Osječki matematički list 18 (2018), 147-157

Bernoullijevi polinomi

Mihaela Ribičić Penava,* Antonio Nuić†

Sažetak

U ovome radu prezentirana su neka osnovna svojstva Bernoullijevih brojeva i Bernoullijevih polinoma. Razmatrane su primjene Bernoullijevih brojeva i Bernoullijevih polinoma pri računanju suma potencija prvih n prirodnih brojeva, pri razvoju funkcija u Taylorov red te kod numeričke integracije.

Ključne riječi: *Bernoullijevi brojevi, Bernoullijevi polinomi, Euler–Maclaurinova formula*

Bernoulli polynomials

Abstract

Some properties of Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials are given in this paper. Applications of Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials are also presented in the calculation of the sum of powers of the first n natural numbers, in Taylor series for some functions and in numerical integration.

Keywords: *Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, Euler–Maclaurin formula*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: mihaela@mathos.hr

†Odjel za matematiku Sveučilište u Osijeku, email: antonio.nuic@mathos.hr

1 Uvod

Jacob Bernoulli (1655.–1705.), švicarski matematičar

Jacob Bernoulli je 1690. godine proučavajući zbroj potencija prirodnih brojeva došao do otkrića Bernoullijevih polinoma B_n. Njegov je rezultat u obliku

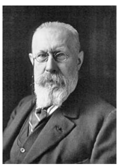
$$\sum_{j=0}^{k-1} j^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(k) - B_{n+1}(0)\right)$$

Leonhard Euler (1707.–1783.), švicarski matematičar i fizičar

posthumno objavljen 1713. godine u radu *Ars Conjectandi*. Godine 1738. Leonhard Euler je definirao Bernoullijeve polinome pomoću funkcije izvodnice[1]. U ovome radu će biti prezentirana Eulerova definicija Bernoullijevih brojeva i Bernoullijevih polinoma. Naziv "Bernoullijevi polinomi" se u literaturi prvi puta pojavljuje tek 1851. godine u radu švicarskog matematičara Josepha Ludwiga Raabea. Osim navedena dva pristupa definiranju Bernoullijevih polinoma u literaturi se pojavljuje još nekoliko različitih načina definiranja. Primjerice Paul Émile Appell je Bernoullijeve polinome definirao pomoću Appellovog niza polinoma, dok je njemački matematičar Adolf Hürwitz proučavao Bernoullijeve polinome pomoću Fourierovog reda (zainteresirani čitatelji detalje mogu pronaći u [2]). U radu [3] objavljenom 1999. godine talijanski matematičar Felice Costabile je Bernoullijeve polinome definiranirao pomoću determinante.

Joseph Ludwig Raabe (1801.–1859.), švicarski matematičar

Bernoullijevi polinomi i Bernoullijevi brojevi imaju svoju primjenu kod računanja sume potencija prirodnih brojeva, pri razvoju funkcija u Taylorov red (vidjeti [5]), ali i u numeričkoj matematici, primjerice u numeričkoj integraciji (vidjeti [7], str.61).



Paul Émile Appell (1855.–1930.), francuski matematičar

2 Bernoullijevi brojevi

Navedimo definiciju Bernoullijevih brojeva pomoću funkcije izvodnice.

Definicija 2.1. Za $|t| < 2\pi$ i $n \in \mathbb{N}_0$ brojeve B_n zadane pomoću funkcije izvodnice formulom

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

Adolf Hürwitz (1859.–1919.), njemački matematičar

nazivamo Bernoullijevi brojevi.

U tablici 1 prikazano je prvih nekoliko Bernoullijevih brojeva.

[1]Neka je (a_n) niz realnih ili kompleksnih brojeva. Kažemo da je funkcija g pripadna funkcija izvodnica za niz (a_n) ako postoji prikaz $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$-\frac{5}{66}$

Tablica 1: Vrijednosti Bernoullijevih brojeva za $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$

Zainteresirani čitatelji izvod za prvih nekoliko Bernoullijevih brojeva mogu vidjeti u [6].

U nastavku dokazujemo da su svi Bernoullijevi brojevi neparnoga indeksa osim B_1 jednaki nuli.

Propozicija 2.1. *Za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća jednakost*

$$B_{2k+1} = 0.$$

Dokaz. Definiramo funkciju

$$F(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
F(-t) &= \frac{-t}{e^{-t} - 1} - 1 + \frac{-t}{2} \\
&= \frac{-t}{e^{-t} - 1} \cdot \frac{e^t}{e^t} - 1 - \frac{t}{2} \\
&= \frac{t + t(e^t - 1)}{e^t - 1} - 1 - \frac{t}{2} \\
&= \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2} \\
&= F(t),
\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da je funkcija F parna.

Kada raspišemo funkciju F i iskoristimo njenu parnost dobivamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = B_2\frac{t^2}{2!} + B_3\frac{t^3}{3!} + B_4\frac{t^4}{4!} + B_5\frac{t^5}{5!} + B_6\frac{t^6}{6!} + \ldots$$

$$= B_2\frac{t^2}{2!} - B_3\frac{t^3}{3!} + B_4\frac{t^4}{4!} - B_5\frac{t^5}{5!} + B_6\frac{t^6}{6!} + \ldots$$

Po definiciji jednakosti polinoma vrijedi $B_3 = -B_3, B_5 = -B_5, B_7 = -B_7, \ldots$ iz čega slijedi da su svi Bernoullijevi brojevi neparnoga indeksa osim B_1 jednaki nuli, odnosno $B_{2k+1} = 0, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. $\square$

Napomena 2.1. Pomoću definicije 2.1 može se pokazati da vrijedi sljedeća rekurzivna formula za Bernoullijeve brojeve (vidjeti [5])

$$B_0 = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} B_j = 0, \ \ n \geq 1.$$

3 Bernoullijevi polinomi

Navedimo Eulerovu definiciju Bernoullijevih polinoma pomoću funkcije izvodnice.

Definicija 3.1. Za $|t| < 2\pi$ i $n \in \mathbb{N}_0$ Bernoullijeve polinome $x \mapsto B_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, definiramo pomoću funkcije izvodnice formulom

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{1}$$

Navodimo prvih nekoliko Bernoullijevih polinoma

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1,\\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2},\\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6},\\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,\\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},\\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

Grafički prikazi prvih nekoliko Bernoullijevih polinoma mogu se vidjeti na slici 1 .

Veza između Bernoullijevih brojeva i Bernoullijevih polinoma je dana u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.1. *Za Bernoullijeve polinome i Bernoullijeve brojeve vrijedi*

$$B_n(0) = B_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz. Ako u definiciju Bernoullijevih polinoma uvrstimo $x = 0$ dobivamo

$$\sum_{n=o}^{\infty} B_n(0)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=o}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!},$$

pa slijedi $B_n(0) = B_n$. □

U nastavku navodimo neka svojstva Bernoullijevih polinoma.

Propozicija 3.2. *Za Bernoullijeve polinome vrijedi*

(i)

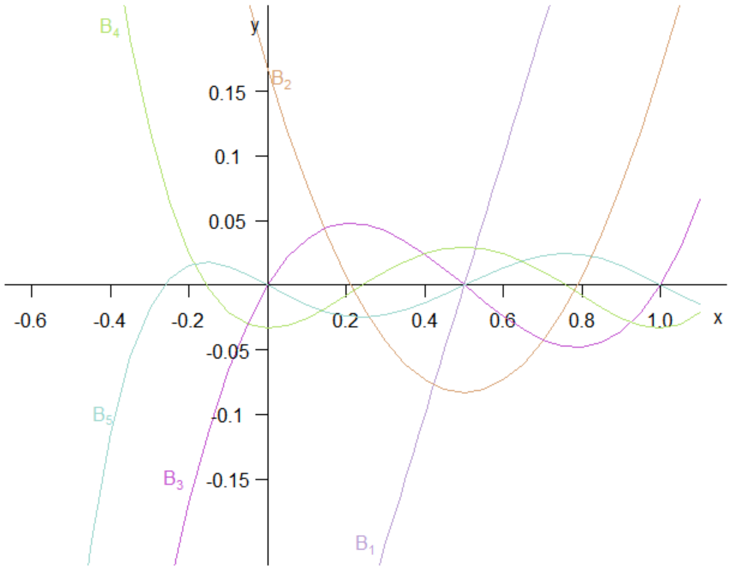
$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

(ii)

$$B_0(x) = 1, \; B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

(iii)

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$



Slika 1: Grafovi Bernoullijevih polinoma

Dokaz. (i) Zamijenimo li u jednakosti (1) x s $1-x$ dobijemo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{t(1-x)}}{e^t-1} = \frac{te^t e^{(-t)x}}{e^t-1}\cdot\frac{e^{-t}}{e^{-t}} \\ &= \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}} = \frac{(-t)e^{-tx}}{e^{-t}-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{(-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Na taj način smo dokazali da vrijedi jednakost (2).

(ii) Dokazali smo da je $B_0(x) = 1$, pa po pravilu za derivaciju konstantne funkcije vrijedi $B_0'(x) = 0$. Deriviranjem jednakosti (1) po varijabli x dobivamo niz jednakosti

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} B_n'(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t^2 e^{tx}}{e^t - 1} \\ &= t\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)B_n(x)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nB_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!},\end{aligned}$$

iz čega slijedi (3).

(iii) Raspisivanjem izraza $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[B_n(x+1) - B_n(x)]\frac{t^n}{n!}$ pomoću pripadne funkcije izvodnice imamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}[B_n(x+1) - B_n(x)]\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{t(x+1)}}{e^t - 1} - \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = te^{tx} \\ &= t \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Ako usporedimo prvi i zadnji izraz u gornjem nizu jednakosti, zaključujemo

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Specijalno za $n = 0$ vrijedi

$$B_0(x+1) - B_0(x) = 1 - 1 = 0.$$

Ovime je jednakost (4) dokazana.

□

Više detalja o Bernoullijevim polinomima i njihovim svojstvima može se naći u [1] i [4].

4 Primjene Bernoullijevih brojeva i Bernoullijevih polinoma

Bernoullijevi brojevi pojavljuju se u razvoju funkcija tangens i kotangens u Taylorov red.

Primjer 4.1. Dokažimo da vrijedi

$$\mathrm{ctg}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k!)} x^{2k-1}. \tag{5}$$

Rješenje Pomoću Eulerove formule[2] dobivamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned} x\mathrm{ctg}x &= x\frac{\cos x}{\sin x} = ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} \\ &= ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} \cdot \frac{e^{ix}}{e^{ix}} = \frac{2ix}{e^{2ix}-1} + ix. \end{aligned}$$

Nakon toga, korištenjem funkcije izvodnice Bernoullijevih brojeva, dobijemo

$$\frac{2ix}{e^{2ix}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2ix)^k}{k!}.$$

Kako su svi Bernoullijevi brojevi neparnoga indeksa osim $B_1 = -1/2$ jednaki nuli slijedi

$$\frac{2ix}{e^{2ix}-1} + ix = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_{2k} \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

Prema tome dobili smo

$$x\mathrm{ctg}x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_{2k} \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}$$

iz čega slijedi jednakost (5). ◀

[2]Eulerova formula: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Kao što smo naveli na početku rada, Jacob Bernoulli je pokazao da se Bernoullijevi polinomi javljaju u formuli za sumu potencija prvih k prirodnih brojeva.

Primjer 4.2. Dokažimo da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + k^n = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(0)). \tag{6}$$

Rješenje Formula (6) se dokaže korištenjem već dokazane jednakosti (4). Znamo da za sve $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k$ vrijedi

$$B_{n+1}(i+1) - B_{n+1}(i) = (n+1) \cdot i^n.$$

Ako zbrojimo te jednakosti za sve $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k$ dobijemo

$$B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(0) = (n+1)(0^n + 1^n + 2^n + \ldots + k^n).$$

Nakon što gornji izraz podijelimo s $n+1$ dobijemo formulu (6). ◀

Bernoullijevi brojevi i polinomi pojavljuju se u Euler–Maclaurinovoj formuli koja se koristi u numeričkoj matematici, točnije u formuli za numeričku integraciju (vidjeti [7]).

Primjer 4.3. Dokažimo da za funkciju $f \in C^{2n}[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right]\\ + \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(t)B_{2n}(t)dt.\end{aligned} \tag{7}$$

Rješenje Uzastopnom primjenom parcijalne integracije i dokazanih svojstava Bernoullijevih polinoma dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 f(t)B_0(t)dt = \int_0^1 f(t)B_1'(t)dt \\
&= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \int_0^1 f'(t)B_1(t)dt \\
&= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)B_2'(t)dt \\
&= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}B_2[f'(1)-f'(0)] + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)B_2(t)dt \\
&= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}B_2[f'(1)-f'(0)] - \frac{1}{4!}B_4[f'''(1)-f'''(0)] \\
&+ \frac{1}{4!}\int_0^1 f^{(4)}(t)B_4(t)dt.
\end{aligned}$$

Ako postupak parcijalne integracije nastavimo dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] \\
+ \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(t)B_{2n}(t)dt,
\end{aligned}$$

čime je dokazana Euler–Maclaurinova formula (7). ◀

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function*, Dover Publications, New York, 1964.

[2] P. E. Appell, *Sur une classe de polynomes*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 9(1880), 119–144.

[3] F. Costabile, *Expansion of real functions in Bernoulli polynomials and applications*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, N. 273 (1999).

[4] K. Dilcher, *Bernoulli and Euler Polynomials*, (javno dostupno: `http://dlmf.nist.gov/24`)

[5] N. Elezović, *Bernoullijevi polinomi*, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2015, (javno dostupno: `https://www.fer.unizg.hr/\_download/repository/p06.pdf`)

[6] A. Nuić, *Bernoullijevi i Eulerovi polinomi*, Završni rad, Osijek, 2016.

[7] N. Ujević, *Numerička Matematika*, Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja, Sveučilište u Splitu, Split, 2004.