = 2 \cdot 999 = 1998$ cm.

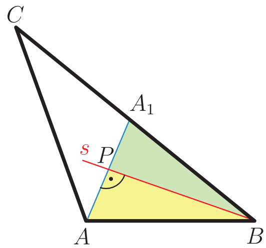
U5. Neka je Mile prodao x kilograma pasulja. Ukupan prihod je $8x$. Troškovi su: porez koji iznosi $0.23 \cdot 8x = 1.84x$, zatim nabavka pasulja po ceni od 5 dinara, za koji je plaćeno $(x - 163) \cdot 5 = 5x - 815$ dinara i nabavka skupljeg pasulja za koji je plaćeno $163 \cdot 10 = 1630$ dinara. Dakle, $8x - 1.84x - (5x - 815) - 1630 = 1998$, odakle se dobija $x = 2415$ kg.

V) 6. razred

V1. Ako je u obe sveske bilo po x listova, onda je $\frac{x}{4}+\frac{x}{9}=26$. Odavde je $x=72$. U obe sveske bilo je ukupno 144 lista, pa se taj broj smanjio za $26:144=0,18=18\%$ približno.

V2. Pravougli trouglovi ABM i ADN podudarni su po stavu USU ($BM=DN$ i jednaki unutrašnji uglovi), pa je $AB=AD$. Onda su podudarni i pravougli trouglovi ABC i ADC, po stavu SSU, slika levo. Iz te podudarnosti sledi da je $BC=DC$. Kako je još i $AB=AD$, zaključujemo da su tačke A i C na simetrali duži BD. Zbog toga je ugao između dijagonala AC i BD prav.





V3. Neka je $x=\overline{abc}$. Tada je $x=100a+10b+c$. Prema datom uslovu važi: $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=3\cdot\overline{aaa}$. Odavde dobijamo jednakost: $222(a+b+c)=3\cdot a\cdot 111$, odnosno $a=2(b+c)$, što daje četiri rešenja: $a=6$, $b=2$, $c=1$, ili $a=6$, $b=1$, $c=2$, ili $a=8$, $b=3$, $c=1$, ili $a=8$, $b=1$, $c=3$.

V4. Poluprava Bs polovi ugao ABA_1. Pravougli trouglovi ABP i A_1BP imaju zajedničku katetu BP i jednake nalegle uglove, pa su podudarni po stavu USU, slika desno. Zbog toga je $AB=A_1B$, pa je stranica BC trougla ABC dva puta duža od stranice AB. Prema uslovu zadatka dužine stranica su 1 cm, 2 cm i 3 cm ili 2 cm, 3 cm i 4 cm. Kako je $1+2=3$, prva mogućnost otpada. Rešenje je $AB=2$ cm, $AC=3$ cm i $BC=4$ cm.

V5. Svakim uvećanjem dva broja za $(1+1)=2$ ne menja se parnost zbira početnih 222 prirodna broja. Kako je $1+2+3+\cdots+221+222=(1+222)+(2+221)+\cdots+(111+112)=111\cdot 223$ neparan broj, zbir svih brojeva posle svakog koraka biće neparan broj. Ako bismo dobili 222 jednaka broja, njihov zbir bi bio parni broj, a znamo da mora biti neparan. Dakle, na ovaj način nikad ne možemo dobiti sve jednake brojeve.

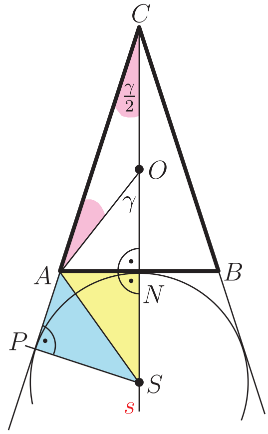
Savezna takmičenja u Jugoslaviji

X) 6. razred

X1. Poslednja cifra stepena 1^{2003} je 1, poslednja cifra stepena 5^{2003} je 5 i stepena 6^{2003} je 6. Stepen 4^n za neparni izložilac, kao što je 2003, završava se cifrom 4, a slično, stepen 9^{2003} završava se cifrom 9.

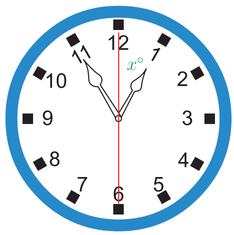
Poslednja cifra stepena 2^n ponavlja se periodično po sledećem redosledu: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ...Svaka četvrta je 6. Tako je $2^{2000}=\dots 6$, pa je $2^{2003}=\dots 8$. Slično, stepeni 3^n imaju poslednju cifru redom: 3, 9, 7, 1, pa je $3^{2003} = \ldots 7$. Prema tome, poslednja cifra datog zbira dobija se iz: $1+8+7+4+5+6+9 = 40$ pa je to cifra 0. Dakle, ovaj zbir deljiv je sa 10.

X2. U **primeru C** na strani 65. dokazali smo da je $t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a+b+c)$, a u **primeru D** da je $2t_a < c+b$. Slično se dokazuje da je $2t_b < a+c$ i $2t_c < a+b$. Sabiranjem ove tri nejednakosti dobijamo $2(t_a+t_b+t_c) < 2(a+b+c)$, odnosno $t_a + t_b + tc < a+b+c$, što se i tvrdi.



X3. Centar O opisane kružnice trougla ABC i centar S kružnice koja spolja dodiruje stranicu AB i produžetke stranica CA i CB, pripadaju simetrali s ugla γ. Ova simetrala je normalna na osnovicu jednakokrakog trougla ABC. Trougao ACO je jednakokraki, jer su OA i OC poluprečnici opisane kružnice, pa je $\sphericalangle ACO = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle CAO$. Onda je $\sphericalangle AON = \gamma$, kao spoljašnji ugao ovog trougla, a $\sphericalangle OAN = 90^\circ - \gamma$. Zbog simetričnosti tačaka O i S je i $\sphericalangle SAN = 90^\circ - \gamma$. Neka je P tačka u kojoj spolja upisani krug dodiruje produžetak stranice CA. Tada su trouglovi SAP i SAN podudarni po stavu SSU (SA zajednička hipotenuza i $SP = SN$ kao poluprečnici istog kruga). Sledi da je $\sphericalangle SAP = \sphericalangle SAN = 90^\circ - \gamma$. Obratimo pažnju na opruženi ugao CAP. Imamo: $\sphericalangle CAO + \sphericalangle OAN + \sphericalangle NAS + \sphericalangle SAP = 180^\circ$, odnosno: $\frac{\gamma}{2} + 3 \cdot (90^\circ - \gamma) = 180^\circ$. Odavde je $\gamma = 36^\circ$. Ostala dva ugla trougla ABC su: $\alpha = \beta = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 72^\circ$.

X4. Neka je mala kazaljka prešla deo punog kruga koji iznosi x°. Velika kazaljka kreće se 12 puta brže i ona je prešla ugao od $12x^\circ$. Ako je crvena prava na slici simetrala ugla između kazaljki, onda je $x^\circ = 360^\circ - 12x^\circ$. Odavde je $13x = 360^\circ$, pa je velika kazaljka od položaja punog kruga udaljena $\frac{360^\circ}{13}$. U tom trenutku vreme koje pokazuje sat je 12 h i $\frac{12}{13}$ h, odnosno 12 h 55 min $23\frac{1}{13}$ s.



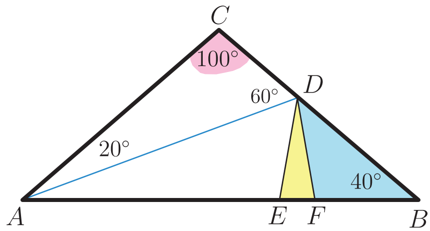
X5. Neka je p broj parova dečak-devojčica koji sede zajedno. Znači, broj učenika u parovima je $2p$, jer je p broj dečaka u paru i p broj devojčica u paru. Neka su m i n brojevi dečaka, odnosno devojčica. Tada je $p = \frac{2}{3}m$ i $p = \frac{3}{5}n$, odakle je $m = \frac{3}{2}p$ i $n = \frac{5}{3}p$. Ukupni broj učenika u odeljenju je $m + n = \frac{19}{6}p$. Sada je $\frac{2p}{\frac{19}{6}p} = \frac{12}{19}$. Dakle, $\frac{12}{19}$ od ukupnog broja učenika sedi u mešovitim parovima.

Y) 6. razred

Y1. Računajući kubove prirodnih brojeva, utvrdimo da trocifrene vrednosti imaju: $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ i $9^3 = 729$. Prema tome, $\overline{cba} \in \{125, 216, 343, 512, 729\}$, pa je $\overline{abc} \in \{521, 612, 343, 215, 927\}$. Od ovih pet brojeva je: 612 deljivo sa 2, 343 sa 7, 215 sa 5 i 927 sa 9. Samo je 521 prosti broj i on je traženo rešenje zadatka: $\overline{abc} = 521$ i $\overline{cba} = 125 = 5^3$.

Y2. Vidi rešenje **zadatka 400**.

Y3. Vidi rešenje **zadatka 12**.



Y4. Ugao kod vrha C je $100°$, slika desno, pa je $\sphericalangle ADC = 60°$. Neka je E tačka duži AB, takva da je $AE = AC$. Tada su podudarni trouglovi ACD i AED, po stavu SUS, pa je $\sphericalangle ADE = 60°$ i $DE = CD$. Uočimo tačku F na duži AB, takvu da je $AF = AD$. Trougao ADF je jednakokraki sa uglom $\sphericalangle DAF = 20°$ kod vrha A. Onda je $\sphericalangle AFD = 80°$. Međutim, u trouglu ADE, je $\sphericalangle DEF$ spoljašnji, pa je $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ADE + \sphericalangle DAE = 60° + 20° = 80°$. Sledi da je i trougao DEF jednakokraki i $DF = DE$. Kako je $DE = CD$, biće i $DF = CD$. Dalje, u trouglu BDF ugao AFD je spoljašnji i jednak $80°$. Kako je $\sphericalangle DBF = 40°$, sledi da je $\sphericalangle BDF = \sphericalangle AFD - \sphericalangle DBF = 80° - 40° = 40°$. Dakle, i trougao BDF je jednakokraki, pa je $BF = DF$, a zbog toga je i $BF = CD$. Tačku F izabrali smo tako da je $AF = AD$, pa je, konačno: $AD + CD = AF + FB = AB$. Time je tvrđenje dokazano.

Y5. Paralelogram je centralno simetričan. Tačka O u kojoj se seku dijagonale paralelograma predstavlja centar te simetrije. Jelena konstruiše tačku O i nacrta krug dogovorenog poluprečnika sa centrom O. Svakom krugu koji Radovan upiše, Jelena konstruiše krug simetričan u odnosu na tačku O. (Ako ima mesta za upisivanje Radovanovog kruga, postoji simetrični deo paralelograma za Jelenin krug.) Tako Jelena sigurno pobeđuje.