Н.Петрески, Скопје

ПРАВА И КРУЖНИЦА НА ОЈЛЕР

Великанот во математиката, Леонард Ојлер е роден во 1707 год. во Базел, Швајцарија. Првите математички знаења ги добил од својот татко, Паул Ојлер, кој бил свештеник. Таткото на Леонард настојувал неговиот син да ја продолжи семејната традиција, да стане свештеник, но Леонард иако во 1724 година завршил теологија се определил за изучување на природните науки. Тој се запишал на Базелскиот универзитет и успех ги завршил студиите по математика и механика. За неговите врвни научни дострели посебна заслуга има Јохан Бернули, со кого Ојлер во младоста доста соработувал, и по чија препорака добил место во Руската академија на науките. Леонард на деветнаесет годишна возраст ја напишал својата докторска дисертација од областа на акустиката. Истата ја подготвувал за учество на конкурсот за професор по физика на Базелскиот универзитет. Во 1731 година е избран за професор по физика, а две години подоцна веќе работел на катедрата по математика. Во 1727 година Леонард претстојува во Сан Петерзбург, а од 1741 година, на покана од царот Фридрх II, оди да работи во Академијата на науките во Берлин и тука останува до 1766 год. Недоразбирањата со *Фридрих II се причина за повторното одење* во Сан Петерзбург, каде останал до крајот на животот.

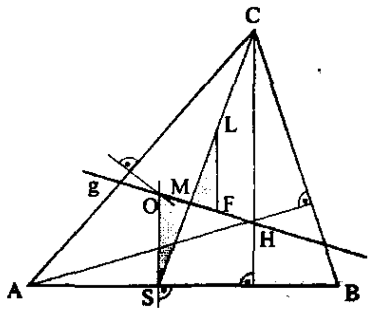
Леонард Ојлер во текот на шеесте годишната активна научна работа напишал околу 850 научни трудови од областа на математиката, физиката и астрономијата Неговиот допринос во развојот на современата научна мисла е толку голем, што најголемите научници времето во кое живеел го нарекуваат "**век на Ојлер**", а Лаплас на младите математичари им сугерирал: "**Почитувајте го Ојлер, тој е учител на сите нас.**" Ојлер умрел во 1783 г.

Во овој напис ќе ви презентираме две теореми на Леонард Ојлер.

Теорема 1. Ортоцентарот, тежиштето и центарот на опишаната кружница на триаголникот лежат на една права.

Доказ. Ако триаголникот е рамнокрак или правоаголен, тогаш тврдењето е очигледно.Затоа нека претпоставиме дека триаголникот не е ниту рамнокрак, ниту правоаголен. Ќе го разгледаме случајот кога триаголникот е остроаголен и разностран (црт. 1). Во овој случај ортоцентарот H и центарот на опишаната кружница O определуваат права p. Нека CS е тежишната линија повлечена од темето C и $M = p \cap CS$. Ќе докажеме дека точката M е тежиште на триаголникот ABC.

Со F и L да ги означиме средините на



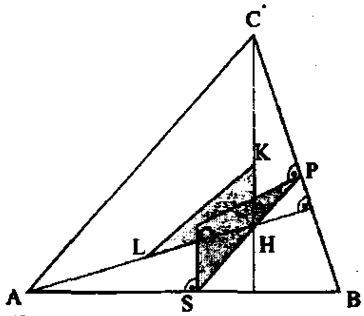
Црт. 1

отсечките MH и MC, соодветно. Тогаш, отсечката LF е средна линија за ΔMHC, па е

(1) $\overline{CH} = 2\overline{LF}, \; CH \| LF$.

ќе докажеме дека $\overline{CH} = 2\overline{OS}, \; CH \| OS$. Навистина, ако P, L и K се средини на BC, AH и CH, соодветно, тогаш отсечките PS и LK се средни линии за ΔABC и ΔAHC, соодветно (црт.2). Според тоа, $\overline{PS} = 2\overline{LK}, \; PS \| LK$. Но, $LH \| OP, \; CH \| OS$. Значи, $\Delta LHK \cong \Delta POS$, односно $\overline{KH} = \overline{OS}$, т.е. $\overline{CH} = 2\overline{OS}$.

Од досега изнесеното и од (1) следува



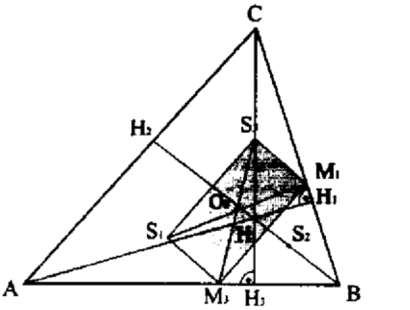
Црт. 2

дека отсечките OS и LF се паралелни и еднакви. Затоа $\Delta OSM \cong \Delta FLM$, од што следува дека $\overline{SM} = \overline{SM}$ и $\overline{LM} = \overline{LC}$, т.е.

$\overline{CM}:\overline{MC}=2:1$. Следствено, точката M е тежиште на ΔABC.

Забелешка. Правата, на која лежат ортоцентарот, тежиштето и центарот на опишаната кружница околу еден триаголник ја нарекуваме ***Ојлерова права.***

Теорема 2. Нека H е ортоцентарот на ΔABC. Ако со M_1, M_2, M_3 ги означиме средините на страните BC, CA, AB со H_1, H_2, H_3 подножните точки на висините спуштени од темињата A, B, C и со S_1, S_2, S_3 средините на отсечките AH, BH, CH, соодветно, тогаш точките $H_1, H_2, H_3, S_1, S_2, S_3, M_1, M_2, M_3$ лежат на една кружница, која ја нарекуваме ***Ојлерова кружница*** (црт. 3).



Црт. 3

Доказ. Отсечките S_1M_3 и M_1S_3 се средни линии на триаголниците ABH и BCH, соодветно, па затоа $S_1M_3 \| BH \| S_3M_1$ и $\overline{S_1M_3}=\overline{BH}=\overline{S_3M_1}$, т.е. четириаголникот $S_1M_3M_1S_3$ е паралелограм. Од друга страна $BH \perp AC$ и како $S_1S_3 \| AC$ и $S_1M_3 \| BH$ добиваме $S_1S_3 \perp S_3M_1$ т.е. четириаголникот $S_1M_3M_1S_3$ е правоаголник. Нека дијагоналите на правоаголникот се сечат во точка O_o. Јасно, точките S_1, M_3, M_1, S_3 лежат на кружница $K(O_o, \overline{OM}_1)$. $\Delta M_3S_3H_3$ е правоаголен со хипотенуза M_3S_3. Значи, $\overline{OH}_3=\overline{OM}_3=\overline{OS}_3$, т.е. $H_3 \in K(O_o, \overline{OM}_1)$.

Аналогно се докажува дека H_1, H_2 лежат на кружницата $K(O_o, \overline{OM}_1)$.

Задача 1. Докажете дека во секој триаголник центарот на Ојлеровата кружница лежи на Ојлеровата права.

Решение. Ако триаголникот е разностран, тогаш при ознаките од црт. 2, точките O, M и H се различни и тие лежат на Ојлеровата права за ΔABC. Нека Ојлеровата кружница има центар O_o. Правата на Ојлер за $\Delta M_1M_2M_3$ минува низ неговиот ортоцентар H_1 и тежиштето M_1. Меѓутоа $H_1 \equiv O$ и $M_1 \equiv M$. Според тоа правите p и p_1 имаат две заеднички точки, што значи тие се совпаѓаат, т.е. точката O_o лежи на Ојлеровата права за ΔABC.

Задача 2 (теорема на Хамилтон). Докажете дека ако ΔABC не е правоаголен и ако H е неговиот ортоцентар, тогаш триаголниците ABC, ABH, BCH и ACH имаат заедничка Ојлерова кружница.

Упатство. Искористи дека подножните точки H_1, H_2, H_3 на ΔABC се подножни точки на висини на останатите триаголници.

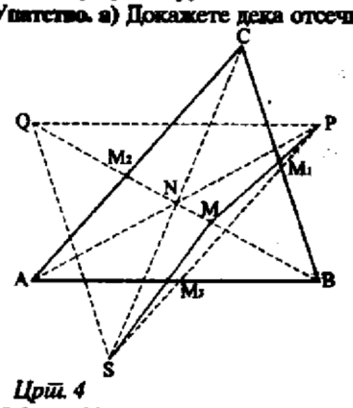
Задача 3. Даден е триаголник ABC и точка M во внатрешноста на триаголникот (црт. 4). Нека M_1, M_2, M_3 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Точките P, Q и S ги избираме така што $\overline{MM}_1=\overline{M_1P}$, $\overline{MM}_2=\overline{M_2Q}$ и $\overline{MM}_3=\overline{M_3S}$.

Докажи дека:

а) Правите AP, BQ и CS минуваат низ една точка.

б) Триаголниците ABC и PQS имаат заедничка Ојлерова кружница.

Упатство. а) Докажете дека отсечките



Црт. 4

AP, BQ и CS низ една точка која ги располовува.

б) За двата триаголника разгледај ги кружниците кои минуваат низ средините на нивните страни.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија