

**Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески**

**МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 21
(збирка задачи за VIII и IX одделение)**

Скопје, 2020

Рецензенти

проф. д-р Методи Главче

доц. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 21 : (збирка задачи за VIII и IX одделение) / Ристо
Малчески, Алекса Малчески, Самоил Малчески. - Скопје : Армаганка,
2020. - 320 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 314-320

ISBN 978-608-4904-48-9

1. Малчески, Алекса [автор] 2. Малчески, Самоил [автор]

COBISS.MK-ID 51309061

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Алгебра	
I.1. Реални броеви	7
I.2. Алгебарски изрази	9
I.3. Равенки и неравенки	13
I.4. Неравенства. Најголема и најмала вредност на израз	15
II Текстуални задачи	
II.1. Броеви и цифри	18
II.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	19
II.3. Времето е важно	20
II.4. Задачи со мерни броеви	22
II.5. Дополнителни задачи	26
III Теорија на броеви	
III.1. Деливост	28
III.2. Прости и сложени броеви	31
III.3. Диофантови равенки	32
III.4. Конгруенции	35
IV Логика и комбинаторика	
IV.1. Логички задачи	37
IV.2. Принцип на Дирихле	38
IV.3. Пребројувања	41
IV.4. Дополнителни задачи	43
V Геометрија	
V.1. Триаголник	46
V.2. Четириаголник	51
V.3. Питагорова теорема	54
V.4. Плоштина на триаголник и четириаголник	58
V.5. Многуаголник	63
V.6. Кружница и круг	64
V.7. Конструктивни задачи	66
V.8. Стереометрија	71

Решенија на задачите	
I	Алгебра
I.1.	Реални броеви 74
I.2.	Алгебарски изрази 82
I.3.	Равенки и неравенки 95
I.4.	Неравенства. Најголема и најмала вредност на израз 101
II	Текстуални задачи
II.1.	Броеви и цифри 110
II.2.	Пазаруваме и пресметуваме пари 114
II.3.	Времето е важно 116
II.4.	Задачи со мерни броеви 122
II.5.	Дополнителни задачи 134
III	Теорија на броеви
III.1.	Деливост 138
III.2.	Прости и сложени броеви 150
III.3.	Диофантови равенки 154
III.4.	Конгруенции 167
IV	Логика и комбинаторика
IV.1.	Логички задачи 173
IV.2.	Принцип на Дирихле 177
IV.3.	Пребројувања 185
IV.4.	Дополнителни задачи 192
V	Геометрија
V.1.	Триаголник 198
V.2.	Четириаголник 219
V.3.	Питагорова теорема 229
V.4.	Плоштина на триаголник и четириаголник 244
V.5.	Многуаголник 261
V.6.	Кружница и круг 268
V.7.	Конструктивни задачи 276
V.8.	Стереометрија 306
Литература 314	

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 21* е наменета за талентираниите ученици по математика од осмо и деветто одделение и е комплементарна со книгите *Математички талент 5*, *6*, *17* и *18*, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Меѓутоа, сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 582 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од четиринаесет до шестнаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2020 г.

Авторите

I АЛГЕБРА

I.1. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Ако на природен број кој завршува на цифрата 5 му се избрише последната цифра, добиениот број се помножи со неговиот следбеник и на производот од десно му се допише 25, се добива квадратот на почетниот број. Докажи!

2. Определи ја вредноста на изразот

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 6 + \dots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots + 100 \cdot 300 \cdot 900}.$$

3. Реши го бројниот ребус:

$$\overline{abcd} = (5c + 1)^2$$

4. Реши го бројниот ребус:

$$(6d + 3)^2 = \overline{abcd}.$$

5. Определи трицифрен природен број за кој односот на бројот и збирот на неговите цифри е најмал.

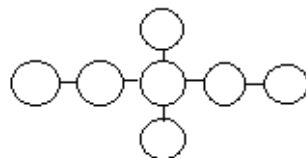
6. Со колку цифри се запишува бројот $4^{16} \cdot 5^{25}$?

7. Пресметај квадратен корен од бројот $\underbrace{1000\dots05}_{2011} \cdot \underbrace{111\dots1}_{2012} + 1$.

8. Пресметај квадратен корен од бројот $\underbrace{111\dots1}_n \underbrace{1222\dots2}_{n+1} 5$.

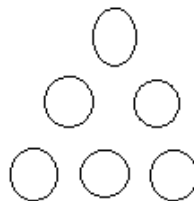
9. Дали бројот $1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 9^9$ е квадрат на природен број?

10. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги броевите $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ така што збирот на цифрите на единиците на броевите запишани во петте хоризонтално поставени кругчиња е еднаков на збирот на цифрите на единиците во трите верти-



кално поставени кругчиња.

11. Дали е можно броевите $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ да се распоредат така што збирот на цифрите на единиците на броевите запишани во кругчињата на секоја страна на триаголникот е еднаков?



12. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4 \cdot 3^7 + 5 \cdot 3^7$, б) $25 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^8$, в) $\frac{48 \cdot 4^{10}}{3 \cdot 4^3}$

13. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{2^{101} - 2^{99}}{2^{100} - 2^{99}} \cdot \frac{2869^2 - 2814^2}{3+6+9+\dots+30}$.

14. Пресметај ја вредноста на изразот

$$3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{1000}.$$

15. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 + \dots + \left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{1000}\right)^2.$$

16. Ако $A = -3^{2008} : 27^{669}$ и $B = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + 1$, пресметај $-\frac{A^3}{B^2}$.

17. Пресметај

а) $\sqrt{\left(\frac{11}{5} + \sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{11}{5} - \sqrt{5}\right)^2}$, б) $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$

18. Пресметај ги A^2 и A ако $A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

19. Ако $x = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2x} + \sqrt{\sqrt{2} - 2x}.$$

20. Ако $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ определи ја вредноста на изразот $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$.

21. Дали бројот $\sqrt{0,1111\dots}$ е рационален или е ирационален.

22. Докажи дека $\sqrt{28} - \sqrt{(5 - 2\sqrt{7})^2}$ е рационален број.

23. Дали вредноста на изразот

$1,494949\dots + \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$
е рационален или ирационален број.

24. Дали вредноста на изразот $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$ е рационален или ирационален број?
25. Докажи дека $A = \sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$ е рационален број.
26. Рампо и Васко играат со две коцки за играње на кои се запишани броевите $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{5}$, на секоја страна по еден рој. Рампо победува ако производот на два добиени броја е рационален, а Васко победува ако производот на двата добиени броја е ирационален. Кој има поголеми шанси да победи?

1.2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

27. Упрости го изразот:

а) $4ab^2 \cdot \frac{1}{6}a^2b^5 \cdot 3$, б) $2^{k+1} - 2^k$, в) $\frac{(2a)^6}{(2a)^5}$.

28. Пресметај ја вредноста на изразот $A = \frac{2x^6}{x^4} - x^2$, за $x = \frac{1}{2}$.

29. Пресметај ја вредноста на изразот $C = \frac{a^0b^{-1}}{ab^2}$, за $a = -10$ и $b = -2$.

30. Сведи го во нормален вид мономот:

$$-2xy(-\frac{3}{2})x^2y.$$

31. Помножи ги мономите: $\frac{3}{2}x^3y$ и $12xy^2$.

32. Упрости го изразот:

$$\frac{5^{5n}}{5^n + 3 \cdot 5^n + 5^n}.$$

33. Упрости го изразот:

$$A = \left(\frac{a^5}{a^{-2}}\right)^n \cdot \frac{1}{a^7}.$$

34. Упрости го изразот:

а) $(-\frac{2}{3}ax^5y^6)^2$, б) $\frac{4x^5y^2}{-0,5x^3y}$.

35. Упрости го изразот:

$$16\frac{1}{20}ax^{n+1}y^3 - 16,05ax^{n+1}y^3.$$

36. Полиномот

$$x^2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}x - 2 - \frac{x^2}{2} + 4 - \frac{x}{2}$$

сведи го во нормален вид.

37. Собери ги полиномите:

$$p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 2 \text{ и } q(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 0,5x - 1\frac{1}{2}.$$

38. Пресметај го изразот $u + v + w$ ако

$$u = -x^n + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, v = 4x^n - 2x^2 + 2, w = -x^n + 2x^2 - x + 3.$$

39. Изврши го множењето:

а) $(-\frac{1}{3}a^3b) \cdot (12a^5b - 4a^4b^2 + 7a^3b^3)$,

б) $(x^2 - xy + 2y^2)(2x - y)$.

40. Сведи го во нормален вид полиномот:

а) $A = -2a(3a^2 + 2b + 5) - [2a^2 - 5b(a + 3b) + 15b^2] + 6a^3 + 8a$,

б) $A = (1 - 0,5x)^2 - (8x^5 - 11x^4 + 17x^3) : (\frac{2}{3}x^3)$.

41. Упрости го изразот:

$$(15ax^2y - 21x^3y^3 + 5x^4y) : (5x^2y).$$

42. Полиномот $p(x) = x^2 + 3x + 2$ подели го со полиномот $q(x) = x + 2$.

43. Разложи го на множители триномот:

$$16n^4 - 40n^2 + 9.$$

44. Упрости го изразот:

$$A = [(4a + 5b)^2]^2 - [(4a - 5b)^2]^2 - 160ab(4a - 5b)^2.$$

45. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A = \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^{2n+1}}{a^{2n-2}} \right) \cdot (3a - 1) \text{ за } a = -2.$$

46. Определи ја бројната вредност на полиномот $M = A + B - C$ каде

$$A = \frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2, \quad B = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}a^2 \text{ и } C = 2x^2 - \frac{1}{2}a^2 - ax \text{ за } a = 5 \text{ и } x = \frac{1}{4}.$$

47. Докажи дека дробката $A = \frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^4 - n^2 - 2n - 1}$ е правилна и скратлива за секој цел број $n > 2$.

48. Пресметај ја вредноста на изразот $A = \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2}$ за $a = -3$ и $b = 4$.

49. За реалните броеви a, b и c важи $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Докажи дека $a = b = c$.

50. За реалните броеви a, b, c, d важи

$$a^2 + d^2 - 2(ab + bc + cd - b^2 - c^2) = 0.$$

Докажи дека $a = b = c = d$.

51. Докажи дека ако се исполнети равенствата

$$x + y + z = a \text{ и } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a},$$

тогаш барем еден од броевите x, y, z е еднаков на a .

52. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a + b + c = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Определи ја вредноста на изразот $M = a^4 + b^4 + c^4$.

53. Определи ги броевите x, y, z а кои важи

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0.$$

54. Ако $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, пресметај ја вредноста на изразот $a^{2022} - 2022b$.

55. Упрости го изразот:

а) $A = 10(m^2 - 15) - 12(m - 4)(m + 4),$

б) $A = (2a - 3b)(2a + 3b)(4a^2 + 9b^2)$.

56. Во равенството на местата на ѕвездичките стави соодветни знаци и мономи така што ќе биде точна формулата за скратено множење:

$$(* * *)^2 = a^2 + 6ab * *.$$

57. Изврши го степенувањето:

$$\left(\frac{2}{3}ab^7 + a^3c\right)^3.$$

58. Пресметај го производот:

$$\left(\frac{x}{2} + a^k b\right)\left(\frac{x}{2} - a^2 b^k\right).$$

59. Докажи дека

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2.$$

60. Ако $a + b + c = 0$, тогаш $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Докажи!

61. Пресметај $x^3 + y^3$ ако $x + y = a$ и $x^2 + y^2 = b$.

62. Разложи го на множители полиномот:

$$p(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4xy.$$

63. Разложи го на множители полиномот:

$$p(x, y) = 3ax - 4by - 4ay + 3bx.$$

64. Разложи го на множители полиномот:

а) $x^2 + 3x + 2$,

б) $x^2 + 3x - 4$

65. Разложи го на множители полиномот:

$$p(x) = x^6 - 1.$$

66. Разложи го на множители полиномот $p(x) = x^3 - 7x - 6$.

67. Разложи го на множители полиномот

$$p(x, y, z) = x^3 - 3x^2y - xz^2 + 3xy^2 - y^3 + yz^2.$$

68. Разложи го на множители полиномот:

$$p(x, y, z) = x^3(y - z) + y^3(z - x) - z^3(y - x).$$

69. Разложи го на множители полиномот:

а) $x^2 + 8x + 12$,

б) $4x^2 - 7x - 2$.

70. Разложи го на множители полиномот: $a^6 + 27$.

71. Нека x е реален број поголем од 1 таков што $x + \frac{1}{x} = 3$. Пресметај ги вредностите на изразите $x^4 + \frac{1}{x^4}$ и $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

72. Нека x е реален број поголем од 1 таков што $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$. Пресметај ги вредностите на изразите $x + \frac{1}{x}$ и $x - \frac{1}{x}$.

73. Нека x е реален број таков што $x^{2002} + \frac{1}{x^{2002}} = 2$. Пресметај ги вредностите на изразите $x^{2003} + \frac{1}{x^{2003}}$ и $x^{2004} + \frac{1}{x^{2004}}$.

1.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

74. Реши ја равенката

$$(2x - 3)(3x - 1) + (5 - 6x)(x + 4) = 28$$

75. Реши ја равенката

$$5(1 - x) + x = 4(3 - 2x) - (x + 3).$$

76. Реши ја равенката

а) $\frac{x-1}{3} + \frac{3x+1}{2} = 2x + \frac{1-x}{6}$,

б) $3(4x - 2) - 2x = 5(x - 1) - (4 - 5x)$.

77. Реши ја равенката

$$(0,8x - 0,5)^2 + (0,6x - 1,3)^2 = 4(0,5x - 0,7)(0,5x + 0,7) - 6(0,15x + 0,08).$$

78. Реши ја равенката

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

79. Реши ја равенката

$$3x^2 - 2x + 9 = 0.$$

80. Реши ја равенката:

$$\sqrt{5-x^2} = \sqrt{6-2\sqrt{5}}.$$

81. Реши ја равенката:

$$\sqrt{3+x^2} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}.$$

82. Реши ја равенката:

$$\sqrt{x^2} = x + 5.$$

83. Реши ја равенката:

$$|\sqrt{x^2} - 5| = 3.$$

84. Реши ја равенката:

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

85. Реши ја равенката:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

86. Реши ја равенката:

$$x^3 + 10x^2 + 24x = 0.$$

87. Реши ја равенката:

$$x^3 - x^2 - 21x = 0.$$

88. Реши ја равенката:

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0.$$

89. Реши ги равенките:

$$\text{а) } (2008^{251})^{4x^2} = 2008^{2007} \cdot 2008^{2009}, \quad \text{б) } 32^x = 2^{10} \cdot 2^{2000},$$

$$\text{в) } \frac{1}{9} \cdot 3^{10} + \frac{1}{3} \cdot 3^9 - 5 \cdot 3^8 = x \cdot 3^8, \quad \text{г) } \frac{x}{25 \cdot 3^4} = \frac{6 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 125}.$$

90. Во множеството реални броеви реши ја равенката:

$$\frac{a^{2012} + b^8 + c^6 + 1}{2} = a^{1006} + b^4 - c^3 - 1.$$

91. Определи го бројот на точките со целобројни координати (x, y) за кои е исполнето неравенството $|x - 4| + |y - 6| < 10$.

92. Определи ја бројната вредност на изразот

$$C = a^3 - a^2b - 2a^3 + a^2c - 5a^2b + 4a^3 - c^3$$

ако a е вредноста на изразот $p = -(-\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2})^{-6}$, b е корен на равенката $7|x| - 3|x| = 2|x| + 6$ и c е најмалиот природен број кој е решение на неравенката $\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{3} < \frac{1-x}{4}$.

I.3. НЕРАВЕНСТВА. НАЈГОЛЕМА И НАЈМАЛА ВРЕДНОСТ НА ИЗРАЗ

93. Што е поголемо

а) $3 \cdot 5^{41}$ или $5 \cdot 3^{61}$, б) 2^{2010} или 33^{402}

в) $0,064^{669}$ или $0,16^{1004}$?

94. Што е поголемо 2^{2012} или 15^{503} ?

95. Што е поголемо 2^{7n+3} или 5^{3n+1} , $n \in \mathbb{N}$?

96. Што е поголемо $4^{2012} + 9^{2012}$ или $2^{2013} \cdot 3^{2012}$?

97. Почнувајќи од најмалиот подреди ги по големина броевите: $a = 2^{45}$, $b = 3^{36}$, $c = 4^{27}$, $d = 5^{18}$.

98. Што е поголемо $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ или $\sqrt{7} + \sqrt{6}$.

99. Што е поголемо:

а) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5} + 7$, б) $\sqrt{7 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}}$ или 3 ,

в) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ или $\sqrt{11} - \sqrt{10}$, г) $2 - \sqrt{3}$ или $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$,

д) $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

100. Докажи:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2020^{2020}} < 1.$$

101. Докажи:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2020^{2020}} < \frac{1}{2}.$$

102. Ако a и b се позитивни реални броеви такви што $ab > a + b$, тогаш $a + b > 4$. Докажи!

103. Докажи дека не постојат реални броеви a, b, c и d такви што

$$a - b^2 > \frac{1}{4}, b - c^2 > \frac{1}{4}, c - d^2 > \frac{1}{4}, d - a^2 > \frac{1}{4}. \quad (1)$$

104. Докажи дека не постојат броеви $a, b, c \in (0, 1)$ такви што

$$a(1 - b) > \frac{1}{4}, b(1 - c) > \frac{1}{4}, c(1 - a) > \frac{1}{4}. \quad (1)$$

105. Докажи дека

$$\sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{13}}} < 3.$$

106. Докажи дека:

$$\text{а) } \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < 3, \quad \text{б) } \sqrt{5 + \sqrt{\sqrt{17 + \sqrt{37}} + \sqrt{2}}} > 3,$$

$$\text{в) } \frac{5 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}{5 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \frac{1}{4}.$$

107. Докажи го неравенството:

$$a^2 + \frac{1}{4}b^2 \geq ab.$$

108. Докажи го неравенството

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4, \text{ ако } a > 0, b > 0.$$

109. Определи ја најголемата вредност на полиномот

$$p(x) = -x^2 - 4x - 4.$$

110. Определи ги x и y за кои полиномот

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$$

прима најмала вредност.

111. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 4z.$$

112. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$2x^2 + 6y^2 - 6xy + 3.$$

113. Определи ја најголемата вредност на изразот

$$\frac{1}{2x^2 + y^2 + 2y + 2xy + 4}.$$

114. Докажи дека производот на два позитивни реални броеви чиј збир е даден е најголем ако и само ако тие броеви се меѓусебно еднакви.

115. Докажи дека производот на два позитивни реални броеви чиј збир на квадрати е даден е најголем ако и само ако тие броеви се меѓусебно еднакви.

116. За позитивните реални броеви x и y важи $x + y = a$. Определи ја најмалата вредност на изразот $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

117. Даден е изразот $\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}$. Ако $x = 361979$, $z = 561980$, определи ги сите вредности на y за кои изразот прима најмала можна вредност.

118. За позитивните реални броеви x и y важи $x + y = a$. Определи ја најголемата вредност на производот x^2y .

119. Определи ја најмалата вредност на изразот:

а) $x + \frac{1}{x-1}$, $x > 1$,

б) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Двоцифрен број собран со бројот кој е запишан со истите цифри, но во обратен редослед дава квадрат на природен број. Определи ги сите вакви двоцифрени броеви.
2. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се два пати поголеми од производот на цифрите со кои се запишани.
3. Нека x, y, x се непарни цифри такви што $x < y < z$. Збирот на сите трицифрени броеви формирани од цифрите x, y, x е десет пати поголем од трицифрениот број запишан само со цифрата x . Определи ги цифрите x, y, z .
4. Определи ги сите трицифрени природни броеви кои се 22 пати поголеми од збирот на своите цифри.
5. Разликата на квадратите на два двоцифрени броја е еднаква на 7920. Вториот број се добива од првиот со замена на местата на цифрите на првиот број. Кои се тие броеви?
6. Разликата на две дробки е $\frac{1}{5}$. Броителот на првата дробка е три пати поголем од броителот на втората дробка, а именителот на првата дробка е два пати поголем од именителот на втората дробка. Определи ги овие дробки.
7. Збирот на два броја е 135, а 35% од едниот број се еднакви на 28% од другиот број. Определи го овие броеви.
8. Наставникот му дал на Ѓорѓи да подели два броја. Ѓорѓи добил количник 74 и остаток 22. Тогаш направил проверка, т.е. го помножил количникот со делителот и на добиениот производ му го додал остатокот, па така добил 30214. Имало грешка. Ѓорѓи при ова множење, т.е. при контролата во делителот на местото на десетките една шестка ја прочитал како нула. Определи ги деленикот и делителот.

9. Павел замислил еден број, од десно му допишал 2 и на така добиениот број му додал 14. На бројот кој го добил од десно му допишал 3 и на добиениот број му додал 52. Кога така добиениот број го поделил со 60, добил количник кој е за 6 поголем од замислениот број и остатокот кој бил еднаесет пати поголем од замислениот број. Кој број го замислил Павел?
10. Од даден трицифрен број со ненулни цифри со разместување на неговите цифри се добиени сите можни броеви. Збирот на овие броеви е 1998. Со кои цифри е запишан дадениот трицифрен број?
11. Определи ја најмалата дробка со која треба да се поделат дробките $\frac{8}{15}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{20}{21}$ за да во сите три случаи количникот е природен број.
12. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 24. Бројот еднакво се чита од лево на десно и од десно на лево. Бројот формиран од последните две цифри е за 36 поголем од бројот формиран од првите две цифри. Определи го овој четирицифрен број.

II.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

13. По намалувањето на цената за 20% за износ од 240 денари може да се купи 1 метар платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 270 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето на цената?
14. Иван потрошил определена сума пари за купување книга, ташна и пенкало. Ако ташната била 5 пати поевтина, пенкалото 2 пати поевтино, а книгата 2,5 пати поевтина отколку што е вистинската цена, тогаш Иван ќе плател 160 денари. Ако ташната била поевтина 2 пати, пенкалото 4 пати, а книгата 3 пати, тогаш тој ќе плател 240 денари. Колку пари потрошил Иван?
15. Еден ученик купил чанта, пенкало и тетратка. Ако чантата, пенкалото и тетратката беа 5 пари, 2 пати и 2,5 пати поевтини, соодветно, тој ќе платеше 800 денари. Ако пак истите предмети беа 2 пати, 4 пати и 3 пати поевтини соодветно, тој ќе платеше 1200 денари. Колку пари платил ученикот за купувањето на овие предмет?

16. Во едно коло на спортска прогноза пријателите Ангел, Бојан и Славе ги вложиле следниве суми: Ангел 600 денари, Бојан 900 денари и Славе 1500 денари. На прогнозата добиле вкупно 170000 денари. Како правилно ќе ја поделат добивката?
17. Четири патници патувале со такси во иста насока, во четири места кои се еднакво оддалечени од своите соседни места. Првиот патник при излегувањето од таксито ја платил четвртина од сумата која тогаш ја покажувал таксиметарот, вториот ја платил третината, а третиот и четвртиот ја платиле половината од сумата која таксиметарот ја покажувал во моментот на излегувањето на секој од нив. Дали таксистот наплатил повеќе или помалку отколку кога би возел еден патник на целата релација и за колку?
18. Три групи работници заработиле 113 евра. Секој работник од првата група добил по 13 евра, секој од втората група добил по 5 евра и секој од третата група добил по 4 евра. По колку работници имало во секоја група, ако вкупниот број работници бил 16?

II.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

19. Во една година 1. јануари и 1. април паднале во четврток. Колку месеци во таа година се со пет петоци?
20. Една бригада сама може да заврши една работа за 10 дена, а друга за $13\frac{1}{2}$ дена. Во работата зеле учество $\frac{1}{3}$ од составот на првата бригада и 75% од составот на втората бригада. За колку часа е завршена работата ако работниците дневно работеле по 8 часа?
21. Четири работници, ако работат заедно, можат да завршат една работа за 9 дена. Меѓутоа работниците не почнале да работат истовремено, туку тие почнувале да работат еден по друг на еднакви временски интервали. Тие ја завршиле работата и притоа работникот кој почнал прв да работи работел 5 пати подолго од работникот кој последен почнал да работи. Сите работници работеле со еднаков интензитет на производство. За колку денови е завршена работата?
22. Бригада трактористи треба да изора блок за определено време, при што дневно треба да ора по 360 декари. Бригадата ја натфрлила нор-

мата за $16\frac{2}{3}\%$ и за последниот ден од рокот и останало да изора 60 декари. Колку декари е блокот?

23. Неколку трактори треба да изораат две ниви. Првиот ден сите трактори работеле на првата нива. Вториот ден тракторите се поделиле така што половината трактори тој ден ја доорале првата нива, а другата половина ја орала втората нива чија плоштина била два пати помала од плоштината на првата нива. Колку трактори имало, ако се знае дека неизораниот дел од втората нива кој останал по вториот ден може да го доора еден трактор за 2 дена?
24. Четири работници треба да завршат една работа. Ако првиот, вториот и третиот работат заедно, работата ќе ја завршат за 6 часа, а ако првиот, вториот и четвртиот работат заедно, работата ќе ја завршат за 7,5 часа. Меѓутоа, ако само третиот и четвртиот работат заедно, работата ќе ја завршат за 10 час. За колку часа ќе биде завршена работата ако сите четворица работат заедно?
25. Една ливада за 30 дена ја испасуваат 64 крави. На истата ливада 36 крави може да пасат 60 дена.
 - а) Колку крави ќе ја испасат ливадата за 35 дена?
 - б) Колку дена ќе пасат 50 крави?
26. „Сашо и јас, рече Душан, можеме да завршиме една работа за 20 дена, но, ако ми го дадете Никола наместо Сашо, работата можеме да ја завршиме за 15 дена.“
 „Имам подобра комбинација, рече Никола, ако го земам Сашо да ми помага, работата ќе ја завршиме за 12 дена.“
 За колку дена секој од нив самостојно може да ја заврши работата?
27. Два трактори со различна моќност, кога работат 15 h заедно изоруваат $\frac{1}{6}$ од една нива. Ако првиот трактор ора сам 12 h, а потоа вториот трактор ора сам 20 h, ќе изораат 20% од нивата. За колку часа може секој трактор сам да ја изора нивата?
28. Бригада трактористи треба да изора две ниви, при што првата нива по површина е два пати поголема од втората. Целиот прв ден сите трактори ја орале првата нива, а тогаш се поделиле, па вториот ден половината бригада го довршила орањето на првата нива, а втората половина од бригадата ја орала втората нива. Втората половина од бригадата

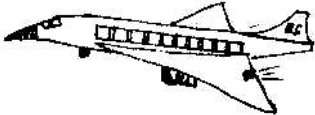
не можела да го доврши орањето на втората нива, па затоа еден тракторист морал да ора уште два дена. Колку трактористи имало во бригадата? (Се претпоставува дека сите трактористи работат под исти услови и имаат иста продуктивност.)

29. Таткото има 49 години и немал деца пред 20-годишна возраст. Секоја година тој и синот заедно го слават родениот ден. Пред колку години таткото бил 8 пати постар од синот?
30. Мајката и кажала на ќерката: „Моите години се сега 9 пати повеќе отколку што беа твоите години тогаш кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Кога ти ќе имаш толку години колку што имам сега јас, збирот на нашите години ќе биде 110.“ По колку години имаат мајката и ќерката?

II.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

31. Две смеси се составени од супстанците A и B на следниот начин: $0,5\text{ g } A + 0,5\text{ g } B$ и $0,1\text{ g } A + 0,3\text{ g } B$. Колку пакувања од овие смеси може да направиме ако располагаме со 12 g од супстанцата A и 15 g од супстанцата B ?
32. На колку начини 1224 kg шеќер може да се спакува во вреќи од 27 kg и 72 kg , така што ќе бидат искористени повеќе вреќи од 27 kg ?
33. Имаме две смеси од злато и сребро. Во првата смеша количествата на овие метали се однесуваат како $2:3$, а во втората како $3:7$. Колку килограми треба да земеме од секоја смеша за да се добие 8 kg нова смеша во која златото и среброт ќе се однесуваат како $5:11$?
34. Морска вода содржи 5% сол. Колку килограми обична вода треба да се измеша со 40 kg морска вода за да се добие раствор кој содржи 2% сол?
35. Дадени се две легури од злато и сребро. Во едната количествата на златото и среброт се однесуваат како $2:3$, а во другата како $3:7$. По колку килограми треба да се земе од секоја легура за да се добие 8 kg нова легура во која златото и среброт се во однос $5:11$?

36. Во сад кој не е полн има 85% раствор на алкохол. Ако садот го дополниме до врвот со 21% раствор на алкохол, течноста ја измешаеме, одлееме онолку течност колку што сме туриле, па потоа повторно до врвот дополниме со 21% раствор на алкохол, добиваме раствор кој содржи 70% алкохол. Колкав дел од садот бил наполнет на почетокот?
37. Иван има две легури од бакар и цинк во кои бакарот и оловото се однесуваат како 19:1 и 4:1. Тој ги стопил легурите и додал 2 *kg* бакар, па така добил легура која тежела 25 *kg* и во која бакарот и оловото се однесуваат како 151:14. Определи ја масата на секоја од почетните легури.
38. Од градовите *A* и *B*, кои се оддалечени 250 *km*, истовремено еден кон друг тргнале два моторциклисти. Брзината на едниот е за 10 *km/h* поголема од брзината на другиот. По два часа патување им останале уште 30 *km* до средбата. Определи ја брзината на секој моторциклист.
39. Предната гума на моторциклот се истрошува по поминати 25000 *km*, а задната по поминати 15000 *km*. По колку поминати километри треба да се променат местата на гумите за да двете гуми истовремено се истрошат? По колку поминати километри моторциклистот треба да купи нови гуми?
40. Воз поминал мост долг 225 *m*, возејќи со постојана брзина, за 27 секунди (сметајќи го времето од доаѓање на локомотивата на мостот, до симнување на последниот вагон од мостот). Потоа возот поминал покрај пешак, кој се движел во спротивна насока од возот, за 9 секунди. За тоа време пешакот поминал 9 *m*. Определи ги должината на возот и неговата брзина.
41. Два воза истовремено еден кон друг тргнуваат од местата *A* и *B*. Секој од возовите кога ќе стигне во спротивното место, одма се враќа назад. Првата средба на возовите е на 50 *km* од местото *A*, а втората е на 30 *km* од местото *B*. Определи ја должината на патот меѓу местата *A* и *B*. (Секој од возовите се движи со своја константна брзина.)

42. На чело на колона велосипедистичка трка се наоѓаат велосипедистите Ацо и Борис, возејќи еден покрај друг. Тие толку ги претекнале останатите учесници на трката, што до крајот на трката никој не можел да ги стигне. На 20 km пред целта на Ацо му пукнала гума. Борис продолжил да вози до целта со просечна брзина од 40 km/h . Ацо заради поправка на гумата загубил 3 минути, а потоа до целта возел со просечна брзина од 45 km/h . Кој победил во трката и со колку метри предност?
43. Авион летал од A во B и тоа прво со брзина 180 km/h , а кога му останало да прелета уште 320 km помалку отколку што веќе прелетал, ја зголемил брзината на 250 km/h . Така средната брзина на авионот на целиот пат била 200 km/h . Определи ја должината на летот од A до B .
44. Авион првите 385 km ги прелетал со брзина од 220 km/h . Преостанатиот дел од патот го прелетал со брзина од 330 km/h . Средната брзина на летот на целиот пат била 250 km/h . Колкав пат прелетал авионот?
- 
45. На кружна патека долга 1650 m се движат два моторциклисти со константни брзини. Ако моторциклистите се движат во спротивни насоки се среќаваат секоја минута, а ако пак се движат во иста насока, моторциклистот кој има поголема го пристигнува вториот моторциклист секои единаесет минути. Определи ги брзините на моторциклистите.
46. Авион и хеликоптер истовремено полетале еден кон друг. Во моментот на средбата хеликоптерот прелетал 100 km помалку од авионот и на местото на полетување на авионот стигнал 3 часа по средбата. Авионот стигнал на местото на полетување на хеликоптерот 1 час и 20 минути по средбата. Определи ги брзините на авионот и хеликоптерот и растојанието меѓу местата на полетување.
47. Иван требало да стигне на железничката станица во определено време. Првиот час тој изминал 3 km и пресметал дека ако се движи со оваа брзина, ќе задоцни 40 min . Затоа тој останатиот пат го минал со

брзина од 4 km/h и на станицата стигнал 45 min порано од предвиденото време. Колку километри поминал Иван?

48. Должината на патот од местото A до местото B е 900 km . Од A кон B истовремено тргнуваат автомобил и камион. Камионот се движи со брзина 21 km/h , а автомобилот со брзина 57 km/h . По колку часа на камионот ќе му остане да помине три пати подолг пат отколку на автомобилот?
49. Во $5 \text{ h } 10 \text{ min}$ од градот A кон градот B тргнува патнички воз, кој се движи со средна брзина $48,4 \text{ km/h}$. Од градот C , кој е оддалечен од градот B за $32,44 \text{ km}$ повеќеотколку градот A од градот B , во $8 \text{ h } 4 \text{ min}$ тргнува кон B брз воз кој се движи со средна брзина $62,8 \text{ km/h}$. Градот A е меѓу градовите C и B . Во колку часот и на кое растојание од A брзиот воз ќе го стигне патничкиот воз?
50. Велосипедист тргнал во 7 h од местото A кон местото B и се движел рамномерно без застанување. Во $8 \text{ h } 30 \text{ min}$ тој ја надминал половината од патот за $1,5 \text{ km}$, а во местото B стигнал во $9 \text{ h } 45 \text{ min}$ и тоа за 15 min порано од предвиденото време. Определи ги брзината со која велосипедистот планирал да се движи, брзината со кој се движел и должината на патот од A до B .
51. Чамец поминува $a \text{ km}$ по течението на една река и се враќа назад. Брзината на чамецот по течението е $v_1 \text{ km/h}$, а водата на реката се движи со $v_2 \text{ km/h}$. Докажи дека времето за кое чамецот се движел во двете насоки е поголемо од времето за кое тој патот би го поминал во миран вода.
52. Ана и Михаил живеат во иста зграда и учат во исто училиште. Тие од дома на училиште тргнале истовремено. Ана половината од патот го поминала со брзина $a \text{ km/h}$, а втората половина со брзина $b \text{ km/h}$. Михаил половина од времето одел со брзина $a \text{ km/h}$, а втората половина од времето со брзина $b \text{ km/h}$. Кој стигнал прв на училиште, Ана или Михаил?
53. Од градот A за градот B тргнал велосипедист. Откако патувал $1 \text{ h } 30 \text{ min}$, тој застанал да одмори и се покажало дека преостанатиот

пат е за $16,5\text{ km}$ пократок од до тогаш поминатиот пат. Велосипедистот ја зголемил брзината за 4 km/h и преостанатиот пат го поминал за 45 min . Колку километри е долг целиот пат?

54. Откако го поминал половината од патот од A до B возачот на автомобилот ја зголемил брзината на автомобилот за 25% , па така во B стигнал половина час порано. За колку часа автомобилот го поминал патот од A до B ?
55. Велосипедист тргнал од градот A за градот B , кои се оддалечени 28 km . Откако изминал 2 km велосипедистот го стигнал моторциклист, кој по извесно време стигнал во B , таму престојувал 22 min и на враќање откако поминал 8 km го сретнал велосипедистот. Определи ги нивните брзини, ако моторциклистот пристигнал во A во исто време кога велосипедистот пристигнал во B .
56. Двајца туристи P и M тргнале истовремено од местото A за местото B . Туристот P тргнал пешки, а туристот M со моторцикл со водич H . Минувајќи дел од патот M продолжил понатаму пешки, а водичот H се вратил назад, го зел P и двајцата туристи (M пешки, а P на моторцикл) пристигнале истовремено во B . Растојанието меѓу A и B е 50 km , брзините на пешаците се 5 km/h , а брзината на моторциклот е 60 km/h . Определи го времето за кое туристите стигнале од A до B .
57. Растојанието меѓу A и B е 7 km . Два пешака (првиот од A , вториот од B) тргнале едновременно еден кон друг и се сретнале за помалку од 1 h . Ако првиот пешак одеше двапати побрзо, а брзината на вториот пешак беше за 2 km поголема од реалната брзина, тогаш до моментот на средбата вториот пешак ќе помине поголем дел од растојанието меѓу A и B . Кој пешак се движи побрзо?

II.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

58. На писмена работа по математика 12% од учениците во одделението не ја решиле првата задача, 32% од учениците делумно ја решиле задачата, а остатокот од 14 ученици точно ја решиле задачата. Колку ученици има во ова одделение?

59. Односот на бројот на вртењата за исто време на два запчаници е $3:5$. Големиот запчаник има 40 запчаници повеќе од малиот. Колку запци има малиот запчаник?
60. Музичка група има повеќе од $\frac{1}{2}$ и помалку од $\frac{3}{5}$ членови жени. Определи го најмалиот број членови кој може да го има групата.
61. Патрола извидници може да се формира од бели (B) и плави (P) извидници на еден од следниве начини: $5B + 5P$, $2B + 4P$, $1B + 3P$. Колку патроли може да се состават од 130 бели и 240 плави извидници, ако се знае дека мора да има најмалку по десет од секој вид патроли?
62. Драган има два пати повеќе сестри отколку браќа, а неговата сестра Маја има пет пати повеќе браќа од сестри. Колку деца има во нивното семејство?
63. Во ена цвеќарница има само ружи и каранфили. Цвеќерката направила букет од ружи и каранфили, Таа потрошила $\frac{3}{8}$ од вкупниот број ружи и $\frac{3}{10}$ од вкупниот број каранфили. Букетот содржи еднаков број ружи и каранфили. Колкав дел од цвеќето е потрошен за правењето на букетот?
64. При изработка на еден метален клин има отпад од 12,5% од употребениот материјал. На тој начин од едно парче метал се направени 100000 такви клинови. Добиениот отпад повторно е излиен во едно парче метал и од него на истиот начин се направени потполно исти такви клинови. Оваа постапка се повторува се додека од отпадот може да се направи барем еден клин. Колку клинови вкупно се добиени, сметајќи ги и првите 100000 клинови?

III ТЕОРИЈА НА БОЕВИ

III.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги последните три цифри на бројот $2^{2011} - 2^{2009} + 2^{2006}$.
2. Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни цели броеви не е квадрат на цел број.
3. Со делење на некој број со бројот 72 се добива количник a и остаток 68. Определи ги количникот и остатокот ако тој ист број се подели со 24.
4. Определи ја цифрата a за да бројот $\overline{401512a}$ при делење со 3 и со 5 дава еднакви остатоци.
5. Докажи дека:
 - а) за секој природен број n бројот $7^{2n} - 1$ е делив со 24,
 - б) за секој природен број n бројот $25^n + 23$ е делив со 24.
6. Докажи дека за секој природен број n изразот $A = 5^{n+1} - 4n - 5$ е делив со 16.
7. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9.
8. Докажи дека за секој природен број n бројот:
 - а) $A = (7n + 3)^2 - (3 - n)^2$ е делив со 96,
 - б) $A = (5n - 0,5)^2 - (2n - 6,5)^2$ е делив со 42.
9.
 - а) Докажи дека ако x е непарен број поголем од 1, тогаш бројот $A = x^3 + 3x^2 - x - 3$ е делив со 48.
 - б) Разликата на квадратите на два последователни непарни броја е делива со 8.
10. Докажи дека засекој природен број n изразот $2n^2 + 10n + 12$ е делив со 4.

11. Докажи дека за секој природн број n изразот $A = n(2n^2 + 1)$ е делив со 3.
12. Докажи дека за секој природен број x изразот $A = 9x^5 - 5x^3 - 4x$ е делив со 120.
13. Докажи дека за секој парен број a изразот $A = a^3 + 20a$ е делив со 48.
14. Докажи, ако $7x + 4y$ е делив со 19, тогаш изразот $A = 15x + 14y$ е делив со 19.
15. Докажи, ако $a + b$ е делив со 3, тогаш изразот $A = a^3 + b^3$ е делив со 9.
16. Докажи дека збирот $a = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2011} - 2^{2012} + 2^{2-13}$ е делив со 3.
17. Докажи дека збирот $2009 + 2009^2 + 2003^3 + \dots + 2009^{100}$ е делив со 2010.
18. Докажи дека за секој природен број p вредноста на изразот $A = \frac{10^p - 1}{81} - \frac{p}{9}$ е природен број.
19. Докажи дека:
 - а) $16^5 + 2^{15}$ е делив со 33,
 - б) $333^{2008} + 555^{2008}$ е делив со 37,
 - в) $3^{2003} + 4^{2004} + 5^{2005} + 6^{2006} + 8^{2008}$ е делив со 10.
20. Докажи дека $S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2007}$ е делив со 39.
21. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 11.
22. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 99.
23. Определи го множеството остатоци кои може да се добијат при делење на квадрат на природен број со бројот:
 - а) 3,
 - б) 4.

24. Дали бројот $\underbrace{555\dots 5}_n, n \in \mathbb{N}$ може да биде точен квадрат на природен број.
25. Дали бројот $\underbrace{333\dots 3}_n, n \in \mathbb{N}$ може да биде точен квадрат на природен број?
26. Дали бројот $\underbrace{222\dots 22}_{2022}$ може да биде точен квадрат на природен број?
27. Збирот на шест последователни природни броеви од кои ниту еден не е делив со 7, е делив со 21, но не е делив со 42. Докажи!
Опредиeli шест такви броеви така што нивниот збир е четирицифрен број и е квадрат на некој природен број.
28. Земен е број кој е запишан со 2000 цифри и кој е делив со 9. Збирот на неговите цифри да го означиме со a , збирот на цифрите на бројот a со b и збирот на цифрите на бројот b со c . Опредиeli го бројот c .
29. Докажи дека производот на два последователни природни броја е делив со бројот 12 ако поголемиот од тие броеви е точен квадрат на природен број.
30. Докажи дека за секој прост број поголем од 3, производот на неговите соседни броеви е делив со 24.
31. Природен број n е зголемен за својата четирикратна реципрочна вредност и добиениот збир е квадратиран. Потоа добиениот резултат е намален за квадратот на четирикратната реципрочна вредност на дадениот број n , со што е добиен природен број кој не е делив со 5. Докажи!
32. Должините на страните на правоаголен триаголник се природни броеви. Дали може должините на двете катети да се непарни броеви?
33. Природниот број a не е делив со 5. Опредиeli го остатокот кој се добива при делењеот на бројот a^4 со бројот 5.
34. Ако a, b, c се природни броеви докажи дека збирот $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

35. Нека a, b и c се цели броеви. Ако триномот $p(x) = ax^2 + bx + c$ е делив со 5 за секој цел број x , тогаш секој од броевите a, b, c е делив со 5. Докажи!
36. Ако $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $9 \mid (a^3 + b^3 + c^3)$, тогаш барем еден од броевите a, b и c е делив со 3. Докажи!
37. Нека d и d' , $d' > d$ се природни делители на природниот број n . Докажи, дека $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

III.2. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

38. Докажи дека остатокот од делењето на прост број $p > 30$ со бројот 30 е прост број или 1.
39. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 така што ќе се добие квадрат на природен број.
40. Еден четирицифрен број ги има следниве својства:
 1) Првата и четвртата цифра се еднакви меѓу себе,
 2) Втората и трета цифра се еднакви меѓу себе,
 3) Бројот е еднаков на производот на три последователни прости броја.
 Кој е тој број?
41. Ако $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$ е рационален број, тогаш n е точен квадрат. Докажи!
42. Докажи дека не постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 7.
43. Определи го најмалиот природен број a за кој $\sqrt{2012a}$ е природен број.
44. Определи го природниот број x за кој бројот $\sqrt{\frac{x}{2012}}$ е вистински рационален број.
45. Определи прост трицифрен број чиј производ на цифри е еднаков на 252.

46. Докажи дека за секој природен број n бројот $n^4 + 12n^2 + 35$ е сложен број.
47. На училишната табла е запишан трицифрениот број $\overline{**8}$. Три ученици ги погодуваат својствата на овој број.
Зоран: Сите цифри на бројот се парни и има парен број различни прости делители.
Душан: Бројот е делив со 9 и е точен квадрат на некој природен број.
Никола: Бројот е помал од 400 и е 13 пати поголем од квадратот на еден природен број.
Се покажало дека секој од тројцата ученици погодили само по едно својство на непознатиот број. Кои цифри треба да се запишат наместо ѕвездичките?
48. Определи ги сите трицифрени прости броеви такви што нивните цифри се исто така прости броеви?
49. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$.
50. Определи ги сите природни броеви x и y за кои бројот $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на прост број.

III.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

51. Стрелец стрела во мета и за секој успешен погодок добива 5 бода, а за секое промашување му се одземаат 3 бода. Тој стрелал повеќе од 10, а помалку од 20 пати и притоа освоил нула бодови. Колку пати стрелал стрелецот и колку пати ја погодил метата?
52. Дадена е дропката $A = \frac{2x-1}{x-4}$, каде x е цел број различен од 4.
а) За кои вредности на x дропката A е цел број?
б) За кои вредности на природниот број x ($x > 4$) дропката A има најмала вредност?
53. Определи го природниот број n таков што бројот $\frac{45}{n-45}$ е точен квадрат на природен број.

54. Определи ги сите цели броеви a за кои вредноста на изразот $A = \frac{2a^2 - 9a + 8}{a - 5}$ исто така е цел број.

55. Определи ги сите цели броеви n за кои вредноста на изразот $A = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$, $n \neq -2$ исто така е цел број.

56. Определи го природниот број n кој е помал од 100 и е таков што $\sqrt{\frac{n+30}{n-30}}$ исто така е природен број.

57. Определи го оној двоцифрен број кој е еднаков на збирот на кубот на цифрата на десетките и квадратот на цифрата на единиците со кои е запишан.

58. Производот на четири парни последователни природни броја е 13440. Определи ги овие броеви?

59. Ако на квадратот на произволен број му се додаден бројот 101010, тогаш добиениот збир не може да биде квадрат на природен број. Докажи!

60. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$p^2 + (p+1)^2 = q^4 + (q+1)^4.$$

61. Определи природни броеви x и y такви што $x > y$ и

$$x^3 + 7y = y^3 + 7x.$$

62. Определи ги сите тројки (x, y, z) каде x, y, z се природни броеви за кои е точно равенството $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 1985$ така што x е најмалиот од овие броеви.

63. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 - y^2 = 2012.$$

64. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равеката

$$xy + x + y = 2012.$$

65. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x + y - 1)^2 - (x - y + 1)^2 = 16.$$

66. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 - 6x + 4y^2 - 4y + 5 = 0.$$

67. Во множеството прости броеви реши ја равенката: $x^2 - y^2 = 45$.

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $\frac{5}{m} + \frac{401}{n} = 1$.

69. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$3x^2 + 2xy + 3 = y^2 + 10.$$

70. Колку последователни природни броеви треба да се соберат за да се добие збир 2010?

71. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$5x^2 + 7y^2 = 945.$$

72. Определи го бројот на целите броеви x за кои изразот $\frac{x^2+2011}{x+2011}$ е цел број.

73. Работниците Алекса, Борис и Симон заедно завршуваат некоја работа за 1 час. Познато е дека секој од нив самостојно може да ја заврши оваа работа за цел број часови. Освен тоа се знае дека Борис работи побрзо од Алекса, а поспоро од Симон. За колку часа секој од тројцата работници самостојно ќе ја заврши истата работа?

74. Определи го бројот на сите парови природни броеви (a, b) за кои важи $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2010}$.

75. Определи го бројот на сите парови природни броеви (x, y) за кои важи $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1002\sqrt{2004}}$.

76. Во множеството природни броеви реши ја равенката $n! + 3 = x^2$.

77. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$1! + 2! + 3! + \dots + n! = x^2.$$

78. Во множеството природни броеви реши ја равенката $n! + 57 = x^2$.

79. Определи го најмалиот број квадрати чии должини на страни се изразени со природни броеви и чиј збир на плоштини е еднаков на 2012.
80. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $2^x + 1 = y^2$.
81. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $3^x + 4^x = 5^x$.

III.4. КОНГРУЕНЦИИ

82. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0, 1 или 4 по модул 8.
83. На која цифра завршува бројот
а) 6^{811} , б) 2^{1000} , в) 3^{999} .
84. Најди го остатокот при делењето на бројот:
а) $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24, б) $(3^{10} + 2)^{77}$ со 9,
в) $(17^{17} + 116)^{21}$ со 8.
85. Докажи, дека $5 \mid (7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}})$.
86. Докажи, дека за секој природен број n , еден од броевите $3^{3n} + 2^{3n}$ и $3^{3n} - 2^{3n}$ е делив со 35.
87. Докажи, дека $41 \mid (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{1991})$.
88. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека
$$(n + 2) \nmid (1^{2013} + 2^{2013} + \dots + n^{2013}).$$
89. Нека $a_i, i = 1, 2, \dots, 1990$ се природни броеви за кои важи
$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1989}^2 = a_{1990}^2. \quad (1)$$

Докажи, дека барем два од овие броеви се парни.
90. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{10}^4 = 2011.$$

91. Докажи дека ниту еден број од облик $8k + 3$ или $8k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$ не може да се претстави во облик $x^2 - 2y^2$, каде $x, y \in \mathbb{Z}$.
92. Докажи, дека Ферматовиот број $f_5 = 2^{2^5} + 1$ е сложен.
93. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A . Најди го збирот на цифрите на бројот B . (Сите броеви се запишани во декаден запис).
94. Докажи дека меѓу броевите $2^n - 3$, $n = 0, 1, 2, \dots$ има бесконечно многу кои се деливи со 5 и бесконечно многу кои се деливи со 13.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Десет ученици заедно имаат 100 денари, а секој од нив има барем еден денар и сите имаат различен број денари. Докажи дека меѓу нив постојат 5 ученици кои заедно имаат повеќе од 14 денари. Докажи дека меѓу нив постојат 6 ученици кои заедно имаат помалку од 91 денар.
2. Според најновиот попис на населението во 1100 месни заедници на територијата на градот Скопје живеат 600000 жители. Докажи дека постојат барем две месни заници со еднаков број на жители.
3. Според најновиот попис на населението во 1670 населени места во Р. Македонија живеат 1287345 жители. Докажи дека во Р. Македонија постојат две населени места со еднаков број жители.
4. Броевите од 1 до 10 се запишани во произволен редослед, а потоа секој од нив е собран со редниот број во низата. Докажи дека во добиените зборови постојат барем два чии последни цифри се исти.
5. На тестирање учествувале 22 ученика од осум училишта. Тие точно решиле вкупно 50 задачи. Секој ученик од исто училиште решил еднаков број задачи, а учениците од различни училишта решиле различен број задачи. Секој ученик решил барем една задача. Колку ученици решиле само по една задача?
6. Елементите на множеството $A = \{a, b, c\}$ се произволни степени на некои двоцифрени прости броеви помали од 20. Меѓу елементите на множеството A постојат два броја такви што збирот или разликата на тие два броја е делива со 5. Докажи!
7. Во една просторија се наоѓаат неколку луѓе кои знаат барем еден од три јазици. Шестмина знаат англиски јазик, шестмина знаат германски, седуммина знаат француски, четворица знаат англиски и германски, тројца знаат германски и француски, двајца француски и англиски, а еден ги знае сите три јазици. Колку луѓе има во просторијата? Колку знаат само англиски?

8. На некоја свечена вечера шефот на салата добил задача околу тркалез-на маса да распореди четири мажи и определен број жени, и тоа на тој начин така што ниту една жена не седи до друга жена, а спроти секое лице да седи лице со спротивен пол. Дали шефот на салата успеал да го направи саканиот распоред?
9. Со цифрите 4, 5, 6, 7, 8 и 9 е запишан еден шестцифрен број. Зоран, Дејан и Никола го погаѓале тој број. Зоран: 574698, Дејан: 786945, Никола: 456789. Се покажало дека Зоран ги погодил точните места на три цифри, исто толку погодил и Дејан, а додека Никола го погодил точното место само на една цифра. Кој број бил запишан?
10. Учениците A, B, C, D, E, F решавале некоја задача. Задчата ја решиле двајца. На прашањето: Кој ја решил задачата, добиени се следниве пет одговори:
- 1) A и C ,
 - 2) B и F ,
 - 3) F и A ,
 - 4) B и E ,
 - 5) D и A .
- Во четири од овие пет одговори еден дел е точен, а еден е неточен, додека во еден одговор двата дела се неточни. Кои ученици ја решиле задачата?
11. Нека $A_1A_2\dots A_{15}$ е конвексен петнаесетаголник, m е бројот на конвексните седумаголници и n е бројот на конвексните осумаголници чии темиња се темињата на петнаесетаголникот $A_1A_2\dots A_{15}$. Што е поголемо m или n .
12. На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочката ги означува со a, b и c по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a - b, 3b - c$ и $3c - a$. Дали може, со последователна примена на оваа постапка, Марко во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

13. Дадени се 5 природни броеви. Докажи дека или еден од нив е делив со 5 или збирот на неколку од нив е делив со 5.

14. Докажи, дека во произволна група луѓе постојат најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници. Познанството е симетрична релација, т.е. ако A го познава B , тогаш B го познава A .
15. Дадени се пет произволни цели броеви.
 - а) Докажи дека меѓу нив постојат два броја чија разлика е делива со 3.
 - б) Докажи дека меѓу нив постојат три броја чиј збир е делив со 3.
16. Докажи дека меѓу 51 произволни различни природни броеви помали од 100 постојат три броја такви што еден од нив е еднаков на збирот на другите два броја.
17. Дадени се 52 произволни природни броја. Докажи дека меѓу нив постојат два чиј збир или разлика се деливи со 100. Дали даденото тврдење важи за 51 природен број?
18. Докажи дека во група од 6 ученици постојат 3 ученика така што секој ги познава преостанатите два ученика или постојат 3 ученика така што секој не ги познава преостанатите два ученика.
19. Во едно одделение има 30 ученици. Јана на писмена направила 13 грешки, а секој од останатите ученици направил помалку грешки. Докажи дека во тоа одделение постојат барем 3 ученика со ист број на грешки.
20. Скопје денес има над 600000 жители, од кои секој на главата има не повеќе од 270000 влакна. Докажи дека во Скопје барем 3 луѓе имаат ист број влакна на главата.
21. Се претпоставува дека денеска на Земјата живеат повеќе од 7 милијарди луѓе, од кои не повеќе од 1% се постари од 100 години. Да се докаже дека постојат двајца луѓе кои се родени во иста секунда, ист час, ист ден и иста година.
22. На еден шаховски турнир учествуваат десет шахисти и секој треба да одигра по една партија со секој од останатите шахисти. Докажи дека во секој момент на турнирот постојат двајца шахисти со ист број одиграни партии.
23. На математички натпревар учествувале 82 ученика. Докажи дека меѓу нив може да се изберат 10 ученика од ист град или од 10 различни градови.

24. Докажи дека меѓу 100 произволни цели броеви секогаш може да се изберат 15 такви да разликата од било кои два од нив е делива со 7.
25. Дадени се произволни 1111 природни броеви. Докажи дека барем 124 од дадените броеви почнува со иста цифра, барем 112 дадени броеви завршуваат со иста цифра и 13 броеви почнуваат и завршуваат со иста цифра.
26. Темињата на правилен единаесетаголник се обоени со плава или црвена боја. Докажи дека во овој многуаголник постојат две страни или две дијагонали кои имаат заедничко теме, имаат еднаква должина, а крајните точки се обоени со иста боја како заедничкото теме.
27. Тепих со димензии $45\text{ dm} \times 45\text{ dm}$ го изгризале молци и направиле 2006 дупки со многу мали големини. Дали може да се исече парче од тепихот со димензија $1\text{ dm} \times 1\text{ dm}$ на кој нема да има дупчиња?
28. Стрелец стрела во квадратна мета со димензии $70\text{ cm} \times 70\text{ cm}$. Тој стрелал 50 пати и притоа со секој куршум ја погодил метата. Докажи дека постојат два погодоци кои се на растојание помало од 15 cm .
29. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 1 cm се наоѓаат 51 точка. Докажи дека на квадратот постои круг со радиус помал од $\frac{1}{7}\text{ cm}$ во кој се наоѓаат три точки.
30. Во внатрешноста на рамностран триаголник со должина на страна $a = 44\text{ cm}$ се дадени 2012 точки. Докажи дека меѓу дадените точки постојат две кои се на растојание помало од 1 cm .
31. Во внатрешноста на рамностран триаголник со должина на страна $a = 45\text{ cm}$ се дадени 2012 точки. Дали постои рамностран триаголник со должина на страна 1 cm во кој нема ниту една од дадените точки?
32. Во правоаголник со димензии $3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ се наоѓаат 7 точки. Докажи дека постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво од $\sqrt{5}\text{ cm}$.
33. Докажи дека во круг со радиус $r = 19$ не може да се сместат 400 точки кои меѓусебно се оддалечени повеќе од 2.

34. Во коцка со раб $6,5\text{ m}$ се дадени 2020 точки. Докажи дека во големата коцка постојат најмалку 150 различни коцки со раб 50 cm во чија внатрешност нема ниту една од дадените точки.
35. На рамнина дадени се 15 точки, така да меѓу било кои 3 точки постојат 2 чие растојание е помало од 1 cm . Докажи дека постои круг со радиус од 1 cm кој содржи барем 8 дадени точки.

IV.3. ПРЕБРОЈУВАЊА

36. Членовите на математичката секција во едно училиште се договориле за Нова година секој да испрати по една честитка на останатите членови. Колку членови брои секцијата ако вкупно се испратени 342 честитки?
37. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се запишани со различни цифри.
38. Колку четирицифрени броеви може да се запишат со користење на цифрите 1, 3, 4, 7 ако:
а) цифрите може да се повторуваат
б) цифрите не се повторуваат?
39. Определи го бројот на четирицифрени броеви кај кои првата цифра е парен број, втората е прост број, трета цифра е непарен број, а четвртата сложен број?
40. Определи го бројот на десетоцифрените броеви чии цифри се:
а) само 1 и 2,
б) сите можни цифри 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?
41. Определи го бројот на трицифрените броеви запишани со непарни цифри ако:
а) цифрите се повторуваат,
б) цифрите не се повторуваат
42. На колку различни начини може да се состави список од седум лица?
43. На колку начини може да седнат на тркалезна маса 6 девојчиња и 6 момчиња, така што две лица од ист пол да не седат едно до друго?

44. Во соба има 6 светилки. На колку начини можеме да ја осветлиме собата (секоја светилка може, но не мора да свети)?
45. Во градот има 7 семафори со три бои: црвена, жолта и зелена. На колку разни начини во секој момент можат да бидат распоредени светлата на семафорите?
46. Тикет за спортска прогноза содржи 13 парови. Прогнозата на секој резултат се прави со цифрите 1 (победува првиот тим), 2 (победува вториот тим) и 0 (натпреварот завшува нерешено). Определи го најмалиот број колони кои треба да се пополнат се со цел да бидеме сигурни дека сме ги погодиле сите 13 резултати.
47. На полица се наоѓаат 10 книги, од кои 5 имаат математичка содржина, а 5 се романи. На колку начини на може да се распоредат книгите, ако на првите 5 места се поставени романите.
48. Во точката М се конструирани 8 полуправи. Определи го најголемиот број агли кои се определени со овие полуправи?
49. Во рамнина се дадени 9 точки такви што меѓу нив нема три колинеарни. Колку отсечки, триаголници и четириаголници определуваат дадените точки?
50. Во одделението на Пабло има 25 ученици. На колку начини може за се избере раководство на одделенската заедница од 3 ученика?
51. Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Колку вкупно подмножества има ова множество.
52. На турнир во шах се игра по систем секој со секој и се одиграни вкупно 120 партии. Колку шахиста учествувале на турнирот?
53. Определи го бројот на петцифрените броеви во чиј запис барем една цифра е 5.
54. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои имаат барем две еднакви цифри.
55. Во едно одделение има 30 ученици. На колку начини може да се избере претседател, секретар и благајник на одделенската заедница.
56. Определи го бројот на природните броеви во чиј запис не се појавува цифрата 0 и чиј збир на цифри е еднаков на 5.

57. Определи го бројот на различните петцифрени броеви на телефони кои почнуваат со 33 и завршуваат со 3.
58. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани со различни цифри и чиј збир на цифри е еднаков на 10.
59. На роденденот на Пабло секој од присутните се ракувал со секој од присутен. Вкупно имало 190 ракувања. Колку лица имало на роденденската прослава на Пабло?
60. Во едно одделение има 17 момчиња и 14 девојчиња. Треба да се формира делегација составена од 2 момчиња и 2 девојчиња. На колку начини може да се избере делегацијата?
61. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои имаат точно две различни цифри.
62. Определи го бројот на петцифрените броеви кои исто се читаат од лево на десно и од десно на лево.
63. Колку има петцифрени броеви кои не се менуваат кога листот на кои се запишани се ротира за 180° ? При ротација за 180° не се менуваат цифрите 0, 1 и 8, цифрите 6 и 9 преминуваат една во друга, а останатите цифри губат смисла.
64. Определи го бројот на петцифрените броеви кои се деливи со 2 и кои се запишани со различни цифри.
65. Определи го бројот на непарните седумцифрени броеви чиј производ на цифри е парен број.
66. Определи го бројот на седумцифрените броеви запишани со различни цифри во кои цифрите 5 и 6 се соседни.
67. Определи го бројот на шестцифрените природни броеви кои се запишани со различни цифри и кај кои цифрите 0, 1 и 2 се соседни.

IV.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Даден квадрат расечи го на делови од кои ќе составиш два складни квадрати.

69. Два складни квадрати расечи ги на делови, а потоа од нив состави нов квадрат.
70. Со расекување од три складни квадрати состави нов квадрат.
71. Даден квадрат расечи го на делови од кои ќе составиш три складни квадрати.
72. Даден квадрат расечи го на делови од кои ќе составиш пет складни квадрати.
73. Марко имал коцка чии рабови се со целобројни должини и истата ја обоил од сите страни. Потоа коцката ја расекол на единечни коцки. Неговата сестра Вера сакала да ја определи должината на работ на коцката, но Марко само и соопштил дека има 864 коцкикои се обоени од една страна. Помогни и на Вера да ја определи должината на работ на коцката.
74. Дали од множеството $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ може да се изберат помалку од 58 броеви чиј збир е еднаков на збирот на преостанатите броеви од ова множество?
75. Збирот на седум различни броеви е 100. Дали од овие броеви може да се изберат три чиј збир не е помал од 50?
76. Пет отсечки имаат заедничка точка A . Потоа од некои од слободните краеве на овие отсечки (не од точката A) се конструирани пет нови отсечки и тоа е повторено повеќе пати. На крајот Петар избројал 700 слободни краеве. Дали Петар точно броел?
77. Во еден ред стојат 1000 ученици. Дозволено е своите места во редот да ги заменат само оние ученици кои имаат заедничк сосед. Дали со ваква промена на местата може ученик кој стои на едниот крај на редот да стигне на другиот крај на редот?
78. Дали може различните рабови на коцката да се нумерираат со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 така што збирот на броевите придружени на три раба кои имаат заедничко теме, за сите темиња на коцката е еднаков?
79. Во кутиите A, B, C има топчиња: во кутијата A има 2, во кутијата B има 3 и во кутијата C има 4 топчиња. Два играчи ја играат следнава игра: наизменично земаат од произволна кутија произволен број топ-

чиња. Победник е играчот по чиј потез сите кутии се празни. Како треба да игра првиот играч за сигурно да го победи својот противник?

80. Во p точки од кружницата се запишани знаци плус, а во m точки се запишани знаци минус (во секоја точка по еден знак). Кружницата ја обиколуваме обратно од движењето на стрелките на часовникот. Нека x е бројот на знаци плус кои следуваат по знак плус, а y е бројот на знаци минус кои следуваат по знак минус. Докажи дека $p - m = x - y$.
81. Правоаголна табла со димензии $m \times n$ е покриена со 2×2 и 1×4 тетрамина, кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од правоаголникот. Докажи, дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетрамината 2×2 се замени со тетратмино 1×4 .
82. Дали може квадратна табла со димензии 10×10 да се покрие со 1×4 тетрамина?

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ТРИАГОЛНИК

1. Нека A, B и C се точки во рамнината такви што за секоја точка M во рамнината е исполнет барем еден од следниве два услови
1) $\overline{AM} < \overline{BM}$ 2) $\overline{AM} < \overline{CM}$.
Докажи дека точката A припаѓа на отсечката BC .
2. Докажи дека симетралите на l_1 и l_2 на два припадни внатрешни агли, добиени при пресекот на две паралелни прави a и b со трета права c се заемно нормални.
3. Даден рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) со тежиште P . Докажи дека правата CP е симетрала на аголот при темето C .
4. Низ точката P која припаѓа на правата AB се повлечени две прави, еднакво наклонети кон AB . На нив во едната полурамнина определена со AB се нанесени еднакви отсечки PM и PN . Докажи дека правата MN е паралелна на правата AB .
5. Висината CD во триаголникот ABC е еднаква на половина од страната AB . Определи го $\angle ACB$, ако $\angle CAB = 75^\circ$.
6. Во остроаголен триаголник ABC должините на страните AC и BC се еднакви на b и a , $a > b$ соодветно, а висините AD и BE имаат должини h_a и h_b , соодветно. Над BE , со почеток во B во насока на E , е нанесена отсечка BK , $\overline{BK} = h_b - h_a$. Од точката K е повлечена нормала на BE , која ја сече BC во точката P . Докажи дека
а) $\overline{PB} = a - b$, б) $\angle APC = \angle APK$.
7. Даден е триаголник ABC , во кој AD и BE се висини повлечени кон страните BC и AC , соодветно. На продолжението на страната BC преку темето C земена е точка M таква што $\overline{CM} = \overline{AC}$. Од точката M е повлечена нормала на продолжението на висината BE , која висината ја сече во точка N . Докажи дека

$$\text{а) } \overline{BN} = \overline{BE} + \overline{AD}, \quad \text{б) } \angle NMA = \angle AMC = \frac{1}{2} \angle ACB.$$

8. Во триаголникот ABC нормалите подигнати во средините M и N соодветно на страните AC и BC се сечат во точката P . Ако P припаѓа на симетралата на $\angle ACB$, докажи дека
 - а) триаголникот ABC е рамнокрак.
 - б) ако точката P лежи внатре во триаголникот ABC докажи дека $\angle ACB < \angle APB$.
9. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C на триаголникот ABC , во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$, се еднакви. Докажи дека $\angle ABC = \angle BAC + 90^\circ$.
10. Во триаголникот ABC ($\overline{AC} > \overline{BC}$) е повлечена симетралата CD , $D \in AB$ на внатрешниот $\angle ACB$. Докажи дека $\overline{AD} > \overline{BD}$.
11. На страната AC на триаголникот ABC од A кон C е земена точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AB}$, а на продолжението на CA преку A земаме точка P таква што $\overline{AP} = \overline{AB}$. Докажи дека BM и BP е паралелна соодветно на симетралата на надворешниот и внатрешниот агол во темето A и дека триаголникот PBM е правоаголен.
12. Симетралата на внатрешниот агол на триаголникот ABC го дели периметарот на овој триаголник на два еднакви дела. Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.
13. Докажи дека ако во еден триаголник две тежишни линии се со иста должина, тогаш тој е рамнокрак.
14. Даден е рамностран триаголник ABC . Висините на триаголникот ги сечат страните во точките M, H и P . Докажи дека триаголникот MHP е рамностран и дека висините на триаголникот ABC се симетрали на агли на триаголникот MHP .
15. Определи ги острите агли на правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето C , ако аголот меѓу симетралата на правиот агол и тежишната линија повлечена од темето C е еднаков на $\frac{1}{5}$ од тапиот агол кој го формираат симетралите на $\angle A$ и $\angle B$.

16. Во триаголникот ABC важи $\angle C - \angle A = 60^\circ$, BD е симетрала на агол и BE е висина (точките D и E лежат на AC). Определи ја должината на DE ако $\overline{BD} = 2\text{ cm}$.
17. Во триаголникот ABC висината AD ја полови страната BC . Симетралата CE на аголот во темето C ја сече висината AD во точка M која е на растојание 1 cm од страната AC . Должината на отсечката CM е еднаква на 2 cm . Определи го растојанието на точката M до страната BC и до темето B .
18. Хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е продолжена до точките M и N така што $\overline{MA} = \overline{MC}$ и $\overline{NB} = \overline{BC}$. Точките M, A, B, N се распоредени последователно во посочениот редослед. Симетралите на $\angle CAM$ и $\angle CBN$ се сечат во точката P .
- а) Определи ги $\angle MCN$ и $\angle APB$.
- б) Определи го видот на триаголниците MPC и CPN .
19. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) аголот при врвот C е еднаков на 20° . Низ темето B се повлечени отсечки BD и BE (точките D и E припаѓаат на страната AC) такви што $\angle ABD = 50^\circ$ и $\angle ABE = 60^\circ$. На отсечката BE е земена точка K таква што $\overline{AD} = \overline{BK}$. Докажи дека:
- а) триаголникот BEC е рамнокрак,
- б) триаголникот ABK е рамнострани.
20. На продолжението BE на страната AB на рамностраниот триаголник ABC е конструиран друг рамнострани триаголник BED , кој е во истата полурамнина во однос на AB во која лежи и триаголникот ABC . Точката M е средина на отсечката AD , а точката N е средина на отсечката CE . Докажи дека триаголникот BMN е рамнострани.
21. Дадени се точки A, B, C на права p и точки D и E кои се надвор од p од иста нејзина страна, така што триаголниците ABD и BCD се рамнострани. Нека M е точка на отсечката AE и N е точка на отсечката CD така што $\overline{ME} = 2\overline{AM}$ и $\overline{CN} = 2\overline{DN}$. Докажи дека триаголникот BMN е рамнострани.

22. Рамнокрак триаголник ABC е поделен со права l , која минува низ едно негово теме, на два рамнокраки триаголника. Определи ги аглиите на триаголникот ABC .
23. Низ темето C на рамностраниот триаголник ABC е повлечена права l паралелна на симетралата на $\angle BAC$. Правата l го сече продолжението на BA во точката P . Ако $\overline{BP} = 6\text{ cm}$, пресметај го:
 - а) периметарот на триаголникот ABC ,
 - б) растојанието од точката A до правата CP .
24. Во триаголникот ABC се повлечени средната линија B_1C_1 (B_1 припаѓа на AB , C_1 припаѓа на AC) и тежишната линија AD . Докажи дека правата која минува низ темето C и пресечната точка O на средината на отсечките B_1C_1 и AD ја сече страната во точка P таква што $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
25. Докажи дека во правоаголен триаголник збирот на катетите е еднаков на двократниот збир на радиусите на опишаната и впишаната кружница.
26. На страната AC на триаголникот ABC лежи точка K која AC ја дели во однос 1:3, а на страната BC точка L која BC ја дели во однос 1:4. Нека M е пресек на отсечките AL и BK . Определи го односот на отсечките KM и MB .
27. Дадена се права p и точки A и B надвор од p и на иста страна од p . Точката C е осносиметрична на точката A во однос на правата p . Нека $p \cap BC = \{D\}$ и нека E е произволна точка од p , различна од D . Докажи дека периметарот на триаголникот ABD е помал од периметарот на триаголникот ABE .
28. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник. Дали постои триаголник чии должини на страни се $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$?
29. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC . Произволна точка M припаѓа на лакот BC на кој не припаѓа точката A . Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$.

30. Висините CD и AE на триаголникот ABC се сечат во точката H и важи $\overline{AB} = \overline{CH}$. Определи го $\angle ACB$.
31. Над хипотенузата на правоаголниот триаголник конструиран е квадрат кој не го содржи темето на правиот агол на триаголникот. Докажи дека симетралата на правиот агол на дадениот триаголник минува низ центарот на квадратот.
32. Во рамнокрак триаголник ABC точката M е средина на основата AB . Нека N е точка на кракот BC таква што $MN \perp BC$ и нека точката S е средина на отсечката MN . Докажи дека правата AN и нормална на правата CS .
33. Правите m и n се заемно ормални и се сечат во точката A . Точката B припаѓа на рамнината определена од правите m и n , но не лежи на ниту една од нив. Точката B_1 е симетрична на B во однос на правата m , точката B_2 е симетрична на B_1 во однос на правата n и точката B_3 е симетрична на B_2 во однос на m . Докажи дека точките B, B_1, B_2, B_3 се темиња на правоаголник.
34. Даден е триаголникот ABC со медијани AM, BN, CP . Нека u_1, u_2, u_3 се трансляциите определени така што u_1 ја пресликува A во B , u_2 ја пресликува B во C и u_3 ја пресликува C во A .
- а) Определи ги сликите B_1, B_2, B_3 на темето B при трансляциите u_1, u_2, u_3 , соодветно.
- б) Докажи дека $\overline{B_3B_1} = 2\overline{AM}$.
35. Во триаголникот ABC симетралата на $\angle BAC$ лежи на правата g_1 , а правата g_2 е нормална на правата g_1 и минува низ точката A .
- а) Докажи дека на правата g_2 лежи симетралата на надворешниот агол на триаголникот ABC во темето A .
- б) Докажи дека сликите B_1 и B_2 на точката B соодветно при осните симетрии j_1 со оска g_1 и j_2 со оска g_2 лежат на правата AC .
36. Даден е триаголник ABC . На продолжението на страната AC преку точката C е земена точка B_1 тава што $\overline{CB_1} = \overline{CB}$. Докажи дека:

- а) Точката B_1 е слика на точката B при осна симетрија со оска симетралата l на надворешниот агол на триаголникот во темето C .
- б) Ако D е произволна точка од l , тазлична од C , тогаш периметарот на триаголникот ABD е поголем од периметарот на триаголникот ABC .
37. На една од страните на триаголникот да се најде точка таква што збирот на растојанијата од неа до другите две страни на триаголникот ќе биде најмал.
38. На правата l се земени точките A, B, C . Во различните полурамнини на правата l се конструирани рамностраниите триаголници ABD и ACE . Точките M и N се средини на страните DC и BE , соодветно. Докажи дека триаголникот AMN е рамнострани.
39. Дадена е ротација, определена со пар соодветни точки A, A' (A' е слика на A) и позитивно насочен $\angle AOA'$ еднаков на 90° . Конструирај ја сликата на даден триаголник ABC (B и C не лежат на OA). Докажи дека медијаната $A'M'$ на триаголникот $A'B'C'$ е нормална на медијаната на триаголникот ABC .
40. Над страните на разностраниот триаголник ABC , надвор од него, се конструирани рамнострани триаголници ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 . Докажи дека:
- а) $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$,
- б) отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 се сечат во една точка и меѓу себе зафаќаат еднакви агли,
- в) $\overline{MA_1} = \overline{MB} + \overline{MC}$, $\overline{MB_1} = \overline{MC} + \overline{MA}$ и $\overline{MC_1} = \overline{MA} + \overline{MB}$.

V.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

41. Докажи дека збирот на должините на тежишните линии на секој триаголник е помал од неговиот периметар, но е поголем од неговиот полупериметар.
42. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека точката M е средина на страната AB и точката N е средина на страната CD .

Докажи дека правите DM и BN ја делат дијагоналата AC на три еднакви дела.

43. Даден е триаголник ABC . Над страните BC и AC надвор од триаголникот ABC се конструирани квадрати $CBMN$ и $CAPQ$, соодветно. Ако CD и CE се соодветно висина и тежишна линија на триаголникот ABC , докажи дека:

а) $\overline{CE} = \frac{1}{2} \overline{QN}$,

б) правата CD ја полови отсечката QN .

44. Докажи дека пресечните точки на симетралите на внатрешните агли на паралелограм се темиња на правоаголник. Пресметај ги должините на дијагоналите на правоаголникот, ако должините на страните на паралелограмот се 4 cm и $2,6\text{ cm}$.

45. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е земена точка P . Низ секое теме е повлечена права паралелна на правата која ја поврзува точката P со неговото спротивно теме. Докажи дека така добиените четири прави се сечат во една точка

46. Даден е рамб $ABCD$ со остар агол 60° . Правата MN отсекува од страните AB и BC на ромбот отсечки MB и HB , чиј збир на должини е еднаков на должината на страната на ромбот. Докажи дека триаголникот MHD е рамностран.

47. Основите AB и CD на трапезот $ABCD$ се продолжени на двете страни. Симетралите на надворешните агли на трапезот во темињата A и D се сечат во точката M , а симетралите на надворешните агли во темињата B и C се сечат во точката N . Определи го периметарот на трапезот $ABCD$ ако $\overline{MN} = 2k$.

48. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките M, N, P, Q, R, S се средини на отсечките AB, BC, CD, DA, AC, BD , соодветно. Докажи дека правите MP, NQ, RS се сечат во иста точка.

49. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Точките M и N се средини на страните AB и CD . Докажи дека средините на дијагоналите на четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ се темиња на паралелограм или лежат на една права.

50. Даден е четириаголник $ABCD$ кај кој отсечките кои ги поврзуваат средините на спротивните страни се еднакви. Докажи дека дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.
51. Еден од аглиите на правоаголниот трапез е еднаков на 60° . Дијагоналата наспроти овој агол го полови тапиот агол, а делот од средната линија зафатен меѓу дијагоналите на трапезот е долг $1,1\text{ cm}$. Определи ги основите, поголемиот крак и помалата дијагонала на трапезот.
52. Во трапезот $ABCD$ секоја од основите AB и CD е продолжена во двете насоки. Симетралите на надворешните агли во темињата A и D се сечат во точката K , а симетралите на надворешните агли во темињата B и C се сечат во точката E . Определи гопериметарот на трапезот ако $\overline{KE} = 6\text{ cm}$.
53. Во рамнокрак трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) дијагоналите AC и BD се сечат во точката O и $\angle AOB = 60^\circ$. Докажи дека средините на отсечките AO, DO и BC се темиња на рамностран триаголник.
54. Даден е ромб $ABCD$ со остар агол $\angle A = 60^\circ$. На страните AB и BC се земени точки M и N , соодветно, такви што $\overline{BM} + \overline{BN} = \overline{AD}$. Ако j е осна симетрија со оска DC и $N \xrightarrow{j} P$, докажи дека $MP \parallel AD$.
55. Од три еднакви квадрати со основи AM, MH, HB наредени хоризонтално еден до друг е составен правоаголник $ABCD$. Од темето D се повлечени правите DM, DN, DB . Докажи дека
- $$\angle AMD + \angle AHD + \angle ABD = 90^\circ.$$
56. Паралелограмот $A'B'C'D'$ е слика на паралелограмот $ABCD$ при некоја транслација u . Двата паралелограми се поставени така што тие се сечат. Докажи дека пресекот на двата паралелограми е паралелограм.
57. Докажи дека ако два спротивни агли во еден триаголник се прави, тогаш проекциите на спротивните страни врз дијагоналата која минува низ темињата на правите агли се еднакви.

V.3. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

58. Должините на катетите на правоаголниот триаголник се a и b , а должината на хипотенузата е c . Дали постои триаголник со должини на страни a^3, b^3 и c^3 ?
59. Во рамнокрак триаголник ABC точката M е средина на основата AB . Нека N е точка на кракот BC таква што $MN \perp BC$ и нека точката S е средина на отсечката MN . Докажи дека правата AN и нормална на правата CS .
60. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја кои не се помали од 3. Докажи дека висината на триаголникот повлечена кон средната по големина страна ја дели таа страна на делови чија разлика е 4.
61. Даден е квадрат $MNPQ$ со должина на страна 1 m . На страните на овој квадрат се земени точки A, B, C такви што точката A е на $\frac{1}{3}$ од страната NP тргнувајќи од точката N , точката B е на $\frac{2}{3}$ од страната MQ тргнувајќи од точката M и точката C е средина на страната MN . Триаголникот ABC не е правоаголен. На која страна и за колку треба да се помести точката C за да триаголникот ABC биде правоаголен.
62. Нека C е темето на правиот агол на $\triangle ABC$. Докажи дека за должината на хипотенузата c и должините на тежишните линии t_a, t_b, t_c се исполнети равенствата

$$4(t_a^2 + t_b^2) = 5c^2 \quad (1)$$

$$t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2 \quad (2)$$

$$2(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3c^2 \quad (3)$$

63. Илија го гледа сидот AB од две точки C и D , меѓу кои растојанието е 300 m , под агли од 30° . Правите AD и BC се нормални меусебно. Определи ја должината на сидот AB .
64. Ако од средината на едната катета на правоаголниот триаголник се повлече нормала кон хипотенузата, докажи дека тогаш разликата на

квадратите на така добиените отсекоци на хипотенузата е еднаква на квадратот на должината на другата катета.

65. Нека C е темето на правиот агол на $\triangle ABC$ и нека права p ја сече катетата AC во точката P , а катетата BC во точка Q . Докажи дека

$$\overline{AQ}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{PQ}^2.$$

$$\overline{AQ}^2 + \overline{BP}^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2. \quad (2)$$

66. Во паралелограм $ABCD$ важи $\overline{AC} > \overline{BD}$. Од темето C се повлечени нормали CE и CF на продолженијата на страните AB и AD . Докажи дека $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF}$.

67. Даден е ромб $ABCD$ со агол $\angle BAD = 60^\circ$. Симетралите на аглите меѓу дијагоналите ги сечат страните на ромбот во точките M, N, P, Q .

а) На кој вид припаѓа четириаголникот $MNPQ$?

б) Ако точката M припаѓа на страната AB , определи го односот $\overline{AM} : \overline{MB}$.

в) Определи ги односот на на оние делови на големата и малата дијагонала кои лежат надвор од четириаголникот $MNPQ$.

68. Даден е квадрат $ABCD$ со плоштина 2002 cm^2 . Нека P, Q, R, S се точки соодветно од страните AB, BC, CD, DA такви што

$$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{CR} : \overline{RD} = \overline{DS} : \overline{SA} = 4 : 1.$$

Правите AR, BS, CP и DQ се сечат во точките K, L, M и N . Докажи дека точките K, L, M и N се темиња на квадрат и определи ја неговата плоштина.

69. Должините на двете страни на триаголникот се 13 cm и 14 cm , а неговата плоштина е 84 cm^2 . Определи ја должината на третата страна.

70. Должините на основите на трапезот се 55 cm и 25 cm , а дијагоналите се симетрале на аглите при поголемата основа. Определи ја плоштината на овој трапез.

71. Во триаголникот ABC дадени се должините на страните $\overline{AC} = 41 \text{ cm}$ и $\overline{BC} = 50 \text{ cm}$.

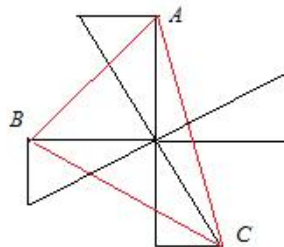
Опреди ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC ако висината CD ја дели страната AB во однос $3:10$.

72. Во правоаголен ABC со прав агол во темето C важи $\overline{AC} = 6\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 8\text{ cm}$. Опреди го односот на висината и тежишната линија кои соодветствуваат на хипотенузата.

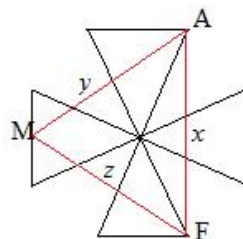
73. Односот на должините на хипотенузата и едната катета на правоаголен триаголник е $101:99$. Опреди го односот на должините на хипотенузата и другата катета.

74. Должините на висината и тежишната линија кои соодветствуваат на хипотенузата на правоаголен триаголник се однесуваат како $40:41$. Опреди го односот на должините на катетите на овој триаголник.

75. Правоаголен триаголник со должини на катети 3 и 4 три пати е ротиран околу темето на еден од остриите агли, како на цртежот десно. Дали триаголникот ABC е правоаголен?



76. Основите на рамнокраките триаголници на цртежот десно, кои имаат заедничко теме, се со должина 10 cm , а краците се со должина 13 cm . При ротација за 90° соседните триаголници се поклопуваат. Опреди го периметарот на триаголникот AMF , каде M е средина на страната на која и припаѓа.



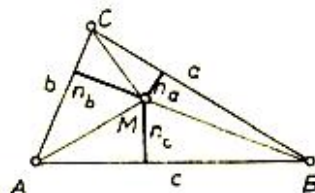
77. Должините на страните на правоаголен триаголник, изразени во сантиметри, се двоцифрени броеви. Најмалиот и најголемиот број имаат иста цифра на единиците и двата броја се прости. Двата поголеми броја се последователни, а разликата на најголемиот и најмалиот број е за 10 помала од третиот број. Опреди ги страните на овој триаголник.

78. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на половината од плоштината на квадрат со должина на страна 12 cm .

79. Должината на едната страна на триаголникот е 10 cm , а должината на другата страна, која е наспроти агол од 30° , е 13 cm . Определи ја должината на третата страна на триаголникот.
80. Во $\triangle ABC$ важи $\angle C = 135^\circ$. Определи ја должината на страната AB ако $\overline{BC} = a = 17\text{ cm}$ и $\overline{AC} = b = 7\sqrt{2}\text{ cm}$.
81. Во $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ и $\overline{AB} = (5 + 5\sqrt{3})\text{ cm}$. Определи ги периметарот и плоштината на $\triangle ABC$.
82. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 10\sqrt{2}\text{ cm}$ важи $\angle C = 45^\circ$. Определи ја плоштината на овој триаголник.
83. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 12\text{ cm}$ важи $\angle C = 30^\circ$. Определи ја плоштината на овој триаголник.
84. Определи ја плоштината на ромб со должина на страна $a = 16\text{ cm}$, а аглите на ромбот се однесуваат како $5:1$.
85. Должината на хипотенузата на правоаголен триаголник е 12 cm , а еден остар агол е еднаков на 75° . Определи ја плоштината на овој триаголник.
86. Острите агли на правоаголен триаголник се разликуваат за 45° , а должината на неговата хипотенуза е $c = 10\text{ cm}$. Определи ја плоштината на овој триаголник.
87. Определи ги сите правоаголни триаголници со целобројни должини на страни изразени во сантиметри, кај кои должината на едната катета е 15 cm .
88. Должините на страните на триаголникот се 13 cm , 14 cm и 15 cm . Определи ја неговата плоштина.
89. Определи ги должините на катетите на правоаголен триаголник чија хипотенуза е долга 4 cm , а мерните броеви на неговите остри агли се однесуваат како $3:1$.

V.4. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

90. Во правоаголен триаголник ABC важи $c + h_c > a + b$, каде a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h_c е должината на висината повлечена кон хипотенузата. Докажи!
91. Во триаголникот ABC важи $h_a h_b = ch_c$, каде h_a, h_b, h_c се должините на висините, а c е должината на страна на триаголникот. Определи еден од аглите на овој триаголник.
92. Докажи дека во правоаголен триаголник реципрочната вредност на квадратот на должината на висината повлечена кон хипотенузата е еднаква на збирот на реципрочните вредности на квадратите од должините на катетите.
93. Во внатрешноста на произволен триаголник ABC е избрана произволна точка M . Нека n_a, n_b, n_c се растојанијата од точката M до страните BC, CA, AB , соодветно. Докажи дека $\frac{n_a}{h_a} + \frac{n_b}{h_b} + \frac{n_c}{h_c} = 1$ каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини на триаголникот.
94. Во даден триаголник односот на висините е $h_a : h_b : h_c = 6 : 4 : 3$, а периметарот на триаголникот е 9 cm . Определи ги должините на страните a, b, c на триаголникот.
95. Даден е триаголник со должини на страни 3, 4 и 5. Дали во внатрешноста на овој триаголник постои точка која од секоја страна е оддалечена помалку од 1?
96. Докажи дека во секој триаголник ABC е исполнето равенството $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, каде h_a, h_b, h_c се висините на триаголникот, а r е радиусот на впишаната кружница во него.
97. Правоаголен триаголник ABC има катети AC и BC со должини 60 cm и 80 cm , соодветно. Нека M и N се средините на катетите.



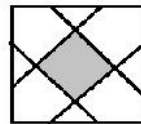
Кружницата со дијаметар MN ја сече хипотенузата AB во точките P и Q . Определи ја должината на отсечката PQ .

98. Даден е правоаголник $ABCD$. Во неговата внатрешност е земена точка низ која се повлечени две прави паралелни на страните на правоаголникот. Докажи дека плоштината на барем еден од правоаголниците кои ја содржат точката A или точката C е помала или еднаква на четвртина од плоштината на четириаголникот $ABCD$.
99. Даден е правоаголник $ABCD$ чија страна AB е два пати подолга од страната BC . На страната CD е земена точка M таква што $\angle AMD$ е еднаков на $\angle AMB$.
 - а) Пресметај го $\angle AMB$.
 - б) Ако $\overline{DM} = 1$, определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.
100. Во квадрат со страна a впишан е квадрат чии темиња лежат на страните на првиот квадрат, но така што страните на дадениот и впишаниот квадрат формираат агол од 30° . Определи го односот на плоштините на двата квадрати?
101. Определи ги периметарот и плоштината на ромбот ако:
 - а) радиусот на впишаната кружница во ромбот е $r = 1,5 \text{ cm}$ и остриот агол е $\alpha = 30^\circ$,
 - б) страната е $a = 10 \text{ cm}$ и надворешниот агол $b_1 = 30^\circ$,
 - в) висината е $h = 3 \text{ cm}$, а аголот меѓу страната и висината е 60° .
102. Докажи дека за секој конвексен четириаголник полузбирот на производите на соседните страни кои тргнуваат од несоседни темиња е поголем или еднаков од плоштината на тој четириаголник.
103. Даден е четириаголник $ABCD$. Конструиран е паралелограм $DBCM$. Докажи дека плоштината на триаголникот ACM е еднаква на плоштината на четириаголникот $ABCD$.
104. Должините на страните на паралелограмот се $a = 10 \text{ cm}$ и $b = 6 \text{ cm}$. Симетралата на аголот го дели паралелограмот на триаголник и трапез. Определи го односот на плоштините на овие фигури.

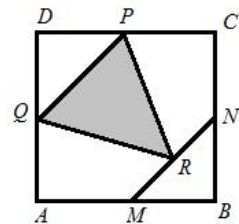
105. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h , а неговата плоштина е еднаква на h^2 . Определи го аголот под кој се сечат дијагоналите на овој трапез.
106. Во рамнокрак трапез средната линија s е два пати пократка од дијагоналата d . Определи ја плоштината на овој трапез.
107. Точката M е средина на кракот AD на трапезот $ABCD$. Докажи дека плоштината на $\triangle MBC$ е еднаква на половината од плоштината на трапезот $ABCD$.
108. Дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точка O и го делат четириаголникот на триаголниците OAB, OBC, OCD и ODA . Докажи дека производот на плоштините на триаголниците OAB и OCD е еднаков на производот на плоштините OBC и ODA .
109. Во четириаголникот $ABCD$ со различни должини на страни дијагоналите AC и BD се сечат во точката O . Ако плоштините на триаголниците ADO и BCO се еднакви, докажи дека четириаголникот е трапез.
110. Во трапез $ABCD$ права паралелна со основата AB ги сече отсечките AC и BC во точките M и N , соодветно. Докажи дека плоштините на триаголниците DAM и DBN се еднакви.
111. Точката B ја дели отсечката AC , $\overline{AC} = a$ во однос $3:2$. Над отсечките AB и BC од различни страни во однос на отсечката AC се конструирани квадрати $ABDE$ и $CBFG$. Нека O и O_1 се пресеците на дијагоналите на овие квадрати. Определи го односот на плоштината на четириаголникот OO_1CD и плоштината на квадратот со страна AC .
112. Трапез има плоштина 80 cm^2 и должина на висина 8 cm . Средината на средната линија на трапезот од едниот крак е оддалечена 3 cm , а од другиот крак е оддалечена 4 cm . Определи ги должините на основите на овој трапез.
113. Даден е трапез $ABCD$ со основи $a = 10\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$ и висина $h = 4\text{ cm}$. Нека точката O е пресек на дијагоналите AC и BD . Определи ги плоштините на $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$.

114. Точките P и R се соодветно средини на основите AB и CD на трапезот $ABCD$. Отсечките BR и CP се сечат во точка Q , а отсечките AR и DP се сечат во точка S . Докажи дека плоштината на четириаголникот $PQRS$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците ASD и BCQ .
115. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на триаголниците на кои им припаѓаат основите на трапезот се P_1 и P_2 . Изрази ја плоштината на трапезот P со помош на P_1 и P_2 .
116. Точките P и R се соодветно средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Отсечките BR и CP се сечат во точка Q , а отсечките AR и DP се сечат во точка S . Докажи дека плоштината на четириаголникот $PQRS$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците ASD и BCQ .
117. Определи ја плоштината на рамнокракиот трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 10\text{ cm}$, $\overline{CD} = 6\text{ cm}$ и заемно нормални дијагонали.

118. Страните на квадратот се поделени на три еднакви делови и некои од овие точки се поврзани со отсечки (цртеж десно). Колкав дел од плоштината на квадратот е осенчен.



119. Точките M, N, P, Q се средини на страните AB, BC, CD, DA на квадратот $ABCD$, а R е средина на отсечката MN . Колкав дел од плоштината на квадратот е осенчен?



120. Даден е правоаголник $ABCD$ со плоштина 1890 cm^2 . Точките M, N, P и Q ги делат страните AB, BC, CD и DA соодветно во односи $1:2$, $2:3$, $3:4$ и $4:5$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.
121. Даден е рамностран триаголник ABC . На страната AC е дадена точка M таква што $\overline{AM} : \overline{MC} = 1:2$, а на страната BC е дадена точка N

таква што $\overline{BN} : \overline{NC} = 2 : 3$. Определи го односот на плоштините на четириаголникот $ABMN$ и триаголникот CMN .

122. Определи ја плоштината на траpez со основи чии должини се 44 cm и 16 cm , а должините на краците му се 17 cm и 25 cm .

123. Збирот на дијагоналите на робот е еднаков на 34 cm , а неговата плоштина е еднаква на 120 cm^2 . Определи го периметарот на ромбот.

124. Определи го радиусот на опишаната кружница околу рамнокрак траpez чии основи се со должини 8 cm и 6 cm , а должината на висината е 7 cm .

125. Должината на едната страна на триаголникот е 36 cm , збирот на должините на другите две страни е 60 cm . Определи ја должината на секоја од страните на триаголникот за да радиусот на впишаната во него кружница е најголем.

126. Нека a е должината на основата и b е должината на кракот на рамнокракиот триаголник за кои важи

$$a^3 + b^3 + 3b^2(b - a) + 2b(b^2 - a^2) = 0.$$

Определи ги аглиите на овој триаголник.

127. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник за кои важи

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a + b) + ac(a + c) - bc(b + c).$$

Докажи дека овој триаголник е правоаголен.

128. Определи го периметарот на правоаголниот триаголник со плоштина 30 cm^2 за чии страни важи $5a = b + c$, a и b се катети.

129. Определи ја плоштината на правоаголниот триаголник со периметар 36 cm и за чии страни важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$, a и b се катети.

130. Во четириаголникот $ABCD$ точките M и N се средини соодветно на спротивните страни AB и DC . Нека отсечките MD и AN се сечат во точката P , а MC и BN во точката Q . Докажи дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците APD и BCQ .

V.5. МНОГУАГОЛНИК

131. Еден многуаголник има три пати поголем збир на внатрешните агли од друг. Докажи дека или и двата многуаголници имаат парен број страни или и двата многуаголници имаат непарен број страни.
132. Ако бројот на страните на еден многуаголник се зголеми за 3, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува неколку пати. Определи ги сите такви многуаголници.
133. Во даден квадрат со должина на страна 10 cm со отсекување на рамнокраки правоаголни триаголници чии прави агли се наоѓаат во темињата на квадратот е добиен правилен осумаголник. Определи ги должината на страната и плоштината на овој осумаголник.
134. Определи ги периметарот и плоштината на правилен осумаголник за кој е дадено:
- а) должината на страната $a = 6\text{ cm}$,
 - б) радиусот на опишаната кружница R ,
 - в) радиусот на впишаната кружница $r = 4 + 2\sqrt{2}\text{ cm}$.
135. Конвексниот m – аголник има 2012 дијагонали повеќе од конвексниот n – аголник. Определи ги сите такви броеви m и n .
136. За колку се разликуваат плоштините на правилен дванаесетаголник и правилен шестаголник, ако и двата се впишани во кружница со радиус 12 cm .
137. Во кружница со радиус $R = 10\text{ cm}$ е впишан правилен осумаголник. Определи го збирот на неговите дијагонали.
138. Должината на најкратката дијагонала на правилен дванаесетаголник е $d = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\text{ cm}$. Определи ја плоштината на овој дванаесетаголник.
139. Нека M е точка во внатрешноста на правилен многуаголник со n страни и нека $h_1, h_2, \dots, h_n$ се растојанијата од точката M до правите на кои лежат страните на многуаголникот и r радиусот на впишаната кружница во многуаголникот. Докажи дека $h_1 + h_2 + \dots + h_n = nr$.

140. Правилен шестаголник и рамностран триаголник имаат еднакви плоштини. Која фигура има поголем периметар.
141. Во правоаголник чија една страна е со должина a впишан е правилен шестаголник чии темиња припааат на страните на правоаголникот. Определи ја плоштината на овој шестаголник.
142. Два многуаголници заедно имаат 119 дијагонали. Бројот на страните на едниот многуаголник е за еден поголем од бројот на страните на другиот многуаголник. Определи ги овие многуаголници.
143. Ако бројот на дијагоналите на многуаголникот се зголеми за 235, се добива бројот на дијагоналите кој има 10 страни повеќе од почетниот многуаголник. Определи ги овие многуаголници.
144. Ако многуаголникот има n страни и $kn, k \in \mathbb{N}$ дијагонали, тогаш n е непарен број. Докажи!
145. Правилен многуаголник со n страни има 15 дијагонали помалку од правилен многуаголник со $n+2$ страни. За колку е помал внатрешниот агол на првиот многуаголник од внатрешниот агол на вториот многуаголник?
146. Ако бројот на страните на правилниот многуаголник се зголеми за 2, тогаш неговиот централен агол се намалува за 6° . За кој многуаголник станува збор?

V.6. КРУЖНИЦА И КРУГ

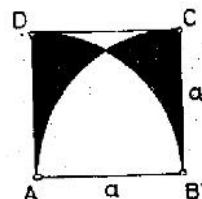
147. Дадени се правите g_1 и g_2 , кои се сечат во точка O и точка M , која не припаѓа на ниту една од овие прави. Нека j_1 и j_2 се осните симетрии со оски g_1 и g_2 . Ако $M \xrightarrow{j_1} M_1$, $M_1 \xrightarrow{j_2} M_2$ и $M_2 \xrightarrow{j_1} M_3$ докажи дека:
- а) точките M, M_1, M_2, M_3 се конциклични,
- б) правата определена од точката O и средината на отсечката M_2M_3 е нормална на отсечката M_2M_3 .

148. Во триаголникот ABC страната AB е два пати поголема од страната AC . Нека $\overline{CM} = \overline{AC}$ е тежишна линија на триаголникот ABC (точката M припаѓа на страната AB), а CP е тежишна линија на триаголникот AMC (точката P припаѓа на страната AM). Докажи дека CM е симетрала на $\angle PCB$.
149. Висната, симетралата на аголот и тежината линија (медијаната) повлечени од темето C на триаголникот ABC го делат аголот во ова темето на четири еднакви дела. Определи ги аглите триаголникот ABC .
150. Околу триаголникот ABC е опишана кружница. Висините повлечени од темињата A и B ја сечат кружницата во точките A_1 и B_1 , соодветно. Докажи, ако $\angle C = 60^\circ$, тогаш $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$.
151. На кружницата k со центар O во иста насока се земени точките A, B, C, D , при што важи $\widehat{AB} = \widehat{CD} = 60^\circ$. Точките M, P, H се средини на отсечките OA, BC, OD , соодветно. Докажи дека:
- околу четириаголникот $OPBM$ може да се опише кружница,
 - триаголникот HPM е рамнострани.
152. Кружниците k_1 и k_2 надворешно се допираат во точката A . Правата која ја содржи точката A по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките M и N , соодветно. Докажи дека тангентите t_1 и t_2 на кружниците k_1 и k_2 во точките M и N се паралелни.
153. Две кружници внатрешно се допираат во точката A . Од центарот O на поголемата кружница е нацртан радиус OB на големата кружница кој воедно е тангента на помалата кружница во точката C . Определи го $\angle BAC$.
154. Даден е триаголник ABC во кој најголемиот внатрешен агол е помал од 120° . Над секоја страна на триаголникот е конструиран рамнострани триаголник така што секој од рамностраните триаголници е во различна полурамнина со триаголникот ABC во однос на правите на кои лежат заедничките страни. Околу рамностраните триаголници се опишани три кружници. Докажи дека
- секои две од опишаните три кружници се сечат,
 - трите кружници се сечат во една точка.

155. Двата пара спротивни страни на еден четириаголник кој не е трапез се продолжени до неvnите пресеци. Околу добиените четири триаголници се опишани кружници. Докажи дека овие кружници се сечат во една точка.

156. Впишаната кружница k_1 во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC во точките D и E . Докажи дека пресечните точки N и M на симетралите на $\angle B$ и $\angle C$ соодветно со правата DE и точките B и C лежат на една кружница.

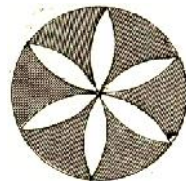
157. Пресметај ја плоштината на осенчениот дел од квадратот даден на цртежот десно. Центрите на кружниците се во точките A и B .



158. Радиусите на кружниците кои формираа кружен прстен прикажан на цртежот десно се r и $2r$. Определи ја плоштината на осенчениот дел на прстенот.



159. Колкав дел од плоштината на кругот зафаќа осенчениот дел на фигурата прикажана на цртежот десно?



V.7. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

160. Дадени се права l и точки A и B кои не лежат на правата l такви што отсечката AB ја сече правата l . Определи точка C на правата l таква што симетралата на $\angle ACB$ лежи на l .

161. Определи го множеството внатрешни точки во рамнината на остриот $\angle AOB$ за кои збирот на растојанијата до двата краци на аголот е еднаков на дадена отсечка d .

162. Дадена е права a и две точки A и B кои се на различни страни од правата a . На правата a определи точка таква што разликата на растојанијата од неа до точките A и B е најголема.

163. Над едниот крак на даден прав агол се земени точки A и B , различни од темето на аголот. Конструирај точка која припаѓа на другиот крак и од неа отсечката AB се гледа под најголем можен агол.

164. На кружницата од една иста страна на даден дијаметар AB се дадени две точки P и Q . На другата полукружница конструирај точка M таква што отсечките PM и QM од дијаметарот AB отсекуваат отсечка со дадена должина m .
165. Низ точка M која лежи надвор од кружница конструирај секанта од која кружницата ќе отсеке тетива AB со должина m .
166. Дадени се отсечка со должина a и остар $\angle MON$. Конструирај права која е нормална на симетралата на дадениот агол и од него отсекува триаголник со периметар еднаков на a .
167. Даден е триаголник ABC . Конструирај права паралелна на страната AB , која страните AC и BC ги сече во точки M и K , соодветно такви што $\overline{MC} = \overline{KB}$.
168. Конструирај правоаголен триаголник за кој се дадени хипотенузата и медијаната кон една од катетите.
169. Конструирај рамнокрак триаголник за кој се дадени аголот при врвот и збирот на основата и едниот крак еднаков на d .
170. Конструирај триаголник ABC за кој се дадени $\angle A = a$, $\overline{BC} = a$ и $\overline{AB} + \overline{AC}$ има најголема можна должина.
171. Даден е триаголник ABC . Конструирај права p паралелна со страната AB така што $\overline{AD} + \overline{EB} = \overline{DE}$, каде D е пресекот на правата p со AC , а E е пресекот на правата p со страната BC на дадениот триаголник.
172. Конструирај триаголник ABC ако се дадени $\angle C$ и радиусот r на впишаната кружница во триаголникот, а центарот на опишаната кружница околу триаголникот лежи на симетралата на $\angle A$.
173. На дадена права l емени се точки A, B, C така што отсечката AB е пократка од отсечката BC (B е меѓу A и C). Конструирај рамностран триаголник ADP така што темињата D и P припаѓаат на права која минува низ C , а висината повлечена од темето P лежи на права која минува низ точката B .

174. Конструирај триаголник ако се дадени една негова страна, висината повлечена кон неа и медијаната кон една од другите две страни.
175. Конструирај го триаголникот за кој се дадени висина и медијана повлечени од едно исто теме и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.
176. Конструирај рамнокрак триаголник ABC ако се дадени висината h_a повлечена кон кракот и висината h_c повлечена кон основата.
177. Конструирај триаголник за кој се дадени радиусот R на опишаната кружница k , $\angle A = \alpha$ и висината h_c .
178. Продолженијата на симетралите на аглите A, B, C на триаголникот ABC ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките L, M, N , соодветно. Ако се дадени точките L, M, N , конструирај го триаголникот ABC .
179. Дадени се права MN и точки A и B од иста нејзина страна. На правата MN определи точка P таква што $\angle MPA = 2\angle NPB$.
180. Во рамнината е даден правилен шестаголник чија страна е еднаква на 1 cm . Само со помош на линијар конструирај отсечка чија должина е $\sqrt{7}\text{ cm}$.
181. Милан нацртал паралелограм $ABCD$, потоа ги означил средината M на страната BC и средината N на страната CD и излегол од собата. Неговата сестра Илина од цртежот ги избришала се освен точките A, M, N . Помогни му на Милан да ги определи точките B, C, D .
182. Даден е трапез со должини на краци 39 mm и 45 mm , дијагоналата која е нормална на подолгиот крак има должина 60 mm . Конструирај го овој трапез, а потоа пресметај ги неговите периметар и плоштина.
183. Должината на висината на трапезот е еднаква на 6 cm , а должината на едната основа е 4 cm . Внатрешните агли на трапезот на таа основа се 120° и 135° .
- а) Конструирај го овој трапез.
- б) Определи ги периметарот и плоштината на овој трапез.

184. Дадена е кружница k со центар O и дијаметар $\overline{AB} = 4\text{ cm}$.
- а) Конструирај три тангенти од кои две се во точките A и B , а третата таква што отсечокот CD меѓу првите две тангенти на оваа права има должина 5 cm .
 - б) Определи го $\angle COD$.
 - в) Определи ја плоштината ограничена со двете тангенти и дадената кружница.
185. Конвексен шестаголник $ABCDEF$ е составен од рамнокрак трапез $ACDF$ и два рамнокраки триаголници ABC и FDE со еднакви висини ($h = 12\text{ cm}$). Притоа важи $\overline{AB} = 15\text{ cm}$, $\overline{AF} = 25\text{ cm}$, $\overline{FE} = 20\text{ cm}$. Конструирај го шестаголникот во размер 1:5 и пресметај ја неговата плоштина.
186. Да се конструира четириаголник за кој се дадени четирите страни и една од дијагоналите е симетрала на еден од аглите на четириаголникот.
187. Конструирај конвексен четириаголник за кој се познати средините на трите страни и пресечната точка на дијагоналите.
188. Точката M е средина на страната CD на паралелограмот $ABCD$, а точката N е симетрична на точката C во однос на точката B . Конструирај го паралелограмот $ABCD$ ако се дадени точките A, M, N .
189. Конструирај квадрат за кој се дадени збирот на страната и дијагоналата, т.е. $s = a + d$
190. Конструирај ромб за кој се дадени разликата меѓу дијагоналите $d_1 - d_2 = m$ и еден негов агол α .
191. Конструирај трапез за кој се дадени краците, аголот меѓу краците на трапезот и аголот меѓу неговите дијагонали.
192. Даден е правоаголен триаголник. Конструирај кружница која минува низ темето на правиот агол, ја допира хипотенузата и центарот е припаѓа на една од катетите.
193. Конструирај кружница која дадена кружница k_1 ја допира во дадена точка T и допира дадена права a .

194. Дадена е кружница k_1 со центар O_1 , точка M од k_1 и точка F која не лежи на k_1 . Конструирај кружница k која минува низ точката F , ја допира кружницата k_1 во точката M , ако точката F е:
- а) внатрешна за кружницата k_1 ,
 - б) надворешна за кружницата k_1 .
195. Конструирај кружница која допира дадена кружница $k_1(O_1, r_1)$ и допира дадена права a во дадена точка A ,
196. Конструирај кружница k со даден радиус r , која минува низ точка M и сече дадена кружница $k_1(O_1, r_1)$ така што заедничката тетива AB има должина d .
197. Конструирај кружница со даден радиус r , која од дадена права a отсекува отсечка со дадена должина d и допира друга дадена права b .
198. Дадени се кружница k , права a и транслација u , определена со пар соодветни точки A и A' (A' е слика на A). На правата a да се конструира точка N' , која е слика на точка од k при транслацијата u . Да се конструира и прасликата на N' .
199. Дадена е отсечка AB . Конструирај отсечка MN еднаква и паралелна на AB чии крајни точки припаѓаат на правите a и b , секоја од кои ја сече правата AB .
200. Дадена е отсечка AB . Конструирај отсечка MN еднаква и паралелна на AB чии крајни точки припаѓаат на дадени права a и кружница $k(O, r)$, при што правата a ја сече правата AB .
201. Дадена е отсечка AB . Конструирај отсечка MN еднаква и паралелна на AB чии крајни точки припаѓаат на две дадени кружници $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$.
202. Конструирај четириаголник за кој се дадени четирите страни и аголот меѓу просолженијата на две негови спротивни страни.
203. Конструирај четириаголник за кој се дадени страните и отсечка која поврзува средини на две спротивни страни.

204. Конструирај четириаголник $ABCD$ за кој се дадени дијагоналите $\overline{AC} = d_1, \overline{BD} = d_2$, аголот d меѓу нив, $\angle DAB = a$ и $\angle BCD = g$.
205. Конструирај трапез $ABCD$ за кој се дадени краците $\overline{BC} = c, \overline{AD} = d$, аголот a меѓу продолженијата на краците и аголот b меѓу дијагоналите на трапезот.
206. Конструирај рамнокрак триаголник ABC така што темето C е дадена точка, $\angle ACB = g$ и темињата A и B соодветно припаѓаат на дадена права a и дадена кружница $k(O, r)$.
207. Дадени се кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ и точката O , различна од O_1 и O_2 . Конструирај рамностран триаголник кај кој едното теме е точката O , а другите две темиња припаѓаат на кружниците k_1 и k_2 .
208. Точката O е внатрешна за рамностраниот триаголник ABC и од неа страната AC се гледа под агол 150° . Докажи дека отсечките $\overline{OA} = m$, $\overline{OB} = n$ и $\overline{OC} = s$ се страни на правоаголен триаголник.

V.8. СТЕРЕОМЕТРИЈА

209. Докажи дека сите правоаголни паралелопипеди кај кои плоштината и волуменот (во cm^2 и cm^3) се изразени со ист број имаат еднаков збир на реципрочните вредности на должините на рабовите повлечени од исто теме.
210. Основата на права призма е квадрат со должина на работ a . Должината на работ a е два пати поголема од должината на висината на призмата. Мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви. Определи ги должините на рабовите на оваа призма.
211. Основните рабови на квадарот се однесуваат како $4:3$, дијагоналите на бочните сидови меѓусебно се однесуваат како $\sqrt{20}:\sqrt{13}$, а плоштината на дијагоналниот пресек се однесува спрема волуменот на квадарот како $2:1$. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

212. Основата на права призма е правоаголник со должини на страни 5 cm и 8 cm , а плоштината на омотачот на оваа призма е еднаква на $408,2\text{ cm}^2$. Определи ја плоштината на цилиндарот чиј дијаметар на основата е 4 cm , ако неговиот волумен е еднаков на 64% од волуменот на призмата.
213. Дадена е права правилна еднаковрабна тристрана призма чија основа има плоштина $6,25\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
- а) Определи го основниот раб на ова тело.
 - б) Определи го односот на волумените на впишаниот и опишаниот цилиндар околу ова тело.
214. Основата на права четиристрана призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$. Помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2 .
- а) Определи ги плоштината и волуменот на призмата.
 - б) Определи го k ако мерните броеви на плоштината и волуменот се еднакви.
215. Дадена е коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со должина на раб a . Нека точката M е пресекот на дијагоналите на основата $ABCD$ и нека отсечките DB_1 и MD_1 се сечат во точката K . Определи ги плоштините на триаголниците KDM и $KB_1 D_1$.
216. Рамнина сече коцка така што трите рабови на коцката со заедничко теме ги сече во точки кои тие рабови ги делат во односи $1:1$, $2:1$ и $3:1$, сметајќи од заедничкото теме. Определи го односот на волумените на телата на кои рамнината ја дели коцката.
217. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $5a^2$, каде a е должината на основата на пирамидата. Изрази го волуменот на пирамидата во функција од a . Пресметај го волуменот на пирамидата ако $a = 6\text{ dm}$.
218. Даден е правоаголен триаголник ABC . Од темето A на правиот агол е повлечена тежишната линија AM , $M \in BC$. Висината AD , $D \in CM$ на триаголникот ACM ја полови спротивната страна.

- а) Определи ги аглите на триаголникот ABC .
 б) Определи ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот ABC околу страната AB , ако $\overline{AD} = k\sqrt{3}$.

219. Дадени се правите $p_1: y = x - 4$ и $p_2: y - 2x + 2 = 0$. Пресметај ги:

- а) плоштината на фигурата определена со правите p_1 и p_2 со координатните оски,
 б) волуменот на ротационото тело кое се добива со ротација на триаголникот ограничен со правите p_1 и p_2 и ординатната оска околу ординатната оска.

220. Правата $y = ax + b$ минува низ точката $T(0, 6)$, со координатните оски формира триаголник со плоштина 24 и не минува низ третиот квадрант.

- а) Определи ги a и b .
 б) Определи го плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот околу неговата најдолга страна.

221. Правите $x - y = -1$, $x + y = 8$ и $x - 2y = 2$ и двете координатни оски формираат петаголник. Определи го волуменот на ротационото тело кое се добива со ротација на тој петаголник околу апсисната оска.

222. Врвот на прав конус е во центарот на едната основа на цилиндарот. Втората основа на цилиндарот и основата на конусот лежат во иста рамнина и имаат ист центар. Волумените на конусот и цилиндарот се еднакви. Радиусот на основата на цилиндарот е r , а висината на цилиндарот е h .

- а) Определи го радиусот на основата на конусот.
 б) Определи го волуменот на ној дел од конусот кој се наоѓа во цилиндарот.

223. Даден е конус со радиус на основата 3 dm . Над истата основа и од истата страна конструиран е цилиндар чија плоштина е еднаква на плоштината на конусот, а волуменот е еднаков на волуменот на конусот. Определи ги плоштината и волуменот на телото кое е пресек на конусот и цилиндарот.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Ако на природен број кој завршува на цифрата 5 му се избрише последната цифра, добиениот број се помножи со неговиот следбеник и на производот од десно му се допише 25, се добива квадратот на почетниот број. Докажи!

Решение. Нека дадениот број е $x = 10a + 5$. Со отстранување на цифрата 5 го добиваме бројот a . Кога овој број ќе го помножиме со неговиот следбеник и на производот од десно му го допишеме бројот 25 добиваме $100a(a + 1) + 25 = (10a + 5)^2$, што и требаше да се докаже.

2. Определи ја вредноста на изразот

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 6 + \dots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots + 100 \cdot 300 \cdot 900}.$$

Решение. Имаме

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 6 + \dots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots + 100 \cdot 300 \cdot 900} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3)}{1 \cdot 3 \cdot 9(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3)} = \frac{8}{27}.$$

3. Реши го бројниот ребус:

$$\overline{abcd} = (5c + 1)^2$$

Решение. Од условот на задачата следува равенството

$$25(40a + 4b - c^2) = 1 - d.$$

Левата страна на последното равенство е делива со 25, па затоа мора и десната страна да е делива со 25. Но, d е цифра, од каде следува $d = 1$. Според тоа, $4(10a + b) = c^2$ и како $a \neq 0$, добиваме 4 е делител на c^2 , од каде заклучуваме дека $c^2 = 64$, т.е. $c = 8$. Сега лесно се добива дека $c = 8$ и $10a + b = 16$, од каде наоѓаме $a = 1, b = 6$, т.е. $\overline{abcd} = 1681$.

4. Реши го бројниот ребус:

$$(6d + 3)^2 = \overline{abcd}.$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$\overline{abcd} = 9(2d+1)^2.$$

Но, бројот $\overline{abcd}$ е четирицифрен, па затоа $999 < \overline{abcd} \leq 9999$, од каде добиваме $999 < 9(2d+1)^2 \leq 9999$, односно $111 < (2d+1)^2 \leq 1111$. Од последните неравенства следува $11^2 \leq (2d+1)^2 \leq 33^2$, па затоа важи $11 \leq 2d+1 \leq 33$. Но, d е цифра, па од последните неравенства следува $5 \leq d \leq 9$.

- 1) Ако $d=5$, тогаш $(6d+3)^2 = 33^2 = 1089$ не е решение, бидејќи $9 \neq d$.
- 2) Ако $d=6$, тогаш $(6d+3)^2 = 39^2 = 1521$ не е решение, бидејќи $1 \neq d$.
- 3) Ако $d=7$, тогаш $(6d+3)^2 = 45^2 = 2025$ не е решение, бидејќи $5 \neq d$.
- 4) Ако $d=8$, тогаш $(6d+3)^2 = 51^2 = 2601$ не е решение, бидејќи $1 \neq d$.
- 5) Ако $d=9$, тогаш $(6d+3)^2 = 57^2 = 3249$ и тоа е единственото решение на задачата.

5. Определи трицифрен природен број за кој односот на бројот и збирот на неговите цифри е најмал.

Решение. Имаме $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}$ и како броителот не зависи од c , заклучуваме дека изразот е најмал ако c е најголем, т.е. $c=9$. Ако замениме $c=9$ добиваме:

$$1 + \frac{99a+9b}{a+b+9} = 1 + \frac{90a+9a+9b+81-81}{a+b+9} = 1 + \frac{9(a+b+9)+90a-81}{a+b+9} = 10 + \frac{90a-81}{a+b+9},$$

па како броителот на последната дробка не зависи од b добиваме дека изразот е најмал ако b е најголем, т.е. ако $b=9$. Со замена $b=9$ добиваме $10 + \frac{90a-81}{a+18} = 100 - \frac{1701}{a+18}$, па сега дадениот израз е најмал ако дробката $\frac{1701}{a+18}$ е најголема, т.е. ако $a=1$. Конечно, бараниот број е 199.

6. Со колку цифри се запишува бројот

$$4^{16} \cdot 5^{25}?$$

Решение. Од

$$4^{16} \cdot 5^{25} = (2^2)^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^7 \cdot 2^{25} \cdot 5^{25} = 128 \cdot 10^{25} = 128 \underbrace{000 \dots 0}_{25}$$

следува дека дадениот број се запишува со 28 цифри.

7. Пресметај квадратен корен од бројот $\underbrace{1000 \dots 05}_{2011} \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{2012} + 1$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \underbrace{1000 \dots 05}_{2011} \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{2012} + 1 &= \underbrace{1000 \dots 05}_{2011} \cdot \frac{1}{9} \cdot \underbrace{999 \dots 9}_{2012} + \frac{9}{9} \\ &= \frac{1}{9} ((10^{2012} + 5)(10^{2012} - 1) + 1) \\ &= \frac{1}{9} ((10^{2012})^2 + 4 \cdot 10^{2012} + 4) \\ &= \frac{1}{9} (10^{2012} + 2)^2 = \left(\frac{10^{2012} + 2}{3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot \underbrace{1000 \dots 02}_{2011} \right)^2 = \underbrace{333 \dots 34}_{2011}^2 \end{aligned}$$

па затоа бараниот квадратен корен е $\underbrace{333 \dots 34}_{2011}$.

8. Пресметај квадратен корен од бројот $\underbrace{111 \dots 1}_{n} \underbrace{222 \dots 2}_{n+1} 5$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \underbrace{111 \dots 1}_{n} \underbrace{222 \dots 2}_{n+1} 5 &= \underbrace{111 \dots 1}_{n} \underbrace{1000 \dots 0}_{n+2} + \underbrace{222 \dots 2}_{n+1} 0 + 5 \\ &= 10^{n+2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \underbrace{999 \dots 9}_n + 10 \cdot \frac{2}{9} \cdot \underbrace{999 \dots 9}_{n+1} + \frac{45}{9} \\ &= \frac{1}{9} \cdot 10^{n+2} \cdot (10^{n+1} - 1) + \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 10 \cdot (10^{n+1} - 1) + \frac{45}{9} \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2n+2} - 10^{n+2} + 2 \cdot 10 \cdot 10^{n+1} - 20 + 45) \\ &= \frac{1}{9} \cdot ((10^{n+1})^2 - 10^{n+2} + 2 \cdot 10^{n+2} + 25) \\ &= \frac{1}{9} \cdot ((10^{n+1})^2 + 10^{n+2} + 25) \\ &= \frac{1}{9} \cdot ((10^{n+1})^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10^{n+1} + 25) \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{n+1} + 5)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot (10^{n+1} + 5) \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot \underbrace{1000 \dots 05}_n \right)^2 = \underbrace{333 \dots 35}_n^2 \end{aligned}$$

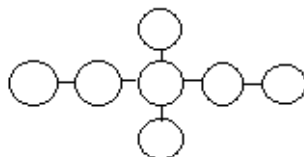
па затоа бараниот квадратен корен е $\underbrace{333 \dots 35}_n$.

9. Дали бројот $1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 9^9$ е квадрат на природен број?

Решение. Ако ги разгледаме цифрите на единиците на собираците во $1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 9^9$ и добиваме дека нивниот збир е еднаков на $1 + 4 + 7 + 6 + 5 + 6 + 3 + 6 + 9 = 47$. Бидејќи квадрат на природен број завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 6, 5 или 9 заклучуваме дека $1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 9^9$ не е квадрат на природен број.

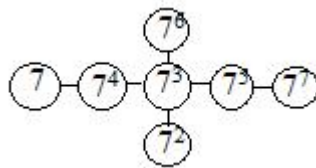
10. Во кругчињата на цртежот десно запиши

ги броевите $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ така што збирот на цифрите на единиците на броевите запишани во петте хоризонтално поставени кругчиња е еднаков на збирот на цифрите на единиците во трите вертикално поставени кругчиња.



Решение. Цифрите на единиците на степените $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ се 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3. Ако во средното кругче е бројот 1, тогаш збирот на преостанатите броеви е 38. Тоа значи дека збирот на броевите запишани вертикално и хоризонтално треба да биде 19, па како 19 не може да се добие како збир на два од дадените броеви, заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение.

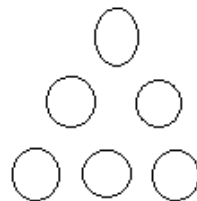
Ако во средното кругче е бројот 3, тогаш збирот на преостанатите броеви е 36, па затоа во двете верикални полиња се броевите 9, а останатите се во хоризонталните полиња цртеж десно).



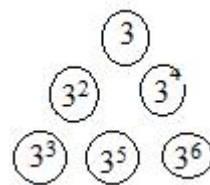
Ако во средното кругче е бројот 7, тогаш збирот на преостанатите броеви е 32, па затоа во двете вертикални кругчиња ги запишуваме броевите 7 и 9, а останатите броеви ги запишуваме во хоризонталните кругчиња (направи цртеж).

11. Дали е можно броевите $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ да се распоредат така што збирот на цифрите на единиците на броевите запишани во кругчињата на секоја страна на триаголникот е еднаков?

Решение. Цифрите на единиците на броевите $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ се 3, 9, 7, 1, 3, 9 и нивниот збир е 32. Цифрите кои се во кругчињата во темињата на триаголникот лежат



на две страни, па затоа се собираат два пати. Збирот на цифрите на сите три страни е еднаков, па затоа тој мора да биде делив со 3. При делење на 32 со 3 се добива остаток 2, па затоа во темињата треба да се запишат броеви кои при делење 3 даваат остатоци чиј збир е 1. Можни такви тројки се (1,3,3); (1,9,9); (1,3,9); (3,3,7); (3,7,9); (7,9,9). Со непосредна проверка се добива дека само тројките (1,3,3) и (7,9,9) даваат решение на задачата. Едното од овие две решенија е прикажано на цртежот десно.



12. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4 \cdot 3^7 + 5 \cdot 3^7$, б) $25 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^8$, в) $\frac{48 \cdot 4^{10}}{3 \cdot 4^3}$

Решение. Имаме:

а) $4 \cdot 3^7 + 5 \cdot 3^7 = 3^7 \cdot (4 + 5) = 3^7 \cdot 3^2 = 3^9$,

б) $25 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^8 = 2^8 \cdot (25 - 9) = 2^8 \cdot 2^4 = 2^{12}$,

в) $\frac{48 \cdot 4^{10}}{3 \cdot 4^3} = \frac{48 \cdot 4^7}{3} = 16 \cdot 4^7 = 4^9$.

13. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{2^{101} - 2^{99}}{2^{100} - 2^{99}} \cdot \frac{2869^2 - 2814^2}{3 + 6 + 9 + \dots + 30}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{2^{101} - 2^{99}}{2^{100} - 2^{99}} \cdot \frac{2869^2 - 2814^2}{3 + 6 + 9 + \dots + 30} = \frac{2^{99}(2^2 - 1)}{2^{99}(2 - 1)} \cdot \frac{(2869 + 2814)(2869 - 2814)}{3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}} = \frac{3 \cdot 5683 \cdot 55}{3 \cdot 5 \cdot 11} = 5683.$$

14. Пресметај ја вредноста на изразот

$$3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{1000}.$$

Решение. Ако $S = 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{1000}$, тогаш

$$9S = 3^2(3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{1000}) = 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{1002}$$

па затоа

$$\begin{aligned} 8S &= 9S - S = 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{1002} - (3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{1000}) \\ &= 3^{1002} - 3^2 = 3^2(3^{1000} - 1). \end{aligned}$$

Конечно, $S = \frac{3^2(3^{1000} - 1)}{8}$.

15. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(3 + \frac{1}{3})^2 + (3 + (\frac{1}{3})^2)^2 + \dots + (3 + (\frac{1}{3})^{1000})^2.$$

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} S &= (3 + \frac{1}{3})^2 + (3 + (\frac{1}{3})^2)^2 + \dots + (3 + (\frac{1}{3})^{1000})^2 = \\ &= 3^2 + 6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + 3^2 + 6 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + 3^2 + 6 \cdot \frac{1}{3^{1000}} + \frac{1}{3^{2000}} \\ &= 1000 \cdot 3^2 + 6 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{1000}}) + (\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2000}}) \\ &= 9000 + 6A + B \end{aligned}$$

каде

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}A &= A - \frac{1}{3}A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{1000}} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} - \dots - \frac{1}{3^{1001}} \\ \frac{2}{3}A &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{1001}} \\ A &= \frac{3}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{1001}}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{8}{9}B &= B - \frac{1}{9}B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2000}} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^6} - \dots - \frac{1}{3^{2002}} \\ \frac{8}{9}B &= \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^{2002}} \\ B &= \frac{9}{8}(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^{2002}}). \end{aligned}$$

Според тоа,

$$S = 9000 + 6A + B = 9000 + 9(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{1001}}) + \frac{9}{8}(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^{2002}}).$$

16. Ако $A = -3^{2008} : 27^{669}$ и $B = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + 1$, пресметај $-\frac{A^3}{B^2}$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{3} > 1$ имаме:

$$A = -3^{2012} : 27^{671} = -3^{2012} : (3^3)^{671} = -3^{2012} : 3^{2013} = -3 \text{ и}$$

$$B = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + 1 = |1 - \sqrt{3}| + 3 = \sqrt{3} - 1 + 1 = \sqrt{3},$$

па затоа $-\frac{A^3}{B^2} = -\frac{(-3)^3}{\sqrt{3}^2} = 9$.

17. Пресметај

а) $\sqrt{(\frac{11}{5} + \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\frac{11}{5} - \sqrt{5})^2}$, б) $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$

Решение. а) Бидејќи

$$\frac{11}{5} = \sqrt{\frac{121}{25}} < \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{5}$$

добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{11}{5} + \sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{11}{5} - \sqrt{5}\right)^2} &= \left|\frac{11}{5} + \sqrt{5}\right| - \left|\frac{11}{5} - \sqrt{5}\right| = \frac{11}{5} + \sqrt{5} - \left(\sqrt{5} - \frac{11}{5}\right) \\ &= \frac{11}{5} + \frac{11}{5} = \frac{22}{5}.\end{aligned}$$

б) Бидејќи $1 < \sqrt{2}$ добиваме

$$\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 + \sqrt{2}| - |1 - \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2.$$

18. Пресметај ги A^2 и A ако $A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned}A^2 &= (\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}})^2 \\ &= (\sqrt{4 + \sqrt{15}})^2 + 2\sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} + (\sqrt{4 - \sqrt{15}})^2 \\ &= 4 + \sqrt{15} + 2\sqrt{4^2 - \sqrt{15}^2} + 4 - \sqrt{15} = 8 + 2 = 10,\end{aligned}$$

па затоа $A = \sqrt{10}$.

19. Ако $x = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2x} + \sqrt{\sqrt{2} - 2x}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{2} + 2x} + \sqrt{\sqrt{2} - 2x} &= \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}} \\ &= \sqrt{\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{\sqrt{2} - 1} + 1} + \sqrt{\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{\sqrt{2} - 1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2} - 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2} - 1} - 1)^2} \\ &= |\sqrt{\sqrt{2} - 1} + 1| + |\sqrt{\sqrt{2} - 1} - 1| \\ &= \sqrt{\sqrt{2} - 1} + 1 + 1 - \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 2,\end{aligned}$$

бидејќи $0 < \sqrt{\sqrt{2} - 1} < 1$.

20. Ако $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ определи ја вредноста на изразот

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}.$$

Решение. Имаме:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Слично се добива дека $\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Конечно,

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} &= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\
&= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\
&= \frac{6+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3+6-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{9-3} = 1.
\end{aligned}$$

21. Дали бројот $\sqrt{0,1111\dots}$ е рационален или е ирационален.

Решение. Нека $x = 0,1111\dots$. Тогаш $10x = 1,111\dots$, па затоа $9x = 1$, односно $x = \frac{1}{9}$. Конечно, $\sqrt{0,1111\dots} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ е рационален број.

22. Докажи дека $\sqrt{28} - \sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}$ е рационален број.

Решение. Бидејќи $\sqrt{28} > \sqrt{25} = 5$, добиваме

$$\sqrt{28} - \sqrt{(5-2\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{7} - |5-2\sqrt{7}| = 2\sqrt{7} - (2\sqrt{7} - 5) = 5.$$

23. Дали вредноста на изразот $1,494949\dots + \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ е рационален или ирационален број.

Решение. Нека $x = 1,494949\dots$. Тогаш $100x = 149,494949\dots$, па затоа $99x = 148$, т.е. $x = \frac{148}{99}$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
1,494949\dots + \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \frac{149}{99} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{149}{99} + 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = \frac{149}{99} + 4,
\end{aligned}$$

што значи дека вредноста на дадениот израз е рационален број.

24. Дали вредноста на изразот $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$ е рационален или ирационален број?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} &= |\sqrt{5}-3| + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 3-\sqrt{5} + |2-\sqrt{5}| \\
&= 3-\sqrt{5} + \sqrt{5}-2 = 1
\end{aligned}$$

што значи дека вредноста на изразот е рационален број.

25. Докажи дека $A = \sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$ е рационален број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}} \\
 &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \\
 &= |2-\sqrt{3}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{2}-1| \\
 &= 2-\sqrt{3} + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{2}-1 = 1
 \end{aligned}$$

што значи дека A е рационален број.

26. Рампо и Васко играат со две коцки за играње на кои се запишани броевите $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{5}$, на секоја страна по еден број. Рампо победува ако производот на два добиени броја е рационален, а Васко победува ако производот на двата добиени броја е ирационален. Кој има поголеми шанси да победи?

Решение. Коцката има шест страни. Од броевите на нејзините страни може да се формираат $6 \cdot 6 = 36$ различни производи. Производот на два рационални броја е рационален број и такви производи има $3 \cdot 3 = 9$. Производот од дадените два исти ирационални броја е рационален број и такви производи се 3. Според тоа, вкупно имаме $9 + 3 = 12$ рационални и $36 - 12 = 24$ ирационални производи. Последното значи дека Васко има поголеми шанси да победи.

1.2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

27. Упрости го изразот:

а) $4ab^2 \cdot \frac{1}{6}a^2b^5 \cdot 3$, б) $2^{k+1} - 2^k$, в) $\frac{(2a)^6}{(2a)^5}$.

Решение. а) Имаме:

$$4ab^2 \cdot \frac{1}{6}a^2b^5 \cdot 3 = (4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3) \cdot (aa^2) \cdot (b^2b^5) = 2a^{1+2}b^{2+5} = 2a^3b^7.$$

б) Имаме: $2^{k+1} - 2^k = 2^k \cdot 2^1 - 2^k = 2^k \cdot (2 - 1) = 2^k$.

в) Имаме: $\frac{(2a)^6}{(2a)^5} = (2a)^{6-5} = (2a)^1 = 2a$, за $a \neq 0$.

28. Пресметај ја вредноста на изразот $A = \frac{2x^6}{x^4} - x^2$, за $x = \frac{1}{2}$.

Решение. Имаме:

$$A = \frac{2x^6}{x^4} - x^2 = 2x^{6-4} - x^2 = 2x^2 - x^2 = x^2, \text{ за } x \neq 0.$$

Затоа бараната вредност е $A(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$.

29. Пресметај ја вредноста на изразот $C = \frac{a^0 b^{-1}}{ab^2}$, за $a = -10$ и $b = -2$.

Решение. Од $C(a, b) = \frac{a^0 b^{-1}}{ab^2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{b}}{ab^2} = \frac{1}{ab^2 b} = \frac{1}{ab^{2+1}} = \frac{1}{ab^3}$ следува дека бараната вредност е: $C(-10, -2) = \frac{1}{(-10) \cdot (-2)^3} = \frac{1}{(-10) \cdot (-2^3)} = \frac{1}{(-10) \cdot (-8)} = \frac{1}{80}$.

30. Сведи го во нормален вид мономот: $-2xy(-\frac{3}{2})x^2y$.

Решение. Имаме:

$$-2xy(-\frac{3}{2})x^2y = -2(-\frac{3}{2})xx^2yy = 3x^3y^2.$$

31. Помножи ги мономите: $\frac{3}{2}x^3y$ и $12xy^2$.

Решение. Бараниот производ е:

$$(\frac{3}{2}x^3y) \cdot (12xy^2) = \frac{3}{2} \cdot 12x^3xy^2 = 18x^4y^3.$$

32. Упрости го изразот: $\frac{5^{5n}}{5^n + 3 \cdot 5^n + 5^n}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{5^{5n}}{5^n + 3 \cdot 5^n + 5^n} = \frac{5^{5n}}{5^n(1+3+1)} = \frac{5^{5n}}{5^n \cdot 5} = \frac{5^{5n}}{5^{n+1}} = 5^{5n-(n+1)} = 5^{4n-1}.$$

33. Упрости го изразот: $A = (\frac{a^5}{a^{-2}})^n \cdot \frac{1}{a^7}$.

Решение. Имаме:

$$A = (\frac{a^5}{a^{-2}})^n \cdot \frac{1}{a^7} = (a^{5-(-2)})^n \cdot a^{-7} = (a^7)^n \cdot a^{-7} = a^{7n} \cdot a^{-7} = a^{7n-7}.$$

34. Упрости го изразот:

а) $(-\frac{2}{3}ax^5y^6)^2$, б) $\frac{4x^5y^2}{-0,5x^3y}$.

Решение. Имаме:

а) $(-\frac{2}{3}ax^5y^6)^2 = (-\frac{2}{3})^2 a^2 (x^5)^2 (y^6)^2 = \frac{4}{9} a^2 x^{10} y^{12}$,

б) $\frac{4x^5y^2}{-0,5x^3y} = -\frac{4}{0,5} \cdot \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{y^2}{y} = -8x^2y$.

35. Упрости го изразот: $16\frac{1}{20}ax^{n+1}y^3 - 16,05ax^{n+1}y^3$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 16\frac{1}{20}ax^{n+1}y^3 - 16,05ax^{n+1}y^3 &= (16\frac{1}{20} - 16,05)ax^{n+1}y^3 \\ &= (16\frac{1}{20} - 16\frac{5}{100})ax^{n+1}y^3 \\ &= 0 \cdot ax^{n+1}y^3 = 0. \end{aligned}$$

36. Полиномот $x^2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}x - 2 - \frac{x^2}{2} + 4 - \frac{x}{2}$ сведи го во нормален вид.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}x - 2 - \frac{x^2}{2} + 4 - \frac{x}{2} &= (x^2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^2}{2}) + (\frac{5}{2}x - \frac{x}{2}) + 4 - 2 - \frac{7}{2} \\ &= (1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2})x^2 + (\frac{5}{2} - \frac{1}{2})x - 1,5 \\ &= -x^2 + 2x - 1,5. \end{aligned}$$

37. Собери ги полиномите:

$$p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 2 \text{ и } q(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 0,5x - 1\frac{1}{2}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (4x^3 - 2x^2 + 2) + (-\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 0,5x - 1\frac{1}{2}) \\ &= (4x^3 - \frac{1}{2}x^3) + (x^2 - 2x^2) - 0,5x + (2 - 1\frac{1}{2}) \\ &= (4 - \frac{1}{2})x^3 + (1 - 2)x^2 - 0,5x + 0,5 \\ &= 3,5x^3 - x^2 - 0,5x + 0,5. \end{aligned}$$

38. Пресметај го изразот $u + v + w$ ако

$$u = -x^n + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, v = 4x^n - 2x^2 + 2, w = -x^n + 2x^2 - x + 3.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} u + v + w &= (-x^n + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}) + (4x^n - 2x^2 + 2) + (-x^n + 2x^2 - x + 3) \\ &= (-1 + 4 - 1)x^n + (-2 + 2)x^2 + (\frac{2}{3} - 1)x + (\frac{5}{3} + 2 + 3) \\ &= 2x^n - \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

39. Изврши го множењето:

а) $(-\frac{1}{3}a^3b) \cdot (12a^5b - 4a^4b^2 + 7a^3b^3),$

б) $(x^2 - xy + 2y^2)(2x - y)$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{3}a^3b\right) \cdot (12a^5b - 4a^4b^2 + 7a^3b^3) = \\ & = 12a^5b \cdot \left(-\frac{1}{3}a^3b\right) - 4a^4b^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^3b\right) + 7a^3b^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^3b\right) \\ & = -4a^8b^2 + \frac{4}{3}a^7b^3 - \frac{7}{3}a^6b^4. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - xy + 2y^2)(2x - y) = 2x(x^2 - xy + 2y^2) - y(x^2 - xy + 2y^2) \\ &= 2x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - x^2y + xy^2 - 2y^3 \\ &= 2x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - 2y^3. \end{aligned}$$

40. Сведи го во нормален вид полиномот:

а) $A = -2a(3a^2 + 2b + 5) - [2a^2 - 5b(a + 3b) + 15b^2] + 6a^3 + 8a$,

б) $A = (1 - 0,5x)^2 - (8x^5 - 11x^4 + 17x^3) : \left(\frac{2}{3}x^3\right)$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= -2a(3a^2 - 2b + 5) - [2a^2 - 5b(a + 3b) + 15b^2] + 6a^3 + 8a \\ &= -6a^3 + 4ab - 10a - [2a^2 - 5ab - 15b^2 + 15b^2] + 6a^3 + 8a \\ &= -6a^3 + 4ab - 10a - 2a^2 + 5ab + 6a^3 + 8a \\ &= (-6a^3 + 6a^3) - 2a^2 + (4ab + 5ab) - 10a + 8a \\ &= -2a^2 + 9ab - 2a. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (1 - 0,5x)^2 - (8x^5 - 11x^4 + 17x^3) : \left(\frac{2}{3}x^3\right) \\ &= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5x + (0,5x)^2 - \frac{x^3(8x^2 - 11x + 17)}{\frac{2}{3}x^3} \\ &= 1 - x + 0,25x^2 - \frac{3}{2}(8x^2 - 11x + 17) \\ &= 1 - x + 0,25x^2 - 12x^2 + 16,5x - 25,5 \\ &= -11,75x^2 + 15,5x - 24,5. \end{aligned}$$

41. Упрости го изразот:

$$(15ax^2y - 21x^3y^3 + 5x^4y) : (5x^2y).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 A &= (15ax^2y - 21x^3y^3 + 5x^4y) : (5x^2y) \\
 &= \frac{x^2y(15a - 21xy^2 + 5x^2)}{5x^2y} = \frac{15a - 21xy^2 + 5x^2}{5} \\
 &= 3a - 4,2xy^2 + x^2.
 \end{aligned}$$

42. Полиномот $p(x) = x^2 + 3x + 2$ подели го со полиномот $q(x) = x + 2$.

Решение. Од $q(x) = x + 2 = 0$ следува дека $x = -2$ е единствена нула на полиномот $q(x)$ и како $p(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 0$, од теоремата на Безу следува дека полиномот $p(x)$ е делив со полиномот $q(x)$. Делењето, т.е. наоѓањето на $\frac{p(x)}{q(x)} = s(x)$ ќе го реализираме на следниов начин:

- 1) Го делиме водечкиот член на $p(x)$ со водечкиот член на $q(x)$ и добиениот количник го запишуваме како водечки член на $s(x)$.
- 2) Го множиме $q(x)$ со првиот член на $s(x)$ и добиениот производ го одземаме од $p(x)$. Така го добиваме првиот остаток $r_1(x)$.
- 3) Го делиме првиот остаток $r_1(x)$ со првиот член на $q(x)$ и добиениот количник го запишуваме како втор член на $s(x)$.
- 4) Го множиме $q(x)$ со вториот член на $s(x)$ и добиениот производ го одземаме од $r_1(x)$. Така го добиваме првиот остаток $r_2(x)$.
- 5) Постапката ја продолжуваме се додека не добиеме остаток нула или пак пак полином кој не е делив со $q(x)$.

Имаме,

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x + 2 : x + 2 = x + 1 \\
 \underline{-x^2 - 2x} \\
 x + 2 \\
 \underline{-x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

ша затоа $\frac{p(x)}{q(x)} = x + 1$.

Забелешка. Ако полиномите кои ги делиме не се запишани во нормален вид, тогаш прво ги сведуваме на нормален вид, а потоа го реализираме делењето.

43. Разложи го на множители триномот: $16n^4 - 40n^2 + 9$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 16n^4 - 40n^2 + 9 &= (4n^2)^2 - 2 \cdot 4n^2 \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 9 = (4n^2 - 5)^2 - 16 \\ &= (4n^2 - 5)^2 - 4^2 = (4n^2 - 5 - 4)(4n^2 - 5 + 4) \\ &= (4n^2 - 9)(4n^2 - 1) = ((2n)^2 - 3^2)((2n)^2 - 1^2) \\ &= (2n - 3)(2n + 3)(2n - 1)(2n + 1). \end{aligned}$$

44. Упрости го изразот:

$$A = [(4a + 5b)^2]^2 - [(4a - 5b)^2]^2 - 160ab(4a - 5b)^2.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A &= [(4a + 5b)^2]^2 - [(4a - 5b)^2]^2 - 160ab(4a - 5b)^2 \\ &= [(4a + 5b)^2 - (4a - 5b)^2][(4a + 5b)^2 + (4a - 5b)^2] - 160ab(4a - 5b)^2 \\ &= 8a \cdot 10b(16a^2 + 40ab + 25b^2 + 16a^2 - 40ab + 25b^2) - 160ab(4a - 5b)^2 \\ &= 80ab(32a^2 + 50b^2) - 160ab(4a - 5b)^2 \\ &= 160ab(16a^2 + 25b^2 - 16a^2 + 40ab - 25b^2) \\ &= 160ab \cdot 40ab = 6400a^2b^2. \end{aligned}$$

45. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A = \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^{2n+1}}{a^{2n-2}}\right) \cdot (3a - 1) \text{ за } a = -2.$$

Решение. Го упростуваме дадениот израз и добиваме $A = -\frac{3}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^2$.

Во добиениот израз заменуваме $a = -2$ и добиваме

$$A = -\frac{3}{2}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 = 14.$$

46. Определи ја бројната вредност на полиномот $M = A + B - C$ каде $A = \frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2$, $B = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}a^2$ и $C = 2x^2 - \frac{1}{2}a^2 - ax$ за $a = 5$ и $x = \frac{1}{4}$.

Решение. Имаме,

$$M = \frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}a^2\right) - \left(2x^2 - \frac{1}{2}a^2 - ax\right) = 4ax,$$

па затоа бараната бројна вредност е

$$M = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} = 5.$$

47. Докажи дека дробката $A = \frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^4 - n^2 - 2n - 1}$ е правилна и скратлива за секој цел број $n > 2$.

Решение. Имаме, $A = \frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^4 - n^2 - 2n - 1} = \frac{(n^2 + n - 1)(n^2 - n - 1)}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n - 1)}$. Бидејќи за секој природен број $n > 2$ важи $n^2 - n - 1 \neq 0$ заклучуваме дека дробката може да се скрати со $n^2 - n - 1$ и добиваме $A = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$. Понатаму, бидејќи $n^2 + n - 1 < n^2 + n + 1$ заклучуваме дека дробката $A = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$ е правилна.

48. Пресметај ја вредноста на изразот $A = \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2}$ за $a = -3$ и $b = 4$.

Решение. Имаме:

$$A = \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a-b)^3}{(a-b)^2} = a - b,$$

па затоа $A(-3, 4) = -3 - 4 = -7$.

49. За реалните броеви a, b и c важи $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Докажи дека $a = b = c$.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= ab + bc + ca, \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca &= 0, \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Од последното равенство следува $a - b = b - c = c - a = 0$, што значи $a = b = c$.

50. За реалните броеви a, b, c, d важи

$$a^2 + d^2 - 2(ab + bc + cd - b^2 - c^2) = 0.$$

Докажи дека $a = b = c = d$.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 + d^2 - 2cd + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 &= 0 \\ (a-b)^2 + (d-c)^2 + (b-c)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Збир на три точни квадрати е еднаков на нула ако и само ако броевите се еднакви на нула, па затоа важи $a - b = b - c = c - d = 0$, односно важи $a = b = c = d$.

51. Докажи дека ако се исполнети равенствата

$$x + y + z = a \text{ и } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a},$$

тогаш барем еден од броевите x, y, z е еднаков на a .

Решение. Од $x + y + z = a$ следува $z = a - x - y$. Заменуваме во второто равенство и по средувањето добиваме $(a - x)(a - y)(x + y) = 0$. Последното равенство важи ако и само ако еден од множителите е еднаков на нула. Од $a - x = 0$ следува $x = a$, од $a - y = 0$ следува $y = a$, а од $x + y = 0$ следува $z = a - x - y = a$. Со тоа тврдењето е докажано.

52. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a + b + c = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Опреди ја вредноста на изразот $M = a^4 + b^4 + c^4$.

Решение. Од $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ следува $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 1$, односно

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 1. \quad (1)$$

Понатаму, од $a + b + c = 0$ следува $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$, па затоа $1 + 2(ab + bc + ca) = 0$, т.е. $ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$. Од последното равенство следува $(ab + bc + ca)^2 = (-\frac{1}{2})^2$, односно

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2(ab^2b + bc^2a + ca^2b) = \frac{1}{4},$$

па затоа

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4} - 2abc(a + b + c),$$

од каде заради $a + b + c = 0$ добиваме

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$, што значи $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

53. Опреди ги броевите x, y, z за кои важи

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0.$$

Решение. Имаме,

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0$$

$$(2x-1)^2 + (3y-1)^2 + (4z-1)^2 = 0$$

и како збир на квадрати е еднаков на нула ако и сако ако секој од броевите е еднаков на нула, добиваме $2x-1=3y-1=4z-1=0$, па затоа

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{4}.$$

54. Ако $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, пресметај ја вредноста на изразот $a^{2022} - 2022b$.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$(a-1)^2 + (b+3)^2 = 0,$$

па како збир на ненегативни броеви е еднаков на нула ако собираците се еднакви на нула, добиваме $a-1=b+3=0$, т.е. $a=1$ и $b=-3$. Според тоа, $a^{2022} - 2022b = 1^{2022} - 2022 \cdot 3 = -6065$.

55. Упрости го изразот:

а) $A = 10(m^2 - 15) - 12(m-4)(m+4),$

б) $A = (2a-3b)(2a+3b)(4a^2+9b^2).$

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= 10(m^2 - 15) - 12(m-4)(m+4) = 10(m^2 - 15) - 12(m^2 - 16) \\ &= 10m^2 - 150 - 12m^2 + 192 = 42 - 2m^2. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (2a-3b)(2a+3b)(4a^2+9b^2) = ((2a)^2 - (3b)^2)(4a^2+9b^2) \\ &= (4a^2 - 9b^2)(4a^2+9b^2) = (4a^2)^2 - (9b^2)^2 = 16a^4 - 81b^4. \end{aligned}$$

56. Во равенството на местата на ѕвездичките стави соодветни знаци и мономи така што ќе биде точна формулата за скратено множење:

$$(* * *)^2 = a^2 + 6ab * *.$$

Решение. Од знакот $+$ пред bab е јасно дека во случајот имаме збир на два члена на квадрат. Ако бараните членови ги означиме со x и y , тогаш $x^2 = a^2$, од каде добиваме $x = a$. Сега $2xy = 6ab$ и затоа $2ay = 6ab$, т.е. $y = 3b$. Конечно, $(a+3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2$.

57. Изврши го степенувањето:

$$\left(\frac{2}{3}ab^7 + a^3c\right)^3.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}ab^7 + a^3c\right)^3 &= \left(\frac{2}{3}ab^7\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}ab^7\right)^2(a^3c) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}ab^7\right)(a^3c)^2 + (a^3c)^3 \\ &= \frac{8}{729}a^3b^{21} + \frac{4}{27}a^2b^{14}a^3c + \frac{2}{3}ab^7a^6c^2 + a^9c^3 \\ &= \frac{8}{729}a^3b^{21} + \frac{4}{27}a^5b^{14}c + \frac{2}{3}a^7b^7c^2 + a^9c^3.\end{aligned}$$

58. Пресметај го производот:

$$\left(\frac{x}{2} + a^kb\right)\left(\frac{x}{2} - a^2b^k\right).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} + a^kb\right)\left(\frac{x}{2} - a^2b^k\right) &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (a^kb - a^2b^k)\frac{x}{2} - a^kba^2b^k \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{a^2bx}{2}(a^{k-2} - b^{k-1}) - a^{k+2}b^{k+1}.\end{aligned}$$

59. Докажи дека

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 &= [(x+1)(x+4)] \cdot [(x+2)(x+3)] + 1 \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1 \\ &= (x^2+5x+4)^2 + 2(x^2+5x+4)+1 \\ &= (x^2+5x+4+1)^2 = (x^2+5x+5)^2.\end{aligned}$$

60. Ако $a+b+c=0$, тогаш $a^3+b^3+c^3=3abc$. Докажи!

Решение. Од $a+b+c=0$ следува $a+b=-c$, па затоа последователно добиваме

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (-c)^3 \\ a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 &= -c^3 \\ a^3+b^3+c^3 &= -3ab(a+b) \\ a^3+b^3+c^3 &= 3abc.\end{aligned}$$

61. Пресметај x^3+y^3 ако $x+y=a$ и $x^2+y^2=b$.

Решение. Имаме:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left(x^2+y^2-\frac{1}{2} \cdot 2xy\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+y)(x^2+y^2 - \frac{1}{2}((x+y)^2 - x^2 - y^2)) \\
 &= a(b - \frac{1}{2}(a^2 - b)) = \frac{a}{2}(3b - a^2).
 \end{aligned}$$

62. Разложи го на множители полиномот:

$$p(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4xy.$$

Решение. Имаме:

$$p(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4xy = xy(2x - 3y + 4).$$

63. Разложи го на множители полиномот:

$$p(x, y) = 3ax - 4by - 4ay + 3bx.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= 3ax - 4by - 4ay + 3bx = 3ax + 3bx - (4by + 4ay) \\
 &= 3x(a + b) - 4y(a + b) = (a + b)(3x - 4y).
 \end{aligned}$$

64. Разложи го на множители полиномот:

$$\text{а) } x^2 + 3x + 2, \quad \text{б) } x^2 + 3x - 4$$

Решение. а) Имаме:

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2 = x(x + 1) + 2(x + 1) = (x + 1)(x + 2).$$

б) Имаме:

$$x^2 + 3x - 4 = x^2 + 4x - x - 4 = x(x + 4) - (x + 4) = (x + 4)(x - 1).$$

65. Разложи го на множители полиномот $p(x) = x^6 - 1$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1).
 \end{aligned}$$

66. Разложи го на множители полиномот $p(x) = x^3 - 7x - 6$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x^3 - 7x - 6 = x^3 + 1 - 7x - 7 \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) - 7(x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - x - 6) = (x + 1)(x^2 + 2x - 3x - 6) \\
 &= (x + 1)(x(x + 2) - 3(x + 2)) = (x + 1)(x + 2)(x - 3).
 \end{aligned}$$

67. Разложи го на множители полиномот

$$p(x, y, z) = x^3 - 3x^2y - xz^2 + 3xy^2 - y^3 + yz^2.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= x^3 - 3x^2y - xz^2 + 3xy^2 - y^3 + yz^2 \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 - (xz^2 - yz^2) \\ &= (x - y)^3 - z^2(x - y) = (x - y)[(x - y)^2 - z^2] \\ &= (x - y)(x - y - z)(x - y + z). \end{aligned}$$

68. Разложи го на множители полиномот:

$$p(x, y, z) = x^3(y - z) + y^3(z - x) - z^3(y - x).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= x^3(y - z) + y^3(z - x) - z^3(y - x) \\ &= x^3(y - z) + y^3(z - x) - z^3(y - z + z - x) \\ &= x^3(y - z) + y^3(z - x) - z^3(y - z) - z^3(z - x) \\ &= (y - z)(x^3 - z^3) + (z - x)(y^3 - z^3) \\ &= (y - z)(x - z)(x^2 + xz + z^2) + (z - x)(y - z)(y^2 + yz + z^2) \\ &= (y - z)(z - x)(y^2 + yz + z^2 - x^2 - xz - z^2) \\ &= (y - z)(z - x)[(y - x)(y + x) + z(y - x)] \\ &= (y - z)(z - x)(y - x)(x + y + z). \end{aligned}$$

69. Разложи го на множители полиномот:

$$\text{а) } x^2 + 8x + 12, \quad \text{б) } 4x^2 - 7x - 2.$$

Решение. а) Дадениот квадратен полином ќе го разложиме на множители со претставување како разлика на два квадрати. Имаме:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 12 &= x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2 + 12 = (x + 4)^2 - 16 + 12 \\ &= (x + 4)^2 - 4 = (x + 4)^2 - 2^2 = (x + 4 - 2)(x + 4 + 2) \\ &= (x + 2)(x + 6). \end{aligned}$$

б) Аналогно како под а) добиваме:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 7x - 2 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(2x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{49}{16} + 2\right) = \left(2x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} \\ &= \left(2x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \left(2x - \frac{7}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(2x - \frac{7}{4} + \frac{9}{4}\right) \\ &= (2x - 4)\left(2x + \frac{2}{4}\right) = (x - 2)(4x + 1). \end{aligned}$$

70. Разложи го на множители полиномот: $a^6 + 27$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a^6 + 27 &= (a^2)^3 + 3^3 = (a^2 + 3)[(a^2)^2 - 3a^2 + 3^2] \\ &= (a^2 + 3)[(a^2)^2 - 3a^2 + 6a^2 - 6a^2 + 3^2] \\ &= (a^2 + 3)[(a^2)^2 + 6a^2 + 3^2 - 9a^2] \\ &= (a^2 + 3)[(a^2 + 3)^2 - (3a)^2] \\ &= (a^2 + 3)(a^2 - 3a + 3)(a^2 + 3a + 3). \end{aligned}$$

71. Нека x е реален број поголем од 1 таков што $x + \frac{1}{x} = 3$. Пресметај ги вредностите на изразите $x^4 + \frac{1}{x^4}$ и $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Решение. Имаме $(x + \frac{1}{x})^2 = 9$, па затоа $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$, т.е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

Според тоа, $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 49$, па затоа $x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 49$, односно $x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$.

Од друга страна $(x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = 21$, па затоа $x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = 21$, односно $x^3 + \frac{1}{x^3} = 21 - 3 = 18$.

72. Нека x е реален број поголем од 1 таков што $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$. Пресметај ги вредностите на изразите $x + \frac{1}{x}$ и $x - \frac{1}{x}$.

Решение. Имаме, $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9} + 2$, па затоа $(x + \frac{1}{x})^2 = \frac{100}{9}$, од каде добиваме $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$. Од друга страна, $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9} - 2$, па затоа $(x - \frac{1}{x})^2 = \frac{64}{9}$, т.е. $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$.

73. Нека x е реален број таков што

$$x^{2002} + \frac{1}{x^{2002}} = 2.$$

Пресметај ги вредностите на изразите

$$x^{2003} + \frac{1}{x^{2003}} \text{ и } x^{2004} + \frac{1}{x^{2004}}.$$

Решение. Од $x^{2002} + \frac{1}{x^{2002}} = 2$ следува $x^{2002} - 2 + \frac{1}{x^{2002}} = 0$, односно

$(x^{1001} - \frac{1}{x^{1001}})^2 = 0$. Според тоа, $x^{1001} - \frac{1}{x^{1001}} = 0$, од каде добиваме

$x^{2002} = 1$, што значи $x = \pm 1$. Според тоа,

$$x^{2004} + \frac{1}{x^{2004}} = (\pm 1)^{2004} + \frac{1}{(\pm 1)^{2004}} = 2.$$

Понатаму, $x = 1$ доиваме

$$x^{2003} + \frac{1}{x^{2003}} = 1^{2003} + \frac{1}{1^{2003}} = 2,$$

а за $x = -1$ добиваме

$$x^{2003} + \frac{1}{x^{2003}} = (-1)^{2003} + \frac{1}{(-1)^{2003}} = -2.$$

1.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

74. Реши ја равенката

$$(2x - 3)(3x - 1) + (5 - 6x)(x + 4) = 28$$

Решение. Од дадената последователно добиваме:

$$(2x - 3)(3x - 1) + (5 - 6x)(x + 4) = 28$$

$$6x^2 - 2x - 9x + 3 + 5x + 20 - 6x^2 - 24x = 28$$

$$-35x + 23 = 28$$

$$x = -\frac{1}{7}.$$

75. Реши ја равенката

$$5(1 - x) + x = 4(3 - 2x) - (x + 3).$$

Решение. Последователно добиваме

$$5(1 - x) + x = 4(3 - 2x) - (x + 3)$$

$$5 - 5x + x = 12 - 8x - x - 3$$

$$x = \frac{4}{5}.$$

76. Реши ја равенката

а) $\frac{x-1}{3} + \frac{3x+1}{2} = 2x + \frac{1-x}{6},$

б) $3(4x - 2) - 2x = 5(x - 1) - (4 - 5x).$

Решение. а) Последователно добиваме

$$\frac{x-1}{3} + \frac{3x+1}{2} = 2x + \frac{1-x}{6}$$

$$2(x-1) + 3(3x+1) = 6 \cdot 2x + 1 - x$$

$$2x - 2 + 9x + 3 = 12x + 1 - x$$

$$11x + 1 = 11x + 1$$

$$0 \cdot x = 0,$$

што значи дека решение на дадената равенка е секој реален број x .

б) Последователно добиваме

$$3(4x-2) - 2x = 5(x-1) - (4-5x)$$

$$12x - 6 - 2x = 5x - 5 - 4 + 5x$$

$$10x - 6 = 10x - 9$$

$$0 \cdot x = 3,$$

што значи дека дадената равенка нема решение.

77. Реши ја равенката

$$(0,8x - 0,5)^2 + (0,6x - 1,3)^2 = 4(0,5x - 0,7)(0,5x + 0,7) - 6(0,15x + 0,08).$$

Решение. Имаме:

$$(0,8x - 0,5)^2 + (0,6x - 1,3)^2 = 4(0,5x - 0,7)(0,5x + 0,7) - 6(0,15x + 0,08)$$

$$x^2 - 2,36x + 1,94 = x^2 - 1,96 - 0,9x - 0,48$$

$$1,46x = 4,38$$

$$x = 3.$$

78. Реши ја равенката

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 15 = 0$$

$$(x-1)^2 - 16 = 0$$

$$(x-1)^2 - 4^2 = 0$$

$$(x-1-4)(x-1+4) = 0$$

$$(x-5)(x+3) = 0.$$

Производ на два броја е еднаков на нула, ако еден од множителите е еднаков на нула, па од последната равека следува $x-5=0$ или $x+3=0$, односно решенија на последната равенка, а со тоа и на почетната равебка се $x=5$ или $x=-3$.

79. Реши ја равенката

$$3x^2 - 2x + 9 = 0.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$x^2 - 2x + 1 + 2x^2 + 8 = 0$$

$$(x-1)^2 + 2x^2 + 8 = 0.$$

Бидејќи $(x-1)^2 \geq 0$, $2x^2 \geq 0$ и $8 > 0$ добиваме $(x-1)^2 + 2x^2 + 8 > 0$, што значи дека последната равенка, а со тоа и дадената равенка нема решение во множеството реални броеви.

80. Реши ја равенката $\sqrt{5} - x^2 = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

Решение. Имаме, $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = |1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$, па затоа дадената равенка е еквивалентна на равенката $\sqrt{5} - x^2 = \sqrt{5} - 1$, од каде добиваме $x^2 = 1$, односно $x = \pm 1$.

81. Реши ја равенката $\sqrt{3} + x^2 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

Решение. Имаме, $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} + 1$, па затоа дадената равенка е еквивалентна на равенката $\sqrt{3} + x^2 = \sqrt{3} + 1$, од каде добиваме $x^2 = 1$, односно $x = \pm 1$.

82. Реши ја равенката: $\sqrt{x^2} = x + 5$.

Решение. Ако $x \geq 0$, тогаш $\sqrt{x^2} = |x| = x$, па затоа дадената равенка е еквивалентна на равенка $x = x + 5$ која нема решение. Ако $x < 0$, тогаш $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, па затоа дадената равенка е еквивалентна на равенка $-x = x + 5$, чие решение $x = -\frac{5}{2}$ е решение на почетната равенка.

83. Реши ја равенката: $|\sqrt{x^2} - 5| = 3$.

Решение. Изразот под коренот не може да биде негативен, па затоа дадената равенка е еквивалентна на равенката $|x - 5| = 3$, чии решенија се $x = 8$ и $x = 2$.

84. Реши ја равенката: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(x + 2)(x + 1) = 0.$$

Понатаму, производ на два броја е еднаков на нула ако и само ако барем еден од множителиите е еднаков на нула, па затоа од последната равенка следува $x + 2 = 0$ или $x + 1 = 0$, што значи дека решенија на дадената равенка се $x = -2$ и $x = -1$.

85. Реши ја равенката: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 = 0$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(x - 4)(x - 3) = 0.$$

Понатаму, производ на два броја е еднаков на нула ако и само ако барем еден од множителиите е еднаков на нула, па затоа од последната равенка следува $x - 4 = 0$ или $x - 3 = 0$, што значи дека решенија на дадената равенка се $x = 4$ и $x = 3$.

86. Реши ја равенката: $x^3 + 10x^2 + 24x = 0$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x^3 + 10x^2 + 24x = 0$$

$$x(x^2 + 10x + 24) = 0$$

$$x((x + 5)^2 - 1) = 0$$

$$x(x + 4)(x + 6) = 0.$$

Понатаму, производ на три броја е еднаков на нула ако и само ако барем еден од множитеите е еднаков на нула, па затоа од последната равенка следува $x=0$ или $x+4=0$ или $x+6=0$, што значи дека решенија на дадената равенка се $x=0$, $x=-4$ и $x=-6$.

87. Реши ја равенката: $x^3 - x^2 - 21x = 0$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 - 21x &= 0 \\x(x^2 - 4x - 21) &= 0 \\x((x-2)^2 - 25) &= 0 \\x((x-2)^2 - 5^2) &= 0 \\x(x-7)(x+3) &= 0.\end{aligned}$$

Понатаму, производ на три броја е еднаков на нула ако и само ако барем еден од множитеите е еднаков на нула, па затоа од последната равенка следува $x=0$ или $x-7=0$ или $x+3=0$, што значи дека решенија на дадената равенка се $x=0$, $x=7$ и $x=-3$.

88. Реши ја равенката: $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Решение. Воведуваме замена $x^2 = t$ и добиваме $t^2 - 17t + 16 = 0$. Како во претходните две задачи наоѓаме дека решенија на последната равенка се $t=16$ и $t=1$. Според тоа, $x^2 = 16$, од каде добиваме $x = \pm 4$ и $x^2 = 1$ од каде добиваме $x = \pm 1$. Конечно решенија на почетната равенка се $x = \pm 4$ и $x = \pm 1$.

89. Реши ги равенките:

$$\begin{aligned}\text{а) } (2008^{251})^{4x^2} &= 2008^{2007} \cdot 2008^{2009}, & \text{б) } 32^x &= 2^{10} \cdot 2^{2000}, \\ \text{в) } \frac{1}{9} \cdot 3^{10} + \frac{1}{3} \cdot 3^9 - 5 \cdot 3^8 &= x \cdot 3^8, & \text{г) } \frac{x}{25 \cdot 3^4} &= \frac{6 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 125}.\end{aligned}$$

Решение. а) Последователно добиваме

$$\begin{aligned}(2008^{251})^{4x^2} &= 2008^{2007} \cdot 2008^{2009} && \Leftrightarrow \\ 2008^{1004x^2} &= 2008^{4016} && \Leftrightarrow \\ 1004x^2 &= 4016 && \Leftrightarrow \\ x^2 &= 4 && \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$x = \pm 2.$$

б) Имаме:

$$32^x = 2^{10} \cdot 2^{2000} \quad \Leftrightarrow$$

$$(2^5)^x = 2^{2010} \quad \Leftrightarrow$$

$$2^{5x} = 2^{2010} \quad \Leftrightarrow$$

$$5x = 2010 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 492.$$

в) Имаме:

$$\frac{1}{9} \cdot 3^{10} + \frac{1}{3} \cdot 3^9 - 5 \cdot 3^8 = x \cdot 3^8 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3^{10}}{3^2} + \frac{3^9}{3} - 5 \cdot 3^8 = x \cdot 3^8 \quad \Leftrightarrow$$

$$-3 \cdot 3^8 = x \cdot 3^8 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -3.$$

г) Имаме:

$$\frac{x}{25 \cdot 3^4} = \frac{6 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 125} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2 \cdot 3^7 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 5^3} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{249}{40}.$$

90. Во множеството реални броеви реши ја равенката:

$$\frac{a^{2012} + b^8 + c^6 + 1}{2} = a^{1006} + b^4 - c^3 - 1.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$a^{2012} + b^8 + c^6 + 1 = 2a^{1006} + 2b^4 - 2c^3 - 2$$

$$a^{2012} - 2a^{1006} + 1 + b^8 - 2b^4 + 1 + c^6 + 2c^3 + 1 = 0$$

$$(a^{1006} - 1)^2 + (b^4 - 1)^2 + (c^3 + 1)^2 = 0.$$

Квадрат на реален број е ненегативен број, па затоа од последната равенка следува $a^{1006} - 1 = 0$, $b^4 - 1 = 0$ и $c^3 + 1 = 0$, од каде добиваме:

$$(a, b, c) \in \{(1, 1, -1); (1, -1, -1); (-1, 1, -1); (-1, -1, -1)\}.$$

91. Определи го бројот на точките со целобројни координати (x, y) за кои е исполнето неравенството $|x - 4| + |y - 6| < 10$.

Упатство. Имаме

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & x \geq 4 \\ 4-x, & x < 4 \end{cases} \text{ и } |y-6| = \begin{cases} y-6, & y \geq 6 \\ 6-y, & y < 6 \end{cases}$$

Ако $x < 4, y < 6$, тогаш неравенството е $x + y > 10$.

Ако $x < 4, y \geq 6$, тогаш неравенството е $y - x < 12$.

Ако $x \geq 4, y < 6$, тогаш неравенството е $x - y < 8$.

Ако $x \geq 4, y \geq 6$, тогаш неравенството е $x + y < 20$.

Нацртај го графикот и преброј ги точките.

92. Определи ја бројната вредност на изразот

$$C = a^3 - a^2b - 2a^3 + a^2c - 5a^2b + 4a^3 - c^3$$

ако a е вредноста на изразот $p = -(-\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2})^{-6}$, b е корен на равенката $7|x| - 3|x| = 2|x| + 6$ и c е најмалиот природен број кој е решение на неравенката $\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{3} < \frac{1-x}{4}$.

Решение. Имаме $C = 3a^3 - 6a^2b + a^2c - c^3$. Понатаму, од условот добиваме $a = p = -(-\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2})^{-6} = -1$. Равенката $7|x| - 3|x| = 2|x| + 6$ е еквивалентна на равенката $|x| = 3$ чии решенија се $x = 3$ и $x = -3$, па затоа $b = 3$ и $b = -3$. Решението на дадената неравенка е интервалот $(-\infty, 5)$, па затоа $c = 1$. Конечно, бараните вредности се:

$$C = 3(-1)^3 - 6(-1)^2 \cdot 3 + (-1)^2 \cdot 1 - 1^3 = -21 \text{ и}$$

$$C = 3(-1)^3 - 6(-1)^2 \cdot (-3) + (-1)^2 \cdot 1 - 1^3 = 15.$$

1.3. НЕРАВЕНСТВА. НАЈГОЛЕМА И НАЈМАЛА ВРЕДНОСТ НА ИЗРАЗ

93. Што е поголемо

а) $3 \cdot 5^{41}$ или $5 \cdot 3^{61}$, б) 2^{2010} или 33^{402}

в) $0,064^{669}$ или $0,16^{1004}$?

Решение. а) Имаме, $5 \cdot 3^{61} = 5 \cdot 3 \cdot 3^{60} = 15 \cdot (3^3)^{20} = 15 \cdot 27^{20}$, па затоа

$$3 \cdot 5^{41} = 3 \cdot 5 \cdot 5^{40} = 15 \cdot (5^2)^{20} = 15 \cdot 25^{20} < 15 \cdot 27^{20} = 5 \cdot 3^{61}.$$

б) Имаме, $2^{2010} = (2^5)^{401} = 32^{401} < 33^{402}$.

в) Имаме, $0,064^{669} = \left(\frac{64}{100}\right)^{669} = \left(\left(\frac{4}{10}\right)^3\right)^{669} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2007}$, па затоа

$$0,16^{1004} = \left(\frac{16}{100}\right)^{1004} = \left(\left(\frac{4}{10}\right)^2\right)^{1004} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2008} < \left(\frac{2}{5}\right)^{2007} = 0,064^{669}.$$

94. Што е поголемо 2^{2012} или 15^{503} ?

Решение. Имаме,

$$2^{2012} = 2^{4 \cdot 503} = (2^4)^{503} = 16^{503} > 15^{503}.$$

95. Што е поголемо 2^{7n+3} или 5^{3n+1} , $n \in \mathbb{N}$?

Решение. Имаме: $2^{7n+3} = 2^3 \cdot 2^{7n} = 2^3 \cdot (2^7)^n = 8 \cdot 128^n$, па затоа

$$5^{3n+1} = 5 \cdot 5^{3n} = 5 \cdot (5^3)^n = 5 \cdot 125^n < 8 \cdot 128^n = 2^{7n+3}.$$

96. Што е поголемо $4^{2012} + 9^{2012}$ или $2^{2013} \cdot 3^{2012}$?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 4^{2012} + 9^{2012} &= (2^2)^{2012} + (3^2)^{2012} \\ &= (2^{2012})^2 + (3^{2012})^2 - 2 \cdot 3^{2012} \cdot 2^{2012} + 2 \cdot 3^{2012} \cdot 2^{2012} \\ &= (3^{2012} - 2^{2012})^2 + 2^{2013} \cdot 3^{2012} \\ &> 2^{2013} \cdot 3^{2012}. \end{aligned}$$

97. Почнувајќи од најмалиот подреди ги по големина броевите: $a = 2^{45}$, $b = 3^{36}$, $c = 4^{27}$, $d = 5^{18}$.

Решение. Имаме, $\text{NZD}(45, 36, 27, 18) = 9$, па затоа сите степени ќе ги трансформираме така што степеновиот показател ќе биде 9:

$$a = 2^{45} = (2^5)^9 = 32^9, \quad b = 3^{36} = (3^4)^9 = 81^9,$$

$$c = 4^{27} = (4^3)^9 = 64^9, \quad d = 5^{18} = (5^2)^9 = 25^9.$$

Сега од $25^9 < 32^9 < 64^9 < 81^9$ заклучуваме дека $5^{18} < 2^{45} < 4^{27} < 3^{36}$.

98. Што е поголемо $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ или $\sqrt{7} + \sqrt{6}$.

Решение. Нека $a = \sqrt{5} + \sqrt{8} > 0$ и $b = \sqrt{7} + \sqrt{6} > 0$. Имаме

$$a^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 = 5 + 2\sqrt{40} + 8 = 13 + \sqrt{40} \text{ и}$$

$$b^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2 = 7 + 2\sqrt{42} + 6 = 13 + 2\sqrt{42}.$$

Значи, $b^2 > a^2$, па затоа $b > a$.

99. Што е поголемо:

- а) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5} + 7$, б) $\sqrt{7 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}}$ или 3,
 в) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ или $\sqrt{11} - \sqrt{10}$, г) $2 - \sqrt{3}$ или $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$,
 д) $\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$.

Решение. а) Имаме, $\sqrt{50} > \sqrt{49}$ и $\sqrt{48} > \sqrt{45}$, па затоа
 $\sqrt{50} + \sqrt{48} > \sqrt{45} + \sqrt{49}$, т.е. $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} > 3\sqrt{5} + 7$.

б) Имаме:

$$\sqrt{7 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}} > \sqrt{7 + \sqrt{7 + \sqrt{1}}} = \sqrt{7 + \sqrt{8}} > \sqrt{7 + \sqrt{4}} = \sqrt{9} = 3.$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned} \sqrt{11} - \sqrt{10} &= (\sqrt{11} - \sqrt{10}) \frac{\sqrt{11} + \sqrt{10}}{\sqrt{11} + \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{10}} > \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}} \\ &= (\sqrt{12} - \sqrt{11}) \frac{\sqrt{12} + \sqrt{11}}{\sqrt{12} + \sqrt{11}} = \sqrt{12} - \sqrt{11}. \end{aligned}$$

г) Имаме,

$$2 - \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

д) Имаме, $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, па затоа

$$\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} + \sqrt{5} = \sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{5} = \sqrt{6\frac{1}{4}} + \sqrt{5} > \sqrt{6} + \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}.$$

100. Докажи:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2020^{2020}} < 1.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2020^{2020}} &< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} \\ &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \\ &= 1 - \frac{1}{2020} < 1. \end{aligned}$$

101. Докажи:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2020^{2020}} < \frac{1}{2}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2020^{2020}} &< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} \\
 &= \frac{(1-\frac{1}{2})(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2020}})}{1-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \dots - \frac{1}{2^{2021}}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2021}}}{\frac{1}{2}} < \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

102. Ако a и b се позитивни реални броеви такви што $ab > a + b$, тогаш $a + b > 4$. Докажи!

Решение. Ако $ab > a + b$, тогаш $ab - a - b + 1 > 1$, од каде добиваме $(a-1)(b-1) > 1$. Бидејќи броевите a и b се позитивни, последното неравенство е можно ако и само ако $a-1 > 0$ и $b-1 > 0$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a-1) + (b-1) > 2\sqrt{(a-1)(b-1)} > 2 \cdot 1 = 2,$$

од каде добиваме $a + b > 4$.

103. Докажи дека не постојат реални броеви a, b, c и d такви што

$$a - b^2 > \frac{1}{4}, b - c^2 > \frac{1}{4}, c - d^2 > \frac{1}{4}, d - a^2 > \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека постојат реални броеви a, b, c и d такви што се исполнети неравенствата (1). Ако ги собереме овие неравенства последователно добиваме

$$\begin{aligned}
 a - b^2 + b - c^2 + c - d^2 + d - a^2 &> 1 \\
 1 - a - b - c - d + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &< 0 \\
 \frac{1}{4} - a + a^2 + \frac{1}{4} - b + b^2 + \frac{1}{4} - c + c^2 + \frac{1}{4} - d + d^2 &< 0 \\
 (\frac{1}{2} - a)^2 + (\frac{1}{2} - b)^2 + (\frac{1}{2} - c)^2 + (\frac{1}{2} - d)^2 &< 0,
 \end{aligned}$$

што противречи на тоа дека квадрат на реален број е ненегативен број, а збир на ненегативни броеви е ненегативен број. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат реални броеви a, b, c и d такви што се исполнети неравенствата (1).

104. Докажи дека не постојат броеви $a, b, c \in (0, 1)$ такви што

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, b(1-c) > \frac{1}{4}, c(1-a) > \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Решение. За секој реален број x важи $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$, т.е. точно е неравенството $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$, кое е еквивалентно со неравенството

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Сега, ако постојат реални броеви a, b и c , такви што се исполнети неравенствата (1), тогаш множејќи ги овие неравенства добиваме

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64},$$

па ако го земеме во предвид неравенствата (2) добиваме дека

$$\frac{1}{64} < a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

105. Докажи дека

$$\sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{13}}} < 3.$$

Решение. Имаме

$$\sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{13}}} < \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{9}}} = \sqrt{13 - 4} = 3.$$

106. Докажи дека:

а) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < 3,$

б) $\sqrt{5 + \sqrt{\sqrt{17} + \sqrt{37} + \sqrt{2}}} > 3,$

в) $\frac{5 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}{5 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \frac{1}{4}.$

Решение. а) Јасно,

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{6 + 3} = 3.$$

б) Имаме,

$$\begin{aligned} \sqrt{5 + \sqrt{\sqrt{17} + \sqrt{37} + \sqrt{2}}} &> \sqrt{5 + \sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{36} + \sqrt{1}}} = \sqrt{5 + \sqrt{4 + 6 + 1}} \\ &> \sqrt{5 + \sqrt{9 + 1}} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

в) Имаме,

$$\frac{5 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}{5 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \frac{5 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}{5 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}} = \frac{5 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + 3}}}{5 + \sqrt{6 + 3}} = \frac{5 - \sqrt{9}}{5 + 3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

107. Докажи го неравенството $a^2 + \frac{1}{4}b^2 \geq ab$.

Решение. Имаме:

$$(a - \frac{1}{2}b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2a \cdot \frac{1}{2}b + (\frac{1}{2}b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + \frac{1}{4}b^2 \geq ab,$$

што и требаше да се докаже.

108. Докажи го неравенството $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$, ако $a > 0, b > 0$.

Решение. Последователно добиваме

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$(a+b)\frac{a+b}{ab} \geq 4$$

$$(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4.$$

109. Определи ја најголемата вредност на полиномот $p(x) = -x^2 - 4x - 4$.

Решение. За секоја вредност на аргументот x важи

$$p(x) = -x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2 \leq 0.$$

Според тоа, најголемата можна вредност на $p(x)$ е 0 и истата се достигнува за $(x+2)^2 = 0$, од каде добиваме $x+2=0$, т.е. $x=-2$.

110. Определи ги x и y за кои полиномот $P(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$ прима најмала вредност.

Решение. Дадениот полином можеме да го запишеме во видот

$$P(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = (x-2)^2 + (y+3)^2 \geq 0.$$

Јасно, најмалата вредност на овој полином е 0 и таа се достигнува за

$$x-2 = y+3 = 0, \text{ т.е. за } x=2 \text{ и } y=-3.$$

111. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 4z.$$

Решение. Имаме;

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 4z = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} + z^2 + 4z + 4 - \frac{29}{4}$$

$$= (x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 + (z-2)^2 - \frac{29}{4}.$$

Најмалата вредност на изразот е еднаква на $-\frac{29}{4}$ и истата се достигнува за $x=1$, $y=\frac{3}{2}$ и $z=2$.

112. Определи ја најмалата вредност на изразот $2x^2 + 6y^2 - 6xy + 3$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 6y^2 - 6xy + 3 &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot 4x + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \cdot 4xy + \frac{3}{2} \cdot 4y^2 \\ &= \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{3}{2}(x-2y)^2 + 1, \end{aligned}$$

што значи дека најмалата вредност на дадениот израз е 1 и истата се достигнува за $x=-2$ и $y=-1$.

113. Определи ја најголемата вредност на изразот $\frac{1}{2x^2+y^2+2y+2xy+4}$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^2+y^2+2y+2xy+4} &= \frac{1}{x^2-2x+1+x^2+y^2+1+2xy+2x+2y+2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2+(x+y+1)^2+2} \end{aligned}$$

што значи дека најголемата вредност на дадениот израз е $\frac{1}{2}$ и истата се достигнува за $x=1$ и $y=-2$.

114. Докажи дека производот на два позитивни реални броеви чиј збир е даден е најголем ако и само ако тие броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. Нека броевите се a и b и нека е даден збирот $a+b$. Ако искористиме дека $ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$, заклучуваме дека производот ab е најголем ако и само ако $\frac{1}{4}(a-b)^2 = 0$, т.е. ако и само ако $a=b$.

115. Докажи дека производот на два позитивни реални броеви чиј збир на квадрати е даден е најголем ако и само ако тие броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. Нека броевите се a и b и нека е даден збирот a^2+b^2 . Ако искористиме дека

$$ab = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + ab = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2,$$

како и во претходната задачата заклучуваме дека производот ab е најголем ако и само ако $\frac{1}{2}(a-b)^2 = 0$, т.е. ако и само ако $a = b$.

116. За позитивните реални броеви x и y важи $x + y = a$. Определи ја најмалата вредност на изразот $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Решение. Имаме, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{a}{xy}$, што значи дека најмалата вредност на дадениот израз се достигнува ако и само ако производот xy достигнува најголема вредност. Но, според задача 114 производот е најголем ако и само ако $x = y = \frac{a}{2}$. Конечно, најмалата вредност на изразот е $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{4}{a}$.

117. Даден е изразот $\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}$. Ако $x = 361979$, $z = 561980$, определи ги сите вредности на y за кои изразот прима најмала можна вредност.

Решение. Имаме,

$$\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy} = \sqrt{(x+y)^2 - z^2}.$$

Затоа најмалата вредност на дадениот израз е еднаква на нула и тоа кога $(x+y)^2 = z^2$, односно кога $x+y = z$ или $x+y = -z$. Во првиот случај добиваме $y = z - x = 200001$, а во вториот случај добиваме $y = -x - z = -923959$.

118. За позитивните реални броеви x и y важи $x + y = a$. Определи ја најголемата вредност на производот x^2y .

Решение. Прво ќе докажеме дека ако е даден збир на три позитивни реални броеви, тогаш нивниот производ е најголем ако тие броеви се еднакви. Нека $a + b + c = s$. Ако $a = b = c = \frac{s}{3}$, тогаш $abc = \frac{s^3}{27}$. Ако еден од собирците е поголем од $\frac{s}{3}$, тогаш барем еден од собирците е помал од $\frac{s}{3}$. Нека, на пример $a = \frac{s}{3} + x$ и $b = \frac{s}{3} - z$. Тогаш $c = \frac{s}{3} - x + y$ и

$$ab = (\frac{s}{3} + x)(\frac{s}{3} - y) = \frac{s^2}{9} - \frac{s}{3}y + \frac{s}{3}x - xy < \frac{s^2}{9} - \frac{s}{3}y + \frac{s}{3}x = \frac{s}{3}(\frac{s}{3} + x - y),$$

па затоа

$$abc < \frac{s}{3}(\frac{s}{3} + x - y)(\frac{s}{3} - x + y) = \frac{s}{3}((\frac{s}{3})^2 - (x - y)^2) \leq \frac{s^3}{27}.$$

Според тоа, производот abc е најголем ако и само ако $a = b = c = \frac{s}{3}$.

Сега да го разгледаме производот $2y \cdot x \cdot x$. Имаме $2y + x + x = 2a$, па затоа производот е најголем ако и само ако $2y = x = \frac{2a}{3}$, односно

$$y = \frac{a}{3} \text{ и } x = \frac{2a}{3}. \text{ Клучно, најголемата вредност на } x^2 y \text{ е } \frac{4a^3}{27}.$$

119. Определи ја најмалата вредност на изразот:

а) $x + \frac{1}{x-1}$, $x > 1$, б) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Прво ќе докажеме дека збирот на два позитивни броја чиј производ е даден е најмал ако тие броеви се еднакви. Нека a и b се позитивни броеви чиј производ ab е даден. Бидејќи броевите a и b се позитивни, нивниот збир е најмал ако и само ако квадратот $(a+b)^2$ е најмал. Сега, бидејќи ab е даден од $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ следува дека збирот $a+b$ е најмал ако $(a-b)^2 = 0$, т.е. ако $a = b$.

а) Имаме $x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1$. Бидејќи $(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = 1$, од претходно докажаното следува дека збирот $x - 1 + \frac{1}{x-1}$ е најмал ако $x - 1 = \frac{1}{x-1}$, од каде добиваме $x^2 - 2x = 0$, т.е. $x = 0$ или $x = 2$. Но, по услов $x > 1$, па затоа $x = 2$, т.е. бараната најмала вредност е $x + \frac{1}{x-1} = 2 + 1 = 3$.

б) Имаме,

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Од $\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ следува дека збирот $\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ е најмал ако

$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, од каде добиваме $x = 0$. Конечно, бараната најмала

вредност е $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{0+2}{\sqrt{0+1}} = 2$.

II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Двоцифрен број собран со бројот кој е запишан со истите цифри, но во обратен редослед дава квадрат на природен број. Определи ги сите вакви двоцифрени броеви.

Решение. Нека бараниот двоцифрен број е $10a + b$. Според условот на задачата $10a + b + 10b + a = k^2$, т.е. $11(a + b) = k^2$. Значи, $11|k$ и како a и b се цифри, добиваме дека $a + b = 11$. Конечно, од последното равенство следува:

$$(a, b) \in \{(2, 9), (9, 2), (3, 8), (8, 3), (4, 7), (7, 4), (5, 6), (6, 5)\},$$

што значи дека бараните броеви се: 29, 92, 38, 83, 47, 74, 56 и 65.

2. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се два пати поголеми од производот на цифрите со кои се запишани.

Решение. Нека бараниот број е $10x + y$, каде x и y се цифри, $x \neq 0$. Имаме $10x + y = 2xy$, од каде добиваме $y = 2x(y - 5)$. Но, y е цифра, па затоа $y > 0$, што значи $y - 5 > 0$, т.е. $y > 5$. Од последното равенство следува дека y е парен број, т.е. $y = 6$ или $y = 8$. Условот го задоволува само $y = 6$ и тогаш $x = 3$. Значи, бараниот број е 36.

3. Нека x, y, x се непарни цифри такви што $x < y < z$. Збирот на сите трицифрени броеви формирани од цифрите x, y, x е десет пати поголем од трицифрениот број запишан само со цифрата x . Определи ги цифрите x, y, z .

Решение. Нека $x = 2m + 1, y = 2n + 1, z = 2k + 1$. Од условот на задачата следува дека $m < n < k$ и m, n, p се помали или еднакви на 4. Можни се следниве случаи:

- 1) $m = 1, n = 2, k = 3$ и тогаш $x = 3, y = 5, z = 7$. Во овој случај може да се формираат броевите 357, 375, 537, 573, 735, 753, чиј збир е 3330 и важи $3330 = 10 \cdot 333$, т.е. ова е едно решение на задачата.
- 2) $m = 1, n = 2, k = 4$ и тогаш $x = 3, y = 7, z = 9$. Во овој случај може да се формираат броевите 379, 397, 739, 793, 937, 973, но нивниот збир е поголем од 3330.

3) $m = 2, n = 3, k = 4$ и тогаш $x = 5, y = 7, z = 9$. Во овој случај може да се формираат броевите 579, 597, 759, 795, 957, 975, но нивниот збир е помал од 5550.

Според тоа, единствено решение на задачата е $x = 3, y = 5, z = 7$.

4. Определи ги сите трицифрени природни броеви кои се 22 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 22(a + b + c), \text{ т.е. } 26a = 4b + 7c.$$

Од $b \leq 9$ и $c \leq 9$ следува $26a = 4b + 7c \leq 4 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 99$, односно $a \in \{1, 2, 3\}$.

1) За $a = 1$ добиваме $26 = 4b + 7c$, од каде следува $c = 2$ и $b = 3$, т.е. $\overline{abc} = 132$.

2) За $a = 2$ добиваме $52 = 4b + 7c$, од каде следува $c = 4$ и $b = 6$, т.е. $\overline{abc} = 264$.

3) За $a = 3$ добиваме $78 = 4b + 7c$, од каде следува $c = 6$ и $b = 9$, т.е. $\overline{abc} = 396$.

5. Разликата на квадратите на два двоцифрени броја е еднаква на 7920. Вториот број се добива од првиот со замена на местата на цифрите на првиот број. Кои се тие броеви?

Решение. Ако првиот број е $\overline{ab} = 10a + b$, тогаш вториот број е $\overline{ba} = 10b + a$, па затоа

$$(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 7920$$

$$(10a + b + 10b + a)(10a + b - 10b - a) = 7920$$

$$11(a + b) \cdot 9(a - b) = 7920$$

$$(a + b)(a - b) = 80.$$

Но, a и b се цифри, па затоа $a + b \leq 18$ и $a - b < 9$. Исто така $a + b > a - b$, па можни се следниве случаи:

1) $a + b = 16, a - b = 5$, од каде добиваме $2a = 21$, па во овој случај немаме решение.

2) $a + b = 10, a - b = 8$, од каде добиваме $a = 9, b = 1$, па бараните броеви се 91 и 19.

3) $a + b = 20, a - b = 4$, од каде добиваме $a = 12, b = 8$ и ова не е решение, бидејќи a не е цифра.

6. Разликата на две дробки е $\frac{1}{5}$. Броителот на првата дробка е три пати поголем од броителот на втората дробка, а именителот на првата дробка е два пати поголем од именителот на втората дробка. Определете ги овие дробки.

Решение. Ако втората дробка е $\frac{a}{b}$, тогаш првата е $\frac{3a}{2b}$. Според условот на задачата имаме $\frac{3a}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{1}{5}$, па затоа $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. Конечно, првата дробка е $\frac{6}{10}$.

7. Збирот на два броја е 135, а 35% од едниот број се еднакви на 28% од другиот број. Определете ги овие броеви.

Решение. Нека првиот број е a , а вториот е $135 - a$. Од условот на задачата следува $0,35a = 0,28(135 - a)$. Од последната равенка наоѓаме $a = 60$, па вториот број е 75.

8. Наставникот му дал на Ѓорѓи да подели два броја. Ѓорѓи добил количник 74 и остаток 22. Тогаш направил проверка, т.е. го помножил количникот со делителот и на добиениот производ му го додал остатокот, па така добил 30214. Имало грешка. Ѓорѓи при ова множење, т.е. при контролата во делителот на местото на десетките една шестка ја прочитал како нула. Определете ги деленикот и делителот.

Решение. Нека деленикот е x , а делителот е y . Според условот на задачата имаме $x = 74y + 22$. При проверката, т.е. при пресметувањето на $74y + 22$ Ѓорѓи згрешил и добиениот број 30214 не е точен. Земјќи при множењето $74y$ во y шестка наместо нула, Ѓорѓи како и да не množел со 6 десетки, па затоа неговиот резултат е помал за $74 \cdot 60 = 4440$. Значи, резултатот треба да се зголеми за 4440, па добиваме $74y + 22 = 30214 + 4440$, од каде наоѓаме $y = 468$. Според тоа, делителот е 468, а деленикот е 34654.

9. Павел замислил еден број, од десно му допишал 2 и на така добиениот број му додал 14. На бројот кој го добил од десно му допишал 3 и на добиениот број му додал 52. Кога така добиениот број го поделил со 60, добил количник кој е за 6 поголем од замислениот број и остатокот кој бил еднаесет пати поголем од замислениот број. Кој број го замислил Павел?

Решение. Нека x е замислениот број. Кога од десно се допише 2 се добива $10x + 2$, па кога ќе се додаде 14 се добива $10x + 16$. При допишување од десно на 3 се добива $10(10x + 16) + 3 = 100x + 163$ и кога ќе се додаде 52 се добива $100x + 215$. По делењето на последниот број со 60 добиен е количник $x + 6$ и остаток $11x$. Конечно, од досега изнесеното следува равенката $100x + 215 = 60(x + 6) + 11x$, од каде добиваме $x = 5$.

10. Од даден трицифрен број со ненулни цифри со разместување на неговите цифри се добиени сите можни броеви. Збирот на овие броеви е 1998. Со кои цифри е запишан дадениот трицифрен број?

Решение. Кај дадениот број може сите три цифри да се различни или две да се еднакви, а третата да е различна (сите цифри се различни од нула).

а) Ако сите цифри се различни, да кажеме a, b, c , тогаш шесте броја се $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bca}, \overline{bac}, \overline{cab}, \overline{cba}$, па добиваме дека нивниот збир е $222(a + b + c)$. Според тоа, $222(a + b + c) = 1998$, односно $a + b + c = 9$. Според тоа, дадениот број може да биде запишан со цифрите: 1, 2 и 6; или 1, 3 и 5; или 2, 3 и 4.

б) Ако дадениот број има две различни цифри x и y , тогаш броевите се $\overline{xx}, \overline{xu}, \overline{ux}$, па добиваме дека нивниот збир е $222x + 111y$, што значи $222x + 111y = 1998$, т.е. $2x + y = 18$. Конечно, во овој случај дадениот број може да биде запишан со цифрите: 5, 5 и 8; или 7, 7 и 4; или 8, 8 и 2.

11. Определи ја најмалата дробка со која треба да се поделат дробките $\frac{8}{15}, \frac{12}{35}, \frac{20}{21}$ за да во сите три случаи количникот е природен број.

Решение. Нека бараната дробка е $\frac{a}{b}$. Тогаш мора да се цели броеви следниве производи $\frac{8}{15} \cdot \frac{b}{a}, \frac{12}{35} \cdot \frac{b}{a}, \frac{20}{21} \cdot \frac{b}{a}$. Последното е исполнето ако $b = 105n$, бидејќи 105 е најмал заеднички содржател на 15, 35 и 21. За да дробката $\frac{a}{b}$ биде најмала потребно е $a = 1$, а $b = 105n$ да е најголем природен број. Бидејќи не постои најголем природен број од дадениот вид, заклучуваме дека не постои најмала дробка која го задоволува условот на задачата.

12. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 24. Бројот еднакво се чита од лево на десно и од десно на лево. Бројот формиран од последните две цифри е за 36 поголем од бројот формиран од првите две цифри. Определи го овој четирицифрен број.

Решение. Јасно, бараниот број е од видот $\overline{xуux}$. Според условот на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ 10y + x = 10x + y + 36 \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот равенки:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = -4. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $x = 4, y = 8$, што значи дека бараниот број е 4884.

II.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

13. По намалувањето на цената за 20% за износ од 240 денари може да се купи 1 метар платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 270 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето на цената?

Решение. Нека x е бројот на метрите кои се купени по цена y денари по метар за 270 денари. Тогаш од условот на задачата следува дека $xу = 270$ и $0,8(x+1)y = 240$. Од последните две равенства добиваме $x = 9$ и $y = 30$.

14. Иван потрошил определена сума пари за купување книга, ташна и пенкало. Ако ташната била 5 пати поевтина, пенкалото 2 пати поевтино, а книгата 2,5 пати поевтина отколку што е вистинската цена, тогаш Иван ќе плател 160 денари. Ако ташната била поевтина 2 пати, пенкалото 4 пати, а книгата 3 пати, тогаш тој ќе плател 240 денари. Колку пари потрошил Иван?

Решение. Нека цената на ташната е x , цената на пенкалото е y и цената на книгата е z . Тогаш од условите на задачата следува

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 160 \text{ и } \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 240,$$

од каде добиваме

$$2x + 5y + 4z = 1600 \text{ и } 6x + 3y + 4z = 2880.$$

Ако ги собереме последните две равенки добиваме $8x + 8y + 8z = 4480$ од каде наоѓаме $x + y + z = 560$. Значи, Иван вкупно потрошил 560 денари.

15. Еден ученик купил чанта, пенкало и тетратка. Ако чантата, пенкалото и тетратката беа 5 пари, 2 пати и 2,5 пати поевтини, соодветно, тој ќе платеше 800 денари. Ако пак истите предмети беа 2 пати, 4 пати и 3 пати поевтини соодветно, тој ќе платеше 1200 денари. Колку пари платил ученикот за купувањето на овие предмет?

Решение. Нека чантата чини x , пенкалото y и тетратката z денари.

Според условот на задачата имаме

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 800 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1200 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 8000 \\ 6x + 3y + 4z = 14400. \end{cases}$$

Ако ги собереме двете равенки на последниот систем, а потоа поделиме со 8 добиваме

$$x + y + z = \frac{22400}{8} = 2800,$$

што значи дека ученикот платил 2800 денари за купување на наведените предмети.

16. Во едно коло на спортска прогноза пријателите Ангел, Бојан и Славе ги вложиле следниве суми: Ангел 600 денари, Бојан 900 денари и Славе 1500 денари. На прогнозата добиле вкупно 170000 денари. Како правилно ќе ја поделат добивката?

Решение. Нека се a, b, c деловите на кои Ангел, Бојан и Славе треба да ја поделат добивката. Тогаш $a : b : c = 600 : 900 : 1500 = 2 : 3 : 5$. Но, $2 + 3 + 5 = 10$, па затоа добивката прво ќе ја поделиме на десет делови, па потоа секој ќе го добие соодветниот дел. Имаме:

$$a = 2 \cdot 17000 = 34000, b = 3 \cdot 17000 = 51000, c = 5 \cdot 17000 = 105000 \text{ денари.}$$

17. Четири патници патувале со такси во иста насока, во четири места кои се еднакво оддалечени од своите соседни места. Првиот патник при излегувањето од таксито ја платил четвртина од сумата која тогаш ја покажувал таксиметарот, вториот ја платил третината, а третиот и четвртиот ја платиле половината од сумата која таксиметарот ја покажувал во моментот на излегувањето на секој од нив. Дали таксистот на-

платил повеќе или помалку отколку кога би возел еден патник на целата релација и за колку?

Решение. Кога патниците влегле во таксито, таксистот го приклучил таксиметарот на кој се појавил износ од x денари. По поминувањето на растојанието до првото, па до второто, па до третото и до четвртото место цената секогаш се зголемувала за y денари. Затоа патниците соодветно платиле: $\frac{1}{4}(x+y)$, $\frac{1}{3}(x+2y)$, $\frac{1}{2}(x+3y)$, $\frac{1}{2}(x+4y)$ денари.

Значи, тие вкупно платиле

$$\frac{1}{4}(x+y) + \frac{1}{3}(x+2y) + \frac{1}{2}(x+3y) + \frac{1}{2}(x+4y) = (x+4y) + \frac{7}{12}x + \frac{5}{12}y,$$

денари, што значи дека повеќе платиле $\frac{7}{12}x + \frac{5}{12}y$ денари.

18. Три групи работници заработиле 113 евра. Секој работник од првата група добил по 13 евра, секој од втората група добил по 5 евра и секој од третата група добил по 4 евра. По колку работници имало во секоја група, ако вкупниот број работници бил 16?

Решение. Нека првата, втората и трета група има x, y, z работници, соодветно. Според условот на задачата имаме

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 13x + 5y + 4z = 113. \end{cases}$$

Според тоа, $113 = 4(x+y+z) + 9x + y = 64 + 9x + y$, од каде добиваме $y = 49 - 9x$. Но, x и y се природни броеви помали од 16.

Ако $x=1, 2, 3$, тогаш добиваме $y=40, 31, 22$, што не е можно, бидејќи овие броеви се поголеми од 16. За $x=4$, добиваме $y=13$, што не е можно бидејќи $x+y=17 > 16$. За $x=5$ добиваме $y=4$ и тогаш $z=16-(x+y)=7$. Ако $x \geq 6$, добиваме $y < 0$, што не е можно.

Конечно, првата група имала 5, втората 4 и трета 7 работници.

II.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

19. Во една година 1. јануари и 1. април паднале во четврток. Колку месеци во таа година се со пет петоци?

Решение. Од 1. јануари и 1. април има 91 или 90 дена, зависно од тоа дали годината е престапна или не е престапна. За да 1. јануари и 1. април бидат во четврток, бројот на деновите меѓу двата датуми мора

да е делив со 7, а тоа е бројот 91. Значи годината е престапна и има 366 дена. Бидејќи во оваа година има 52 седмици и 2 дена, заклучуваме дека во неа има 53 петоци (2. јануари бил петок). Ако со x го означиме бројот на месеците со 5 петоци добиваме $5x + 4(12 - x) = 53$, т.е. $x = 5$. Според тоа, во 5 месеци има по 5 петоци.

20. Една бригада сама може да заврши една работа за 10 дена, а друга за $13\frac{1}{2}$ дена. Во работата зеле учество $\frac{1}{3}$ од составот на првата бригада и 75% од составот на втората бригада. За колку часа е завршена работата ако работниците дневно работеле по 8 часа?

Решение. Јасно, првата бригада ја завршува работата за 80 часа, а втората за 108 часа. Сега, $\frac{1}{3}$ од првата бригада работата ќе ја заврши за $80 : \frac{1}{3} = 240$ часа и за 1 час ќе заврши $\frac{1}{240}$ дел од работата, а 75% од втората бригада работата ќе ја заврши за $108 : \frac{3}{4} = 144$ часа и за 1 час ќе заврши $\frac{1}{144}$ дел од работата. Според тоа, сите заедно за 1 час ќе завршат $\frac{1}{240} + \frac{1}{144} = \frac{1}{90}$ дел од работата. Конечно, за завршување на целата работа ќе им требаат 90 часа.

21. Четири работници, ако работат заедно, можат да завршат една работа за 9 дена. Меѓутоа работниците не почнале да работат истовремено, туку тие почнувале да работат еден по друг на еднакви временски интервали. Тие ја завршиле работата и притоа работникот кој почнал прв да работи работел 5 пати подолго од работникот кој последен почнал да работи. Сите работници работеле со еднаков интензитет на производство. За колку денови е завршена работата?

Решение. Нека четвртиот работник работел x денови. Тогаш првиот работник работел $5x$ денови. Значи, додека почнал да работи четвртиот работник поминале $5x - x = 4x$ денови. Според тоа, на секои $\frac{4x}{3}$ почнувале да работат вториот, третиот и четвртиот работник. Според тоа, вториот работник работел $5x - \frac{4x}{3} = \frac{11x}{3}$ денови, а третиот работник работел $\frac{11x}{3} - \frac{4x}{3} = \frac{7x}{3}$ денови. За завршување на работата се потребни $4 \cdot 9 = 36$ работни денови на еден работник, па затоа важи $x + \frac{7x}{3} + \frac{11x}{3} + 5x = 36$, од каде добиваме $x = 3$ дена. Конечно, бидејќи

првиот работник работел од почеток до крај целата работа е завршена за $5 \cdot 3 = 15$ дена.

22. Бригада трактористи треба да изора блок за определено време, при што дневно треба да ора по 360 декари. Бригадата ја натфрлила нормата за $16\frac{2}{3}\%$ и за последниот ден од рокот и останало да изора 60 декари. Колку декари е блокот?

Решение. Бидејќи $16\frac{2}{3}\%$ од 360 декари е $\frac{360 \cdot 16\frac{2}{3}}{100} = 60$ декари, добиваме дека бригадата дневно орала по $360 + 60 = 420$ декари. Нека плоштината на блокот е x декари. Добиваме дека при дневна норма од 360 декари бригадата ќе ора $\frac{x}{360}$ дена. При дневна норма од 420 декари таа последниот ден од рокот изорала 60 декари, што значи дека таа изорала $x - 60$ декари за $\frac{x-60}{420}$ дена и ова е еден ден помалку од $\frac{x}{360}$ дена. Според тоа, $\frac{x}{360} = \frac{x-60}{420} + 1$, од каде добиваме $x = 2160$ декари.

23. Неколку трактори треба да изораат две ниви. Првиот ден сите трактори работеле на првата нива. Вториот ден тракторите се поделиле така што половината трактори тој ден ја доорале првата нива, а другата половина ја орала втората нива чија плоштина била два пати помала од плоштината на првата нива. Колку трактори имало, ако се знае дека неизораниот дел од втората нива кој останал по вториот ден може да го доора еден трактор за 2 дена?

Решение. Нека имало x трактори. Според условот на задачата првата нива е изорана за 2 дена од $x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$ трактори. Вториот ден на втората нива орале $\frac{x}{2}$ трактори и неизораниот ден од неа ја изорал 1 трактор за 2 дена, т.е. 2 трактори за 1 ден. Значи, втората нива ја ораат за еден ден $\frac{x}{2} + 2 = \frac{x+4}{2}$ трактори. Бидејќи плоштината на првата нива е два пати поголема од плоштината на втората нива точно е равенката $\frac{3x}{2} = 2 \cdot \frac{x+4}{2}$, од каде добиваме $x = 8$.

24. Четири работници треба да завршат една работа. Ако првиот, вториот и третиот работат заедно, работата ќе ја завршат за 6 часа, а ако првиот, вториот и четвртиот работат заедно, работата ќе ја завршат за

7,5 часа. Меѓутоа, ако само третиот и четвртиот работат заедно, работата ќе ја завршат за 10 час. За колку часа ќе биде завршена работата ако сите четворица работат заедно?

Решение. Нека првиот, вториот, третиот и четвртиот работник самостојно ја завршува работата за a, b, c и d часа, соодветно. Тогаш, од условот на задачата следува

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{1}{7,5} \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Ако ги собереме трите равенки и добиената равенка ја поделеме со 2 добиваме

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7,5} + \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{5},$$

што значи дека ако работниците работат сите заедно, тогаш работата ќе ја завршат за 5 часа.

25. Една ливада за 30 дена ја испасуваат 64 крави. На истата ливада 36 крави може да пасат 60 дена.

а) Колку крави ќе ја испасат ливадата за 35 дена?

б) Колку дена ќе пасат 50 крави?

Решение. За 30 дена 64 крави ќе испасат $30 \cdot 64 = 1920$ кравји оброци. За 60 дена 36 крави ќе испасат $36 \cdot 60 = 2160$ оброци. Според тоа, за 30 дена $2160 - 1920 = 240$ кравји оброци, т.е. за 1 ден растат $240 : 30 = 8$ кравји оброци. Последното значи дека на ливадата на почетокот имало $1920 - 240 = 1680$ кравји оброци.

а) За 35 дена ќе има $1680 + 8 \cdot 35 = 1960$ оброци, кои за 35 дена ќе ги испасат $1960 : 35 = 56$ крави.

б) За x дена ќе има $1680 + 8x$ оброци, кои 50 крави ќе ги испасат, па затоа $1680 + 8x = 50x$, т.е. $x = 40$ дена.

26. „Сашо и јас, рече Душан, можеме да завршиме една работа за 20 дена, но, ако ми го дадете Никола наместо Сашо, работата можеме да ја завршиме за 15 дена.“

„Имам подобра комбинација, рече Никола, ако го земам Сашо да ми помага, работата ќе ја завршиме за 12 дена.“

За колку дена секој од нив самостојно може да ја заврши работата?

Решение. Нека на Сашо му требаат s денови, на Душан d денови и на Никола n денови. Според условот на задачата добиваме

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{s} = \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{n} = \frac{1}{15}, \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{s} = \frac{1}{12}.$$

Ако ги собереме овие равенства и поделиме со 2 добиваме

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{n} + \frac{1}{s} = \frac{1}{10}.$$

Сега, ако од последното равенство го одземеме секое од горните три равенства добиваме $\frac{1}{n} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{30}$, $\frac{1}{d} = \frac{1}{60}$. Значи, на Никола му се потребни 20 дена, на Сашо му се потребни 30 дена и на Душан му се потребни 60 дена.

27. Два трактори со различна моќност, кога работат 15 h заедно изоруваат $\frac{1}{6}$ од една нива. Ако првиот трактор ора сам 12 h, а потоа вториот трактор ора сам 20 h, ќе изораат 20% од нивата. За колку часа може секој трактор сам да ја изора нивата?

Решение. Нека првиот трактор може сам да ја изора нивата за x h, а вториот за y h. Тогаш за 15 h првиот трактор ќе изора $\frac{15}{x}$ од нивата, а за 12 h ќе изора $\frac{12}{x}$ од нивата. Исто вториот трактор за 15 h ќе изора $\frac{15}{y}$ од нивата, а за 20 h ќе изора $\frac{20}{y}$ нивата. Затоа важи

$$\begin{cases} \frac{15}{x} + \frac{15}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{12}{x} + \frac{20}{y} = \frac{20}{100} \end{cases},$$

од каде добиваме $x = 360$ h и $y = 120$ h.

28. Бригада трактористи треба да изора две ниви, при што првата нива по површина е два пати поголема од втората. Целиот прв ден сите трактори ја орале првата нива, а тогаш се поделиле, па вториот ден половината бригада го довршила орањето на првата нива, а втората половина од бригадата ја орала втората нива. Втората половина од бригадата не можела да го доврши орањето на втората нива, па затоа еден тракторист морал да ора уште два дена. Колку трактористи имало во бригадата? (Се претпоставува дека сите трактористи работат под исти услови и имаат иста продуктивност.)

Решение. Нека во бригадата имало x трактористи. Ако работата ја мериме со единица трактор-ден, тогаш за првата нива имаме $x + \frac{x}{2}$ единици работа, а за втората имаме $\frac{x}{2} + 2$ единици работа. Сега, бидејќи првата нива е два пати поголема од втората добиваме

$$x + \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{2} + 2\right),$$

од каде добиваме $x = 8$ трактористи.

29. Таткото има 49 години и немал деца пред 20-годишна возраст. Секоја година тој и синот заедно го слават родениот ден. Пред колку години таткото бил 8 пати постар од синот?

Решение. Нека синот има x години. Бидејќи пред 20-годишна возраст таткото немал деца, добиваме дека $49 - x \geq 20$, т.е. $x \leq 29$. Нека пред y години таткото бил 8 пати постар од синот. Тогаш $49 - y = 8(x - y)$, т.е. $x = \frac{49 + 7y}{8}$. Тоа значи дека $\frac{49 + 7y}{8} \leq 29$, па затоа $y \leq 26\frac{1}{7}$. Но, y е природен број, па затоа важи $y \in [1, 26]$ и x е природен број. Значи треба да определиме за кои природни броеви $y \in [1, 26]$ и бројот x ќе биде природен. Имаме $x = \frac{49 + 7y}{8} = \frac{7(7 + y)}{8}$, па затоа $8 \mid 7 + y$. Вредностите на y за кои ова важи се 1, 9, 17 и 25, а соодветните вредности за x се 7, 14, 21 и 28. Значи, задачата има четири решенија и тоа:

- пред 1 година таткото имал 48 години, а синот имал 6 години,
- пред 9 години таткото имал 40 години, а синот имал 5 години,
- пред 17 години таткото имал 32 години, а синот имал 4 години,
- пред 25 години таткото имал 24 години, а синот имал 3 години.

30. Мајката и кажала на ќерката: „Моите години се сега 9 пати повеќе отколку што беа твоите години тогаш кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Кога ти ќе имаш толку години колку што имам сега јас, збирот на нашите години ќе биде 110.“ По колку години имаат мајката и ќерката?

Решение. Нека сега мајката има x , а ќерката има y години. Нека пред z години мајката имала години колку што сега има ќерката, т.е. $x - z = y$. Пред z години ќерката имала $y - z$ години, па затоа $x = 9(y - z)$. Ако по t години ќерката има години колку што мајката

има сега, т.е. $y + t = x$, тогаш мајката ќе има $x + t$ години, па затоа ќе важи $x + x + t = 110$ и како $t = x - y$ добиваме $3x - y = 110$. Така го добивме системот равенки

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 9y + 9z = 0 \\ 3x - y = 110 \end{cases}$$

чие решение е $x = 45, y = 25, z = 20$. Значи, сега мајката има 45 години, а ќерката има 25 години.

II.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

31. Две смеси се составени од супстанците А и В на следниот начин: $0,5\text{ g A} + 0,5\text{ g B}$ и $0,1\text{ g A} + 0,3\text{ g B}$. Колку пакувања од овие смеси може да направиме ако располагаме со 12 g од супстанцата А и 15 g од супстанцата В?

Решение. Нека x е бројот на пакувањата од првата смеша, а y е бројот на пакувањата од втората смеша. Тогаш

$$(0,5\text{ A} + 0,5\text{ B})x + (0,1\text{ A} + 0,3\text{ B})y = 12\text{ A} + 15\text{ B},$$

$$(0,5x + 0,1y)\text{A} + (0,5x + 0,3y)\text{B} = 12\text{A} + 15\text{B},$$

$$\begin{cases} 0,5x + 0,1y = 12 \\ 0,5x + 0,3y = 15, \end{cases}$$

$$x = 21, y = 15.$$

Значи, од првата смеша може да составиме 21 пакување, а од втората смеша може да составиме 15 пакувања.

32. На колку начини 1224 kg шеќер може да се спакува во вреќи од 27 kg и 72 kg , така што ќе бидат искористени повеќе вреќи од 27 kg ?

Решение. Нека имаме x вреќи од 27 kg и y вреќи од 72 kg . Тогаш $x > y$ и $27x + 72y = 1224$, од каде добиваме:

$$(x, y) \in \{(16, 11), (24, 8), (32, 5), (40, 2)\}.$$

33. Имаме две смеси од злато и сребро. Во првата смеша количествата на овие метали се однесуваат како $2:3$, а во втората како $3:7$. Колку килограми треба да земеме од секоја смеша за да се добие 8 kg нова смеша во која златото и среброт ќе се однесуваат како $5:11$?

Решение. Нека x е количеството од првата, а y е количеството од втората смеса. Тогаш во првата смеса има $\frac{2}{5}x$ злато, во втората има $\frac{3}{10}y$ злато и во третата има $\frac{5}{16} \cdot 8 = 2,5 \text{ kg}$ злато. Затоа,

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = 2,5 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

од каде добиваме $x = 1 \text{ kg}$, $y = 7 \text{ kg}$.

34. Морска вода содржи 5% сол. Колку килограми обична вода треба да се измеша со 40 kg морска вода за да се добие раствор кој содржи 2% сол?

Решение. Во 40 kg морска вода има $40 \cdot 0,05 = 2 \text{ kg}$ сол. За да имаме раствор кој содржи 2% сол треба да имаме $2 : x = 0,02$, т.е. $x = 100 \text{ kg}$. Последното значи дека треба да долееме $100 - 40 = 60 \text{ kg}$ обична вода.

35. Дадени се две легури од злато и сребро. Во едната количествата на златото и среброто се однесуваат како 2 : 3, а во другата како 3 : 7. По колку килограми треба да се земе од секоја легура за да се добие 8 kg нова легура во која златото и среброто се во однос 5 : 11?

Решение. Златото во првата легура е $\frac{2}{5}$ од таа легура, во втората е $\frac{3}{10}$ од легурата, а во саканата легура е $\frac{5}{16}$ од легурата. Ако од првата легура земеме $x \text{ kg}$, тогаш од втората легура треба да земеме $8 - x \text{ kg}$. Според тоа, точна е равенката $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = \frac{5}{16} \cdot 8$. Решението на последната равенка е $x = 1 \text{ kg}$, што значи дека од првата легура треба да земеме 1 kg, а од втората легура треба да земеме 7 kg.

36. Во сад кој не е полн има 85% раствор на алкохол. Ако садот го дополниме до врвот со 21% раствор на алкохол, течноста ја измешаме, одлееме онолку течност колку што сме туриле, па потоа повторно до врвот дополниме со 21% раствор на алкохол, добиваме раствор кој содржи 70% алкохол. Колкав дел од садот бил наполнет на почетокот?

Решение. Нека со x , $x < 1$ го означиме делот кој пред прелевањето бил исполнет со 85% алкохол. Бројот на процентите алкохол во садот изнесува $85x$. Неисполнетиот дел од садот е $1 - x$. Со првото дополнување количеството алкохол во садот се зголемило за $21(1 - x)$ и

вкупно имаме $85x + 21(1 - x) = 21 + 64x$. Со одлевање на $1 - x$ течност, количеството алкохол во садот се намалува за $(1 - x)(21 + 64x)$. Со второто дополнување со 21% раствор на алкохол количеството алкохол се зголемува за $21(1 - x)$. Сега добиениот раствор содржи 70% алкохол, па затоа

$$21 + 64x - (1 - x)(21 + 64x) + 21(1 - x) = 70,$$

од каде добиваме $64x^2 = 49$. Со решавање на последната равенка добиваме $x = \frac{7}{8}$, што значи дека на почетокот биле полни $\frac{7}{8}$ од садот.

37. Иван има две легури од бакар и цинк во кои бакарот и оловото се однесуваат како 19 : 1 и 4 : 1. Тој ги стопил легурите и додал 2 kg бакар, па така добил легура која тежела 25 kg и во која бакарот и оловото се однесуваат како 151 : 14. Определи ја масата на секоја од почетните легури.

Решение. Нека првата легура има маса x kg, а втората има маса y kg. Значи пред да се додаде 2 kg бакар двете легури тежат 23 kg, т.е. $x + y = 23$. Бидејќи $19 : 1 = 950 : 50$, $4 : 1 = 800 : 200$ и $141 : 14 = 906 : 84$, со додавањето 2 kg бакар на вкупната маса, за бакарот во новата легура добиваме $950x + 800y + 1000 \cdot 2 = 906 \cdot 25$, т.е. $19x + 16y = 413$. Така го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x + y = 23 \\ 19x + 16y = 413 \end{cases}$$

чије решение е $x = 15$ kg, $y = 8$ kg.

38. Од градовите А и В, кои се оддалечени 250 km, истовремено еден кон друг тргнале два моторциклисти. Брзината на едниот е за 10 km/h поголема од брзината на другиот. По два часа патување им останале уште 30 km до средбата. Определи ја брзината на секој моторциклист.

Решение. Нека брзината на првиот моторциклист е v km/h. Тогаш другиот моторциклист се движи со брзина $(v - 10)$ km/h. Затоа важи $2v + 2(v - 10) = 220$, од каде наоѓаме $v = 60$ km/h.

Значи, првиот моторциклист се движи со брзина 60 km/h, а вториот со брзина 50 km/h.

39. Предната гума на моторциклот се истрошува по поминати 25000 km , а задната по поминати 15000 km . По колку поминати километри треба да се променат местата на гумите за да двете гуми истовремено се истрошат? По колку поминати километри моторциклистот треба да купи нови гуми?

Решение. За да гумите исто се потрошат тие треба еднакво да се возат на предното и на задното тркало. Нека секоја гума помине x километри на предното и на задното тркало. Тогаш $\frac{1}{x} = \frac{1}{25000} + \frac{1}{15000}$, од каде добиваме $x = 9375\text{ km}$. Значи, гумите треба да се сменат по поминати 9375 km , а моторциклистот треба да купи нови гуми по поминати $2 \cdot 9375\text{ km} = 18750\text{ km}$.

40. Воз поминал мост долг 225 m , возејќи со постојана брзина, за 27 секунди (сметајќи го времето од доаѓање на локомотивата на мостот, до симнување на последниот вагон од мостот). Потоа возот поминал покрај пешак, кој се движел во спротивна насока од возот, за 9 секунди. За тоа време пешакот поминал 9 m . Определи ги должината на возот и неговата брзина.

Решение. Нека x е должината на возот во m , а y е неговата брзина во m/s . Од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} 225 + x = 27y \\ x - 9 = 9y \end{cases}$$

од каде добиваме $x = 126\text{ m}$ и $y = 13\text{ m/s}$.

41. Два воза истовремено еден кон друг тргнуваат од местата A и B . Секој од возовите кога ќе стигне во спротивното место, одма се враќа назад. Првата средба на возовите е на 50 km од местото A , а втората е на 30 km од местото B . Определи ја должината на патот меѓу местата A и B . (Секој од возовите се движи со своја константна брзина.)

Решение. Нека растојанието од A до B е еднакво на s . Со v_a да ја означиме брзината на возот кој тргнува од A , а со t времето до првата средба со вториот воз. За време t првиот воз поминал пат од 50 km , т.е. $50 = v_a t$. Двата воза заедно го поминале еднаш патот од A до B , т.е. поминале пат долг s . До втората средба двата воза поминале пат долг $3s$. Но секој воз се движи со константна брзина, па за да се помине три пати подолг пат треба три пати подолго време. Затоа

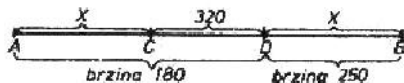
првиот воз до местото на средбата поминал пат $3tv_a$, што значи дека $3tv_a = s + 30$. Ако замениме $50 = v_a t$, добиваме $150 = s + 30$, т.е. $s = 120 \text{ km}$.

42. На чело на колона велосипедистичка трка се наоѓаат велосипедистите Ацо и Борис, возејќи еден покрај друг. Тие толку ги претекнале останатите учесници на трката, што до крајот на трката никој не можел да ги стигне. На 20 km пред целта на Ацо му пукнала гума. Борис продолжил да вози до целта со просечна брзина од 40 km/h . Ацо заради поправка на гумата загубил 3 минути, а потоа до целта возел со просечна брзина од 45 km/h . Кој победил во трката и со колку метри предност?

Решение. Борис до целта возел $\frac{20}{40} = 0,5$ часа, односно 30 минути. На Ацо му биле потребни $\frac{20}{45}$ часови и уште 3 минути, односно вкупно $\frac{89}{3}$ минути. Според тоа, победник во трката е Ацо кој пред Борис стигнал $\frac{1}{3}$ минути, односно 20 секунди. За овие 20 секунди на Борис му преостанало да помине уште $\frac{1}{180} \cdot 40 = \frac{2}{9} \text{ km}$.

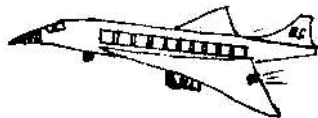
43. Авион летал од А во В и тоа прво со брзина 180 km/h , а кога му останало да прелета уште 320 km помалку отколку што веќе прелетал, ја зголемил брзината на 250 km/h . Така средната брзина на авионот на целиот пат била 200 km/h . Определи ја должината на летот од А до В.

Решение. Потребното време да се помине патот AD е $\frac{x+320}{180}$, а потребното време да се помине патот



DB е $\frac{x}{250}$. Затоа важи $2x + 320 = 200(\frac{x+320}{180} + \frac{x}{250})$, од каде добиваме $x = 400 \text{ km}$. Според тоа, $\overline{AB} = 2x + 320 = 1120 \text{ km}$.

44. Авион првите 385 km ги прелетал со брзина од 220 km/h . Преостанатиот дел од патот го прелетал со брзина од 330 km/h . Средната брзина на летот на целиот пат



била 250 km/h . Колкав пат прелетал авионот?

Решение. Првиот дел од патот ави-

онот го прелетал за $\frac{385}{220} = 3,5$ часа, а



останатиот дел од патот од $x \text{ km}$ го прелетал за t часа. Според тоа, важи $x = 330t$ и $385 + x = 250(3,5 + t)$. Од првата равенка има $t = \frac{x}{330}$ и ако замениме во втората равенка добиваме $385 + x = 250(3,5 + \frac{x}{330})$, од каде следува $x = 2921,25 \text{ km}$.

45. На кружна патека долга 1650 m се движат два моторциклисти со константни брзини. Ако моторциклистите се движат во спротивни насоки се среќаваат секоја минута, а ако пак се движат во иста насока, моторциклистот кој има поголема го пристигнува вториот моторциклист секои единаесет минути. Определи ги брзините на моторциклистите.

Решение. Нека побрзиот моторциклист минувал x метри во минута, а другиот y метри во минута. Од првиот услов следува $x + y = 1650$, а од вториот $x - y = \frac{1650}{11}$. Решението на системот е $x = 900 \text{ m/min}$ и $y = 750 \text{ m/min}$.

46. Авион и хеликоптер истовремено полетале еден кон друг. Во моментот на средбата хеликоптерот прелетал 100 km помалку од авионот и на местото на полетување на авионот стигнал 3 часа по средбата. Авионот стигнал на местото на полетување на хеликоптерот 1 час и 20 минути по средбата. Определи ги брзините на авионот и хеликоптерот и растојанието меѓу местата на полетување.

Решение. Нека хеликоптерот до средбата прелетал x километри. Тогаш авионот до средбата прелетал $x + 100$ километри. Затоа брзината на хеликоптерот е еднаква на $\frac{x+100}{3} \text{ km/h}$, а брзината на авионот е $\frac{x}{1\frac{1}{3}} \text{ km/h}$. Од местото на полетување до местото на средбата хели-

коптерот летал $x: \frac{x+100}{3} = \frac{3x}{x+100}$ часа, а авионот летал $\frac{\frac{1}{3}(x+100)}{x}$ часа.

Затоа е точна равенката $\frac{3x}{x+100} = \frac{\frac{1}{3}(x+100)}{x}$, која е еквивалентна со ра-

венката $(\frac{x}{x+100})^2 = (\frac{2}{3})^2$. Оттука добиваме $\frac{x}{x+100} = -\frac{2}{3}$ или $\frac{x}{x+100} = \frac{2}{3}$.

Но, x и $x+100$ се позитивни броеви, па затоа првиот случај не е

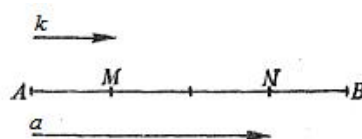
можен. Значи, $\frac{x}{x+100} = \frac{2}{3}$, од каде добиваме $x = 200 \text{ km}$. Според тоа, хеликоптерот до средбата прелетал 200 km , а авионот 300 km . Брзината на хеликоптерот е еднаква на $\frac{200+100}{3} = 100 \text{ km/h}$, а на авионот е $\frac{200}{1\frac{1}{3}} = 150 \text{ km/h}$.

47. Иван требало да стигне на железничката станица во определено време. Првиот час тој изминал 3 km и пресметал дека ако се движи со оваа брзина, ќе задоцни 40 min . Затоа тој останатиот пат го минал со брзина од 4 km/h и на станицата стигнал 45 min порано од предвиденото време. Колку километри поминал Иван?

Решение. Нека растојанието кое Иван го поминал со брзина 4 km/h е $x \text{ km}$. Ако Иван се движи со 3 km/h тој целото растојание од $3+x \text{ km}$ ќе го помине за $\frac{3+x}{3} \text{ h}$. Во тој случај тој ќе задоцни $40 \text{ min} = \frac{2}{3} \text{ h}$. Според тоа, за да стигне на време тој целото растојание треба да го помине за $\frac{3+x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{x+1}{3} \text{ h}$. Ако Иван 1 h се движи со брзина 3 km/h и $x \text{ km}$ со брзина 4 km/h , тој растојанието од $3+x \text{ km}$ ќе го помине за $1 + \frac{x}{4} = \frac{4+x}{4} \text{ h}$. Во овој случај тој ќе стигне $45 \text{ min} = \frac{3}{4} \text{ h}$ порано. Според тоа, за да стигне на време тој целото растојание треба да го помине за $\frac{4+x}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7+x}{4} \text{ h}$. Од досега изнесеното следува $\frac{x+1}{3} = \frac{x+7}{4}$, од каде добиваме $x = 17 \text{ km}$. Значи, Иван поминал $17 + 3 = 20 \text{ km}$.

48. Должината на патот од местото А до местото В е 900 km . Од А кон В истовремено тргнуваат автомобил и камион. Камионот се движи со брзина 21 km/h , а автомобилот со брзина 57 km/h . По колку часа на камионот ќе му остане да помине три пати подолг пат отколку на автомобилот?

Решение. Нека по x часови од тргнувањето камионот се наоѓа во точката М, а автомобилот се наоѓа во точката N. За тоа време камионот поминал



$\overline{AM} = 21x \text{ km}$ и му преостанале $\overline{MB} = 900 - 21x \text{ km}$. За тоа време автомобилот поминал $\overline{AN} = 57x \text{ km}$ и му преостанале $\overline{NB} = 900 - 57x \text{ km}$.

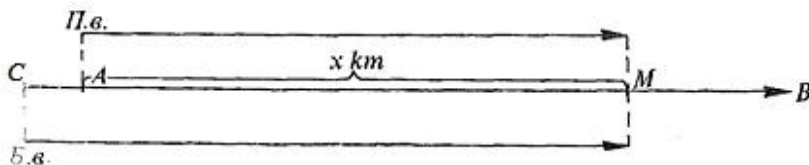
Според условот на задачата важи $\overline{MB} = 3\overline{NB}$, т.е.

$$900 - 21x = 3(900 - 57x),$$

од каде добиваме $x = 12 \text{ h}$.

49. Во $5 \text{ h } 10 \text{ min}$ од градот A кон градот B тргнува патнички воз, кој се движи со средна брзина $48,4 \text{ km/h}$. Од градот C , кој е оддалечен од градот B за $32,44 \text{ km}$ повеќе отколку градот A од градот B , во $8 \text{ h } 4 \text{ min}$ тргнува кон B брз воз кој се движи со средна брзина $62,8 \text{ km/h}$. Градот A е меѓу градовите C и B . Во колку часот и на кое растојание од A брзиот воз ќе го стигне патничкиот воз?

Решение. Нека брзиот воз го стигнал патничкиот воз во точката M и нека $\overline{AM} = x \text{ km}$ (цртеж долу). Тогаш патничкиот воз го поминал растојанието $\overline{AM} = x \text{ km}$ за $\frac{x}{48,4} = \frac{5x}{242} \text{ h}$.



Брзиот воз го поминал растојанието $\overline{CM} = (x + 32,44) \text{ km}$ за $\frac{x+32,44}{62,8} = \frac{5x+162,2}{314} \text{ h}$. Но, брзиот воз се движи

$$8 \text{ h } 4 \text{ min} - 5 \text{ h } 10 \text{ min} = 2 \text{ h } 54 \text{ min} = 2,9 \text{ h}$$

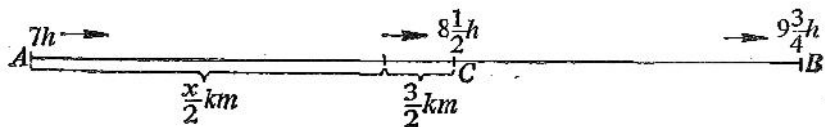
пократко време од патничкиот воз, па затоа $\frac{5x}{242} - \frac{5x+162,2}{314} = 2,9$, од каде наоѓаме $x = 721,16 \text{ km}$. Според тоа, брзиот воз ќе го стигне патничкиот воз на растојание од $721,16 \text{ km}$ од градот A . Патничкиот воз растојанието $\overline{AM}$ ќе го помине за $721,16 : 48,4 = 14 \text{ h } 54 \text{ min}$, што значи дека брзиот воз ќе го стигне патничкиот во

$$5 \text{ h } 10 \text{ min} + 14 \text{ h } 54 \text{ min} = 20 \text{ h } 4 \text{ min}.$$

50. Велосипедист тргнал во 7 h од местото A кон местото B и се движел рамномерно без застанување. Во $8 \text{ h } 30 \text{ min}$ тој ја надминал половината од патот за $1,5 \text{ km}$, а во местото B стигнал во $9 \text{ h } 45 \text{ min}$ и тоа за

15 min порано од предвиденото време. Определи ги брзината со која велосипедистот планирал да се движи, брзината со кој се движел и должината на патот од A до B .

Решение. Нека $\overline{AB} = x \text{ km}$ (цртеж долу). Со планираната брзина велосипедистот требало во B да пристигне во $9\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 10 \text{ h}$ и тоа со планираната брзина $\frac{x}{10-7} = \frac{x}{3} \text{ km/h}$.



Со реалната брзина велосипедистот пристигнал во B во $9\frac{3}{4} \text{ h}$, па затоа тој растојанието $\overline{AB} = x \text{ km}$ го поминал со брзина $\frac{x}{9\frac{3}{4}-7} = \frac{4x}{11} \text{ km/h}$. Но, со реалната брзина велосипедистот го поминал растојанието $\overline{AC} = \frac{x}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{x+3}{2} \text{ km}$ за $8\frac{1}{2} - 7 = \frac{3}{2} \text{ h}$. Оттука следува дека реалната брзина е $\frac{x+3}{2} : \frac{3}{2} = \frac{x+3}{3} \text{ km/h}$. Така ја добиваме равенката $\frac{4x}{11} = \frac{x+3}{3}$, од каде наоѓаме $x = 33 \text{ km}$. Значи, должината на патот од A до B е 33 km , планираната брзина е $\frac{x}{3} = \frac{33}{3} = 11 \text{ km/h}$, а реалната брзина е $\frac{4x}{11} = \frac{4 \cdot 33}{11} = 12 \text{ km/h}$.

51. Чамец поминува $a \text{ km}$ по течението на една река и се враќа назад. Брзината на чамецот по течението е $v_1 \text{ km/h}$, а водата на реката се движи со $v_2 \text{ km/h}$. Докажи дека времето за кое чамецот се движел во двете насоки е поголемо од времето за кое тој патот би го поминал во мирна вода.

Решение. Јасно, $v_1 > v_2$, бидејќи во спротивно чамецот нема да може да се врати назад. По течението на реката чамецот се движи со брзина $v_1 + v_2 \text{ km/h}$, а спроти течението на реката тој се движи со брзина $v_1 - v_2 \text{ km/h}$. Вкупното време за кое чамецот поминал по $a \text{ km}$ во секоја насока е $\frac{a}{v_1+v_2} + \frac{a}{v_1-v_2} \text{ h}$. Ако чамецот се движи во мирна вода, за да го помине истиот пат ќе му требаат $\frac{2a}{v_1} \text{ h}$. Бидејќи

$$\frac{a}{v_1+v_2} + \frac{a}{v_1-v_2} - \frac{2a}{v_1} = \frac{2av_1}{v_1^2-v_2^2} - \frac{2a}{v_1} = \frac{2av_1^2}{v_1(v_1^2-v_2^2)} > 0,$$

добиваме

$$\frac{a}{v_1+v_2} + \frac{a}{v_1-v_2} > \frac{2a}{v_1},$$

со што е докажано тврдењето на задачата.

52. Ана и Михаил живеат во иста зграда и учат во исто училиште. Тие од дома на училиште тргнале истовремено. Ана половината од патот го поминала со брзина $a \text{ km/h}$, а втората половина со брзина $b \text{ km/h}$. Михаил половина од времето одел со брзина $a \text{ km/h}$, а втората половина од времето со брзина $b \text{ km/h}$. Кој стигнал прв на училиште, Ана или Михаил?

Решение. Нека патот од дома до училиштето е $x \text{ km}$. Ана овој пат го поминала за $t_1 = \frac{x}{2} : a + \frac{x}{2} : b = \frac{x(a+b)}{2ab} \text{ h}$. Нека Михаил патот го поминал

за $t_2 \text{ h}$. За првата половина од времето тој поминал $\frac{t_2 a}{2} \text{ km}$, а за

втората тој поминал $\frac{t_2 b}{2} \text{ km}$, па затоа $\frac{t_2 a}{2} + \frac{t_2 b}{2} = x$, од каде добиваме

$$t_2 = \frac{2x}{a+b} \text{ h}. \text{ Според тоа, } t_1 - t_2 = \frac{x(a+b)}{2ab} - \frac{2x}{a+b} = \frac{x(a-b)^2}{2ab(a+b)} > 0.$$

Ако $a \neq b$, тогаш $t_1 - t_2 > 0$, т.е. $t_1 > t_2$, што значи дека Михаил прв стигнал на училиште.

Ако $a = b$, тогаш $t_1 - t_2 = 0$, т.е. $t_1 = t_2$, што значи дека двајцата истовремено стигнале на училиште.

53. Од градот А за градот В тргнал велосипедист. Откако патувал $1 \text{ h } 30 \text{ min}$, тој застанал да одмори и се покажало дека преостанатиот пат е за $16,5 \text{ km}$ пократок од до тогаш поминатиот пат. Велосипедистот ја зголемил брзината за 4 km/h и преостанатиот пат го поминал за 45 min . Колку километри е долг целиот пат?

Решение. Нека велосипедистот одмарал на местото М кое е оддалечено $x \text{ km}$ од А. Тогаш патот од А до М го поминал со $x : \frac{3}{2} = \frac{2x}{3} \text{ km/h}$, а патот од М до В кој е долг $x - 16,5 \text{ km}$ го поминал со брзина $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{2x+12}{3} \text{ km/h}$. Според условот на задачата ја

добиваме равенката $(x-16,5) \cdot \frac{2x+12}{3} = \frac{3}{4}$ чие решение е $x = 39 \text{ km}$.

Конечно, целиот пат е долг $2x - 16,5 = 2 \cdot 39 - 16,5 = 61,5 \text{ km}$.

54. Откако го поминал половината од патот од A до B возачот на автомобилот ја зголемил брзината на автомобилот за 25%, па така во B стигнал половина час порано. За колку часа автомобилот го поминал патот од A до B ?

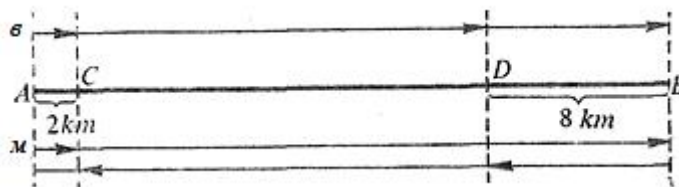
Решение. Нека должината на патот е $s \text{ km}$, а времето за кое треба да се помине патот со првобитната брзина е t часа. Тогаш првобитната брзина е $\frac{s}{t} \text{ km/h}$. Втората половина од патот автомобилот ја поминал

со брзина $\frac{\frac{s}{2}}{\frac{t}{2}-1} = \frac{s}{t-1} \text{ km/h}$. Ако се земе предвид дека во втората поло-

вина од патот автомобилот се движи со брзина која е за 25% поголема од првобитната брзина, ја добиваме равенката $\frac{s}{t} = \frac{s}{t-1} - \frac{1}{4} \frac{s}{t}$, од каде добиваме $t = 5 \text{ h}$. Според тоа, автомобилот патот од A до B го поминал за $4 \text{ h } 30 \text{ min}$.

55. Велосипедист тргнал од градот A за градот B , кои се оддалечени 28 km . Откако изминал 2 km велосипедистот го стигнал моторциклист, кој по извесно време стигнал во B , таму престојувал 22 min и на враќање откако поминал 8 km го сретнал велосипедистот. Определи ги нивните брзини, ако моторциклистот пристигнал во A во исто време кога велосипедистот пристигнал во B .

Решение. Нека моторциклистот го стигнал велосипедистот во точката C , а на враќање го сретнал во точката D (види цртеж).

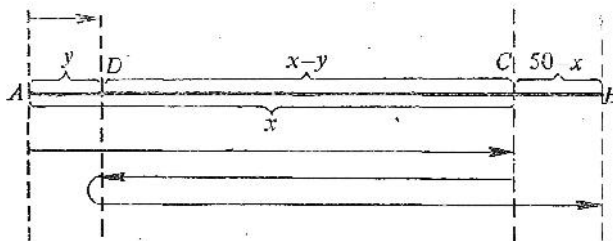


Од средбата во точката D до градот B велосипедистот поминал 8 km , а моторциклистот за истото време поминал $28 - 8 = 20 \text{ km}$. Ако велосипедистот се движи со $x \text{ km/h}$, тогаш бидејќи $20:8 = 2,5$ заклучуваме дека моторциклистот се движи со $2,5x \text{ km/h}$. Од моментот на стигнување во точката C до градот B велосипедистот поминал расто-

јание $28 - 2 = 26 \text{ km}$ за $\frac{26}{x} h$, а моторциклистот поминал растојание $26 + 28 = 54 \text{ km}$ за $\frac{54}{2,5x} h$. Според условот моторциклистот престојува во B точно $22 \text{ min} = \frac{11}{30} h$, па затоа $\frac{26}{x} - \frac{54}{2,5x} = \frac{11}{30}$, од каде добиваме $x = 12 \text{ km/h}$. Според тоа, брзината на велосипедистот е 12 km/h , а на моторциклистот е $2,5 \cdot 12 = 30 \text{ km/h}$.

56. Двајца туристи P и M тргнале истовремено од местото A за местото B . Туристот P тргнал пешки, а туристот M со моторцикл со водич H . Минувајќи дел од патот M продолжил понатаму пешки, а водичот H се вратил назад, го зел P и двајцата туристи (M пешки, а P на моторцикл) пристигнале истовремено во B . Растојанието меѓу A и B е 50 km , брзините на пешаците се 5 km/h , а брзината на моторциклот е 60 km/h . Определи го времето за кое туристите стигнале од A до B .

Решение. Нека M се движи со моторциклот до местото C , кое од A е на $x \text{ km}$ (види цртеж), а $50 - x \text{ km}$ ги поминува пешки. Тогаш M го минува растојанието до A до B за $\frac{x}{60} + \frac{50-x}{5} h$.



Нека P се движи пешки до местото D кое се наоѓа од A на $y \text{ km}$, а растојанието $50 - y \text{ km}$ го минува со моторцикл. Тогаш P го минува патот од A до B за $\frac{y}{5} + \frac{50-y}{60} h$. Бидејќи P и M истовремено пристигнуваат во B добиваме $\frac{x}{60} + \frac{50-x}{5} = \frac{y}{5} + \frac{50-y}{60}$, т.е. $x + y = 50$. До средбата на P и H во местото D P минува $y \text{ km}$ пешки за $\frac{y}{5} h$, а H минува пат долг $x + x - y = 2x - y \text{ km}$ за $\frac{2x-y}{60} h$. Бидејќи до D пешакот P и водичот H патуваат исто време, добиваме $\frac{y}{5} = \frac{2x-y}{60}$, т.е. $2x - 13y = 0$. Така го добивме системот равенки

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x - 13y = 0 \end{cases}$$

чие решение е $y = \frac{20}{3} \text{ km}$ и $x = \frac{130}{3} \text{ km}$. Конечно, времето за кое туристите стигнале од А до В е

$$\frac{\frac{130}{3}}{60} + \frac{\frac{20}{3}}{5} = 2\frac{1}{18} \text{ h}.$$

57. Растојанието меѓу А и В е 7 km . Два пешака (првиот од А, вториот од В) тргнале едновременно еден кон друг и се сретнале за помалку од 1 h . Ако првиот пешак одеше двапати побрзо, а брзината на вториот пешак беше за 2 km поголема од реалната брзина, тогаш до моментот на средбата вториот пешак ќе помине поголем дел од растојанието меѓу А и В. Кој пешак се движи побрзо?

Решение. Нека првиот пешак се движи со $x \text{ km/h}$, а вториот се движи со $y \text{ km/h}$. Двата пешака растојанието од 7 km го изминале за $\frac{7}{x+y} \text{ h}$, па затоа $\frac{7}{x+y} < 1$, т.е. $x + y > 7$. Според условот, ако првиот пешак се движи со брзина $2x \text{ km/h}$, а вториот со брзина $y + 2 \text{ km/h}$, тогаш до средбата вториот пешак ќе помине поголемо растојание, па затоа $y + 2 > 2x$, т.е. $-2x + y > -2$. Така го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} x + y > 7 \\ -2x + y > -2 \end{cases}$$

Ако првата неравенка ја помножиме со 2 и ги собереме неравенките, добиваме $3y > 12$, т.е. $y > 4$. Понатаму, од втората неравенка следува $2x - 2 < y$. Но, $y > 4$, па затоа мора да е $2x - 2 < 4$, т.е. $x < 3$. Според тоа, првиот пешак се движи со брзина помала од 3 km/h , а вториот со брзина поголема од 4 km/h .

II.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

58. На писмена работа по математика 12% од учениците во одделението не ја решиле првата задача, 32% од учениците делумно ја решиле задачата, а остатокот од 14 ученици точно ја решиле задачата. Колку ученици има во ова одделение?

Решение. Бројот на учениците кои точно ја решиле задача е еднаков на $100\% - (32\% + 12\%) = 56\%$ од вкупниот број ученици. Според тоа, ако во одделението имало x ученици, тогаш $x \cdot \frac{56}{100} = 14$, од каде добиваме $x = 25$ ученици.

59. Односот на бројот на вртењата за исто време на два запчаници е $3:5$. Големиот запчаник има 40 запчаници повеќе од малиот. Колку запци има малиот запчаник?

Решение. Ако малиот запчаник има x запци, тогаш големиот запчаник има $x + 40$ запци. Според условот на задачата кога малиот запчаник прави 5 завртувања, големиот запчаник прави 3 завртувања. При 5 завртувања кај малиот запчаник се вртат $5x$ запци, а во исто време кај големиот запчаник се вртат $3(x + 40)$ запци. Според тоа, $5x = 3(x + 40)$, од каде добиваме $x = 60$. Значи, малиот запчаник има 60 запци.

60. Музичка група има повеќе од $\frac{1}{2}$ и помалку од $\frac{3}{5}$ членови жени. Определи го најмалиот број членови кој може да го има групата.

Решение. Нека групата има n членови и нека m од нив се жени, што е $\frac{m}{n}$ од вкупниот број членови на групата ($m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$). Треба да го определиме најмалиот број n за кој важи $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{3}{5}$. Со непосредна проверка добиваме:

1) За $n = 3$ имаме $\frac{1}{2} < \frac{m}{3} < \frac{3}{5}$, т.е. $\frac{15}{30} < \frac{10m}{30} < \frac{18}{30}$. Бидејќи не постои m за кој последните неравенства се исполнети, заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение. На потполно ист начин се покажува дека задачата нема решение и за $n = 4$, $n = 5$ и $n = 6$.

2) За $n = 7$ добиваме $\frac{1}{2} < \frac{m}{7} < \frac{3}{5}$, т.е. $\frac{35}{70} < \frac{10m}{70} < \frac{42}{70}$, од каде добиваме $m = 4$. Според тоа, групата може да има најмалку 7 членови од кои 4 се жени.

61. Патрола извидници може да се формира од бели (B) и сини (P) извидници на еден од следниве начини: $5B + 5P$, $2B + 4P$, $1B + 3P$. Колку патроли може да се состават од 130 бели и 240 сини извидници, ако се знае дека мора да има најмалку по десет од секој вид патроли?

Упатство. Нека се составени x, y, z патроли од првиот, вториот и третиот вид. Од условот на задачата имаме

$$(5b + 5p)x + (2b + 4p)y + (b + 3p)z = 130b + 240p,$$

од каде следува

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 130 \\ 5x + 4y + 3z = 240 \end{cases}$$

и $x, y, z \geq 10$ итн.

62. Драган има два пати повеќе сестри отколку браќа, а неговата сестра Маја има пет пати повеќе браќа од сестри. Колку деца има во нивното семејство?

Решение. Нека во семејството има x браќа и y сестри. Тогаш

$$\begin{cases} x - 1 = 2y \\ x = 5(y - 1) \end{cases}$$

од каде наоѓаме $x = 5, y = 2$. Според тоа, во семејството има 5 момчиња и 2 девојчиња, односно $5 + 2 = 7$ деца.

63. Во една цвеќарница има само ружи и каранфили. Цвеќерката направила букет од ружи и каранфили, Таа потрошила $\frac{3}{8}$ од вкупниот број ружи и $\frac{3}{10}$ од вкупниот број каранфили. Букетот содржи еднаков број ружи и каранфили. Колкав дел од цвеќето е потрошен за правењето на букетот?

Решение. Нека во цвеќарницата има r ружи и k каранфили. Од условот на задачата следува $\frac{3}{8}r = \frac{3}{10}k$, односно $r = \frac{4}{5}k$. Значи, во цвеќарницата вкупно имало $k + r = k + \frac{4}{5}k = \frac{9}{5}k$ цветови, од кои се употребени $\frac{3}{8}r + \frac{3}{10}k = \frac{3}{10}k + \frac{3}{10}k = \frac{3}{5}k$ цветови. Според тоа, $\frac{3}{5}k : \frac{9}{5}k = \frac{1}{3}$ од цветовите се употребени за да се направи букетот.

64. При изработка на еден метален клин има отпад од 12,5% од употребениот материјал. На тој начин од едно парче метал се направени 100000 такви клинови. Добиениот отпад повторно е излиен во едно парче метал и од него на истиот начин се направени потполно исти такви клинови. Оваа постапка се повторува се додека од отпадот може да се направи барем еден клин. Колку клинови вкупно се добиени, сметајќи ги и првите 100000 клинови?

Решение. Отпадоците изнесуваат $\frac{12,5}{100} = \frac{1}{8}$ од употребениот материјал. Според тоа, од отпадоците добиени од изработката на 100000 клинови

можеме да изработиме нови $100000:8=12500$ клинови со $\frac{1}{8}$ отпад.

Од новиот отпад добиваме $12500:8=1562$ клинови, со остаток кој изнесува $\frac{4}{8}$ од еден клин. Сега имаме $\frac{1566}{8}$ остаток, па со натамошна

изработка добиваме 195 клинови со остаток $\frac{6}{8}$. Понатаму, имаме

$201=25\cdot 8+1$ и $26=3\cdot 8+2$, по што немаме доволно материјал за изработка на нов клин. Конечно, бројот на изработените клинови е:

$$100000+12500+1562+195+25+4=114285$$

клинови, со остаток од $\frac{5}{8}$ од материјалот кој не е доволен за изработка на нов клин.

III ТЕОРИЈА НА БОЕВИ

III.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги последните три цифри на бројот $2^{2011} - 2^{2009} + 2^{2006}$.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} 2^{2011} - 2^{2009} + 2^{2006} &= 2^{2006}(2^5 - 2^3 + 1) = 2^{2006} \cdot 25 = 2^{2004} \cdot 100 \\ &= (2^4)^{501} \cdot 100 = 16^{501} \cdot 100 = \dots 600 \end{aligned}$$

што значи дадениот број завршува на 600.

2. Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни цели броеви не е квадрат на цел број.

Решение. Ако n е цел број, тогаш $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ се пет последователни цели броеви. Збирот на нивните квадрати е

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2).$$

Сега, за да $5(n^2 + 2)$ биде квадрат на цел број треба $n^2 + 2$ да е делив со 5, т.е. неговата цифрата на единиците да биде 0 или 5. Тоа значи дека цифрата на единиците на n^2 треба да е 8 или 3, што не е можно бидејќи цифрата на единиците на квадрат на природен број може да биде 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Конечно, од добиената противречност следува дека за ниту еден цел број n бројот $5(n^2 + 2)$ не е квадрат на цел број, што и требаше да се докаже.

3. Со делење на некој број со бројот 72 се добива количник a и остаток 68. Определи ги количникот и остатокот ако тој ист број се подели со 24.

Решение. Дадениот број може да се запише во видот $72k + 68$, $k \in \mathbb{N}$. Затоа $(72k + 68) : 24$ дава количник $3k + 2$ и остаток 20.

4. Определи ја цифрата a за да бројот $\overline{401512a}$ при делење со 3 и со 5 дава еднакви остатоци.

Решение. Еднаквите остатоци при делење со 3 и со 5 може да бидат 0, 1 или 2. Од деливоста со 5 следува дека $a = 0$ или 5. За $a = 0$, дадениот број не е делив со 3, па затоа остаток нула се добива само за $a = 5$. Сега е јасно дека остатоците 1 и 2 се добиваат за $a = 6$ и 7, соодветно.

5. Докажи дека:

а) за секој природен број n бројот $7^{2n} - 1$ е делив со 24,

б) за секој природен број n бројот $25^n + 23$ е делив со 24.

Решение. а) Ако ја примениме формулата

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

добиваме

$$\begin{aligned} 7^{2n} - 1 &= (7^2)^n - 1^n = 49^n - 1^n \\ &= (49 - 1)(49^{n-1} + 49^{n-2} + \dots + 49 + 1) \\ &= 48 \cdot (49^{n-1} + 49^{n-2} + \dots + 49 + 1). \end{aligned}$$

Но, $24 \mid 48$, па од последното равенство следува $24 \mid 7^{2n} - 1$.

б) Имаме,

$$\begin{aligned} 25^n + 23 &= 25^n - 1 + 24 = (25 - 1)(25^{n-1} + 25^{n-2} + \dots + 25 + 1) + 24 \\ &= 24 \cdot (25^{n-1} + 25^{n-2} + \dots + 25 + 1 + 1), \end{aligned}$$

што значи дека $24 \mid 25^n + 23$.

6. Докажи дека за секој природен број n изразот $A = 5^{n+1} - 4n - 5$ е делив со 16.

Решение. Прв начин. Имаме:

$$\begin{aligned} A &= 5^{n+1} - 4n - 5 = 5(5^n - 1) - 4n \\ &= 5(5 - 1)(5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 5 + 1) - 4n \\ &= 4(5^n + 5^{n-1} + \dots + 5^2 + 5 - n) \\ &= 4[(5^n - 1) + (5^{n-1} - 1) + \dots + (5^2 - 1) + (5 - 1)] \\ &= 4(4k_n + 4k_{n-1} + \dots + 4k_2 + 4) \\ &= 16(k_n + k_{n-1} + \dots + k_2 + 1) \end{aligned}$$

па затоа $16 \mid 5^{n+1} - 4n - 5$, за секој природен број n .

Втор начин. За $n = 1$ добиваме $A_1 = 5^{1+1} - 4 \cdot 1 - 5 = 16$, па затоа тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека за $n = k$ важи $16 \mid A_k = 5^{k+1} - 4k - 5$, т.е.

$A_k = 16D$, за некој $D \in \mathbb{N}$. Тогаш за $n = k + 1$ добиваме

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 5^{k+1+1} - 4(k+1) - 5 = 5 \cdot (5^{k+1} - 4k - 5) + 16(k+1) \\ &= 5 \cdot 16D + 16(k+1) = 16(5D + k + 1), \end{aligned}$$

па затоа $16 \mid A_{k+1}$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $16 \mid 5^{n+1} - 4n - 5$, за секој природен број n .

7. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9.

Решение. Нека $a-1, a, a+1$ се три последователни броја. Тогаш

$$A = (a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = 3a(a^2 + 2).$$

Ако $a = 3k, k \in \mathbb{N}$, тогаш тврдењето е докажано.

Ако $a = 3k - 1$, тогаш $a^2 + 2 = 3(3k^2 - 2k + 1)$ и како $3 \mid a^2 + 2$ заклучуваме дека $9 \mid A$.

Ако $a = 3k + 1$, тогаш $a^2 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$ и како $3 \mid a^2 + 2$ заклучуваме дека $9 \mid A$.

8. Докажи дека за секој природен број n бројот:

а) $A = (7n + 3)^2 - (3 - n)^2$ е делив со 96,

б) $A = (5n - 0,5)^2 - (2n - 6,5)^2$ е делив со 42.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (7n + 3)^2 - (3 - n)^2 = (7n + 3 + 3 - n)(7n + 3 - 3 + n) \\ &= 6(n + 1) \cdot 8n = 48n(n + 1), \end{aligned}$$

и како производ на два последователни природни броја е делив со 2, заклучуваме дека $96 \mid A$.

б) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (5n - 0,5)^2 - (2n - 6,5)^2 = (5n - 0,5 + 2n - 6,5)(5n - 0,5 - 2n + 6,5) \\ &= 7(n - 1) \cdot 3(n + 2) = 21(n - 1)(n + 2) \end{aligned}$$

и како еден од броевите $n - 1$ или $n + 2$ е парен (Зошто?), заклучуваме дека $42 \mid A$.

9. а) Докажи дека ако x е непарен број поголем од 1, тогаш бројот $A = x^3 + 3x^2 - x - 3$ е делив со 48.

б) Разликата на квадратите на два последователни непарни броја е делива со 8.

Решение. а) Нека $x = 2k + 1$, за некој $k \in \mathbb{N}$ Имаме:

$$\begin{aligned} A &= x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x + 3) - (x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 3), \end{aligned}$$

па затоа $A = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$. Според тоа, бројот A е производ на бројот 8 и на три последователни природни броја. Но, производот на три последователни природни броја е делив со 6, па затоа $48 \mid A$.

б) Нека се дадени последователните непарни броеви $2k-1$ и $2k+1$. Имаме,

$$(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = (2k+1-2k+1)(2k+1+2k-1) = 8k,$$

од каде следува тврдењето на задачата.

10. Докажи дека за секој природен број n изразот $2n^2 + 10n + 12$ е делив со 4.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 2n^2 + 10n + 12 &= 2(n^2 + 5n + 6) = 2(n^2 + 2n + 3n + 6) \\ &= 2(n(n+2) + 3(n+2)) = 2(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Но, $n+2$ и $n+3$ се два последователни природни броја, па затоа нивниот производ е делив со 2, што значи дека $4 \mid 2n^2 + 10n + 12$ за секој природен број n .

11. Докажи дека за секој природен број n изразот $A = n(2n^2 + 1)$ е делив со 3.

Решение. *Прв начин.* Ако $n = 3k$, тогаш е јасно дека $3 \mid A$.

Ако $n = 3k+1$, тогаш $2n^2 + 1 = 3(9k^2 + 4k + 1)$, па затоа $3 \mid 2n^2 + 1$, т.е. $3 \mid A$.

Ако $n = 3k+2$, тогаш $2n^2 + 1 = 3(9k^2 + 8k + 3)$, па затоа $3 \mid 2n^2 + 1$, т.е. $3 \mid A$.

Втор начин. За $n=1$ добиваме $A_1 = 1 \cdot (2 \cdot 1^2 + 1) = 3$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $3 \mid A_k = k(2k^2 + 1)$, т.е. $A_k = 3D$, за некој $D \in \mathbb{N}$. Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k+1)(2(k+1)^2 + 1) = (k+1)(2k^2 + 4k + 3) \\ &= 2k^3 + 6k^2 + 7k + 3 = 2k^3 + k + 6k^2 + 6k + 3 \\ &= k(2k^2 + 1) + 3(2k^2 + 2k + 1) \\ &= 3D + 3(2k^2 + 2k + 1) = 3(D + 2k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

што значи дека $3 \mid A_{k+1}$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува $3 \mid A_n$ за секој природен број n .

12. Докажи дека за секој природен број x изразот $A = 9x^5 - 5x^3 - 4x$ е делив со 120.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A &= 9x^5 - 5x^3 - 4x = x(9x^4 - 5x^2 - 4) = x(8x^4 - 8 + x^4 - 5x^2 + 4) \\ &= x[8(x^2 - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1)(x^2 - 4)] \\ &= 8x(x^2 - 1)(x^2 + 1) + x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= 8(x - 1)x(x + 1)(x^2 + 1) + (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2). \end{aligned}$$

Бидејќи $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$ е производ на пет последователни природни броја заклучуваме дека тој е делив со 120. Затоа доволно е да докажеме дека 120 е делител на $B = 8(x - 1)x(x + 1)(x^2 + 1)$. Јасно, 24 е делител на $8(x - 1)x(x + 1)$, па затоа доволно е да докажеме дека $5 \mid B$. Ако $x = 5k$, $5k + 1$ или $5k + 4$, тогаш е јасно дека $5 \mid B$. Ако $x = 5k + 2$, тогаш важи $x^2 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$, а ако $x = 5k + 3$, тогаш важи $x^2 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2)$, па затоа и во овие два случаја важи $5 \mid B$.

13. Докажи дека за секој парен број a изразот $A = a^3 + 20a$ е делив со 48.

Решение. Нека $a = 2k$. Тогаш $A = 8k(k^2 + 5)$. Значи, за да $48 \mid A$ потребно и доволно е $6 \mid k(k^2 + 5)$.

Ако k е парен број, тогаш е јасно дека $2 \mid k(k^2 + 5)$, а ако k е непарен број, тогаш $k^2 + 5$ е парен, па затоа $2 \mid k(k^2 + 5)$. Ќе докажеме дека $3 \mid k(k^2 + 5)$ за секој природен број k . Јасно, ако $k = 3m$, тогаш $3 \mid k(k^2 + 5)$. Понатаму, ако $k = 3n \pm 1$, тогаш $k^2 + 5 = 3(3n^2 \pm 2n + 2)$, па затоа $3 \mid k(k^2 + 5)$. Според тоа, $2 \mid k(k^2 + 5)$ и $3 \mid k(k^2 + 5)$, па затоа $6 \mid k(k^2 + 5)$.

14. Докажи, ако $7x + 4y$ е делив со 19, тогаш изразот $A = 15x + 14y$ е делив со 19.

Решение. Имаме:

$$2A = 30x + 28y = 30x + 28y + 19x - 19x = 7(7x + 4y) - 19x.$$

Сега од $19|7x+4y$ и $19|19x$ следува $19|2A$. Но, $\text{NZD}(2,19)=1$, па од $19|2A$ следува $19|A$.

15. Докажи, ако $a+b$ е делив со 3, тогаш изразот $A=a^3+b^3$ е делив со 9.

Решение. Од $3|a+b$ следува $a+b=3k$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} A &= a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (3k)^3 - 3ab \cdot 3k \\ &= 27k^3 - 9kab = 9(3k^3 - kab), \end{aligned}$$

па затоа $9|A$.

16. Докажи дека збирот $a = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2011} - 2^{2012} + 2^{2-13}$ е делив со 3.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a &= 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2011} - 2^{2012} + 2^{2013} \\ &= (2 - 2^2 + 2^3) - (2^4 - 2^5 + 2^6) + (2^7 - 2^8 + 2^9) - \dots + (2^{2011} - 2^{2012} + 2^{2013}) \\ &= 2(1 - 2 + 2^2) - 2^4(1 - 2 + 2^2) + 2^7(1 - 2 + 2^2) - \dots + 2^{2011}(1 - 2 + 2^2) \\ &= (1 - 2 + 2^2)(2 - 2^4 + 2^7 - \dots + 2^{2011}) \\ &= 3(2 - 2^4 + 2^7 - \dots + 2^{2011}), \end{aligned}$$

што значи дека $3|a$.

17. Докажи дека збирот $2009 + 2009^2 + 2009^3 + \dots + 2009^{100}$ е делив со 2010.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 2009 + 2009^2 + 2009^3 + \dots + 2009^{100} &= \\ &= 2009(1 + 2009) + 2009^3(1 + 2009) + \dots + 2009^{99}(1 + 2009) \\ &= 2010(2009 + 2009^3 + \dots + 2009^{99}), \end{aligned}$$

па затоа $2010|(2009 + 2009^2 + 2009^3 + \dots + 2009^{100})$.

18. Докажи дека за секој природен број p вредноста на изразот

$$A = \frac{10^p - 1}{81} - \frac{p}{9} \text{ е природен број.}$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A &= \frac{10^p - 1}{81} - \frac{p}{9} = \frac{1}{9} \left(\frac{10^p - 1}{9} - p \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{(10-1)(10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10 + 1)}{10-1} - p \right) \\ &= \frac{1}{9} (10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10 + 1 - p) = \frac{10^{p-1} - 1}{9} + \frac{10^{p-2} - 1}{9} + \dots + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10 - 1}{9}. \end{aligned}$$

Според тоа, изразот A е збир на собирците $\frac{10^k-1}{9}$, $k = 1, 2, \dots, p-1$. Конечно, бидејќи

$$\frac{10^k-1}{9} = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1,$$

заклучуваме дека A е природен број.

19. Докажи дека:

а) $16^5 + 2^{15}$ е делив со 33,

б) $333^{2008} + 555^{2008}$ е делив со 37,

в) $3^{2003} + 4^{2004} + 5^{2005} + 6^{2006} + 8^{2008}$ е делив со 10.

Решение. а) Имаме,

$$16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

што значи дека $33 \mid 16^5 + 2^{15}$.

б) Имаме

$$\begin{aligned} 333^{2012} + 555^{2012} &= (3 \cdot 3 \cdot 37)^{2012} + (5 \cdot 3 \cdot 37)^{2012} \\ &= 3^{2012} \cdot 3^{2012} \cdot 37^{2012} + 5^{2012} \cdot 3^{2012} \cdot 37^{2012} \\ &= 37^{2012} \cdot 3^{2012} (3^{2012} + 5^{2012}), \end{aligned}$$

што значи дека $37 \mid 333^{2008} + 555^{2008}$.

в) Цифрата на единиците на бројот 3^{2003} е 7, цифрата на единиците на бројот 4^{2004} е 6, цифрата на единиците на бројот 5^{2005} е 5, цифрата на единиците на бројот 6^{2006} е 6 и цифрата на единиците на бројот 8^{2008} е 6. Според тоа, цифрата на единиците на бројот $3^{2003} + 4^{2004} + 5^{2005} + 6^{2006} + 8^{2008}$ е еднаква на цифрата на единиците на збирот $7 + 6 + 5 + 6 + 6 = 30$, што значи дека дадениот број е делив со 10.

20. Докажи дека $S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2007}$ е делив со 39.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} S &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2007} \\ &= (3 + 3^2 + 3^3) + 3^3(3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{2004}(3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 39(1 + 3^3 + 3^6 + \dots + 3^{2004}), \end{aligned}$$

т.е. $39 \mid S$.

21. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 11.

Решение. Еден број е делив со 11 ако и само ако разликата од збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места е делива со 11.

Прво ќе го определиме најголемиот број. Јасно, бараниот број е најголем ако првите четири цифри се најголемите можни, т.е. бројот е од видот $\overline{9876ху}$. Разликата на зборовите $9+7+x$ и $8+6+y$ треба да биде делива со 11, т.е. таа треба да биде еднаква на 0 или 11. Во првиот случај имаме $y = x + 2$, па како цифрите треба да се различни и најголеми можни добиваме $x=3$ и $y=5$, т.е. го добиваме бројот 987635. Случајот кога разликата на зборовите $9+7+x$ и $8+6+y$ е 11 не води до решение. (Провери!)

Сега ќе го определиме најмалиот број. Јасно, бараниот број е најмал ако првите четири цифри се најмалите можни, т.е. бројот е од видот $\overline{1023ху}$. Разликата на зборовите $1+2+x$ и $0+3+y$ мора да биде делива со 11, т.е. таа мора да е 0 или 11. Јасно разликата не може да е 11, бидејќи во тој случај добиваме $y = x + 11$ или $x = y + 11$, што не е можно. Ако разликата е 0, тогаш добиваме $x = y$, што противречи на условот на задачата. Следниот најмал број е од видот $\overline{1024ху}$. Тогаш $x = y + 1$, па како цифрите треба да се различни и најмали можни добиваме $y=5$ и $x=6$, т.е. го добиваме бројот 102465. Случајот кога разликата на $1+2+x$ и $0+4+y$ е 11 не води до решение. (Провери!)

22. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 99.

Решение. Еден број е делив со 99 ако и само ако е делив со 9 и е делив со 11.

Најголемиот број ќе го побараме од видот $\overline{9876ху}$ (Зошто?). Од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $9+8+7+6+x+y$ треба да е делив со 9, односно $x+y=6$ или $x+y=15$. Случајот $x+y=15$ отпаѓа, бидејќи бројот треба да е запишан со различни цифри. Како и во претходната задачата од деливоста со 11 заклучуваме дека $9+7+x-(8+6+y)=0$, т.е. $y=x+2$. Конечно, од равенствата $x+y=6$ и $y=x+2$ следува $x=2$, $y=4$ и бараниот број е 987624.

Нека најмалиот број е од видот $\overline{1023xy}$. Од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $1+0+2+3+x+y$ е делив со 9, т.е. $x+y=3$ или $x+y=12$. Случајот $x+y=3$ отпаѓа, бидејќи бројот треба да е запишан со различни цифри. Како и во претходната задача од деливоста со 11 следува $x=y$, што не е можно бидејќи цифрите треба да се различни.

Нека најмалиот број е од видот $\overline{1024xy}$. Од деливоста со 9 следува дека $x + y = 2$ или $x + y = 11$, при што случајот $x + y = 2$ не еможен (Зошто?). Понатаму, како и во претходната задачата од деливоста со 11 следува $x = y + 1$. Конечно, од равенствата $x + y = 11$ и $x = y + 1$ добиваме $y = 5$ и $x = 6$, т.е. бараниот број е 102465.

23. Определи го множеството остатоци кои може да се добијат при делење на квадрат на природен број со бројот:

a) 3,

б) 4.

Решение. а) Секој природен број n може да се запише во облик $n = 3k + r, r = 0, 1, 2$. Ако $n = 3k$, тогаш $n^2 = 9k^2$, па во овој случај остатокот при делење со 3 е 0. Ако $n = 3k + 1$, тогаш $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$, па во овој случај остатокот при делење со 3 е 1. Ако $n = 3k + 2$, тогаш $n^2 = 9k^2 + 12k + 4$, па во овој случај остатокот при делење со 3 е 1. Според тоа, бараното множество остатоци е $\{0, 1\}$.

б) Секој природен број n може да се запише во облик $n = 4k + r$, $r = 0, 1, 2, 3$. Ако $n = 4k$, тогаш $n^2 = 16k^2$, па во овој случај остатокот при делење со 4 е 0. Ако $n = 4k + 1$, тогаш $n^2 = 16k^2 + 8k + 1$, па во овој случај остатокот при делење со 4 е 1. Ако $n = 4k + 2$, тогаш $n^2 = 16k^2 + 16k + 4$, па во овој случај остатокот при делење со 4 е 0. Ако $n = 4k + 3$, тогаш $n^2 = 16k^2 + 24k + 9$, па во овој случај остатокот при делење со 4 е 1. Според тоа, бараното множество остатоци е $\{0, 1\}$.

24. Дали бројот $\underbrace{555\dots 5}_n, n \in \mathbb{N}$ може да биде точен квадрат на природен број.

Решение. Нека $\underbrace{555\dots5}_n = (2k+1)^2$, $k, n \in \mathbb{N}$. Последователно добиваме

$$\underbrace{555\dots5}_n = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\underbrace{555\dots54}_{n-1} = 4k(k+1),$$

што не е можно, бидејќи бидејќи бројот на левата страна во последното равенство не е делив со 4 (неговиот двоцифрен завршеток е 54 и овој број не е делив со 4).

25. Дали бројот $\underbrace{333\dots3}_n, n \in \mathbb{N}$ може да биде точен квадрат на природен број?

Решение. Цифрата на единиците на квадрат на природен број може да биде 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Тоа значи дека бројот $\underbrace{333\dots3}_n, n \in \mathbb{N}$ не може да биде квадрат на природен број.

26. Дали бројот $\underbrace{222\dots22}_{2022}$ може да биде точен квадрат на природен број?

Решение. Ако $\underbrace{222\dots22}_{2022}$ е квадрат на природен број, тогаш треба да

важи $\underbrace{222\dots22}_{2022} = (2x)^2 = 4x^2$. Десната страна во последното равенство е

делива со 4, а левата не е делива со 4, бидејќи нејзиниот двоцифрен завршеток 22 не е делив со 4. Според тоа, $\underbrace{222\dots22}_{2022}$ не може да биде

квадрат на природен број.

27. Збирот на шест последователни природни броеви од кои ниту еден не е делив со 7, е делив со 21, но не е делив со 42. Докажи!

Опреди шест такви броеви така што нивниот збир е четирицифрен број и е квадрат на некој природен број.

Решение. Бараните броеви се $7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6$. Нивниот збир е $S = 42n + 21 = 21(2n+1)$. Јасно, $21 \mid S$ и $42 \nmid S$.

За да збирот биде квадрат на природен број мора да е $2n+1 = 21k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Понатаму, за да збирот биде четирицифрен број мора да е k^2 поголем од 2, а помал од 23. Но, k^2 е непарен број, па затоа $k^2 = 9$. Според тоа, $2n+1 = 189$, т.е. $n = 94$. Бараните броеви се: 659, 660, 661, 662, 663 и 664.

28. Земен е број кој е запишан со 2000 цифри и кој е делив со 9. Збирот на неговите цифри да го означиме со a , збирот на цифрите на бројот a со b и збирот на цифрите на бројот b со c . Определи го бројот c .

Решение. Збирот на цифрите на дадениот број е делив со 9 и не е поголем од $2000 \cdot 9 = 1800$, т.е. $a < 18000$. Збирот на цифрите на бројот a е делив со 9 и не е поголем од 39, т.е. $b \leq 36$ (за $a = 9999, b = 36$). Според тоа, збирот на цифрите на бројот b е 9, т.е. $c = 9$.

29. Докажи дека производот на два последователни природни броја е делив со бројот 12 ако поголемиот од тие броеви е точен квадрат на природен број.

Решение. Нека поголемиот број е k^2 . Тогаш разгледуваниот производ е $k^2(k^2 - 1) = (k - 1)k(k + 1)k$. Производот на три последователни природни броја $(k - 1)k(k + 1)$ е делив со 3. Ако k е парен број, тогаш k^2 е делив со 4, а ако k е непарен број, тогаш $k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$ е делив со 4. Тоа значи дека производот $k^2(k^2 - 1)$ е делив со $3 \cdot 4 = 12$.

30. Докажи дека за секој прост број поголем од 3, производот на неговите соседни броеви е делив со 24.

Решение. Секој прост број поголем од 3 е непарен број, па затоа неговите соседни броеви се два последователни парни броеви од кои едниот е делив со 2, а другиот е делив со 4. Значи, нивниот производ е делив со 8. Понатаму, овие два парни броја и нашиот прост број се три последователни броеви од кои еден е делив со 3. Јасно, тоа е некој од соседните броеви, па како $\text{NZD}(3, 8) = 1$ нивниот производ е делив со $3 \cdot 8 = 24$.

31. Природен број n е зголемен за својата четирикратна реципрочна вредност и добиениот збир е квадратиран. Потоа добиениот резултат е намален за квадратот на четирикратната реципрочна вредност на дадениот број n , со што е добиен природен број кој не е делив со 5. Докажи!

Решение. Според условот на задачата добиен е бројот

$$\left(n + \frac{4}{n}\right)^2 - \left(\frac{4}{n}\right)^2 = n^2 + 8 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 - \left(\frac{4}{n}\right)^2 = n^2 + 8.$$

Цифрата на единиците на квадрат на природен број е еднаква на 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа цифрата на единиците на бројот $n^2 + 8$ е еднаква

на 8, 9, 2, 3, 4 или 7, соодветно. Тоа значи дека бројот $n^2 + 8$ не е делив со 5.

32. Должините на страните на правоаголен триаголник се природни броеви. Дали може должините на двете катети да се непарни броеви?

Решение. Нека должините на катетите се $a = 2n + 1$ и $b = 2m + 1$. Од Питагоровата теорема следува

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2.$$

Според тоа, c^2 е делив со 2, но не е делив со 4. Но 2 е прост број, па ако $2 | c^2$, тогаш $2 | c$, што значи $4 | c^2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека должините на двете катети не може да се непарни природни броеви.

33. Природниот број a не е делив со 5. Определи го остатокот кој се добива при делењеот на бројот a^4 со бројот 5.

Решение. Број a кој не е делив со 5 е од видот $5n \pm 1$ или $5n \pm 2$. Имаме $a^2 = 5(5n^2 \pm 2n) + 1 = 5m + 1$ или $a^2 = 5(5n^2 \pm 4n) + 4 = 5k + 4$. Значи, $a^4 = 5(5m^2 + 2m) + 1$ или $a^4 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$. Во двата случаја при делење на a^4 со 5 се добива остаток 1.

34. Ако a, b, c се природни броеви докажи дека збирот $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

Решение. Секој природен број може да се запише во еден од видовите $4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$, па затоа секој квадрат на природен број може да се запише во еден од видовите

$$\begin{aligned}(4k)^2 &= 8 \cdot 2k^2, & (4k + 1)^2 &= 8(2k^2 + k) + 1, \\ (4k + 2)^2 &= 8(2k^2 + 2k) + 4, & (4k + 3)^2 &= 8(2k^2 + 3k + 1) + 1.\end{aligned}$$

Според тоа, квадрат на природен број при делење со 8 дава остаток 0, 1 или 4. Со собирање на било кои три остатоци од наведените видови не може да се добие бројот 7, што и требаше да се докаже.

35. Нека a, b и c се цели броеви. Ако триномот $p(x) = ax^2 + bx + c$ е делив со 5 за секој цел број x , тогаш секој од броевите a, b, c е делив со 5. Докажи!

Решение. Имаме

$$5 \mid p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \text{ и } 5 \mid p(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c,$$

па затоа $5 \mid a + b$. Понатаму, $5 \mid p(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$ и како $5 \mid c$ добиваме $5 \mid 4a + 2b = 2(a + b) + 2a$. Но, $5 \mid a + b$, па затоа $5 \mid 2a$. Сега, бидејќи $\text{NZD}(2, 5) = 1$ заклучуваме дека $5 \mid a$. Конечно, од $5 \mid a$ и $5 \mid a + b$ следува $5 \mid b$.

36. Ако $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $9 \mid (a^3 + b^3 + c^3)$, тогаш барем еден од броевите a, b и c е делив со 3. Докажи!

Решение. Нека $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $9 \mid (a^3 + b^3 + c^3)$. Лесно се проверува дека за $m = 3k + 1$ важи $m^3 = 9q + 1$, а за $m = 3k + 2$ важи $m^3 = 9q - 1$. Според тоа, ако ниту еден од броевите a, b и c не е делив со 3, тогаш при делење на бројот $a^3 + b^3 + c^3$ со 9 се добива остаток од облик $\pm 1 \pm 1 \pm 1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека барем еден од броевите a, b и c е делив со 3.

37. Нека d и d' , $d' > d$ се природни делители на природниот број n . Докажи, дека $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

Решение. Бидејќи броевите $f = \frac{n}{d}$ и $f' = \frac{n}{d'}$, се природни, а $f > f'$, важи $f - f' \geq 1$, т.е.

$$1 \leq \frac{n}{d} - \frac{n}{d'} = \frac{(d' - d)n}{dd'} < \frac{(d' - d)n}{d^2}.$$

Од последното неравенство следува неравенството $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

III.2. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

38. Докажи дека остатокот од делењето на прост број $p > 30$ со бројот 30 е прост број или 1.

Решение. Нека p е прост број и $p = 30k + r$. Јасно, r не може да биде делив со 2, со 3 и со 5, бидејќи во тој случај p нема да биде прост број. Бидејќи $r < 30$ заклучуваме дека r е еден од броевите 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, што и требаше да се докаже.

39. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 така што ќе се добие квадрат на природен број.

Решение. Од $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ следува дека најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 за да се добие точен квадрат на природен број е бројот $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Притоа ќе добиеме

$$8316 \cdot 231 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2.$$

40. Еден четирицифрен број ги има следниве својства:

- 1) првата и четвртата цифра се еднакви меѓу себе,
- 2) втората и трета цифра се еднакви меѓу себе,
- 3) бројот е еднаков на производот на три последователни прости броја.

Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е $x = \overline{abba}$. Имаме

$$1000a + 100b + 10b + a = 11(91a + 10b).$$

Според тоа, бројот x е делив со 11, па затоа $x = 5 \cdot 7 \cdot 11$, $x = 7 \cdot 11 \cdot 13$ или $x = 11 \cdot 13 \cdot 17$, т.е. $x = 385$, $x = 1001$ или $x = 2431$. Гледаме дека само бројот 1001 ги задоволува условите на задачата.

41. Ако $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$ е рационален број, тогаш n е точен квадрат. Докажи!

Решение. а) Ако е $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$ е рационален број, тогаш $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, каде p

и q се заемно прости броеви. Но, тогаш $n = \frac{p^2}{q^2}$, каде p^2 и q^2 се заемно прости броеви. Сега, бидејќи n е природен број добиваме $q^2 = 1$, што значи дека $n = p^2$.

42. Докажи дека не постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 7.

Решение. Ако $x^2 = 7$ и x е рационален број, тогаш $x = \frac{p}{q}$, каде p и

q се заемно прости броеви, па затоа $\frac{p^2}{q^2} = 7$, односно $p^2 = 7q^2$. Сега

$7 \mid p^2$ и како 7 е прост број добиваме $7 \mid p$, т.е. $p = 7m$. Значи, $(7m)^2 = 7q^2$, односно $7m^2 = q^2$, па затоа $7 \mid q^2$, т.е. $7 \mid q$. Според тоа, $q = 7n$, што значи дека 7 е заеднички делител на p и q , што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 7.

43. Определи го најмалиот природен број a за кој $\sqrt{2012a}$ е природен број.

Решение. Имаме $\sqrt{2012a} = \sqrt{4 \cdot 503a} = \sqrt{2^2 \cdot 503a}$, што значи дека најмалиот природен број a за кој $\sqrt{2012a}$ е природен број е $a = 503$.

44. Определи го природниот број x за кој бројот $\sqrt{\frac{x}{2012}}$ е вистински рационален број.

Решение. Имаме, $\sqrt{\frac{x}{2012}} = \sqrt{\frac{x}{4 \cdot 503}} = \sqrt{\frac{x}{2^2 \cdot 503}}$, па добиваме дека баранот број е $x = 503$. Навистина, $\sqrt{\frac{x}{2012}} = \sqrt{\frac{503}{2012}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

45. Определи прост трицифрен број чиј производ на цифри е еднаков на 252.

Решение. Имаме $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, па затоа цифрите на бараниот прост трицифрен број може да бидат 4, 9, 7 или 6, 6, 7. Бараниот прост број е непарен, па тоа е еден од броевите 497, 947, 749, 479 или 667. Со непосредна проверка се покажува дека броевите 497 и 749 се деливи со 7, а бројот 667 е делив со 23. Значи, единствени прости броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се 947 и 479.

46. Докажи дека за секој природен број n бројот $n^4 + 12n^2 + 35$ е сложен број.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} n^4 + 12n^2 + 35 &= (n^2)^2 + 2 \cdot 6n^2 + 6^2 - 6^2 + 35 = (n^2 + 6)^2 - 1 \\ &= (n^2 + 5)(n^2 + 7) \end{aligned}$$

и како за секој природен број n важи $n^2 + 5 > 1$ и $n^2 + 7 > 1$, заклучуваме дека за секој природен број n бројот $n^4 + 12n^2 + 35$ е сложен број.

47. На училишната табла е запишан трицифрениот број $\overline{**8}$. Три ученици ги погодуваат својствата на овој број.

Зоран: Сите цифри на бројот се парни и има парен број различни прости делители.

Душан: Бројот е делив со 9 и е точен квадрат на некој природен број.

Никола: Бројот е помал од 400 и е 13 пати поголем од квадратот на еден природен број.

Се покажало дека секој од тројцата ученици погодиле само по едно својство на непознатиот број. Кои цифри треба да се запишат наместо свездичките?

Решение. Бројот на табелата има цифра на единици 8, па затоа не може да биде квадрат на природен број. Значи, точно е тврдењето на Душан дека тој број е делив со 9. Според тоа, тој е еден од следниве броеви: 108, 198, 288, 378, 468, 558, 648, 738, 828, 918. Од изјавата на Никола заклучуваме дека тоа мора да биде број помал од 400 или бројот $468 = 13 \cdot 36$. Да ги разложиме преостанатите броеви на множители:

$$\begin{aligned} 108 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, & 198 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11, & 288 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \\ 378 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, & 468 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13. \end{aligned}$$

Гледаме дека само едно од својствата кои ги навел Зоран имаат два од преостанатите броеви: 108 (има парен број различни прости делители) и 468 (сите цифри мус е парни). Според тоа, на таблата е запишан еден од броевите 108 или 468.

48. Определи ги сите трицифрени прости броеви такви што нивните цифри се исто така прости броеви?

Решение. Трицифрен прост број треба да е запишан со цифри кои се прости броеви, па затоа во неговиот запис може да учествуваат само цифрите 2, 3, 5 и 7. Јасно, сите три цифри не може да се еднакви бидејќи тогаш бројот е делив со 3, т.е. не е прост број. Аналогно ги исклучуваме и броевите чиј збир на цифри е еднаков на 12, односно 15. Понатаму, за да трицифрениот број биде прост тој не смее да завршува на ниту една од цифрите 2 и 5, што значи дека тој треба да завршува на една од цифрите 3 или 7, т.е. бараните броеви се од видовите $\overline{xy3}$ или $\overline{xy7}$.

Ако бројот е од видот $\overline{xy3}$, тогаш можни броеви се:

$$223, 233, 253, 323, 353, 373, 523, 533, 553, 733, 773.$$

Ако бројот е од видот $\overline{xy7}$, тогаш можни броеви се:

$$227, 257, 277, 337, 377, 527, 557, 577, 727, 737, 757.$$

Провери кои од дадените добиените трицифрени броеви се прости.

49. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Решение. Броевите 3, 7 и 11 се прости и се од видот $4k + 3$. Нека претпоставиме дека постојата конечно многу прости броеви од видот

$4k+3$ и нека $p_1, p_2, \dots, p_m$ се сите такви броеви. Бројот $n = 4p_1p_2 \dots p_m - 1$ не се дели со ниту еден од броевите $p_1, p_2, \dots, p_m$. Според тоа, ако го разложиме n на прости множители, сите тие треба да бидат од видот $4k+1$. Но, производ на броеви кои даваат остаток 1 при делење со 4 повторно е број кој дава остаток 1 при делење со 4, а додека при делење на n со 4 се добива остаток 3. Од добиената противречност следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k+3$.

50. Определи ги сите природни броеви x и y за кои бројот $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на прост број.

Решение. Нека p е прост број таков што

$$xy^3 = p^3(x+y). \quad (1)$$

Ако $p \nmid y$, тогаш $p^3 \mid x$. Значи, $x = p^3h$ и следствено

$$p^3hy^3 = p^3(p^3h+y),$$

од каде наоѓаме $y(hy^2-1) = p^3h$. Бидејќи $p \nmid y$, добиваме дека $p^3 \mid hy^2-1$ и $y \mid h$. Нека $h = yk$. Тогаш $y(ky^3-1) = p^3yk$, па затоа $k(y^3-p^3) = 1$. Според тоа, $y^3 - k^3 = \pm 1$, што не е можно.

Нека $p \mid y$, т.е. $y = ps$. Од (1) следува $xp^3s^3 = p^3(x+ps)$, од каде наоѓаме $x(s^3-1) = ps$. Бидејќи $s \nmid s^3-1$, добиваме $s \mid x$. Тогаш $s^3-1 \mid p$, што значи дека $s^3-1 = p$. Последното е можно само за $s-1=1$ и $s^2+s+1=p$. Значи, $x = s = 2$, $p = 7$, т.е. $x = 2$ и $y = 14$.

III.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

51. Стрелец стрела во мета и за секој успешен погодок добива 5 бода, а за секое промашување му се одземаат 3 бода. Тој стрелал повеќе од 10, а помалку од 20 пати и притоа освоил нула бодови. Колку пати стрелал стрелецот и колку пати ја погодил метата?

Решение. Ако стрелецот имал m погодоци и n промашувања, тогаш $5m - 3n = 0$ и $10 < m + n < 20$. Единствен пар природни броеви кој ги

задоволува овие услови е $m=6, n=10$. Значи стрелецот стрелал 16 пати и тоа 6 пати во метата.

52. Дадена е дропката $A = \frac{2x-1}{x-4}$, каде x е цел број различен од 4.

а) За кои вредности на x дропката A е цел број?

б) За кои вредности на природниот број x ($x > 4$) дропката A има најмала вредност?

Решение. а) Дадената дропка можеме да ја претставиме на следниот начин $A = 2 - \frac{6}{x-4}$. Последниот израз е цел број ако $x-4 \mid 6$, а тоа е можно ако $x \in \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$.

б) Дадената дропка има најмала вредност кога $\frac{6}{x-4}$ има најголема вредност, а тоа важи за $x-4=1$, т.е. за $x=4$.

53. Определи го природниот број n таков што бројот $\frac{45}{n-45}$ е точен квадрат на природен број.

Решение. *Прв начин.* Имаме $\frac{45}{n-45} = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, од каде добиваме $n = 45 + \frac{45}{k^2}$. Бидејќи $n \in \mathbb{N}$ добиваме $\frac{45}{k^2} \in \mathbb{N}$, од каде следува $k^2 = 9, k \in \mathbb{N}$ или $k^2 = 1, k \in \mathbb{N}$. Во првиот случај добиваме $k=3$, т.е. $n = 45 + \frac{45}{9} = 50$, а во вториот случај добиваме $k=1$, т.е. $n=90$.

Втор начин. Точни квадрати на природни броеви кои се помали од 45 се 1, 4, 9, 16, 25 и 36. Според тоа,

- од $\frac{45}{n-45} = 1$ следува $n=90$ и тоа е едно решение на задачата,
- од $\frac{45}{n-45} = 4$ следува $n = \frac{5 \cdot 45}{4} \notin \mathbb{N}$,
- од $\frac{45}{n-45} = 9$ следува $n=50$ и тоа е второ решение на задачата,
- од $\frac{45}{n-45} = 16$ следува $n = \frac{17 \cdot 45}{16} \notin \mathbb{N}$,
- од $\frac{45}{n-45} = 25$ следува $n = \frac{26 \cdot 45}{25} \notin \mathbb{N}$,
- од $\frac{45}{n-45} = 36$ следува $n = \frac{37 \cdot 45}{36} \notin \mathbb{N}$.

Конечно, единствени решенија на задачата се $n=90$ и $n=50$.

54. Определи ги сите цели броеви a за кои вредноста на изразот

$$A = \frac{2a^2 - 9a + 8}{a-5}$$

исто така е цел број.

Решение. Имаме:

$$A = \frac{2a^2 - 9a + 8}{a-5} = \frac{2a^2 - 10a + a - 5 + 13}{a-5} = \frac{2a(a-5) + (a-5) + 13}{a-5} = 2a + 1 + \frac{13}{a-5}.$$

Според условот a е цел број, па затоа $2a + 1$ е цел број. За да биде A цел број потребно и доволно е дробката $\frac{13}{a-5}$ да е цел број. Бидејќи 13 е прост број, дробката $\frac{13}{a-5}$ е цел број ако и само ако $a - 5 = \pm 1$ или $a - 5 = \pm 13$. Конечно, $a \in \{-8, 4, 6, 18\}$.

55. Определи ги сите цели броеви n за кои вредноста на изразот $A = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$, $n \neq -2$ исто така е цел број.

Решение. Дадениот израз е еквивалентен на изразот $A = n - 2 + \frac{5}{n + 2}$.

Според тоа, за да изразот A биде цел број потребно и доволно е $n + 2 \mid 5$, односно $n + 2 \in \{-5, -1, 1, 5\}$. Значи, вредноста на изразот A е цел број ако и само ако $n \in \{-7, -3, -1, 3\}$.

56. Определи го природниот број n кој е помал од 100 и е таков што $\sqrt{\frac{n+30}{n-30}}$ исто така е природен број.

Решение. Имаме, $\sqrt{\frac{n+30}{n-30}} = \sqrt{1 + \frac{60}{n-30}}$ и за да вредноста на коренот е природен број потребно е поткореновата величина да е точен квадрат. Според тоа, бројот $\frac{60}{n-30}$ кој е помал од 60 треба да е за 1 помал од точен квадрат. Последното значи дека $\frac{60}{n-30}$ може да биде само еден од броевите 3, 8, 15, 24, 35 или 48 и истовремено да е делител на 60, па затоа тој може да биде само еден од броевите 3 или 15.

- ако $\frac{60}{n-30} = 3$, тогаш $n - 30 = 20$, т.е. $n = 50$,
- ако $\frac{60}{n-30} = 15$, тогаш $n - 30 = 4$, т.е. $n = 34$.

57. Определи го оној двоцифрен број кој е еднаков на збирот на кубот на цифрата на десетките и квадратот на цифрата на единиците со кои е запишан.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{ab}$, $a \neq 0$. Тогаш $10a + b = a^3 + b^2$, од каде добиваме $a(10 - a^2) = b(b - 1)$. Очигледно $a \in \{1, 2, 3\}$. За $a = 1$ добиваме $9 = b(b - 1)$ што не е можно. За $a = 2$ добиваме $b(b - 1) = 12$,

па затоа $b = 4$. За $a = 3$ добиваме $b(b-1) = 3$, што не е можно. Конечно, бараниот број е 24.

58. Производот на четири парни последователни природни броја е 13440. Определи ги овие броеви?

Решение. Нека се дадени последователните парни броеви $2n, 2n+2, 2n+4, 2n+6$. Имаме

$$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6) = 13440$$

$$16n(n+1)(n+2)(n+3) = 13440$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 840$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

од каде заклучуваме дека $n = 4$ и бараните броеви се 8, 10, 12 и 14.

59. Ако на квадратот на произволен број му се додаден бројот 101010, тогаш добиениот збир не може да биде квадрат на природен број. Докажи!

Решение. Ако е можно равенството $n^2 + 101010 = k^2$, каде n и k се природни броеви, тогаш

$$(k-n)(k+n) = 2 \cdot 50505.$$

Според тоа, $2 \mid (n-k)(n+k)$ и како 2 е прост број заклучуваме дека $2 \mid n-k$ или $2 \mid n+k$. Но, броевите $n-k$ и $n+k$ се со иста парност, па затоа $2 \mid n-k$ и $2 \mid n+k$, т.е. $4 \mid (n-k)(n+k)$ што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека равенството

$$n^2 + 101010 = k^2$$

не е можно, што и требаше да се докаже.

60. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$p^2 + (p+1)^2 = q^4 + (q+1)^4.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$2p(p+1)+1 = q^4 + (q+1)(q+1)^3$$

$$2p(p+1)+1 = 2(q^4 + 2q^3 + 3q^2 + 2q) + 1$$

$$p(p+1) = q^4 + q^3 + q^3 + q^2 + 2q^2 + 2q$$

$$p(p+1) = q^3(q+1) + q^2(q+1) + 2q(q+1)$$

$$p(p+1) = q(q+1)(q^2 + q + 2)$$

$$p(p+1) = q(q+1)[q(q+1) + 2].$$

Левата страна во последната равенка е производ на два последователни природни броја, а десната страна е производ од видот $m(m+2)$, каде $m = q(q+1)$, што значи дека не е производ на два последователни природни броја, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решение во множеството природни броеви.

61. Определи природни броеви x и y такви што $x > y$ и

$$x^3 + 7y = y^3 + 7x.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^3 - y^3 - 7(x - y) = 0$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0.$$

Според условот $x > y$, па затоа $x - y \neq 0$, што значи дека треба да важи $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$, односно $x^2 + xy + y^2 = 7$. Во последното равенство секој од собирците е природен број и нивниот збир е еднаков на 7, па затоа сите собирци се помали од 7. Тогаш од $x > y$ следува дека единствена можност е $x = 2$ и $y = 1$. Навистина, овие вредности ја задоволуваат дадената равенка, т.е. $2^3 + 7 \cdot 1 = 1^3 + 7 \cdot 2$.

62. Определи ги сите тројки (x, y, z) каде x, y, z се природни броеви за кои е точно равенството $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 1985$ така што x е најмалиот од овие броеви.

Решение. Последователно добиваме

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 1985$$

$$xy(z + 1) + x(z + 1) + y(z + 1) + (z + 1) = 1986$$

$$(z + 1)(xy + x + y + 1) = 1986$$

$$(z + 1)(x(y + 1) + (y + 1)) = 1986$$

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331.$$

Но, $x + 1, y + 1, z + 1 \geq 2$ и како се бара x да е најмалиот број, заклучуваме $x + 1 = 2$, т.е. $x = 1$. Сега добиваме

$$(y + 1)(z + 1) = 3 \cdot 331,$$

од каде наоѓаме $y = 2, z = 330$ или $y = 330, z = 2$.

63. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 - y^2 = 2012.$$

Решение. Од $x^2 - y^2 = 2012$ следува

$$(x - y)(x + y) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 502.$$

Бидејќи $x + y > x - y$ од последната равенка добиваме:

- 1) $x - y = 1, x + y = 2012$, од каде добиваме $2x = 2013$, што значи дека во овој случај немаме решение на дадената равенка.
- 2) $x - y = 2, x + y = 1006$, од каде добиваме $x = 504, y = 502$.
- 3) $x - y = 4, x + y = 503$, од каде добиваме $2x = 507$, што значи дека во овој случај немаме решение на дадената равенка.

64. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$xy + x + y = 2012.$$

Решение. Од $xy + x + y = 2012$ следува

$$xy + x + y + 1 = 2013$$

$$x(y + 1) + (y + 1) = 2013$$

$$(x + 1)(y + 1) = 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61.$$

Сега од последната равенка, заради симетрија во однос на x и y добиваме

- 1) $x + 1 = 1, y + 1 = 2013$, т.е. $x = 0, y = 2012$,
- 2) $x + 1 = 3, y + 1 = 671$, т.е. $x = 2, y = 670$,
- 3) $x + 1 = 11, y + 1 = 183$, т.е. $x = 10, y = 182$,
- 4) $x + 1 = 33, y + 1 = 61$, т.е. $x = 32, y = 60$.

Конечно, решенија на дадената равенка се:

$$(x, y) \in \{(0, 2012), (2012, 0), (2, 670), (670, 2), (10, 182), (182, 10), (32, 60), (60, 32)\}$$

65. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x + y - 1)^2 - (x - y + 1)^2 = 16.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенките:

$$(x + y - 1 + x - y + 1)(x + y - 1 - x + y - 1) = 16$$

$$2x(2y - 2) = 16$$

$$x(y - 1) = 4.$$

Решенијата ги бараме во множеството цели броеви, па затоа можни се следниве случаи:

- 1) $x = 1, y - 1 = 4$, т.е. $x = 1, y = 5$.
- 2) $x = -1, y - 1 = -4$, т.е. $x = -1, y = -3$.

- 3) $x = 2, y - 1 = 2$, т.е. $x = 2, y = 3$.
 4) $x = -2, y - 1 = -2$, т.е. $x = -1, y = -1$.
 5) $x = 4, y - 1 = 1$, т.е. $x = 4, y = 2$.
 6) $x = -4, y - 1 = -1$, т.е. $x = -4, y = 0$.

66. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 - 6x + 4y^2 - 4y + 5 = 0.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x - 3)^2 + (2y - 1)^2 = 5.$$

Бидејќи бројот 5 како збир на два квадрати може да се запишен на единствен начин, т.е. $5 = 1^2 + 2^2$, од последната равенка следува

$$|x - 3| = 1, |2y - 1| = 2 \text{ или } |x - 3| = 2, |2y - 1| = 1.$$

Случајот $|x - 3| = 1, |2y - 1| = 2$ не води до решение (Зошто?), а од $|x - 3| = 2, |2y - 1| = 1$ добиваме $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 0), (5, 0), (5, 1)\}$.

67. Во множеството прости броеви реши ја равенката: $x^2 - y^2 = 45$.

Решение. Броевите x и y се со различна парност и како $x > y$, бидејќи 2 е единствениот парен број заклучуваме дека $y = 2$. Сега, со замена во дадената равенка добиваме $x^2 = 49$, од каде наоѓаме $x = 7$.

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $\frac{5}{m} + \frac{401}{n} = 1$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$5n + 401m = mn$$

$$mn - 5n - 401m = 0$$

$$n(m - 5) - 401m + 401 \cdot 5 = 401 \cdot 5$$

$$(m - 5)(n - 401) = 401 \cdot 5.$$

Дадената равенка треба да ја решиме во множеството природни броеви, па затоа бидејќи 5 и 401 се прости броеви од последната равенка ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} m - 5 = 5 \\ n - 401 = 401 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} m - 5 = 401 \\ n - 401 = 5 \end{cases}$$

чиј решенија се $m = 10, n = 802$ и $m = n = 406$.

69. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$3x^2 + 2xy + 3 = y^2 + 10.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$3x^2 + 2xy - y^2 = 7$$

$$3x^2 - xy + 3xy - y^2 = 7$$

$$x(3x - y) + y(3x - y) = 7$$

$$(3x - y)(x + y) = 7.$$

Понатаму, бидејќи $7 = 1 \cdot 7 = (-1) \cdot (-7)$ од последната равенка следуваат системите равенки:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + y = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = -7 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

чиј решенија се

$$x = 2, y = 5; \quad x = 2, y = -1; \quad x = -2, y = -5; \quad x = -2, y = -1$$

и тоа се решенија на почетната равенка.

70. Колку последователни природни броеви треба да се соберат за да се добие збир 2010?

Упатство. Нека се собрани $n + 1$ последователни природни броеви и нека x е најмалиот од нив. Имаме:

$$x + x + 1 + \dots + x + n = 2010$$

$$(n + 1)x + \frac{n(n + 1)}{2} = 2010$$

$$(n + 1)\left(x + \frac{n}{2}\right) = 2010$$

$$(n + 1)(2x + n) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$$

итн.

71. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$5x^2 + 7y^2 = 945.$$

Решение. Имаме, $5x^2 + 7y^2 = 945 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, што значи дека десната страна е делива со 5 и со 7. Тоа значи дека x^2 е делив со 7, а y^2 е делив со 5. Последното значи дека x е делив со 7, а y е делив со 5, т.е. $x = 7k$ и $y = 5l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Значи, дадената равенка го добива обликот

$$5(7k)^2 + 7(5l)^2 = 945,$$

Од каде добиваме $7k^2 + 5l^2 = 27$. Од последното равенство следува

$$k^2 \leq \frac{27}{7} < 4 \text{ и } l^2 \leq \frac{27}{5} < 6.$$

Според тоа, $k^2 \leq 1$ и $l^2 \leq 4$, односно $|k| \leq 1$ и $|l| \leq 2$.

Ако $k = \pm 1$, тогаш $7 + 5l^2 = 27$, од каде добиваме $l = \pm 2$, што значи дека во овој случај ги добиваме решенијата:

$$(x, y) \in \{(7, 10), (7, -10), (-7, 10), (-7, -10)\}.$$

Ако $k = 0$, тогаш $5l^2 = 27$, па во овој случај немаме решенија на $7k^2 + 5l^2 = 27$, што значи дека немаме решенија на почетната равенка.

72. Определи го бројот на целите броеви x за кои изразот $\frac{x^2+2011}{x+2011}$ е цел број.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2011}{x+2011} &= \frac{x^2-2011^2+2011^2+2011}{x+2011} \\ &= x - 2011 + \frac{2011 \cdot 2012}{x+2011} \\ &= x - 2011 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 59 \cdot 2011}{x+2011}. \end{aligned}$$

Според тоа, бројот $x+2011$ треба да е делител на бројот $2^2 \cdot 17 \cdot 59 \cdot 2011$. Затоа бројот на цели броеви x за кои изразот $\frac{x^2+2011}{x+2011}$ е цел број е еднаков на удвоениот број природни делители на бројот $2^2 \cdot 17 \cdot 59 \cdot 2011$, што значи дека е еднаков на

$$2 \cdot (2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48.$$

73. Работниците Алекса, Борис и Симон заедно завршуваат некоја работа за 1 час. Познато е дека секој од нив самостојно може да ја заврши оваа работа за цел број часови. Освен тоа се знае дека Борис работи побрзо од Алекса, а поспоро од Симон. За колку часа секој од тројцата работници самостојно ќе ја заврши истата работа?

Решение. Нека Алекса сам ја завршува целата работа за a часови, Борис за b часови и Симон за c часови. Тогаш од условот на задачата следува дека

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Бидејќи a, b, c се природни броеви и $c < b < a$ од последната равенка следува $a = 6, b = 3$ и $c = 2$

74. Определи го бројот на сите парови природни броеви (a, b) за кои важи $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2010}$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$2010a + 2010b = ab$$

$$ab - 2010a - 2010b = 0$$

$$a(b - 2010) - 2010b + 2010^2 = 2010^2$$

$$a(b - 2010) + 2010(b - 2010) = 2010^2$$

$$(b - 2010)(a - 2010) = 2010^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 67^2.$$

Според тоа, бројот $a - 2010$ треба да е делител на $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 67^2$ и за секоја вредност на $a - 2010$ еднозначно е определена вредноста на $b - 2010$. Затоа постојат $(2+1)(2+1)(2+1)(2+1) = 81$ парови природни броеви (a, b) за кои важи $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2010}$.

75. Определи го бројот на сите парови природни броеви (x, y) за кои важи $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1002\sqrt{2004}}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1002\sqrt{2004}} - \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1002^2 \cdot 2004} + \frac{1}{y} - \frac{1}{1002\sqrt{501y}}.$$

Изразот на левата страна во последното равенство е рационален број, па затоа и изразот на десната страна мора да е рационален број, што значи дека $\sqrt{501y}$ е природен број, односно $y = 501b^2$. Аналогно добиваме дека мора да е $x = 501a^2$. Понатаму, со замена во почетната равенка добиваме

$$\frac{1}{a\sqrt{501}} + \frac{1}{b\sqrt{501}} = \frac{1}{1002\sqrt{2004}}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2004}$$

$$(a - 2004)(b - 2004) = 2004^2$$

$$(a - 2004)(b - 2004) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 167^2.$$

Бидејќи бројот на паровите (x, y) за кои важи

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1002\sqrt{2004}}$$

е еднаков на бројот на паровите (a, b) за кои важи $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2004}$, аналогно како во претходната задача добиваме дека бараниот број е еднаков на $(4+1)(2+1)(2+1) = 45$.

76. Во множеството природни броеви реши ја равенката $n! + 3 = x^2$.

Решение. За $n=1$ добиваме $n! + 3 = 4 = 2^2 = x^2$, т.е. едно решение на равенката е $n=1$, $x=2$.

За $n=2$ добиваме $n! + 3 = 5 \neq x^2$, т.е. во овој случај равенката нема решение.

За $n=3$ добиваме $n! + 3 = 9 = 3^2 = x^2$, т.е. второ решение на равенката е $n=3$, $x=3$.

За $n=4$ добиваме $n! + 3 = 27 \neq x^2$, т.е. во овој случај равенката нема решение.

Ако $n \geq 5$, тогаш $n! + 3$ завршува на цифрата 3, а како квадрат на природен број завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 6, 5 или 9 заклучуваме дека за $n \geq 5$ равенката нема решение.

77. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$1! + 2! + 3! + \dots + n! = x^2.$$

Решение. За $n=1$ имаме $x^2 = 1$, односно $x=1$, т.е. едно решение на равенката е $n=1$, $x=1$.

За $n=2$ добиваме $1! + 2! = 3 \neq x^2$, т.е. во овој случај равенката нема решение.

За $n=3$ добиваме $1! + 2! + 3! = 9 = x^2$, односно $x=3$, т.е. второ решение на равенката е $n=3$, $x=3$.

За $n=4$ добиваме $1! + 2! + 3! + 4! = 33 \neq x^2$, т.е. во овој случај равенката нема решение.

Ако $n \geq 5$, тогаш $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + n!$ завршува на цифрата 3, а како квадрат на природен број завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 6, 5 или 9 заклучуваме дека за $n \geq 5$ равенката нема решение.

78. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$n! + 57 = x^2.$$

Решение. За $n=1$ добиваме $1+57=58 \neq x^2$, што значи дека во овој случај равенката нема решение.

За $n=2$ добиваме $2!+57=59 \neq x^2$, што значи дека во овој случај равенката нема решение.

За $n=3$ добиваме $3!+57=63 \neq x^2$, што значи дека во овој случај равенката нема решение.

За $n=4$ добиваме $4!+57=81=x^2$, т.е. $x=9$, па едно решение на равенката е $n=4$, $x=9$.

Ако $n \geq 5$, тогаш цифрата на единиците на $n!+57$ е 7, па како квадрат на природен број завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 6, 5 или 9 заклучуваме дека за $n \geq 5$ равенката нема решение.

79. Определи го најмалиот број квадрати чии должини на страни се изразени со природни броеви и чиј збир на плоштини е еднаков на 2012.

Решение. Ако најмалиот број такви квадрати е два, тогаш важи $x^2 + y^2 = 2012$, па затоа броевите x и y мора двата да се парни или двата да се непарни.

1) Ако $x=2a$, $y=2b$, тогаш $a^2 + b^2 = 503$, па затоа еден од броевите a и b треба да е парен, а другиот треба да е непарен. Ако $a=2p$ и $b=2q+1$, тогаш $4(p^2 + q^2 + q) = 502$, што не е можно бидејќи бројот 502 не е делив со 4.

2) Ако $x=2a+1$, $y=2b+1$, тогаш $4(a^2 + a + b^2 + b) = 2010$, што не е можно бидејќи бројот 2010 не е делив со 4.

Ако најмалиот број такви квадрати е три, тогаш $x^2 + y^2 + z^2 = 2012$. Сега е можно трите броја да се парни или двата да се непарни и едниот да е парен.

1) Ако $x=2a$, $y=2b$ и $z=2c$, тогаш $a^2 + b^2 + c^2 = 503$. Бидејќи бројот 503 е непарен, добиваме дека во последното равенство сите три собирци треба да се непарни или два да се парни и еден да е непарен.

- Ако $a=2p+1$, $b=2q+1$ и $c=2r+1$, тогаш

$$p(p+1) + q(q+1) + r(r+1) = 125,$$

што не е можно бидејќи левата страна е парен, а десната страна е непарен број.

- Ако $a = 2p$, $b = 2q$ и $c = 2r + 1$, тогаш $4(p^2 + q^2 + r^2 + r) = 502$ што не е можно бидејќи левата страна е делива со 4, а десната страна на последното равенство не е делива со 4.

2) Ако $x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$ и $z = 2c$, тогаш

$$4(a^2 + a + b^2 + b + c^2) = 2010,$$

што не е можно бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 4, а десната страна не е делива со 4.

Ако најмалиот број квадрати е четири, тогаш $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2012$ и се можни три случаи: сите броеви се парни, два парни и два непарни броја или сите четири броја се непарни.

1) Случајот $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$, $t = 2d$ доведува до равенството

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 503$. Бидејќи бројот 503 е непарен, добиваме дека во последното равенство три собирци треба да се непарни и еден парен или три да се парни и еден да е непарен.

- Ако $a = 2p$, $b = 2q + 1$, $c = 2r + 1$ и $d = 2s + 1$, тогаш

$$p^2 + q(q + 1) + r(r + 1) + s(s + 1) = 125.$$

Со непосредна проверка добиваме дека $p = 3$, $q = r = 5$ и $s = 7$ е решение на последната равенка. Сега, $a = 6$, $b = c = 11$ и $d = 15$, па затоа $x = 12$, $y = z = 22$ и $t = 30$, односно

$$12^2 + 22^2 + 22^2 + 30^2 = 2012.$$

- Ако $a = 2p$, $b = 2q$, $c = 2r$ и $d = 2s + 1$, тогаш

$$4(p^2 + q^2 + r^2 + s(s + 1)) = 502.$$

што не е можно, бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 4, а десната страна не е делива со 4.

2) Случајот $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c + 1$, $t = 2d + 1$ доведува до равенството

$$4(a^2 + b^2 + c(c + 1) + d(d + 1)) = 2010,$$

што не е можно бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 4, а десната страна не е делива со 4.

3) Случајот $x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$, $z = 2c + 1$, $t = 2d + 1$ доведува до равенството $a(a + 1) + b(b + 1) + c(c + 1) + d(d + 1) = 502$ итн.

Според тоа, бараниот најмал број квадрати чии должини на страни се изразени со природни броеви и чиј збир на плоштини е еднаков на 2012 е еднаков на 4.

80. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $2^x + 1 = y^2$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$$2^x = (y-1)(y+1).$$

Од последната равенка следува дека $y-1$ и $y+1$ се степени на бројот 2 земени и два со знак $+$ или и двата со знак $-$.

- 1) Ако $y+1 = 2^a$ и $y-1 = 2^b$, $a > b$, тогаш

$$2^a - 2^b = y+1 - (y-1) = 2,$$

од каде следува $2^b(2^{a-b} - 1) = 2$, т.е. $2^b = 2$, бидејќи $2^{a-b} - 1$ е непарен број. Значи, $b = 1$, па затоа

$$y = 1 + 2^1 = 3 \text{ и } 2^x = 3^2 - 1 = 8, \text{ т.е. } x = 3.$$

- 2) Ако $y+1 = -2^a$ и $y-1 = -2^b$, $b > a$, тогаш

$$2^b - 2^a = y+1 - (y-1) = 2$$

од каде следува $2^a(2^{b-a} - 1) = 2$, $2^a(2^{b-a} - 1) = 2$, т.е. $2^a = 2$, бидејќи $2^{b-a} - 1$ е непарен број. Според тоа, $a = 1$, па затоа

$$y = -1 - 2^1 = -3 \text{ и } 2^x = (-3)^2 - 1 = 8, \text{ т.е. } x = 3.$$

81. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Знаеме дека $3^2 + 4^2 = 5^2$, што значи дека едно решение на дадената равенка е $x = 2$. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$. Затоа:

- ако $x < 2$, тогаш $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x > (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, и
- ако $x > 2$, тогаш $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x < (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$,

што значи дека дадената равенка нема решение различно од $x = 2$.

III.4. КОНГРУЕНЦИИ

82. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0, 1 или 4 по модул 8.

Решение. Нека m е цел број. Тогаш

$$m \equiv i \pmod{8}, \text{ за } i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

па затоа

$$m^2 \equiv i^2 \pmod{8}, \text{ за } i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Но,

$$0^2 \equiv 0 \pmod{8}, 1^2 \equiv 1 \pmod{8}, 2^2 \equiv 4 \pmod{8}, 3^2 \equiv 1 \pmod{8}, \\ 4^2 \equiv 0 \pmod{8}, 5^2 \equiv 1 \pmod{8}, 6^2 \equiv 4 \pmod{8} \text{ и } 7^2 \equiv 1 \pmod{8},$$

па затоа за секој цел број m важи $m^2 \equiv 0, 1$ или $4 \pmod{8}$.

83. На која цифра завршува бројот

а) 6^{811} , б) 2^{1000} , в) 3^{9999} .

Решение. а) Од $6^2 \equiv 6 \pmod{10}$ следува дека $6^k \equiv 6 \pmod{10}$, за секој природен број k , па затоа бројот 6^{811} завршува на цифрата 6.

б) Бидејќи $2^4 = 16 \equiv 6 \pmod{10}$, од решението под а) добиваме дека за секој природен број k важи

$$2^{4k} \equiv 6^k \equiv 6 \pmod{10}.$$

Според тоа,

$$2^{1000} = 2^{4 \cdot 250} \equiv 6 \pmod{10},$$

т.е. бројот 2^{1000} завршува на цифрата 6.

в) Од $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, следува дека

$$3^{9999} = 3^{4 \cdot 2499 + 3} = (3^4)^{2499} \cdot 3^3 \equiv 1^{2499} \cdot 27 \equiv 7 \pmod{10},$$

што значи дека бројот 3^{9999} завршува на цифрата 7.

84. Најди го остатокот при делењето на бројот:

а) $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24,

б) $(3^{10} + 2)^{77}$ со 9,

в) $(17^{17} + 116)^{21}$ со 8.

Решение. а) Од $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$ добиваме дека $5^{100} \equiv 1 \pmod{24}$.

Според тоа, $5^{100} + 55 \equiv 56 \equiv 8 \pmod{24}$. Понатаму $8^2 \equiv 16 \pmod{24}$, па затоа за секој природен број k важи $8^{2k} \equiv 16^k \equiv 16 \pmod{24}$. Конечно,

$$(5^{100} + 55)^{100} \equiv 8^{100} = 8^{2 \cdot 50} \equiv 16 \pmod{24},$$

што значи дека остатокот од делењето на бројот $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24 е 16.

б) Од $3^2 \equiv 0 \pmod{9}$, следува дека $3^{10} + 2 \equiv 2 \pmod{9}$. Понатаму, од $2^7 \equiv 2 \pmod{9}$ следува

$$(3^{10} + 2)^{77} \equiv 2^{11} \equiv 5 \pmod{9}.$$

в) Од $17 \equiv 1 \pmod{8}$ следува дека $17^{17} \equiv 1 \pmod{8}$. Од друга страна $116 \equiv 4 \pmod{8}$, па затоа

$$17^{17} + 116 \equiv 5 \pmod{8}.$$

Понатаму, $5^2 \equiv 1 \pmod{8}$, па затоа

$$(17^{17} + 116)^{21} \equiv 5^{21} \equiv 5^{20} \cdot 5 \equiv 1 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{8}.$$

85. Докажи, дека $5 \mid (7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}})$.

Решение. Бидејќи $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ добиваме дека $7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$. Но, $4 \mid 1980^{1990}$, па затоа $7^{1980^{1990}} \equiv 1 \pmod{10}$. Слично, $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ и $4 \mid 80^{90}$, па затоа $3^{80^{90}} \equiv 1 \pmod{10}$. Според тоа,

$$7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}} \equiv 0 \pmod{10}.$$

86. Докажи, дека за секој природен број n , еден од броевите $3^{3n} + 2^{3n}$ и $3^{3n} - 2^{3n}$ е делив со 35.

Решение. Ако $n = 2k + 1$, каде $k \in \mathbb{N}$, тогаш од конгруенциите

$$3^{3n} \equiv (-8)^{2k+1} \pmod{35} \text{ и } 2^{3n} \equiv 8^{2k+1} \pmod{35}$$

добиваме

$$3^{3n} + 2^{3n} \equiv (-8)^{2k+1} + 8^{2k+1} \equiv 0 \pmod{35}.$$

Ако е $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш од конгруенциите

$$3^{3n} \equiv 729^k \equiv 29^k \pmod{35} \text{ и } 2^{3n} \equiv 64^k \equiv 29^k \pmod{35}$$

добиваме

$$3^{3n} - 2^{3n} \equiv 29^k - 29^k \equiv 0 \pmod{35}.$$

87. Докажи, дека $41 \mid (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{1991})$.

Решение. Да забележиме дека

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{1991} = (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^7)(1 - 3^8 + 3^{12} + \dots + 3^{1984}). \quad (1)$$

Од друга страна имаме

$1 \equiv 1(\text{mod } 41)$, $3 \equiv 3(\text{mod } 41)$, $3^2 \equiv 9(\text{mod } 41)$, $3^3 \equiv 27(\text{mod } 41)$,
 $3^4 \equiv -1(\text{mod } 41)$, $3^5 \equiv -3(\text{mod } 41)$, $3^6 \equiv -9(\text{mod } 41)$ и $3^7 \equiv -27(\text{mod } 41)$.
 Значи,

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^7 \equiv 0(\text{mod } 41). \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $41 | (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{1991})$.

88. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека

$$(n+2) \nmid (1^{2013} + 2^{2013} + \dots + n^{2013}).$$

Решение. Ако искористиме дека

$$k^{2013} + (n-k+2)^{2013} \equiv 0(\text{mod } n+2), \text{ за } k = 2, 3, \dots, n,$$

добиваме

$$\begin{aligned} 2(1^{2013} + 2^{2013} + \dots + n^{2013}) &= 2 + (2^{2013} + n^{2013}) + \dots + (n^{2013} + 2^{2013}) \\ &\equiv 2(\text{mod } n+2) \end{aligned}$$

и бидејќи $\text{NZD}(2, n+2) = 1$ добиваме

$$1^{2013} + 2^{2013} + \dots + n^{2013} \equiv 1(\text{mod } n+2),$$

што значи дека $(n+2) \nmid (1^{2013} + 2^{2013} + \dots + n^{2013})$.

89. Нека $a_i, i = 1, 2, \dots, 1990$ се природни броеви за кои важи

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1989}^2 = a_{1990}^2. \quad (1)$$

Докажи, дека барем два од овие броеви се парни.

Решение. Нека претпоставиме дека сите броеви $a_i, i = 1, 2, \dots, 1990$ се непарни. За секој непарен природен број n важи $n^2 \equiv 1(\text{mod } 8)$, па затоа

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1989}^2 \equiv 1989 \equiv 5(\text{mod } 8) \text{ и } a_{1990}^2 \equiv 1(\text{mod } 8),$$

што е противречи на (1).

Нека претпоставиме дека точно еден од броевите $a_i, i = 1, 2, \dots, 1990$ е парен. Ако тоа е бројот a_{1990} , тогаш броевите $a_i, i = 1, 2, \dots, 1989$ се непарни и повторно добиваме противречност. Ако тоа е еден од броевите $a_i, i = 1, 2, \dots, 1989$, тогаш левата страна на (1) е парен број, а десната страна е непарен број, што не е можно.

90. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{10}^4 = 2011.$$

Решение. Ако некој x_i е парен број, $x_i = 2k$, тогаш

$$x_i^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{16}.$$

Ако x_i е непарен број, тогаш

$$x_i^4 - 1 = (x_i - 1)(x_i + 1)(x_i^2 + 1) \equiv 0 \pmod{16}$$

(првите два множителя се последователни парни броеви, а и третиот множител е парен број), од каде $x_i^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Тоа значи дека

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{10}^4 \equiv k \pmod{16}, \quad k \leq 10.$$

Од друга страна, $2011 \equiv 11 \pmod{16}$, што значи дека дадената равенка нема решенија.

91. Докажи дека ниту еден број од облик $8k + 3$ или $8k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$ не може да се претстави во облик $x^2 - 2y^2$, каде $x, y \in \mathbb{Z}$.

Решение. Ако за целите броеви x и y бројот $x^2 - 2y^2$ е непарен, тогаш x мора да е непарен и затоа $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Ако бројот y е парен, тогаш $2y^2 \equiv 0 \pmod{8}$, а ако бројот y е непарен, тогаш $2y^2 \equiv 2 \pmod{8}$. Значи,

$$x^2 - 2y^2 \equiv \pm 1 \pmod{8},$$

од што следува тврдењето на задачата.

92. Докажи, дека Ферматовиот број $f_5 = 2^{2^5} + 1$ е сложен.

Решение. Јасно, $f_5 > 641$, па затоа доволно е да докажеме дека $641 \mid f_5$. Имаме $5^4 = 625 \equiv -16 = -2^4 \pmod{641}$. Но, $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$, па затоа $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$, од што следува $5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$. Конечно,

$$2^{2^5} = 2^{32} = 2^4 \cdot 2^{28} \equiv -5^4 \cdot 2^{28} \equiv -1 \pmod{641},$$

па затоа $f_5 = 2^{2^5} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$, т.е. f_5 е сложен број.

93. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A . Најди го збирот на цифрите на бројот B . (Сите броеви се запишани во декаден запис).

Решение. Нека C е збир на цифрите на бројот B . Од

$$4444^{4444} < 10000^{4444},$$

следува дека збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} не е поголем од $4 \cdot 4444 < 20000$. Затоа $A < 9 \cdot 20000 = 180000$. Оттука непосредно следува дека

$$B \leq 9 \cdot 6 = 54 \text{ и } C \leq 13.$$

Од $4444 \equiv -2 \pmod{9}$ и

$$(-2)^{4444} = 2^{3 \cdot 1481 + 1} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7 \pmod{9}$$

следува $4444 \equiv 7 \pmod{9}$. При делење со 9 остатоците на секој природен број и на збирот на неговите цифри се еднакви, па затоа

$$4444 \equiv A \equiv B \equiv C \pmod{9}, \text{ т.е. } C \equiv 7 \pmod{9}.$$

Природен број C ги задоволува условите $C \leq 13$ и $C \equiv 7 \pmod{9}$, па затоа $C = 7$.

94. Докажи дека меѓу броевите $2^n - 3$, $n = 0, 1, 2, \dots$ има бесконечно многу кои се деливи со 5 и бесконечно многу кои се деливи со 13.

Решение. Од $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ следува $2^{4m} \equiv 1 \pmod{5}$, за секој $m \geq 0$, од каде следува

$$2^{4m+3} \equiv 2^{4m} \cdot 2^3 \equiv 2^3 \equiv 3 \pmod{5},$$

па затоа за секој природен број n од облик $4m + 3$ бројот $2^n - 3$ се дели со 5. Аналогно, од

$$2^6 \equiv -1 \pmod{13} \text{ имаме } 2^{12} \equiv 1 \pmod{13},$$

што значи дека

$$2^{12m+4} \equiv 2^{12m} \cdot 2^4 \equiv 2^4 \equiv 3 \pmod{13},$$

па затоа за секој природен број n од облик $12m + 4$ бројот $2^n - 3$ се дели со 5.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Десет ученици заедно имаат 100 денари, а секој од нив има барем еден денар и сите имаат различен број денари. Докажи дека меѓу нив постојат 5 ученици кои заедно имаат повеќе од 14 денари. Докажи дека меѓу нив постојат 6 ученици кои заедно имаат помалку од 91 денар.

Решение. Сигурно е дека пет ученици кои имаат најмалку денари, бидејќи секој има барем еден денар и бидејќи сите имаат различен број на денари, имаат најмалку $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ денари. Ако некои 6 ученици имаат x денари, а преостанатите 4 ученици имаат y денари, тогаш $x + y = 100$ и како $y \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ важи $x \leq 90$ денари.

2. Според најновиот попис на населението во 1100 месни заедници на територијата на градот Скопје живеат 600000 жители. Докажи дека постојат барем две месни заедници со еднаков број на жители.

Решение. Доколку во сите месни заедници има различен број на жители, тогаш минималниот број на жители мора да биде: во првата 1 жител, во втората 2 жители итн во 1100-тата 1100 жители. Затоа на територијата на град Скопје ќе живеат најмалку

$$1 + 2 + \dots + 1100 = 1100 \cdot 1101 : 2 = 605550 > 600000 \text{ жители,}$$

што е противречност. Затоа постојат најмалку две месни заедници со еднаков број жители.

3. Според најновиот попис на населението во 1670 населени места во Р. Македонија живеат 1287345 жители. Докажи дека во Р. Македонија постојат две населени места со еднаков број жители.

Решение. Ако секое населено место има различен број жители, тогаш Р. Македонија треба да има најмалку

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1670 = \frac{1670 \cdot 1671}{2} = 1395285 \text{ жители,}$$

што противречи на фактот дека таа има 1287345 жители. Од добиената противречност следува дека во Р. Македонија постојат две населени места со еднаков број жители.

4. Броевите од 1 до 10 се запишани во произволен редослед, а потоа секој од нив е собран со редниот број во низата. Докажи дека во добиените зборови постојат барем два чии последни цифри се исти.

Решение. Нека броевите од 1 до 10 се напишани по низа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$.
Понатаму, нека

$$a_1 + 1 = b_1, a_2 + 2 = b_2, \dots, a_{10} + 10 = b_{10}.$$

Тогаш

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = a_1 + 1 + a_2 + 2 + \dots + a_{10} + 10 = 55 + 55 = 110.$$

Сега, ако $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ имаат различни последни цифри, тогаш нивниот збир ќе завршува на цифрата 5 ($\dots 1 + \dots 2 + \dots + \dots 9 + \dots 0 = \dots 5$), што не е можно бидејќи тој завршува на цифрата 0.

5. На тестирање учествувале 22 ученика од осум училишта. Тие точно решиле вкупно 50 задачи. Секој ученик од исто училиште решил еднаков број задачи, а учениците од различни училишта решиле различен број задачи. Секој ученик решил барем една задача. Колку ученици решиле само по една задача?

Решение. Ако од секое училиште земеме по еден ученик и претпоставиме дека првиот решил 1 задача, вториот решил 2 задачи, ..., осмиот решил 8 задачи, тогаш овие 8 ученици вкупно решиле

$$1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36$$

задачи. Значи, останува $22 - 8 = 14$ ученици да решиле $50 - 36 = 14$ задачи. Тоа значи дека секој од нив решил по 1 задача, т.е. 15 ученици решиле по 1 задача.

6. Елементите на множеството $A = \{a, b, c\}$ се произволни степени на некои двоцифрени прости броеви помали од 20. Меѓу елементите на множеството A постојат два броја такви што збирот или разликата на тие два броја е делива со 5. Докажи!

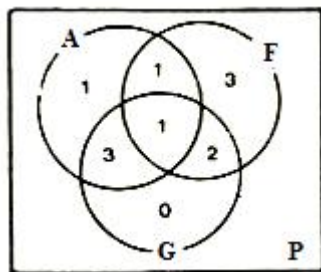
Решение. Елементите на множеството A се некои степени на простите броеви 11, 13, 17 и 19. Сите степени на овие броеви завршуваат на една од цифрите: 1, 3, 7 или 9. Бидејќи множеството A се состои од три броја, или меѓу овие броеви има најмалку два броја кои завршуваат на иста цифра или сите три броја завршуваат на различни цифри. Во првиот случај разликата завршува на нула, а во вториот случај збирот на два соодветни броја ($3 + 7$ или $1 + 9$) завршува на нула, што значи деливост со 10, односно со 5.

7. Во една просторија се наоѓаат неколку луѓе кои знаат барем еден од три јазици. Шестмина знаат англиски јазик, шестмина знаат германски, седуммина знаат француски, четворица знаат англиски и германски, тројца знаат германски и француски, двајца француски и англи-

ски, а еден ги знае сите три јазици. Колку луѓе има во просторијата? Колку знаат само англиски?

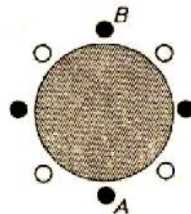
Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм, со тоа што прво го запишуваме податокот колку луѓе зборуваат три јазика, па потоа за два јазика итн. Пополнетиот Венов дијаграм е прикажан на цртежот десно. Конечно, во просторијата имало

$$1+1+2+3+1+3+0=11 \text{ луѓе.}$$



8. На некоја свечена вечера шефот на салата добил задача околу тркалезна маса да распореди четири мажи и определен број жени, и тоа на тој начин така што ниту една жена не седи до друга жена, а спроти секое лице да седи лице со спротивен пол. Дали шефот на салата успеал да го направи саканиот распоред?

Решение. За да наспроти секој од 4 мажи седи жена, мора околу масата да се распоредат точно 4 жени тоа така што меѓу секои две жени ќе биде по еден маж. Нека AB е еден дијаметар на масата. Ако A е маж, тогаш B е жена. Меѓутоа лево и десно од дијаметарот AB мора да седат по 3 лица.



Но, тогаш B мора да биде маж, што противречи дека дијаметрално на маж седи жена. Според тоа, шефот на салата не успеал да го направи саканиот распоред.

9. Со цифрите 4, 5, 6, 7, 8 и 9 е запишан еден шестцифрен број. Зоран, Дејан и Никола го погаѓале тој број. Зоран: 574698, Дејан: 786945, Никола: 456789. Се покажало дека Зоран ги погодил точните места на три цифри, исто толку погодил и Дејан, а додека Никола го погодил точното место само на една цифра. Кој број бил запишан?

Решение. Зоран, Дејан и Никола за непознатиот број ги дале следниве претпоставки:

Зоран: 5 7 4 6 9 8

Дејан: 7 8 6 9 4 5

Никола: 4 5 6 7 8 9

Гледаме дека претпоставките на Зоран и Дејан не се совпаѓаат во ниту една цифра, па како секој од нив погодил по три цифри, заклучуваме дека тоа се три различни цифри. Затоа цифрата која ја погодил Никола

е на исто место или кај Зоран или кај Дејан. Како што гледаме тоа може да биде само цифрата 6. Значи, Дејан ја погодил цифрата 6, што значи дека Зоран не ја погоил оваа цифра. Затоа за четвртата цифра е точна претпоставката на Дејан, па за петтото место повторно е точна претпоставката на Дејан, т.е. на петтото место е цифрата 4. За останатите три места точни се претпоставките на Зоран, што значи дека бројот е 576948.

10. Учениците A, B, C, D, E, F решавале некоја задача. Задачата ја решиле двајца. На прашањето: Кој ја решил задачата, добиени се следниве пет одговори:

- 1) A и C ,
- 2) B и F ,
- 3) F и A ,
- 4) B и E ,
- 5) D и A .

Во четири од овие пет одговори еден дел е точен, а еден е неточен, додека во еден одговор двата дела се неточни. Кои ученици ја решиле задачата?

Решение. Заради пократко означување ако ученикот A ја решил задачата ќе пишуваме $A=1$, а ако не ја решил задачата, ќе пишуваме $A=0$.

Нека претпоставиме дека $A=C=0$. Тогаш од третиот и петтиот одговор следува $F=D=1$. Сега од вториот одговор следува $B=0$, па затоа од четвртиот одговор добиваме $E=1$. Така добивме дека учениците F, D, E ја решиле задачата, што противречи на фактот дека само двајца ја решиле задачата.

Нека претпоставиме дека $B=F=0$. Тогаш од третиот и четвртиот одговор следува $A=E=1$. Сега, од првиот одговор следува $C=0$, а од петтиот одговор следува $D=0$. Според тоа, само учениците A и E ја решиле задачата.

Останатите три претпоставки: доведуваат до противречност дека двајца ученици ја решиле задачата.

Конечно, задачата ја решиле учениците A и E .

11. Нека $A_1A_2\dots A_{15}$ е конвексен петнаесетаголник, m е бројот на конвексните седумаголници и n е бројот на конвексните осумаголници

чи и темиња се темињата на петнаесетаголникот $A_1A_2\dots A_{15}$. Што е поголемо m или n .

Решение. Ако седум темиња на петнаесетаголникот $A_1A_2\dots A_{15}$ определуваат седумаголник, тогаш преостанатите осум темиња определуваат осумаголник и обратно. Според тоа, на секој седумаголник му соодветствува точно еден и единствен осуаголник и обратно. Значи, $m = n$.

12. На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочката ги означува со a, b и c по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a - b, 3b - c$ и $3c - a$. Дали може, со последователна примена на оваа постапка, Марко во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

Решение. Нека претпоставиме дека во некој момент може да се добијат три еднакви броеви. Тогаш $3a - b = 3b - c = 3c - a = t$. Единствено решение на последниот систем по непознатите a, b и c е $a = b = c = \frac{t}{2}$. Според тоа, во некој чекор може да се добијат три еднакви броеви, ако во претходниот чекор веќе се добиени три еднакви броеви. Но, почетните броевите 2012, 2014 и 2016 се различни, па затоа со повторување на дозволената операција не е можно да се добијат три еднакви броеви.

IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

13. Дадени се 5 природни броеви. Докажи дека или еден од нив е делив со 5 или збирот на неколку од нив е делив со 5.

Решение. Нека се дадени броевите a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 . Ги разгледуваме броевите

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ и } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Ако еден од овие 5 броеви е делив со 5, тогаш доказот е завршен. Во спротивно, остатоците кои се добиваат при делење на овие броеви со 5 се еднакви на 1, 2, 3 или 4. Значи, имаме 5 броја, а 4 остатоци, па затоа постојат два броја кои даваат еднакви остатоци при делење со 5, и нивната разлика е делива со 5. Но, разликата на било кои два е некој од петте дадени броеви или збир на некои од нив, со што тврдењето на задачата е докажано.

14. Докажи, дека во произволна група луѓе постојат најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници. Познаниството е симетрична релација, т.е. ако A го познава B , тогаш B го познава A .

Решение. Нека $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ е множество од n луѓе. За секој $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ со A_i да го означиме подмножеството од S составено од оние луѓе кои имаат i познаници. Ако постои човек кој нема ниту еден познаник, тогаш не постои човек кој има $n-1$ познаник, што значи дека ако $A_0 \neq \emptyset$, тогаш $A_{n-1} = \emptyset$. Точно е и обратното тврдење, т.е. ако $A_{n-1} \neq \emptyset$, тогаш $A_0 = \emptyset$. Според тоа, најмногу $n-1$ од множествата $A_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ се непразни. Но, $|S| = n$, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку едно од тие множества има барем два члена од S , што значи дека најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници.

15. Дадени се пет произволни цели броеви.

а) Докажи дека меѓу нив постојат два броја чија разлика е делива со 3.

б) Докажи дека меѓу нив постојат три броја чиј збир е делив со 3.

Решение. а) Според принципот на Дирихле од дадените пет броја постојат најмалку два кои при делење со бројот 3 даваат ист остаток. Јасно, нивната разлика е делива со 3.

б) Ако во било која класа остатоци се наоѓаат три броја, тогаш нивниот збир е делив со 3. Ако не постојат три броја кои припаѓаат на иста класа остатоци, тогаш во секоја класа има по еден број и нивниот збир е делив со 3. Навистина, $3m + 3n + 1 + 3k + 2 = 3(m + n + k + 1)$.

16. Докажи дека меѓу 51 произволни различни природни броеви помали од 100 постојат три броја такви што еден од нив е еднаков на збирот на другите два броја.

Решение. Нека се дадени различни природни броеви $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ помали од 100 во растечка низа, т.е. нека е $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{51} \leq 99$. Да ги разгледаме броевите $1 \leq a_{51} - a_{50} < a_{51} - a_{49} < \dots < a_{51} - a_1 \leq 98$. Во двете низи има вкупно $51 + 50 = 101$ природен број, кои имаат вредности од 1 до 99. Сега, бидејќи $101 = 99 \cdot 1 + 2$ од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја кои се еднакви. Но, броевите од првата низа се различни меѓу себе и броевите во втората низа се различни меѓу себе, па затоа единствена можност е некој број од

првата низа да е еднаков на некој број од втората низа, односно $a_k = a_{51} - a_j$. Според тоа, $a_k + a_j = a_{51}$, што и требаше да се докаже.

17. Дадени се 52 произволни природни броја. Докажи дека меѓу нив постојат два чиј збир или разлика се деливи со 100. Дали даденото тврдење важи за 51 природен број?

Решение. Дадените природни броеви ги делиме во класи според нивните двоцифрени завршетци, со тоа што првата класа ја сочинуваат броевите кои имаат двоцифрени завршетоци 01 или 99, втората класа оние со 02 или 98, ..., 49-тата оние со 49 или 51, 50-тата оние со 50 и 51-вата оние со двоцифрен завршеток 00. Сега имаме 52 броја, а 51 класа, па според принципот на Дирихле постои класа во која се наоѓаат два од дадените броеви. Ако тие два броја имаат еднакви завршетоци, тогаш нивната разлика е делива со 100, а во спротивно нивниот збир е делив со 100.

Ова тврдење не важи за 51 број, затоа што во тој случај може да се случи во секоја класа да биде точно по еден број број. На пример, тоа се броевите 1, 2, 3, ..., 49, 50 и 100.

18. Докажи дека во група од 6 ученици постојат 3 ученика така што секој ги познава преостанатите два ученика или постојат 3 ученика така што секој не ги познава преостанатите два ученика.

Решение. Нека A е еден од овие ученици. Од преостанатите 5 ученици постојат најмалку 3 кои се познаваат со A , или постојат 3 кои не се познаваат со A . Нека претпоставиме дека тоа се три познаници на A . Ако меѓу овие тројца се наоѓаат 2 кои се познаваат меѓу себе, тогаш тие заедно со A формираат тројка познаници. Во спротивно меѓу овие тројца секој не го познава ниту еден од преостанатите 2 ученика. На сличен начин заклучуваме ако овие тројца не го познаваат ученикот A .

19. Во едно одделение има 30 ученици. Јана на писмена направила 13 грешки, а секој од останатите ученици направил помалку грешки. Докажи дека во тоа одделение постојат барем 3 ученика со ист број на грешки.

Решение. Учениците ќе ги поделиме во 14 категории: тие кои направиле 13, 12, 11, ..., 2, 1, 0 грешки. Сега од $30 = 14 \cdot 2 + 2$ и принципот на Дирихле следува дека во една категорија има најмалку три ученика. Според тоа, барем 3 ученика со ист број на грешки.

20. Скопје денес има над 600000 жители, од кои секој на главата има не повеќе од 270000 влакна. Докажи дека во Скопје барем 3 луѓе имаат ист број влакна на главата.

Решение. Сите Скопјани ќе ги поделиме во 270001 категорија и тоа: тие кои имаат 270000, 269999, ..., 3, 2, 1, 0 влакна на главата. Сега од $60000 = 2 \cdot 270001 + 59998$ и принципот на Дирихле следува дека во Скопје има најмалку 3 луѓе кои имаат еднаков број влакна на главата.

21. Се претпоставува дека денеска на Земјата живеат повеќе од 7 милијарди луѓе, од кои не повеќе од 1% се постари од 100 години. Да се докаже дека постојат двајца луѓе кои се родени во иста секунда, ист час, ист ден и иста година.

Решение. Жители кои имаат 100 или помалку години се 99% од 7000000000 односно постојат 6930000000 луѓе кои се помлади од 100 години. Разгледуваме возрасни категории од

$$1 \text{ s}, 2 \text{ s}, 3 \text{ s}, 4 \text{ s}, 5 \text{ s}, \dots, 100 \cdot 366 \cdot 24 \cdot 3600 = 3162240000 \text{ s}.$$

Бидејќи $6930000000 > 3162240000$ од принципот на Дирихле следува дека најмалку во една категорија има тројца, што и требаше да се докаже.

22. На еден шаховски турнир учествуваат десет шахисти и секој треба да одигра по една партија со секој од останатите шахисти. Докажи дека во секој момент на турнирот постојат двајца шахисти со ист број одиграни партии.

Решение. Имаме два случаја и тоа: постои шахист кој не одиграл ниту една партија и секој шахист одиграл барем една партија.

Ако постои шахист кој не играла ниту една партија, тогаш секој од преостанатите 9 шахисти можел да одигра 1, 2, ..., 8 партии. Затоа, 10 шахисти ќе ги поделиме во 9 класи со 0, 1, 2, ..., 8 одиграни партии. Бидејќи $10 = 9 \cdot 1 + 1$ од принципот на Дирихле следува дека постои класа во кој се барем два шахисти.

Ако не постои шахист без одиграна партија, тогаш секој шахист мора да одигра 1, 2, ..., 9 партии. Сега 10 шахисти делиме во 9 класи со 1, 2, ..., 9 одиграни партии, па како $10 = 9 \cdot 1 + 1$ тврдењето повторно следува од принципот на Дирихле.

23. На математички натпревар учествувале 82 ученика. Докажи дека меѓу нив може да се избераат 10 ученика од ист град или од 10 различни градови.

Решение. Ако бројот на градовите е помал или еднаков на 9, тогаш бидејќи $82 = 9 \cdot 9 + 1$ од принципот на Дирихле следува постои град од кој има $9 + 1 = 10$ ученика. Ако бројот на градовите е поголен или еднаков на 10, тогаш од секој град може да се избере по 1 ученик.

24. Докажи дека меѓу 100 произволни цели броеви секогаш може да се изберат 15 такви да разликата од било кои два од нив е делива со 7.

Решение. Ако имаме 100 произволни броеви ќе ги распоредиме во 7 класи така да во една класа ќе бидат броеви кои при делење со 7 имаат ист остаток, тогаш $100 = 14 \cdot 7 + 2$, па од принципот на Дирихле следува дека постои класа во која има барем 15 броеви. Разликата на било кои два од нив е делива со 7.

25. Дадени се произволни 1111 природни броеви. Докажи дека барем 124 од дадените броеви почнува со иста цифра, барем 112 дадени броеви завршуваат со иста цифра и 13 броеви почнуваат и завршуваат со иста цифра.

Решение. Природните броеви почнуваат со една од 9 цифри: 1, 2, ..., 9. Бидејќи $1111 = 123 \cdot 9 + 4$ од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку $123 + 1 = 124$ од дадените броеви кои почнуваат со иста цифра.

Природните броеви завршуваат со една од десетте цифри 0, 1, 2, ..., 9, па како $1111 = 111 \cdot 10 + 1$, од принципот на Дирихле следува дека постојат барем 112 од дадените броеви кои завршуваат со иста цифра.

За првата и последната цифра имаме $9 \cdot 10 = 90$ можности, па како $1111 = 90 \cdot 12 + 31$ од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 13 броеви кои почнуваат и завршуваат со иста цифра.

26. Темињата на правилен единаесетаголник се обоени со сина или црвена боја. Докажи дека во овој многуаголник постојат две страни или две дијагонали кои имаат заедничко теме, имаат еднаква должина, а крајните точки се обоени со иста боја како заедничкото теме.

Решение. Нека е даден правилен единаесетаголник $A_1 A_2 A_3 \dots A_{11}$. Според принципот на Дирихле постојат две соседни темиња обоени со иста боја. Нека тие темиња се A_1 и A_2 и нека се обоени во сина боја. Ако темето A_3 е сино, задачата е решена. Ако не е, тогаш го разгледуваме темето A_{11} . Ако е тоа сино задачата е решена. Ако не е, го разгледуваме темето A_7 . Ако е тоа сино, тогаш бараните дијагонали се

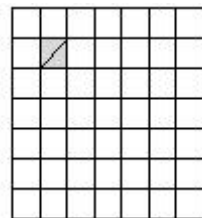
A_1A_7 и A_2A_7 . Ако темето A_7 е црвено, тогаш бараните дијагонали се A_3A_7 и $A_{11}A_7$.

27. Тепих со димензии $45\text{ dm} \times 45\text{ dm}$ го изгризале молци и направиле 2006 дупки со многу мали големини. Дали може да се исече парче од тепихот со димензија $1\text{ dm} \times 1\text{ dm}$ на кој нема да има дупчиња?

Решение. Тепих со димензии $45\text{ dm} \times 45\text{ dm}$ има плоштина 2025 dm^2 . Ако тепихот го поделеме на квадратни дециметри и ги разгледуваме дупките од молците, тогаш има 2025 квадрати и 2006 дупки, што значи дека постојат барем 19 квадрати кои немаат ниту дупка. Значи, бараното сечење може да се реализира.

28. Стрелец стрела во квадратна мета со димензии $70\text{ cm} \times 70\text{ cm}$. Тој стрелал 50 пати и притоа со секој куршум ја погодил метата. Докажи дека постојат два погодоци кои се на растојание помало од 15 cm .

Решение. Дадената мета ја делиме на 49 квадрати со должина на страна 10 cm . Стрелецот стрелал 50 пати, па од принципот на Дирихле следува дека два од дадените погодоци се во едно од делбените квадратчиња. Јасно, растојанието меѓу овие два погодоци е помало или еднакво на



$$10\sqrt{2} = \sqrt{200} < \sqrt{225} = 15\text{ cm}.$$

29. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 1 cm се наоѓаат 51 точка. Докажи дека на квадратот постои круг со радиус помал од $\frac{1}{7}\text{ cm}$ во кој се наоѓаат три точки.

Решение. Дадениот квадрат го делиме на 25 квадрати со должина на страна $\frac{1}{5}\text{ cm} = 2\text{ mm}$. Бидејќи $50 = 25 \cdot 2 + 1$ од принципот на Дирихле следува дека постои квадрат во кој има најмалку три точки. Неговата дијагонала е $d = \frac{\sqrt{2}}{5}\text{ cm}$, па ако опишеме круг околу центарот на квадратот со радиус $r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{\frac{1}{50}} < \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}\text{ cm}$, тогаш целиот квадрат ќе лежи во овој круг, што значи дека во него ќе лежат три од дадените точки.

30. Во внатрешноста на рамностран триаголник со должина на страна $a = 44 \text{ cm}$ се дадени 2012 точки. Докажи дека меѓу дадените точки постојат две кои се на растојание помало од 1 cm .

Решение. Дадениот триаголник го делиме на $44 \cdot 44 = 1936$ рамно-
страни триаголници со должина на страна 1 cm . Сега, бидејќи
 $2012 = 1936 \cdot 1 + 76$ од принципот на Дирихле следува дека постои
триаголник во кој лежат најмалку две од дадените точки. Растојанието
меѓу овие две точки е помало од должината на страната на триагол-
никот, т.е. е помало од 1 cm .

31. Во внатрешноста на рамностран триаголник со должина на страна $a = 45 \text{ cm}$ се дадени 2012 точки. Дали постои рамностран триаголник со должина на страна 1 cm во кој нема ниту една од дадените точки?

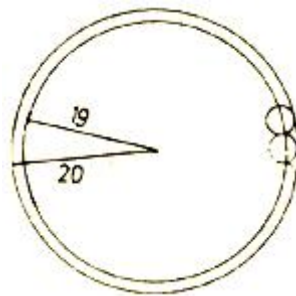
Решение. Дадениот триаголник го делиме на $45 \cdot 45 = 2025$ рамно-
страни триаголници со должина на страна 1 cm . Дадени се 2012 точки
и во најдобар случај секоја точка ќе се наоѓа во различен триаголник,
што значи дека постојат најмалку $2025 - 2012 = 13$ рамнострани три-
аголници во кои нема да се содржи ниту една од дадените точки.

32. Во правоаголник со димензии $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ се наоѓаат 7 точки. Докажи дека постојат две точки кои се на растојание помало или еднакво од $\sqrt{5} \text{ cm}$.

Решение. Дадениот правоаголник ќе го поделиме на шест $2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$
правоаголници. Од принципот на Дирихле следува дека постои право-
аголник во кој се содржат две од дадените седум точки. Јасно, расто-
јанието меѓу овие две точки е помало или еднакво од должината на
дијагоналата на правоаголникот, т.е. од $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$.

33. Докажи дека во круг со радиус $r = 19$ не може да се сместат 400 точки кои меѓусебно се оддалечени повеќе од 2.

Решение. Ако растојанието меѓу две точки
е поголемо од 2, тогаш околу секоја од нив
може да се опише кружница со радиус 1
така што овие кружници нема да се сечат.
Бидејќи точките може да се сместени и на
самата кружница, за да ги покриеме опиша-
ните дисјунктни кружници треба да опише-



ме круг со радиус 20 кој е концентричен со дадениот круг. Плоштината на овој круг е еднаква на $P = 20^2 \pi = 400\pi$, а збирот на плоштините на напите 400 мали кругови е еднаков на $400P_1 = 400 \cdot 1^2 \pi = 400\pi$. Но, меѓу малите кругови има празнини кои треба да се во големиот круг и како не важи $P > 400P_1$ заклучуваме дека во дадениот круг не може да се распоредат 400 точки кои се на растојание поголемо од 2

34. Во коцка со раб $6,5\text{ m}$ се дадени 2020 точки. Докажи дека во големата коцка постојат најмалку 150 различни коцки со раб 50 cm во чија внатрешност нема ниту една од дадените точки.

Решение. Дадената коцка да ја поделиме на $13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197$ коцки со раб $6,5 : 13 = 0,5\text{ m} = 50\text{ cm}$. Во најнеповолниот случај секоја од дадените 2020 точки се наоѓа во една во различна коцка со должина на раб 50 cm , па затоа постојат $2197 - 2020 = 177 > 150$ различни коцки со раб 50 cm во чија внатрешност нема ниту една од дадените точки.

35. На рамнина се дадени 15 точки, така да меѓу било кои 3 точки постојат 2 чие растојание е помало од 1 cm . Докажи дека постои круг со радиус од 1 cm кој содржи барем 8 дадени точки.

Решение. Нека се дадени точките $A_1, A_2, \dots, A_{15}$. Бидејќи 15 дадени точки одредуваат $15 \cdot 14 : 2 = 105$ отсечки, тогаш постои отсечка која е најголема од нив. Нека тоа е отсечката $A_k A_j$. Ако $A_k A_j$ е помала или еднаква на 1 cm , тогаш се 14 точки во кругот чии центар е точката A_k , а радиус 1 cm , сите се помалку оддалечени од точката A_k одколку од точката A_j . Ако пак $A_k A_j$ е поголемо од 1 cm , тогаш се конструираат кругови $k_1(A_j, 1\text{ cm})$ и $k_2(A_k, 1\text{ cm})$. Секоја од дадените точки се наоѓа во еден од дадените кругови, бидејќи ако е надвор, тогаш нејзиното растојание од A_k и A_j ќе биде поголемо од 1 cm , што противречи на условот на задачата. Ако има 15 точки, а два круга, тоа значи дека барем 8 точки се наоѓаат во еден од круговите.

IV.3. ПРЕБРОЈУВАЊА

36. Членовите на математичката секција во едно училиште се договориле за Нова година секој да испрати по една честитка на останатите членови. Колку членови брои секцијата ако вкупно се испратени 342 честитки?

Решение. Нека математичката секција има n членови. Секој член испратил по $n-1$ честитка, па затоа

$$n(n-1) = 342, \text{ т.е. } n(n-1) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19.$$

Но, 19 е прост број и $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, добиваме $n(n-1) = 19 \cdot 18$, од каде заклучуваме $n = 19$, што значи дека математичката секција имала 19 членови.

37. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се запишани со различни цифри.

Решение. Бараните броеви се од видот $\overline{xyz}$ при што за цифрата x имаме 9 можности (нулата не може да биде на прво место), потоа за цифрата y имаме 9 можности и за цифрата z имаме 8 можности. Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

38. Колку четирицифрени броеви може да се запишат со користење на цифрите 1, 3, 4, 7 ако:

- а) цифрите може да се повторуваат
- б) цифрите не се повторуваат?

Решение. Доколку цифрите се повторуваат ќе добиеме $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ четирицифрени броеви, а ако цифрите не се повторуваат ќе имаме $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ четвороцифрени броја.

39. Определи го бројот на четирицифрени броеви кај кои првата цифра е парен број, втората е прост број, трета цифра е непарен број, а четвртата сложен број?

Решение. За првата цифра имаме 4 можности (2,4,6,8), за втората цифра имаме 4 можности (2,3,5,7), за третата цифра 5 можности (1,3,5,7,9) и за четвртата цифра (4,6,8,9) можности. Вкупниот број четирицифрени броеви со саканите својства е $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$

40. Определи го бројот на десетцифрените броеви чији цифри се:

- а) само 1 и 2,
- б) сите можни цифри 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?

Решение. а) Ако цифрите се 1 и 2, тогаш за секоја цифра имаме по две можности, па затоа имаме $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$ броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

б) Ако ги употребуваме сите цифри, тогаш за првата цифра од лево имаме 9 можности, а за секоја од останатите цифри имаме по 10 можности, па затоа бараниот број броеви е:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^9.$$

41. Определи го бројот на трицифрените броеви запишани со непарни цифри ако:

а) цифрите се повторуваат,

б) цифрите не се повторуваат

Решение. Непарните цифри се 1,3,5,7 и 9, т.е. имаме пет непарни цифри.

а) Ако цифрите се повторуваат, тогаш бараниот број броеви е еднаков на $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Ако цифрите не се повторуваат, тогаш бараниот број броеви е еднаков на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

42. На колку различни начини може да се состави список од седум лица?

Решение. За првото место во списокот имаме 7 можности, за второ 6, за третото 5 итн. Вкупниот број начини на кој може да се состави списокот е еднаков на $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

43. На колку начини може да седнат на тркалезна маса 6 девојчиња и 6 момчиња, така што две лица од ист пол да не седат едно до друго?

Решение. На столиците да ги запишеме броевите 1,2,3,...,12. Ако момчињата седат на непарните места, а девојчињата на парните места, тогаш момчињата може да се распоредат на $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ начини и девојчињата можат да се распоредат на ист број начини. Тоа значи дека во овој случај имаме $720 \cdot 720 = 518400$ можни распоредувања. Исто толку распоредувања се добиваат ако момчињата седат на парните, а девојчињата на непарните места, па вкупниот број на распоредувања е еднаков на 1036800.

44. Во соба има 6 светилки. На колку начини можеме да ја осветлиме собата (секоја светилка може, но не мора да свети)?

Решение. Ако во собата свети една светилка собата може да се осветли на 6 начини. Ако светат по две светилки имаме $6 \cdot 5 : 2 = 15$

начини (делиме со 2 затоа што комбинацијата на светилки a и b е еднаква на комбинацијата b и a). Ако светат по 3 светилки имаме $6 \cdot 5 \cdot 4 : 6 = 20$ различни осветлувања, а ако светат 4 светилки добиваме $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 : (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 15$ начини. Конечно кога светат 5 светилки имаме 6 начини, а кога светат сите 6 светилки имаме уште еден начин. Значи, собата можеме да ја осветлиме на $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$ начини.

45. Во градот има 7 семафори со три бои: црвена, жолта и зелена. На колку разни начини во секој момент можат да бидат распоредени светлата на семафорите?

Решение. За секој семафор имаме по 3 можности, па затоа вкупниот број различни начини на кои може да бидат распоредени светлата на семафорите е еднаков на $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2187$.

46. Тикет за спортска прогноза содржи 13 парови. Прогнозата на секој резултат се прави со цифрите 1 (победува првиот тим), 2 (победува вториот тим) и 0 (натпреварот завшува нерешено). Определи го најмалиот број колони кои треба да се пополнат се со цел да бидеме сигурни дека сме ги погодиле сите 13 резултати.

Решение. За секој пар на тикетот имаме по 3 можности. Затоа за да сме сигурни дека сме ги погодиле сите 13 резултати треба да пополниме најмалку $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{13} = 1594323$ комбинации, односно 1594323 колони.

47. На полица се наоѓаат 10 книги, од кои 5 имаат математичка содржина, а 5 се романи. На колку начини на може да се распоредат книгите, ако на првите 5 места се поставени романите.

Решение. Првите пет книги може да се распоредат на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начини, а исто така и другите 5 книги. Според тоа, вкупниот број на можот распореди е $120 \cdot 120 = 14400$.

48. Во точката М се конструирани 8 полуправи. Определи го најголемиот број агли кои се определени со овие полуправи?

Решение. Најголемиот број агли е определен ако не постојат две полуправи кои се преклопуваат. Притоа секои две полуправи определуваат по еден агол, што значи дека најголемиот можен број агли е еднаков на $8 \cdot 7 : 2 = 28$ агли.

49. Во рамнина се дадени 9 точки такви што меѓу нив нема три колинеарни. Колку отсечки, триаголници и четириаголници определуваат дадените точки?

Решение. Дадените точки одредуваат $9 \cdot 8 : 2 = 36$ отсечки. Секоја отсечка со секоја од преостанатите 7 точки формира по еден триаголник и притоа секој триаголник е броен три пати. Значи, точниот број триаголници определени со дадените точки е $36 \cdot 7 : 3 = 252 : 3 = 84$. Секој триаголник со преостанатите 6 точки формира четириаголник и притоа секој четириаголник е броен четири пати. Значи, вкупниот број четириаголници е еднаков на $84 \cdot 6 : 4 = 504 : 4 = 126$.

50. Во одделението на Пабло има 25 ученици. На колку начини може за се избере раководство на одделенската заедница од 3 ученика?

Решение. За првиот член имаме 25 можности, за вториот ученик имаме 24 можности и за третиот имаме 23 можности. Значи, можниот избор на три ученика при што ќе се знае кој е прв, кој е втор и кој е трет е на $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ начина. Но, раководството ABC е исто со раководствата: ACB , BAC , BCA , CAB и CBA , што значи дека во бројот 13800 секое раководство е броено шест пати, т.е. бројот на изборите на раководството на одделенската заедница е $13800 : 6 = 2300$.

51. Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Колку вкупно подмножества има ова множество.

Решение. Даденото множество има подмножества: празно множество, 4 едночлени, 6 двочлени, 4 тричлени и уште едно четиричлено подмножество. Значи, вкупно има $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ подмножества. Наброј ги наведените подмножества!

52. На турнир во шах се игра по систем секој со секој и се одиграни вкупно 120 партии. Колку шахиста учествувале на турнирот?

Решение. Нека учествувале n учесници, односно имало вкупно $n(n-1) : 2$ партии. Последното значи дека

$$n(n-1) = 240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15,$$

па затоа на турнирот учествувале $n = 16$ учесници.

53. Определи го бројот на петцифрените броеви во чиј запис барем една цифра е 5.

Решение. Вкупно имаме $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ петцифрени броеви. Петцифрени броеви во чиј запис не се содржи цифрата 5 има

$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52488$. Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $90000 - 52488 = 37512$.

54. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои имаат барем две еднакви цифри.

Решение. Вкупно имаме $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ четирицифрени броеви. Од нив $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ немаат еднакви цифри. Според тоа, има $9000 - 4536 = 4464$ четирицифрени броеви кои имаат барем две еднакви цифри.

55. Во едно одделение има 30 ученици. На колку начини може да се избере претседател, секретар и благајник на одделенската заедница.

Решение. За изборот на претседател имаме 30 можности, секретарот можеме да го избереме од преостанатите 29 ученици по изборот на претседателот, а благајникот можеме да го избереме од преостанатите 28 ученици по изборот на претседателот и секретарот. Конечно, изборот на раководството на одделенската заедница може да се направи на $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ начини.

56. Определи го бројот на природните броеви во чиј запис не се појавува цифрата 0 и чиј збир на цифри е еднаков на 5.

Решение. Природни броеви во чиј запис не се појавува цифрата 0 и чиј збир на цифри е еднаков на 5 има:

- едноцифрени – 1 (бројот 5),
- двоцифрени – 4 (броевите 14, 41, 23, 32),
- трицифрени – 6 (броевите 311, 131, 113, 221, 212, 122),
- четирицифрени – 4 (броевите 2111, 1211, 1121, 1112),
- петцифрени – 1 (бројот 11111).

Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

57. Определи го бројот на различните петцифрени броеви на телефони кои почнуваат со 33 и завршуваат со 3.

Решение. Бараните броеви се од видот $\overline{33ху3}$. За цифрите $х$ и $у$ имаме по 10 можности, па затоа бараниот број броеви е еднаков на $10 \cdot 10 = 100$.

58. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани со различни цифри и чиј збир на цифри е еднаков на 10.

Решение. За збирот на цифрите можни се следниве случаи:

$$0 + 1 + 2 + 7 = 0 + 1 + 3 + 6 = 0 + 1 + 4 + 5 = 0 + 2 + 3 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4.$$

За секој од првите четири случаи имаме по $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ броеви од бараниот вид (нулата не може да биде на прво место), а во петтиот случај имаме $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ броеви од бараниот вид. Според тоа, бараниот број броеви е еднаков на $4 \cdot 18 + 24 = 96$.

59. На роденденот на Пабло секој од присутните се ракувал со секој од присутен. Вкупно имало 190 ракувања. Колку лица имало на роденденската прослава на Пабло?

Решение. Нека на прославата имало x лица. Тогаш секој се ракувал точно $x - 1$ пати, па како секое ракување е броено двапати (A се ракува со B и B се ракува со A е едно ракување), добиваме дека вкупниот број ракувања е $\frac{x(x-1)}{2}$. Според тоа, $\frac{x(x-1)}{2} = 190$, односно $x(x-1) = 20 \cdot 19$, од каде заклучуваме дека $x = 20$. Според тоа, на роденденската прослава на Пабло имало 20 гости.

60. Во едно одделение има 17 момчиња и 14 девојчиња. Треба да се формира делегација составена од 2 момчиња и 2 девојчиња. На колку начини може да се избере делегацијата?

Решение. Двете момчиња оже да се изберат на $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$ начини, а двете девојчиња може да се изберат на $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ начин. Според тоа, делегацијата може да се избере на $136 \cdot 91 = 12376$ начини.

61. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои имаат точно две различни цифри.

Решение. Нека a и b се употребените цифри и нека a е цифрата на илјадитите. За четирицифрениот број од саканиот вид ги имаме следниве можности: $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$, $\overline{abba}$, $\overline{abab}$, $\overline{aabb}$, $\overline{abbb}$. Понатаму, за цифрата a имаме 9 можности (не може да биде 0), а за цифрата b имаме 9 можности (мора да е различна од a). Конечно, имаме $7 \cdot 9 \cdot 9 = 567$ четирицифрени броеви запишани со точно две цифри.

62. Определи го бројот на петцифрените броеви кои исто се читаат од лево на десно и од десно на лево.

Решение. Разгледуваните броеви се од видот $\overline{abcba}$. За цифрата a имаме 9 можности, за цифрата b имаме 10 можности и за цифрата c имаме 10 можности. Според тоа, имаме $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ петцифрени броеви од разгледуваниот вид.

63. Колку има петцифрени броеви кои не се менуваат кога листот на кои се запишани се ротира за 180° ? При ротација за 180° не се менуваат цифрите 0, 1 и 8, цифрите 6 и 9 преминуваат една во друга, а останатите цифри губат смисла.

Решение. Нека дадениот број е $\overline{abcde}$. Тогаш $c \in \{0,1,8\}$, $a \in \{1,6,8,9\}$, $b \in \{0,1,6,8,9\}$ и цифрите e и d се еднозначно определени со цифрите a и b , соодветно. Според тоа, имаме $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ броеви од разгледуваниот вид.

64. Определи го бројот на петцифрените броеви кои се деливи со 2 и кои се запишани со различни цифри.

Решение. Разгледуваните броеви се од видот $\overline{abcde}$, каде $e \in \{0,2,4,6,8\}$ и цифрите a,b,c,d се различни.

1) Ако $e = 0$, тогаш имаме $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ броеви.

2) Ако $e \in \{2,4,6,8\}$, тогаш имаме $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 10752$ броеви.

Конечно, имаме $3024 + 10752 = 13776$ броеви кои се деливи со 2 и се запишани со различни цифри.

65. Определи го бројот на непарните седумцифрени броеви чиј производ на цифри е парен број.

Решение. Цифрата на единиците мора да биде непарна, па имаме 5 можности. Најмалку една од преостанатите шест цифри мора да биде парна, бидејќи во спротивно производот на цифрите ќе биде непарен број. Имаме $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625$ шестцифрени броеви кај кои сите цифри се непарни, а вкупно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900000$ шестцифрени броеви. Конечно, имаме $5 \cdot (900000 - 15625) = 4421875$ непарните седумцифрени броеви чиј производ на цифри е парен број

66. Определи го бројот на седумцифрените броеви запишани со различни цифри во кои цифрите 5 и 6 се соседни.

Решение. Цифрите 5 и 6 може да бидат соседни во две варијанти 56 и 65. Во двата случаи комбинацијата на овие две цифри ја набљудуваме како една цифра, а за да се добие седумцифрен број потребни се уште пет цифри, па бараниот број е од видот $\overline{abcdef}$ каде една од булвите е комбинацијата 56 или 65. За првата цифра имаме 8 можности, за втората исто така имаме осум можности, за третата седум отн. Конечно, вкупниот број можности, т.е. бараниот број броеви е

$$2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 107520.$$

67. Определи го бројот на шестцифрените природни броеви кои се запишани со различни цифри и кај кои цифрите 0, 1 и 2 се соседни.

Решение. Цифрите 0, 1 и 2 може да бидат соседни во еден од следниве шест случаи: 012, 120, 201, 102, 021, 210. Во сите шест комбинации овие цифри ги разгледуваме како една цифра, па барањот број е од видот $\overline{abcd}$, каде наместо една од буквите е запишана една од наведените шест комбинации.

- 1) Ако тројка е на место буквата a , тогаш за првата цифра имаме 4 можности, за втората цифра имаме 7 можности, за третата цифра имаме 6 можности и за четвртата цифра имаме 5 можности, па затоа имаме $4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$ броеви од саканиот вид.
- 2) Ако на местото на првата цифра не е тројката, тогаш за првата цифра имаме 7 можности. Сега кога тројката се наоѓа на местото на некоја од буквите b, c или d , тогаш за таа буква имаме 6 можности, а за преостанатите две букви имаме 6, односно 5 можности. Според тоа, во овој случај имаме $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 3780$ броеви од саканиот вид.

Конечно, имаме $840 + 3780 = 4620$ шестцифрените природни броеви кои се запишани со различни цифри и кај кои цифрите 0, 1 и 2 се соседни.

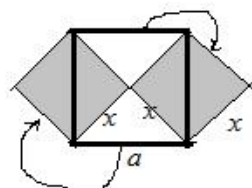
IV.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Даден квадрат расечи го на делови од кои ќе составиш два складни квадрати.

Решение. Ако должината на страната на дадениот квадрат е a , а должината на страната на двата складни триаголници е x , тогаш

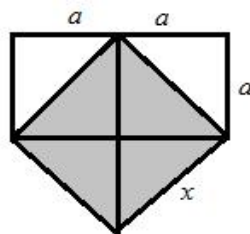
$$a^2 = 2x^2, \text{ т.е. } x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Според тоа, треба да ги повлечеме дијагоналите на дадениот квадрат и од четирите складни правоаголници со хипотенуза a и катети $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ да составиме два складни квадрати (цртеж десно).



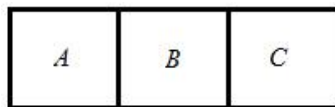
69. Два складни квадрати расечи ги на делови, а потоа од нив состави нов квадрат.

Решение. Ако должината на страната на двата складни триаголници е a , а должината на страната на новиот квадрат е x , тогаш $x^2 = 2a^2$, т.е. $x = a\sqrt{2}$. Значи, ако во двата складни триаголници повлечеме по една дијагонала ќе добиеме четири складни правоаголници со катети еднакви на a и хипотенузи $x = a\sqrt{2}$. Од овие четири триаголници составуваме квадрат со должина на страна $x = a\sqrt{2}$ (види цртеж десно).

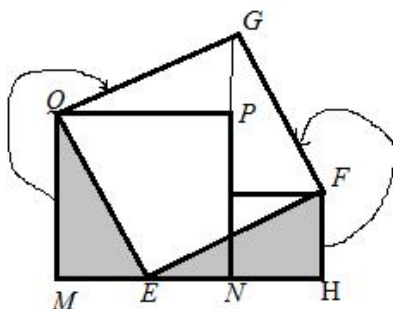


70. Со расекување од три складни квадрати состави нов квадрат.

Решение. Нека се дадени складните квадрати A, B и C (цртеж десно). Прво со расекување од квадратите A и B го составуваме квадратот $MNPQ$ и до него го ставаме квадратот C (цртеж лево). Сега имаме



$$\overline{MN} = \overline{NH} = x \text{ и } \overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM} = x\sqrt{2},$$



Ако расекувањето го направиме по отсечките QE и FE добиваме два складни правоаголници со хипотенузи

$$\overline{EF} = \overline{QE} = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{2})^2} = x\sqrt{3}.$$

Конечно, ако триаголниците QEM и EFH ги поставиме како горниот цртеж го добиваме квадратот $EFGQ$

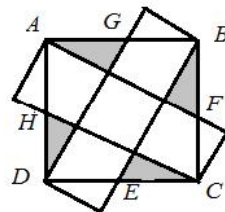
и тоа е бараниот квадрат.

71. Даден квадрат расечи го на делови од кои ќе составиш три складни квадрати.

Упатство. Реализирај ја обратната постапка од постапката во претходната задача со која од три складни квадрати состави еден квадрат.

72. Даден квадрат расечи го на делови од кои ќе составиш пет складни квадрати.

Решение. Нека дадениот квадрат $ABCD$ и нека точките E, F, G, H се средини на страните DC, CB, BA, AD , соодветно. Ги повлекуваме отсечките AF, BE, CH, DG и дадениот квадрат го расекуваме по овие отсечки. Сега сивите триаголници добиени со расекувањето ги поставуваме на местата на белите триаголници, со што добиваме пет складни квадрати. Докажи!



73. Марко имал коцка чии рабови се со целобројни должини и истата ја обоил од сите страни. Потоа коцката ја расекол на единечни коцки. Неговата сестра Вера сакала да ја определи должината на работ на коцката, но Марко само и соопштил дека има 864 коцки кои се обоени од една страна. Помогни и на Вера да ја определи должината на работ на коцката.

Решение. Нека должината на коцката е n . По сечењето на коцката имаме 4 коцки со три обоени страни, $12(n-2)$ коцки со две обоени страни, $6(n-2)^2$ коцки со една обоена страна и $(n-2)^3$ коцки без обоена страна. Од условот на задачата следува $6(n-2)^2 = 864$, па затоа $(n-2)^2 = 144$, од каде добиваме $n-2 = 12$, т.е. $n = 14$.

74. Дали од множеството $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ може да се изберат помалку од 58 броеви чиј збир е еднаков на збирот на преостанатите броеви од ова множество?

Решение. Збирот на броевите од даденото множество е

$$1 + 2 + 3 + \dots + 200 = \frac{200 \cdot 201}{2} = 20100.$$

Збирот на најголемите 58 броеви од даденото множество е

$$\begin{aligned} 143 + 144 + \dots + 200 &= 58 \cdot 142 + 1 + 2 + 3 + \dots + 58 = 8236 + \frac{58 \cdot 59}{2} \\ &= 9947 < 10050 = \frac{20100}{2}. \end{aligned}$$

Бидејќи збирот на најголемите 58 броја е помал од половината на збирот на сите броеви, заклучуваме дека бараната поделба на множеството $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ не е можна.

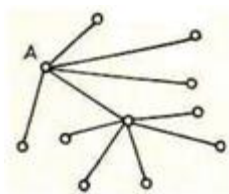
75. Збирот на седум различни броеви е 100. Дали од овие броеви може да се изберат три чиј збир не е помал од 50?

Решение. Нека $a + b + c + d + e + f + g = 100$ и $a < b < c < d < e < f < g$. Треба да определиме броеви e, f, g такви што $e + f + g \geq 50$. На пример, тоа се броевите: 10, 12, 13, 14, 16, 17 и 18. Имаме

$$10 + 12 + 13 + 14 + 16 + 17 + 18 = 100 \text{ и } 51 = 16 + 17 + 18.$$

76. Пет отсечки имаат заедничка точка A . Потоа од некои од слободните краеве на овие отсечки (не од точката A) се конструирани пет нови отсечки и тоа е повторено повеќе пати. На крајот Петар избројал 700 слободни краеве. Дали Петар точно броел?

Решение. Нека од било кој слободен крај се конструирани 5 отсечки. Тогаш наместо 1 слободен крај имаме 5 нови слободни краеве, што значи дека бројот на слободните краеве се зголемува за 4. Знали, ако постапката се повтори k пати, тогаш бројот на слободните краеве се зголемува за $4k$. Конечно, вкупниот број слободни краеве ќе биде $5 + 4k$, што не е можно бидејќи $700 = 4 \cdot 175$.

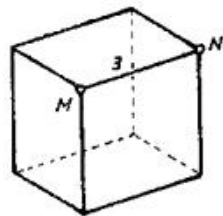


77. Во еден ред стојат 1000 ученици. Дозволено е своите места во редот да ги заменат само оние ученици кои имаат заеднички сосед. Дали со ваква промена на местата може ученик кој стои на едниот крај на редот да стигне на другиот крај на редот?

Решение. Со броевите од 1 до 1000 да ги означиме сите места на кои стојат учениците. Според условот на задачата местата може да ги заменат само учениците чиј број на местата се разликуваат за 2. Значи, ученик чиј број е непарен може да го замени местото само со ученик чиј број е непарен. Според тоа, ученикот кој се наоѓа на местото 1 никогаш не може да дојде на местото 1000.

78. Дали може различните рабови на коцката да се нумерираат со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 така што збирот на броевите придружени на три раба кои имаат заедничко теме, за сите темиња на коцката е еднаков?

Решение. На пример, бројот 3 со кој е означен некој раб MN (цртеж десно), влегува во збирот на кој соодветствува на темето M и збирот кој соодветствува на темето N . Затоа секој од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12. Според тоа, збирот на осум еднакви зборови треба да



биде еднаков на $2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12)=156$, што не е можно бидејќи бројот 156 не е делив со 8.

79. Во кутиите A, B, C има топчиња: во кутијата A има 2, во кутијата B има 3 и во кутијата C има 4 топчиња. Два играчи ја играат следнава игра: наизменично земаат од произволна кутија произволен број топчиња. Победник е играчот по чиј потез сите кутии се празни. Како треба да игра првиот играч за сигурно да го победи својот противник?

Решение. Првиот играч треба да земе од кутијата C три топчиња, така што потоа кутиите содржат редоследно 2, 3 и 1 топче. Понатаму, како и да постапи вториот играч, првиот играч може да остави состојба во која по неговиот потег едната кутија ќе остане празна, а во другите две кутии ќе има еднаков број топчиња. Јасно, во случајов првиот играч ја добива играта.

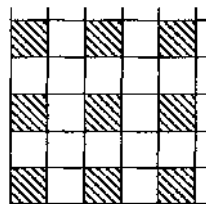
80. Во p точки од кружницата се запишани знаци плус, а во m точки се запишани знаци минус (во секоја точка по еден знак). Кружницата ја обиколуваме обратно од движењето на стрелките на часовникот. Нека x е бројот на знаци плус кои следуваат по знак плус, а y е бројот на знаци минус кои следуваат по знак минус. Докажи дека $p - m = x - y$.

Решение. Со d ќе го означиме бројот на премини од знак плус кон знак минус. Јасно, бројот d е еднаков и на бројот на премини од знак минус кон знак плус. Бројот x на знаци плус кои следуваат по знак плус собрани со бројот на премини d од знак плус кон знак минус го дава бројот p на знаци плус запишани во точките од кружницата (бројот на знаци плус кои се први во низа знаци плус и кои не следуваат по знак плус е еднаков на бројот од премини од знак плус кон знак минус).

Истото е точно и за бројот на знаци минус. Значи $p = x + d$ и $m = y + d$. Според тоа $d = p - x$ и $d = m - y$, од каде добиваме $p - x = m - y$, односно $p - m = x - y$.

81. Правоаголна табла со димензии $m \times n$ е покриена со 2×2 и 1×4 тетрамина, кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од правоаголникот. Докажи, дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетрамината 2×2 се замени со тетрамино 1×4 .

Решение. Броејќи од долниот лев агол на таблата со димензии $m \times n$ да ги обоиме непарните квадратчињата на непарните редови (цртеж десно). При вакво боење 1×4 тетрамино покрива или две или ниту едно обоено квадратче, а 2×2 тетрамино со покрива едно обоено квадратче. Ќе разгледаме два случаја.



Нека со 2×2 тетрамината се покриени $2k+1$ обоени полиња, а со 1×4 се покриени $2m$ обоени полиња, т.е. вкупно се покриени $2(k+m)+1$ обоени полиња. Ако едно од тетрамината 2×2 се замени со тетрамино 1×4 , тогаш вкупно ќе да бидат покриени $2(k+m+1)$ обоени полиња, што е противречност бидејќи бројот на обоените полиња е константен.

Нека со 2×2 тетрамината се покриени $2k$ обоени полиња, а со 1×4 се покриени $2m$ обоени полиња, т.е. вкупно се покриени $2(k+m)$ обоени полиња. Ако едно од тетрамината 2×2 се замени со тетрамино 1×4 , тогаш вкупно ќе да бидат покриени $2(k+m)+1$ обоени полиња, што е противречност бидејќи бројот на обоените полиња е константен.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетрамината 2×2 се замени со тетрамино 1×4 .

82. Дали може квадратна табла со димензии 10×10 да се покрие со 1×4 тетрамина?

Решение. Да ја обоиме таблата со како во претходната задача. При вакво боење имаме 25 обоени квадратчиња, што е непарен број, а секое 1×4 тетрамино покрива 0 или 2 обоени квадратчиња, т.е. со 25 тетрамина ќе бидат покриени парен број обоени квадратчиња. Според тоа, квадратна табла со димензии 10×10 не може да се покрие со 1×4 тетрамина.

V ГЕОМЕТРИЈА

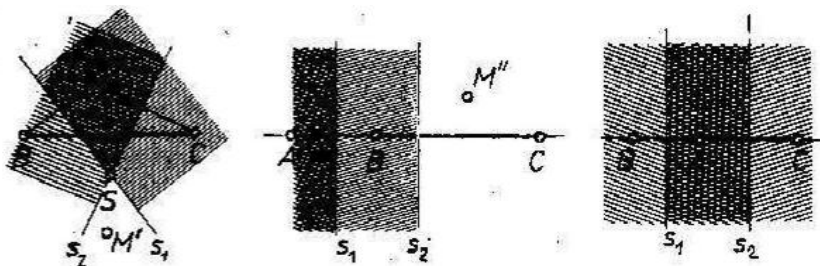
V.1. ТРИАГОЛНИК

- Нека A, B и C се точки во рамнината такви што за секоја точка M во рамнината е исполнет барем еден од следниве два услови

$$1) \overline{AM} < \overline{BM} \qquad 2) \overline{AM} < \overline{CM}.$$

Докажи дека точката A припаѓа на отсечката BC .

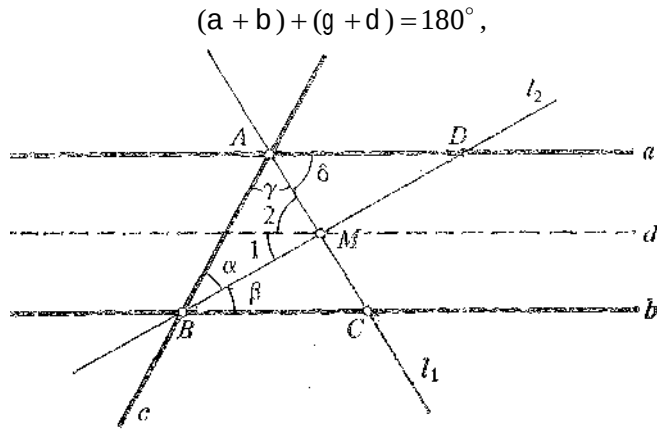
Решение. Нека претпоставиме дека точката A не лежи на правата BC . Множеството од сите точки кои го задоволуваат условот 1) е полурамнина определена со симетралата s_1 на отсечката AB (штрафраниот дел на долниот лев цртеж). Слично множеството од сите точки кои го задоволуваат условот 2) е полурамнина определена со симетралата s_2 на отсечката AC (исто така штрафран дел на левиот цртеж). Нека $S = s_1 \cap s_2$. Сега точките во внатрешноста на аголот $s_1 s_2$ нема да задоволуваат ниту еден од условите 1) и 2), што е противречност. Од добиената противречност следува дека точката A лежи на правата BC .



Нека точката A не припаѓа на отсечката BC . Тогаш постојат точки, како на пример M'' , кои не ги задоволуваат условите 1) и 2), средниот горен цртеж. Ако пак точката A припаѓа на отсечката BC , тогаш секоја точка M од рамнината го задоволува условот 1) или условот 2). На тој начин докажавме дека точката A мора да припаѓа на отсечката BC .

- Докажи дека симетралите на l_1 и l_2 на два припадни внатрешни агли, добиени при пресеко на две паралелни прави a и b со трета права c се заемно нормални.

Решение. Знаеме дека $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$, односно



(види цртеж). Но, по конструкција имаме $a = b$, $g = d$, па затоа $2a + 2g = 180^\circ$, од каде следува $a + g = 90^\circ$. Конечно, од триаголникот ABM добиваме

$$\angle AMB = 180^\circ - (a + g) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

што значи дека $l_1 \perp l_2$.

3. Даден рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) со тежиште P . Докажи дека правата CP е симетрала на аголот при темето C .

Решение. Нека AM и BN се тежишните линии повлечени кон краците на триаголникот (цртеж десно). Лесно се докажува дека $\triangle ABM \cong \triangle ABN$. Оттука следува дека

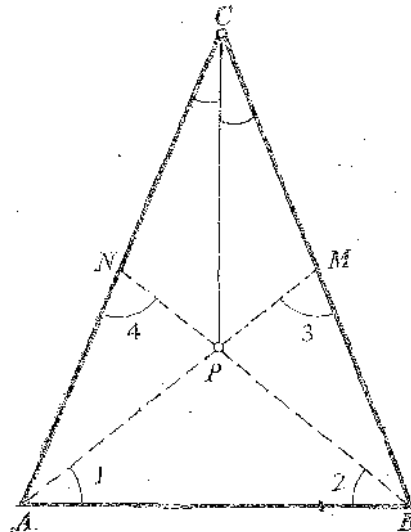
$$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4 \text{ и } \overline{AM} = \overline{BN}.$$

Од $\angle 1 = \angle 2$ следува дека триаголникот ABP е рамнокрак, т.е.

$$\overline{AP} = \overline{BP}.$$

$$\overline{AP} = \overline{BP}, \overline{AC} = \overline{BC}$$

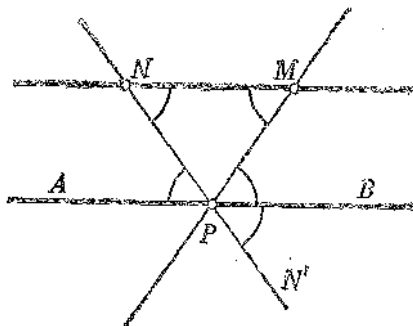
и PC е заедничка страна, па затоа $\triangle APC \cong \triangle PCB$, односно $\angle APC = \angle PCB$.



4. Низ точката P која припаѓа на правата AB се повлечени две прави, еднакво наклонети кон AB . На нив во едната полурамнина опреде-

лена со AB се нанесени еднакви отсечки PM и PN . Докажи дека правата MN е паралелна на правата AB .

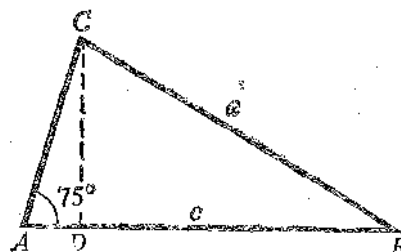
Решение. Од $\overline{PM} = \overline{PN}$ следува дека триаголникот PMN е рамнокрак и $\angle PMN = \angle PNM$ (цртеж десно). Според условот на задачата важи $\angle APN = \angle BPM$. Но, $\angle APN = \angle N'BP$ (како накрсни агли), па затоа $\angle N'PB = \angle BPM$. Од друга страна $\angle N'PM$ е надворешен за триаголникот PNM и затоа $\angle N'PM = \angle PMN + \angle PNM$. Значи, $2\angle BPM = 2\angle PMN$, од каде добиваме $\angle BPM = \angle PMN$. Но, $\angle BPM$ и $\angle PMN$ се агли на трансверзалата PM на правите AB и MN , па затоа $AB \parallel MN$.



5. Висината CD во триаголникот ABC е еднаква на половина од страната AB . Определи го $\angle ACB$, ако $\angle CAB = 75^\circ$.

Решение. Нека $\overline{AB} = c$ и $\overline{BC} = a$ (цртеж десно). Нека претпоставиме дека $c > a$. Тогаш $\angle ACB > 75^\circ$ (во триаголник спроти поголема страна лежи шпоголем агол) и затоа

$$\begin{aligned}\angle ABC &= 180^\circ - (\angle ACB + \angle CAB) \\ &= 180^\circ - 75^\circ - \angle ACB \\ &= 105^\circ - \angle ACB \\ &< 105^\circ - 75^\circ = 30^\circ.\end{aligned}$$



Од правоаголниот триаголник CDB наоѓаме дека $\overline{CD} < \frac{a}{2}$ (CD лежи спроти $\angle ABC < 30^\circ$). Но, според претпоставката $c > a$, т.е. $\frac{c}{2} > \frac{a}{2}$. Тогаш $\overline{CD} < \frac{a}{2} < \frac{c}{2}$, односно $\overline{CD} < \frac{\overline{AB}}{2}$, што противречи на условот на задачата. Од добиената противречност следува дека претпоставката $c > a$.

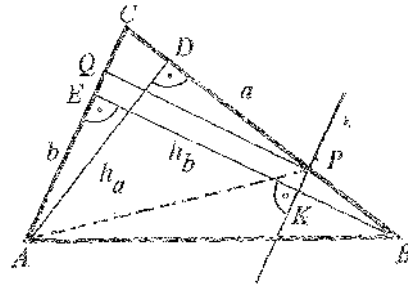
Аналогно се докажува дека не е можно и $c < a$.

Според тоа, $a = c$, т.е. триаголникот ABC е рамнокрак со основа AC , па затоа $\angle ACB = 75^\circ$.

6. Во остроаголен триаголник ABC должините на страните AC и BC се еднакви на b и a , $a > b$ соодветно, а висините AD и BE имаат должини h_a и h_b , соодветно. Над BE , со почеток во B во насока на E , е нанесена отсечка BK , $\overline{BK} = h_b - h_a$. Од точката K е повлечена нормала на BE , која ја сече BC во точката P . Докажи дека

а) $\overline{PB} = a - b$, б) $\angle APC = \angle APK$.

Решение. Низ точката P повлекуваме $PQ \perp AC$ или $PQ \parallel KE$ (цртеж десно). Бидејќи $AC \perp KE$ и $KP \perp KE$, важи $AC \parallel KP$. Оттука следува дека $\overline{PQ} = \overline{KE}$ (две паралелни прави од други две паралелни прави отсекуваат еднакви отсечки). Но, $\overline{KE} = \overline{BE} - \overline{BK} = h_b - (h_b - h_a) = h_a$. Значи, $\overline{PQ} = h_a$.



Триаголникот ACP е рамнокрак, бидејќи две негови висини се со еднаква должина. Затоа $\angle CAP = \angle APC$ и $\overline{CP} = \overline{AC} = b$. Конечно, $\overline{PB} = \overline{CB} - \overline{CP} = a - b$.

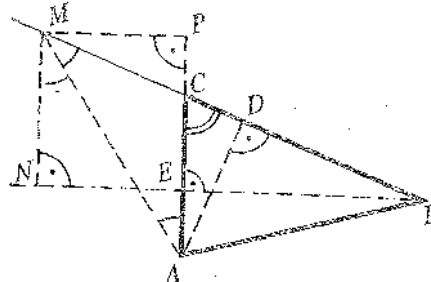
б) Видовме дека $AC \parallel KP$, па затоа $\angle CAP = \angle APK$. Од друга страна $\angle CAP = \angle APC$, па затоа $\angle APC = \angle APK$.

7. Даден е триаголник ABC , во кој AD и BE се висини повлечени кон страните BC и AC , соодветно. На продолжението на страната BC преку темето C земена е точка M таква што $\overline{CM} = \overline{AC}$. Од точката M е повлечена нормала на продолжението на висината BE , која висината ја сече во точка N . Докажи дека

а) $\overline{BN} = \overline{BE} + \overline{AD}$, б) $\angle NMA = \angle AMC = \frac{1}{2} \angle ACB$.

Решение. а) Од $\overline{CM} = \overline{AC}$ следува дека триаголникот ACM е рамнокрак (цртеж десно). Според тоа, висините повлечени кон неговите краи се еднакви, т.е. $\overline{AD} = \overline{MP}$.

Бидејќи MN и AP се нормални на BN , важи $MN \parallel AP$.



Аналогно добиваме дека $MP \parallel NE$. Првиот пар паралелни прави на вториот пар паралелни прави отсекува отсечки со еднакви должини, па затоа $\overline{AD} = \overline{NE}$. Конечно, $\overline{BN} = \overline{BE} + \overline{NE} = \overline{BE} + \overline{AD}$.

б) Имаме $\angle NMA = \angle MAC$ (правите MN и AP се паралелни, а AM е нивна трансферзала). Но, $\angle MAC = \angle AMC$ (агли при основата на рамнокракиот триаголник MAC). Затоа $\angle NMA = \angle AMC$.

Но, $\angle AMC = \frac{1}{2} \angle ACB$, бидејќи $\angle AMC$ е надворешен агол за рамнокракиот триаголник ACM . Конечно,

$$\angle NMA = \angle AMC = \frac{1}{2} \angle ACB.$$

8. Во триаголникот ABC нормалите подигнати во средините M и N соодветно на страните AC и BC се сечат во точката P . Ако P припаѓа на симетралата на $\angle ACB$, докажи дека

а) триаголникот ABC е рамнокрак.

б) ако точката P лежи внатре во триаголникот ABC докажи дека $\angle ACB < \angle APB$.

Решение. а) Разгледај ги триаголниците MPC и PNC и искористи го условот дека M и N се средини на страните AC и BC , соодветно.

б) Нека симетралата CP на $\angle ACB$ ја сече страната AB во точката D (цртеж десно). Тогаш

$$\angle APD = \angle ACD + \angle CAP$$

(надворешен агол за триаголникот ACP). Следува, $\angle APD > \angle ACD$.

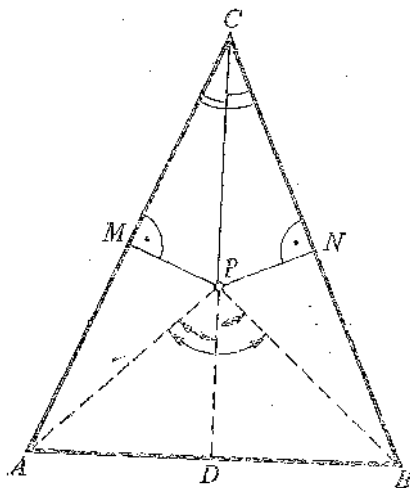
Аналогно, $\angle DCB < \angle DPB$. Ги собираме последните две неравенства и добиваме

$$\angle ACD + \angle DCB < \angle APD + \angle DPB,$$

односно

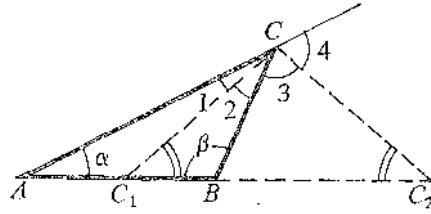
$$\angle ACB < \angle APB,$$

што и требаше да се докаже.



9. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C на триаголникот ABC , во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$, се еднакви. Докажи дека $\angle ABC = \angle BAC + 90^\circ$.

Решение. Нека $\angle BAC = a$ и $\angle ABC = b$ (цртеж десно). Од $\overline{AC} > \overline{BC}$ следува $b > a$. Бидејќи симетралите CC_1 и CC_2 се заемно нормални, заклучуваме дека триаголникот C_1CC_2 е рам-



нокрак и правоаголен. Затоа $\angle CC_1C_2 = \angle C_1C_2C = 45^\circ$. Понатаму, b е надворешен агол за триаголникот CBC_2 и затоа $b = 45^\circ + \angle 3$. Но, $\angle 3 + \angle 4$ е надворешен за триаголникот ACB и затоа $\angle 3 + \angle 4 = a + b$. Според условот $\angle 3 = \angle 4$ и затоа $2\angle 3 = a + b$, т.е. $\angle 3 = \frac{a+b}{2}$. Конечно, $b = 45^\circ + \angle 3 = 45^\circ + \frac{a+b}{2}$, од каде добиваме $b = 90^\circ + a$.

10. Во триаголникот ABC ($\overline{AC} > \overline{BC}$) е повлечена симетралата CD , $D \in AB$ на внатрешниот $\angle ACB$. Докажи дека $\overline{AD} > \overline{BD}$.

Решение. Нека E е точка од AC таква што $\overline{CE} = \overline{CB}$ (цртеж десно). Јасно, $\triangle EDC \cong \triangle DBC$, па затоа $\overline{DE} = \overline{DB}$ и $\angle 5 = \angle 6$. Од

$$\angle 3 + \angle 5 < 180^\circ$$

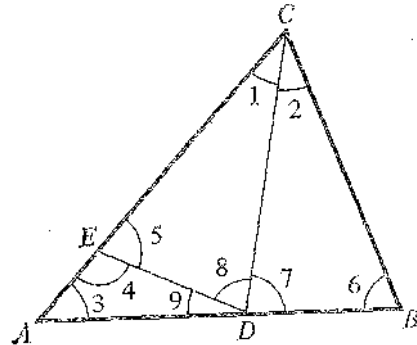
следува

$$\angle 3 < 180^\circ - \angle 5. \quad (1)$$

Но, $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, па затоа

$$\angle 4 = 180^\circ - \angle 5. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\angle 3 < \angle 4$. Последното значи дека за триаголникот ADE важи $\overline{AD} > \overline{DE}$ и како $\overline{DE} = \overline{DB}$ заклучуваме дека $\overline{AD} > \overline{BD}$.



11. На страната AC на триаголникот ABC од A кон C е земена точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AB}$, а на продолжението на CA преку A земаме точка P таква што $\overline{AP} = \overline{AB}$. Докажи дека BM и BP е паралелна соодветно на симетралата на надворешниот и внатрешниот агол во темето A и дека триаголникот PBM е правоаголен.

Решение. Триаголникот PBA е рамнокрак, па затоа $\angle 1 = \angle 2$ (цртеж десно). Понатаму,

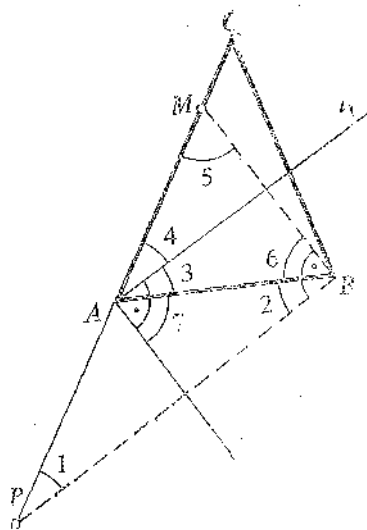
$$\angle 1 + \angle 2 = \angle CAB = \angle 3 + \angle 4$$

и како $\angle 3 = \angle 4$ добиваме

$$2\angle 3 = 2\angle 2, \text{ т.е. } \angle 3 = \angle 2.$$

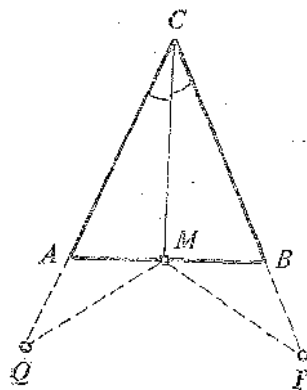
Бидејќи $\angle 3$ и $\angle 2$ се агли на трансферзалата AB на правите PB и l_1 , од $\angle 3 = \angle 2$ следува дека $l_1 \parallel PB$. Аналогно се докажува дека $BM \parallel l$.

Сега, од $\angle 3 + \angle 7 = 90^\circ$, добиваме дека $\angle 2 + \angle 6 = 90^\circ$. Според тоа, триаголникот PBM е правоаголен.



12. Симетралата на внатрешниот агол на триаголникот ABC го дели периметарот на овој триаголник на два еднакви дела. Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

Решение. Нека CM е симетралата на внатрешниот $\angle ACB$ на триаголникот ABC (цртеж десно) и нека CM го дели периметарот на триаголникот на два еднакви дела $\overline{CA} + \overline{AM} = \overline{CB} + \overline{BM}$. На продолженијата на страните CB и CA наоѓаме точки Q и P такви што $\overline{AQ} = \overline{AM}$ и $\overline{BP} = \overline{BM}$. Од признакот SAS следува дека $\triangle QMC \cong \triangle PMC$, па затоа $\overline{MP} = \overline{MQ}$ и $\angle CQM = \angle CPM$. Триаголниците QMA и

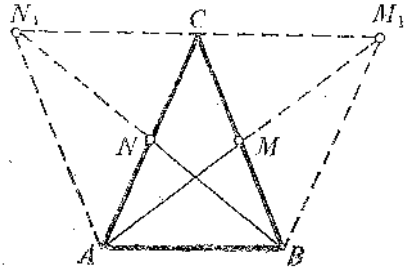


PMB се рамнокраки (по услов), па затоа $\angle AMQ = \angle AQM$ и $\angle BMP = \angle BPM$. Но, претходно видовме дека $\angle AQM = \angle BPM$, па затоа $\angle AMQ = \angle BMP$.

Сега, од претходно изнесеното според признакот ASA следува дека $\triangle QMA \cong \triangle PMB$. Значи, $\overline{AM} = \overline{BM}$, т.е. симетралата на аголот е тежишна линија. Последното значи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

13. Докажи дека ако во еден триаголник две тежишни линии се со иста должина, тогаш тој е рамнокрак.

Решение. Нека за триаголникот ABC тежишните линии AM и BN се еднакви (цртеж десно). На полуправите AM и BN соодветно наоѓаме точки M_1 и N_1 такви што $\overline{MM_1} = \overline{AM}$ и $\overline{NN_1} = \overline{BN}$ и ги поврзуваме точките M_1 и N_1 соод-



ветно со точките B и A . Бидејќи дијагоналите на добиените четириаголници ABM_1C и $ABCN_1$ се половат, тие се паралелограми. Затоа $CM_1 \parallel AB$ и $N_1C \parallel AB$. Бидејќи отсечките CM_1 и N_1C минуваат низ точката C и се паралелни со страната AB , заклучуваме дека точките N_1, C, M_1 се колинеарни, т.е. лежат на правата N_1M_1 која е паралелна со AB .

Според тоа, четириаголникот ABM_1N_1 е трапез и како неговите дијагонали AM_1 и BN_1 се еднакви, тој е рамнокрак трапез. Според тоа, $\overline{BM_1} = \overline{AN_1}$.

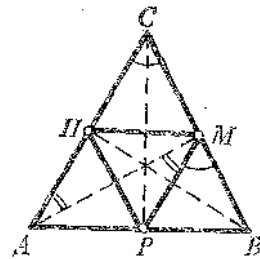
Бидејќи $\overline{BM_1} = \overline{AC}$ и $\overline{AN_1} = \overline{BC}$ како спротивни страни на паралелограмите ABM_1C и $ABCN_1$ и $\overline{BM_1} = \overline{AN_1}$, добиваме дека $\overline{AC} = \overline{BC}$, т.е. триаголникот ABC е рамнокрак.

14. Даден е рамностран триаголник ABC . Висините на триаголникот ги сечат страните во точките M, H и P . Докажи дека триаголникот MHP е рамностран и дека висините на триаголникот ABC се симетрала на агли на триаголникот MHP .

Решение. Триаголниците APH , PBM и HMC се складни, бидејќи имаат по две еднакви страни и агол меѓу нив еднаков на 60° (цртеж десно). Знач, $\overline{HP} = \overline{PM} = \overline{MH}$, т.е. триаголникот MHP е рамностран.

Имаме $AC \parallel MP$, па затоа $\angle PMA = \angle CAM$.

Но, $\angle CAM = 30^\circ$ и како $\angle PMH = 60^\circ$, заклучуваме дека

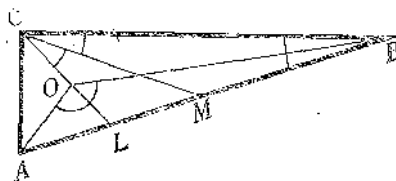


$$\angle AMH = 60^\circ - \angle PMA = 60^\circ - \angle CAM = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

т.е. AM е симетрала на $\angle PMH$. Аналогно се докажува дека BH и CP се симетрали на $\angle PHM$ и $\angle HPM$, соодветно.

15. Определи ги острите агли на правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето C , ако аголот меѓу симетралата на правиот агол и тежишната линија повлечена од темето C е еднаков на $\frac{1}{5}$ од тапиот агол кој го формираат симетралите на $\angle A$ и $\angle B$.

Решение. Нека CM и CL се тежишната линија и симетралата на аголот, соодветно (цртеж десно). Триаголникот ABC не е рамнокрак, бидејќи во тој случај $CL \equiv CM$ и аголот меѓу нив ќе биде еднаков на нула, а $\angle AOB$ меѓу симетралите на $\angle A$ и $\angle B$ е различен од нула.



Нека $\angle A > \angle B$. Од $\overline{CM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AM} = \overline{MB}$ следува дека триаголникот MBC е рамнокрак, па затоа $\angle MCB = \angle B$. Бидејќи CL е симетралата на правиот агол имаме $\angle LCB = \angle LCA = 45^\circ$. Значи,

$$\angle LCM = \angle LCB - \angle MCB = 45^\circ - \angle B. \quad (1)$$

Нека AO и BO се симетралите на $\angle A$ и $\angle B$, соодветно. Тогаш од триаголник AOB следува

$$\angle AOB = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B\right) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ. \quad (2)$$

Според условот имаме

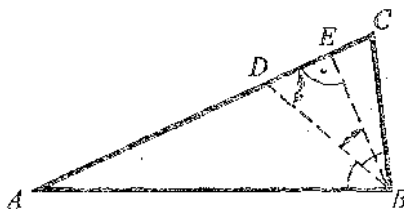
$$\angle LCM = \frac{1}{5} \angle AOB. \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува $45^\circ - \angle B = \frac{1}{5} \cdot 135^\circ$, т.е. $\angle B = 18^\circ$. Конечно,

$$\angle A = 90^\circ - \angle B = 72^\circ.$$

16. Во триаголникот ABC важи $\angle C - \angle A = 60^\circ$, BD е симетрала на агол и BE е висина (точките D и E лежат на AC). Определи ја должината на DE ако $\overline{BD} = 2$ см.

Решение. Од триаголникот ABC имаме $\angle C + \angle A = 180^\circ - \angle B$ (цртеж десно) и како според условот



важи $\angle C - \angle A = 60^\circ$, добиваме $2\angle C = 240^\circ - \angle B$, односно

$$\angle C = 120^\circ - \frac{1}{2}\angle B.$$

Од триаголникот BDC имаме $\angle BDC = 180^\circ - (\angle C + \frac{1}{2}\angle B)$, па ако замениме за $\angle C$ добиваме

$$\angle BDC = 180^\circ - (120^\circ - \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle B) = 60^\circ.$$

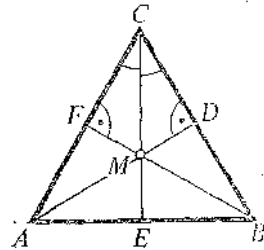
Тогаш од правоаголниот триаголник BED следува $\angle DBE = 30^\circ$. Значи, помалата катета е еднаква на половина од хипотенузата, т.е. $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{DB} = 1\text{ cm}$.

17. Во триаголникот ABC висината AD ја полови страната BC . Симетралата CE на аголот во темето C ја сече висината AD во точка M која е на растојание 1 cm од страната AC . Должината на отсечката CM е еднаква на 2 cm . Определи го растојанието на точката M до страната BC и до темето B .

Решение. Според условот на задачата $MF \perp AC$, $\overline{MF} = 1\text{ cm}$ и $\overline{MC} = 2\text{ cm}$ (цртеж десно). Затоа од правоаголниот триаголник MFC следува дека $\angle FCM = 30^\circ$. Значи,

$$\angle MCD = \angle FCM = 30^\circ,$$

па затоа од правоаголниот триаголник MDC следува $\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{MC} = 1\text{ cm}$. Според тоа, $\triangle MDC \cong \triangle MDB$, што значи $\overline{MB} = \overline{MC} = 2\text{ cm}$.



18. Хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е продолжена до точките M и N така што $\overline{MA} = \overline{MC}$ и $\overline{NB} = \overline{BC}$. Точките M, A, B, N се распоредени последователно во посочениот редослед. Симетралите на $\angle CAM$ и $\angle CBN$ се сечат во точката P .

а) Определи ги $\angle MCN$ и $\angle APB$.

б) Определи го видот на триаголниците MPC и CPN .

Решение. а) Нека $\angle BAC = a$ и $\angle ABC = b$. Тогаш $a + b = 90^\circ$, па затоа

$$\angle MCN = 90^\circ + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 135^\circ.$$

Понатаму,

$$\angle PAB = \angle MAQ = \frac{1}{2} \angle MAC \text{ и}$$

$$\angle MAC = 90^\circ + b,$$

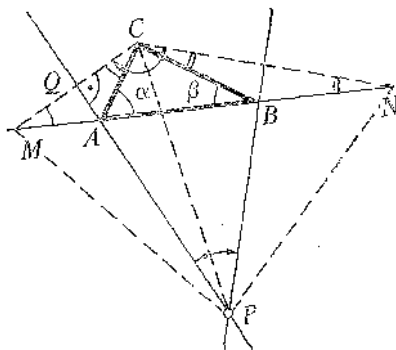
па затоа

$$\angle PAB = \frac{1}{2}(90^\circ + b) = 45^\circ + \frac{b}{2}.$$

Аналогно наоѓаме $\angle PBA = 45^\circ + \frac{a}{2}$.

Сега од триаголникот APB добиваме

$$\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle PBA) = 180^\circ - (45^\circ + \frac{b}{2} + 45^\circ + \frac{a}{2}) = 45^\circ.$$



б) Бидејќи AQ е симетрала на агол на рамнокракиот триаголник MAC , таа истовремено е и висина и тежишна линија на овој триаголник. Бидејќи AQ минува и низ точката P , добиваме дека PQ е висина и тежишна линија и на триаголникот MPC . Според тоа, триаголникот MPC е рамнокрак.

Аналогно се докажува дека триаголникот CPN е рамнокрак.

19. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) аголот при врвот C е еднаков на 20° . Низ темето B се повлечени отсечки BD и BE (точките D и E припаѓаат на страната AC) такви што $\angle ABD = 50^\circ$ и $\angle ABE = 60^\circ$. На отсечката BE е земена точка K таква што $\overline{AD} = \overline{BK}$. Докажи дека:

а) триаголникот BEC е рамнокрак,

б) триаголникот ABK е рамностран.

Решение. а) Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак и $\angle C = 20^\circ$, важи

$$\angle CAB = \angle CBA = \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ.$$

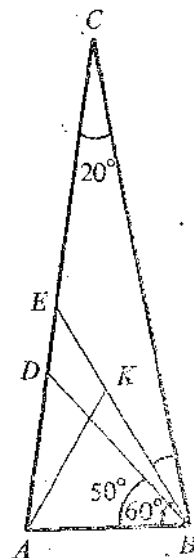
Затоа

$$\angle CBE = 80^\circ - \angle ABE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

Но, $\angle C = 20^\circ$, па затоа триаголникот BCE е рамнокрак.

б) Имаме $\angle ABD = 50^\circ$ и $\angle BAD = 80^\circ$, па затоа

$$\angle ABD = 180^\circ - (80^\circ + 50^\circ) = 50^\circ,$$



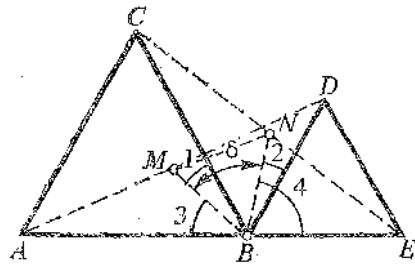
т.е. триаголникот ABD е рамнокрак, односно $\overline{AD} = \overline{AB}$. Но, според условот $\overline{AD} = \overline{BK}$, па затоа $\overline{AB} = \overline{BK}$. Значи, триаголникот ABK е рамнокрак и важи $\angle ABK = 60^\circ$, од каде следува дека триаголникот ABK е рамнострани.

20. На продолжението BE на страната AB на рамностраниот триаголник ABC е конструиран друг рамностран триаголник BED , кој е во истата полурамнина во однос на AB во која лежи и триаголникот ABC . Точката M е средина на отсечката AD , а точката N е средина на отсечката CE . Докажи дека триаголникот BMN е рамнострани.

Решение. Од $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BD} = \overline{BE}$

и $\angle ABD = \angle CBE = 120^\circ$ следува дека $\triangle ABD \cong \triangle BEC$ (цртеж десно).

Според тоа, $\overline{AD} = \overline{CE}$ и $\overline{BM} = \overline{BN}$ како соодветни страни и тежишни линии во складни триаголници. Според тоа, триаголникот MBN е рамнокрак.



Понатаму, $d + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ - \angle 1$ и $\angle 4 = 60^\circ + \angle 2$, па затоа $d + 60^\circ - \angle 1 + 60^\circ + \angle 2 = 180^\circ$, т.е.

$$d - \angle 1 + \angle 2 = 60^\circ. \quad (1)$$

Од $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AM} = \overline{CN}$ и $\overline{BM} = \overline{BN}$ следува $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, па затоа $\angle ABM = \angle CBN$.

$$(2)$$

Но, $\angle ABM = 60^\circ - \angle 1$, а $\angle CBN = 120^\circ - \angle 4 = 60^\circ - \angle 2$, па од равенството (2) следува $\angle 1 = \angle 2$. Сега од равенството (1) добиваме $d = 60^\circ$. Конечно, триаголникот MBN е рамнокрак со агол меѓу краците $d = 60^\circ$, што значи дека тој е рамнострани.

21. Дадени се точки A, B, C на права p и точки D и E кои се надвор од p од иста нејзина страна, така што триаголниците ABD и BCD се рамнострани. Нека M е точка на отсечката AE и N е точка на отсечката CD така што $\overline{ME} = 2\overline{AM}$ и $\overline{CN} = 2\overline{DN}$. Докажи дека триаголникот BMN е рамнострани.

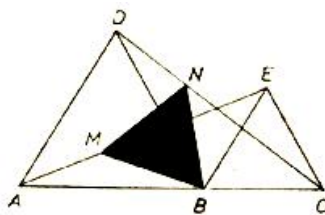
Решение. Од

$$\overline{AB} = \overline{BD}, \overline{BE} = \overline{BC} \text{ и } \angle ABE = \angle DBC = 120^\circ$$

следува дека триаголниците ABE и BCE се складни. Од складноста следува $\overline{AE} = \overline{CD}$, а оттука следува $\overline{AM} = \overline{DM}$ (третина од еднакви отсечки), а потоа и $\angle BAE = \angle BDN$. Тоа значи дека триаголниците ABM и BDN се складни, од каде заклучуваме дека $\overline{BM} = \overline{BN}$ и $\angle ABM = \angle DBN$. Според тоа,

$$\angle MBN = \angle MBD + \angle DBN = \angle MBD + \angle ABM = \angle ABD = 60^\circ.$$

Значи, во рамнокракиот триаголник MBN аголот при врвот е еднаков на 60° , што значи дека тој е рамностран.



22. Рамнокрак триаголник ABC е поделен со права l , која минува низ едно негово теме, на два рамнокраки триаголника. Определи ги аглите на триаголникот ABC .

Решение. Нека правата l , која минува низ темето A (цртеж десно), отсекува од триаголникот ABC два рамнокраки триаголника AMB ($\overline{AB} = \overline{AM}$) и AMC ($\overline{AM} = \overline{CM}$). Тогаш

$$\angle ABM = \angle AMB \text{ и } \angle CAM = \angle ACM.$$

Нека $\angle ABM = x$. Од триаголник ABM имаме

$$\angle BAM = 180^\circ - 2x.$$

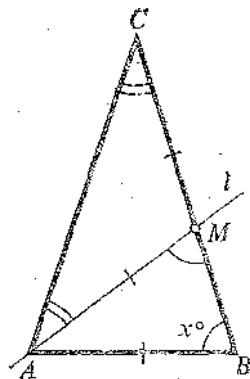
$$\angle CAM = \angle CAB - \angle BAM = x - (180^\circ - 2x)$$

$$= 180^\circ - 3x.$$

Од триаголник ABC имаме

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \text{ т.е. } x + x + 3x - 180^\circ = 180^\circ,$$

од каде добиваме $x = 72^\circ$. Според тоа, аглите на триаголникот ABC се $\angle BAC = \angle ABC = 72^\circ$ и $\angle ACB = 36^\circ$.



23. Низ темето C на рамностранниот триаголник ABC е повлечена права l паралелна на симетралата на $\angle BAC$. Правата l го сече продолжението на BA во точката P . Ако $\overline{BP} = 6 \text{ cm}$, пресметај го:

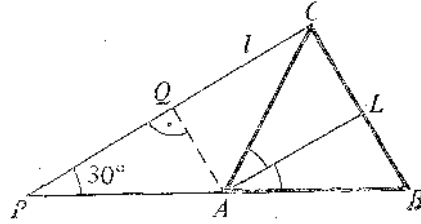
- периметарот на триаголникот ABC ,
- растојанието од точката A до правата CP .

Решение. а) Лесно се докажува дека во правоаголниот триаголник PBC важи $\angle BPC = 30^\circ$ (цртеж долу).

Значи, $\overline{BC} = 3 \text{ cm}$ и периметарот на триаголникот е еднаков на 9 cm .

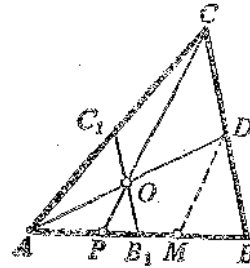
б) Нека $AQ \perp PC$. Лесно се докажува дека AQ е средна линија во триаголникот PBC . Затоа

$$\overline{AQ} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 1,5 \text{ cm}.$$



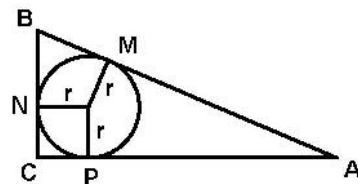
24. Во триаголникот ABC се повлечени средната линија B_1C_1 (B_1 припаѓа на AB , C_1 припаѓа на AC) и тежишната линија AD . Докажи дека правата која минува низ темето C и пресечната точка O на средината на отсечките B_1C_1 и AD ја сече страната во точка P таква што $\overline{AP} = \frac{1}{3} \overline{AB}$.

Решение. Нека $DM \parallel CP$ (цртеж десно). Тогаш DM е средна линија за триаголникот PBC и затоа $\overline{PM} = \overline{MB}$. Бидејќи B_1C_1 е средна линија за триаголникот ABC важи $\overline{AO} = \overline{OD}$. Бидејќи $OP \parallel MD$, добиваме дека OP е средна линија во триаголникот AMD и затоа $\overline{AP} = \overline{PM}$. Според тоа, $\overline{AP} = \overline{PM} = \overline{MB}$, односно $\overline{AP} = \frac{1}{3} \overline{AB}$.



25. Докажи дека во правоаголен триаголник збирот на катетите е еднаков на двократниот збир на радиусите на опишаната и впишаната кружница.

Решение. Нека правоаголникот триаголник е ABC , r е радиусот на впишаната и R е радиусот на опишаната кружница околу него (цртеж десно). Имаме:



$$\overline{CP} = \overline{CN} = r, \overline{AP} = \overline{AM}, \overline{BM} = \overline{BN} \text{ и } \overline{AB} = c = 2R.$$

Според тоа,

$$a + b = \overline{CP} + \overline{PA} + \overline{BN} + \overline{CN} = r + \overline{AM} + \overline{MB} + r = 2r + \overline{AB} = 2r + 2R.$$

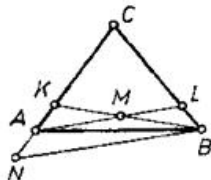
26. На страната AC на триаголникот ABC лежи точка K која AC ја дели во однос $1:3$, а на страната BC точка L која BC ја дели во однос $1:4$. Нека M е пресек на отсечките AL и BK . Определи го односот на отсечките KM и MB .

Решение. Да ја продолжиме отсечката CA преку A . Нека N е пресечната точка на правата AC и правата која минува низ B и е паралелна со AL .

Од Талесовата теорема следува $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} = \frac{1}{4}$.

Значи, $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AC}$. Според условот на задачата $\overline{AK} = \frac{1}{4}\overline{AC}$, па затоа

$\overline{AN} = \overline{AK}$, т.е. точката K е средина на отсечката KN . Во триаголникот BNK правата AM е паралелна со страната BN , па како оваа права ја полови страната KN заклучуваме дека таа ја полови и страната KB . Според тоа, $\overline{KM} : \overline{MB} = 1:1$.



27. Дадена се права p и точки A и B надвор од p и на иста страна од p . Точката C е осносиметрична на точката A во однос на правата p . Нека $p \cap BC = \{D\}$ и нека E е произволна точка од p , различна од D . Докажи дека периметарот на триаголникот ABD е помал од периметарот на триаголникот ABE .

Решение. Точките A и C се заемно симетрични, па затоа $\overline{AD} = \overline{CD}$ и $\overline{AE} = \overline{CE}$, што значи дека периметарот на триаголникот ABD е еднаков на

$$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

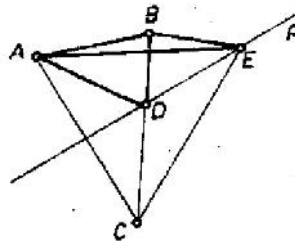
Понатаму, периметарот на триаголникот ABE е еднаков на

$$\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{CE}.$$

Сега од триаголникот BCE добиваме $\overline{BC} < \overline{BE} + \overline{CE}$, па е

$$\overline{AB} + \overline{BC} < \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{CE},$$

т.е. периметарот на триаголникот ABD е помал од периметарот на триаголникот ABE .



28. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник. Дали постои триаголник чии должини на страни се $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$?

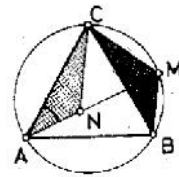
Решение. Бидејќи постои триаголник со должини на страни a, b и c важи $a + b > c, b + c > a$ и $c + a > b$. Сега од $a + b > c$ следува

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \\&= a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b > a + b \\&> c = (\sqrt{c})^2\end{aligned}$$

па затоа $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$. На потполно ист начин се докажува дека $\sqrt{a} + \sqrt{c} > \sqrt{b}$ и $\sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{a}$, што значи дека постои триаголник чији должини на страни се $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$.

29. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC . Произволна точка M припаѓа на лакот BC на кој не припаѓа точката A . Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$.

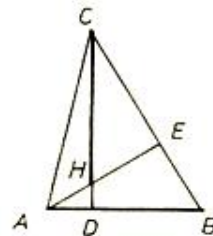
Решение. На отсечката AM конструираме точка N таква што $\overline{MN} = \overline{CM}$. Имаме $\angle AMC = \angle ABC = 60^\circ$, како агли над иста тетива, па затоа $\triangle CMN$ е рамностран, што значи дека $\overline{CN} = \overline{CM}$. Сега триаголниците ACN и BCM се складни ($\overline{AC} = \overline{BC}, \overline{CN} = \overline{CM}$ и $\angle CAN = \angle CBM$, како агли над иста тетива. Од складноста на овие триаголници следува $\overline{AN} = \overline{BM}$. Но, по конструкција $\overline{MN} = \overline{CM}$, па затоа $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AN} + \overline{NM} = \overline{AM}$.



30. Висините CD и AE на триаголникот ABC се сечат во точката H и важи $\overline{AB} = \overline{CH}$. Определи го $\angle ACB$.

Решение. Аглите BAE и BCD се еднакви како агли со нормални краци (цртеж десно). Бидејќи $\overline{AB} = \overline{CH}$, заклучуваме дека правоаголните триаголници ABE и $CH E$ се складни, па затоа $\overline{AE} = \overline{CE}$. Триаголникот ACE е правоаголен, па како $\overline{AE} = \overline{CE}$ заклучуваме дека

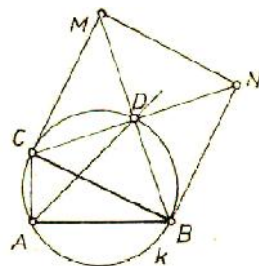
$$\angle ACB = \angle ACE = 45^\circ.$$



31. Над хипотенузата на правоаголниот триаголник конструиран е квадрат кој не го содржи темето на правиот агол на триаголникот. Докажи

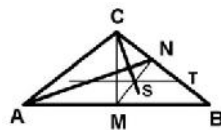
дека симетралата на правиот агол на дадениот триаголник минува низ центарот на квадратот.

Решение. Нека A е темето на правиот агол, $BCMN$ е квадрат и O е центарот на квадратот. Ќе докажеме дека правата AO е симетрала на $\angle BAC$ (цртеж десно). Бидејќи $\angle BOC$ е прав, добиваме дека кружницата k опишана околу триаголникот ABC ја содржи точката O . Тетивите CO и BO се еднакви, како половинки од дијагоналите на квадратот, па затоа перифериските агли $\angle BAO$ и $\angle CAO$ над овие тетиви се еднакви. Затоа правата AO е симетрала на $\angle BAC$.



32. Во рамнокрак триаголник ABC точката M е средина на основата AB . Нека N е точка на кракот BC таква што $MN \perp BC$ и нека точката S е средина на отсечката MN . Докажи дека правата AN и нормална на правата CS .

Решение. Од својствата на рамнокракиот триаголник следува дека CM е висината повлечена кон основата AB . Нека T е средина на отсечката BN . Тогаш ST е средна линија на триаголникот BMN , па затоа е паралелна со AB , што значи $ST \perp CM$. Но, $MN \perp BC$, па затоа точката S е ортоцентар на триаголникот CMT . Оттука заклучуваме дека CS е третата висина на овој триаголник, па затоа $CS \perp MT$. Но, MT е средна линија на триаголникот ABN , па затоа е паралелна со AN , што значи дека $CS \perp AN$.



33. Правите m и n се заемно ормални и се сечат во точката A . Точката B припаѓа на рамнината определена од правите m и n , но не лежи на ниту една од нив. Точката B_1 е симетрична на B во однос на правата m , точката B_2 е симетрична на B_1 во однос на правата n и точката B_3 е симетрична на B_2 во однос на m . Докажи дека точките B, B_1, B_2, B_3 се темиња на правоаголник.

Решение. Бидејќи BB_1 и B_2B_3 се нормални на правата m заклучуваме дека $B_2B_3 \parallel BB_1$. Но, $\angle BB_1B_2 = \angle B_3B_2B_1 = 90^\circ$, па затоа $\angle B_2B_3B = \angle B_3BB_1 = 90^\circ$ (направи цртеж).

Нека $BB_1 \cap n = P$ и $B_2B_3 \cap n = Q$. Тогаш четириаголникот е правоаголник и затоа $\overline{B_1P} = \overline{B_2Q}$. Но, овие отсечки се половинки од отсечките BB_1 и B_2B_3 , па затоа $\overline{B_1B} = \overline{B_2B_3}$. Конечно, $B_2B_3 \parallel BB_1$ и $\overline{B_1B} = \overline{B_2B_3}$, што значи дека четириаголникот $BB_1B_2B_3$ е правоаголник.

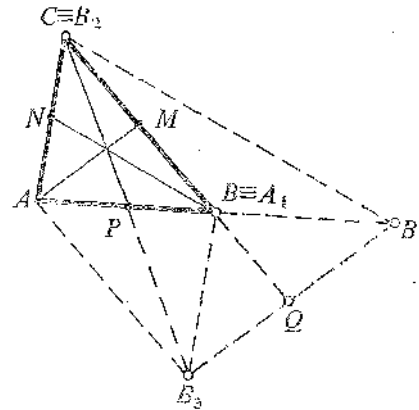
34. Даден е триаголникот ABC со медијани AM, BN, CP . Нека u_1, u_2, u_3 се транслациите определени така што u_1 ја пресликува A во B , u_2 ја пресликува B во C и u_3 ја пресликува C во A .

а) Определи ги сликите B_1, B_2, B_3 на темето B при транслациите u_1, u_2, u_3 , соодветно.

б) Докажи дека $\overline{B_3B_1} = 2\overline{AM}$.

Решение. а) Сликите на точката B при дадените транслации се прикажани на цртежот десно.

б) Транслацијата u_3 ги пресликува точките C и B во точките A и B_3 , па затоа отсечката BB_3 е паралелна и еднаква на отсечката CA . Според тоа, $ACBB_3$ е паралелограм, од каде добиваме $\overline{AB_3} = \overline{CB}$. Нека продолжението на CB



ја сече B_1B_3 во точката Q . Тогаш BQ е средна линија во триаголникот AB_1B_3 и затоа $\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{AB_3}$. Но, $\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{AB_3}$, што значи $\overline{MB} = \overline{BQ}$ и MQ е паралелна и еднаква на AB_3 . Според тоа, четириаголникот B_3QM е паралелограм и тогаш $\overline{AM} = \overline{B_3Q}$. Но, $\overline{B_3Q} = \frac{1}{2}\overline{B_1B_3}$, па затоа $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{B_1B_3}$, односно $\overline{B_3B_1} = 2\overline{AM}$.

35. Во триаголникот ABC симетралата на $\angle BAC$ лежи на правата g_1 , а правата g_2 е нормална на правата g_1 и минува низ точката A .

а) Докажи дека на правата g_2 лежи симетралата на надворешниот агол на триаголникот ABC во темето A .

б) Докажи дека сликите B_1 и B_2 на точката B соодветно при осните симетрии j_1 со оска g_1 и j_2 со оска g_2 лежат на правата AC .

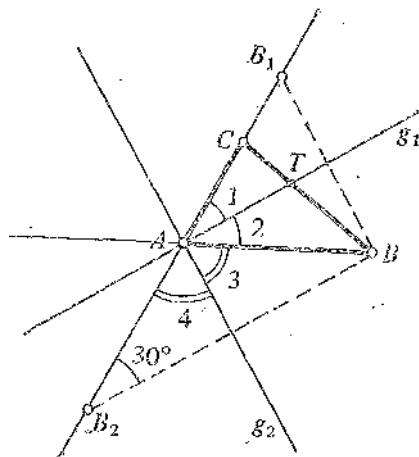
Решение. а) Според условот на задачата (види цртеж десно) важи $\angle 1 = \angle 2$ и

$$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ. \quad (1)$$

Но, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, па затоа

$$\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ. \quad (2)$$

Од (1), (2) и $\angle 1 = \angle 2$ следува дека $\angle 3 = \angle 4$, што значи дека симетралата на надворешниот агол на триаголникот ABC во темето A лежи на правата g_2 .



б) Имаме $B \xrightarrow{j_1} B_1, B \xrightarrow{j_2} B_2$ и $\angle BAT \xrightarrow{j_1} \angle TAB_1$, Но според услов $\angle BAT = \angle TAC$, па затоа $\angle TAC = \angle TAB_1$, т.е. точката B_1 припаѓа на правата AC . Аналогно се докажува дека точката B_2 припаѓа на правата AC .

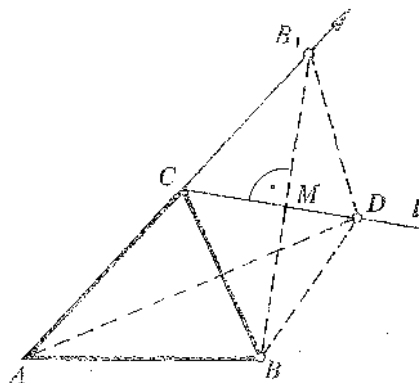
36. Даден е триаголник ABC . На продолжението на страната AC преку точката C е земена точка B_1 тава што $\overline{CB_1} = \overline{CB}$. Докажи дека:

а) Точката B_1 е слика на точката B при осна симетрија со оска симетралата l на надворешниот агол на триаголникот во темето C .

б) Ако D е произволна точка од l , тазлична од C , тогаш периметарот на триаголникот ABD е поголем од периметарот на триаголникот ABC .

Решение. а) За да докажеме дека

$B \xrightarrow{j} B_1$ со оска l доволно е да докажеме дека $BB_1 \perp l$ и $\overline{BM} = \overline{MB_1}$ (цртеж десно). Имаме $\triangle BCM \cong \triangle CB_1M$ бидејќи CM е заедничка страна и според условот на задачата важи $\overline{CB_1} = \overline{CB}$ и



$\angle BCM = \angle MCB_1$. Оттука следува $\angle BMC = \angle CMB_1$. Но, овие агли се суплементни и затоа се прави агли, т.е. $BB_1 \perp l$ и $\overline{BM} = \overline{MB_1}$.

б) Бидејќи $\overline{B_1D} = \overline{BD}$ имаме

$$L_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AB} + \overline{B_1C} + \overline{CA},$$

$$L_{ABD} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DA} = \overline{AB} + \overline{B_1D} + \overline{DA}.$$

Од триаголникот ADB_1 следува $\overline{B_1D} + \overline{DA} > \overline{B_1C} + \overline{CA}$, па затоа од горните равенства следува

$$L_{ABD} = \overline{AB} + \overline{B_1D} + \overline{DA} > \overline{AB} + \overline{B_1C} + \overline{CA} = L_{ABC}.$$

37. На една од страните на триаголникот да се најде точка таква што збирот на растојанијата од неа до другите две страни на триаголникот ќе биде најмал.

Решение. Нека ABC е дадениот триаголник и да побараме точка со посоченото својство на страната AB (цртеж десно). Нека претпоставиме дека $\angle A > \angle B$

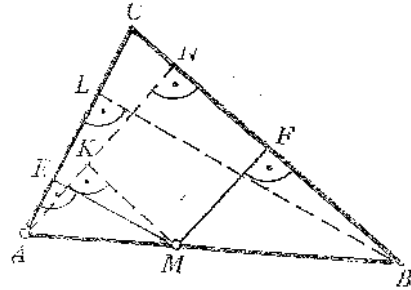
Да ги разгледаме темињата A и B и произволна точка M која е меѓу нив. Од $\angle A > \angle B$ следува дека

растојанието $\overline{AN}$ од точката A до страната BC е помало од растојанието $\overline{BL}$ од точката B до страната AC . Останува да го споредиме збирот од растојанијата $\overline{MF} + \overline{ME}$ од точката M до страните BC и AC со растојанието $\overline{AN}$.

Од точката M повлекуваме нормала MK на AN . Бидејќи $\overline{KN} = \overline{MF}$, доволно е да ги споредиме отсечките AK и ME . Катетата AK е помала од катетата ME , бидејќи правоаголните триаголници AKM и AEM имаат иста хипотенуза и $\angle EAM > \angle KAM (= \angle CBA)$. Така

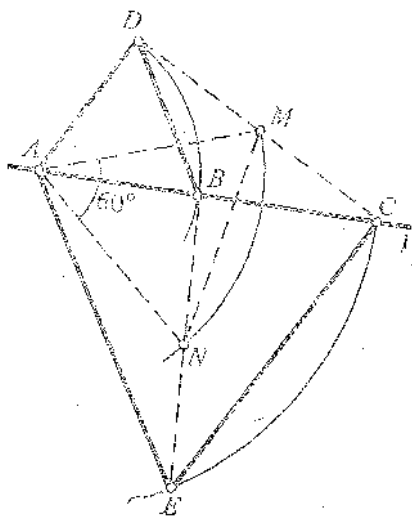
$$\overline{AK} + \overline{KN} < \overline{MF} + \overline{ME} \text{ или } \overline{AN} < \overline{MF} + \overline{ME},$$

т.е. темето A на поголемиот агол на страната AB е бараната точка.



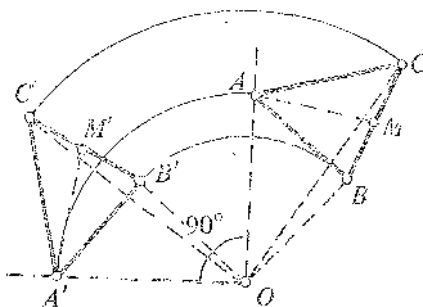
38. На правата l се земени точките A, B, C . Во различните полурамнини на правата l се конструирани рамностраните триаголници ABD и ACE . Точките M и N се средини на страните DC и BE , соодветно. Докажи дека триаголникот AMN е рамностран.

Решение. Да земеме ротација w со центар A и агол на ротација еднаков на 60° . Тогаш $D \xrightarrow{w} A$ и $C \xrightarrow{w} E$ (цртеж десно). Затоа $M \xrightarrow{w} N$ и $\angle MAN = 60^\circ$. Според тоа, за триаголникот AMN важи $\overline{AM} = \overline{AN}$ и $\angle MAN = 60^\circ$, па затоа тој е рамнострани.



39. Дадена е ротација, определена со пар соодветни точки A A' (A' е слика на A) и позитивно насочен $\angle AOA'$ еднаков на 90° . Конструирај ја сликата на даден триаголник ABC (B и C не лежат на OA). Докажи дека медијаната $A'M'$ на триаголникот $A'B'C'$ е нормална на медијаната на триаголникот ABC .

Решение. Конструираме $\overline{OB}$ и насочен $\angle BOB' = \angle AOA' = 90^\circ$ (цртеж десно). Така ја добиваме сликата B' на B . Аналогно се конструира сликата C' на C . Медијаните $A'M'$ и AM се пар соодветни прави при ротација со центар O и позитивно насочен агол еднаков на 90° , па затоа тие се заемно нормални.



40. Над страните на разностраниот триаголник ABC , надвор од него, се конструирани рамнострани триаголници ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 . Докажи дека:

- $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$,
- отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 се сечат во една точка и меѓу себе зафаќаат еднакви агли,
- $\overline{MA_1} = \overline{MB} + \overline{MC}$, $\overline{MB_1} = \overline{MC} + \overline{MA}$ и $\overline{MC_1} = \overline{MA} + \overline{MB}$.

Решение. а) и б) При ротација w_1 со центар A и агол 60° (цртеж десно) имаме

$$C_1 \xrightarrow{w_1} B = C_1' \text{ и } C \xrightarrow{w_1} B_1 = C'.$$

Според тоа, отсечката CC_1 се пресликува во отсечката BB_1 . Затоа $\overline{CC_1} = \overline{BB_1}$ и $\angle CMB_1 = 60^\circ$.

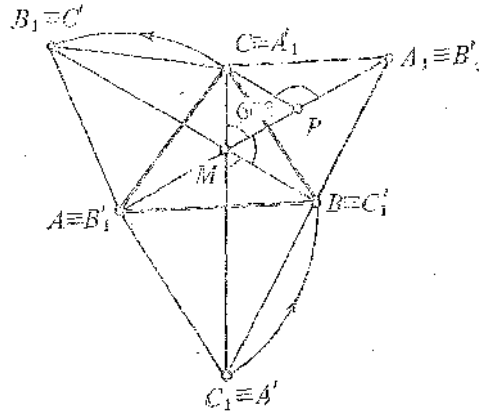
Аналогно, при ротации w_2 и w_3 со центри B и C и агол 60° ќе добиеме $\overline{CC_1} = \overline{AA_1}$, $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$ и

$$\angle(AA_1, CC_1) = \angle(AA_1, BB_1) = 60^\circ.$$

Оттука следува дека $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$ и отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 се сечат во една точка и меѓу себе зафаќаат еднакви агли.

в) За да докажеме дека $\overline{MA_1} = \overline{MB} + \overline{MC}$ на правата AA_1 нанесуваме $\overline{MP} = \overline{MC}$ и ги поврзуваме P и C (види цртеж). Тогаш триаголникот MPC е рамностран. Триаголниците MBC и PA_1C се складни ($\overline{CB} = \overline{CA_1}$, $\overline{CP} = \overline{CM}$ и $\angle CMB = \angle CPA = 120^\circ$), па затоа $\overline{MB} = \overline{PA_1}$.

Сега, $\overline{MA_1} = \overline{PA_1} + \overline{MP}$ и како $\overline{MB} = \overline{PA_1}$ и $\overline{MP} = \overline{MC}$, добиваме дека $\overline{MA_1} = \overline{MB} + \overline{MC}$.



V.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

41. Докажи дека збирот на должините на тежишните линии на секој триаголник е помал од неговиот периметар, но е поголем од неговиот полупериметар.

Решение. Нека тежишните линии AA_1 , BB_1 , CC_1 на триаголникот ABC се сечат во точката O (цртеж десно). Нека $AC_2 \parallel BC$ и $BC_2 \parallel AC$, со што добиваме паралелограм $ACBC_2$. Бидејќи CC_1 е тежишна линија заклучуваме дека нејзиното продолжение минува низ темето C_2 .

Со a, b, c да ги означиме должините на страните, а со m_a, m_b, m_c должините на припадните тежишни линии. Од триаголникот CBC_2 следува $2m_c < a + b$. Аналогно се докажува дека $2m_a < c + b$ и $2m_b < a + c$. Аао ги собереме последните равенства добиваме дека

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

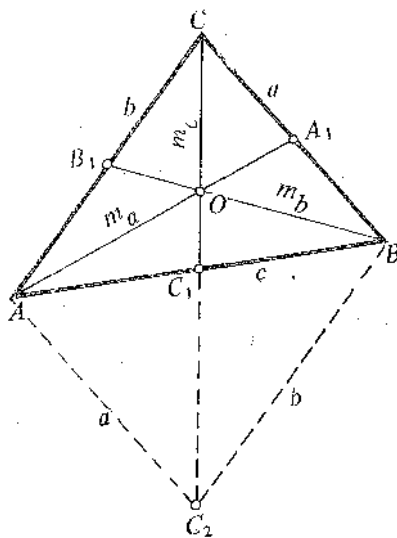
Од триаголникот AOC_1 следува

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{1}{3}m_c > \frac{c}{2}.$$

Аналогно ги добиваме неравенствата $\frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a > \frac{a}{2}$ и $\frac{2}{3}m_c + \frac{1}{3}m_b > \frac{b}{2}$.

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$m_a + m_b + m_c > \frac{1}{2}(a + b + c).$$



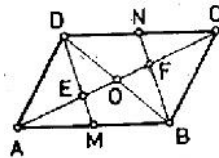
42. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека точката M е средина на страната AB и точката N е средина на страната CD . Докажи дека правите DM и BN ја делат дијагоналата AC на три еднакви дела.

Решение. Нека E, O, F се пресечните точки на дијагоналата AC со отсечките DM, BD, BN , соодветно. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, па затоа точката O е средина на дијагоналите AC и BD . Ако M е средина на AB , тогаш точката E е тежиште на триаголникот ABD . Понатаму, од потполно исти причини F е тежиште на триаголникот BCD . Сега од својствата на тежиштето следува $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AO}$ и $\overline{CF} = \frac{2}{3}\overline{OC}$, па затоа $\overline{AE} = \overline{CF}$.

Но, $\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{AE}$ и $\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{FC}$, па затоа

$$\overline{EF} = \overline{OE} + \overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AE} = \overline{AE} = \overline{FC},$$

што и требаше да се докаже.



43. Даден е триаголник ABC . Над страните BC и AC надвор од триаголникот ABC се конструирани квадрати $CBMN$ и $CAPQ$, соодветно.

Ако CD и CE се соодветно висина и тежишна линија на триаголникот ABC , докажи дека:

а) $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{QN}$,

б) правата CD ја полови отсечката QN .

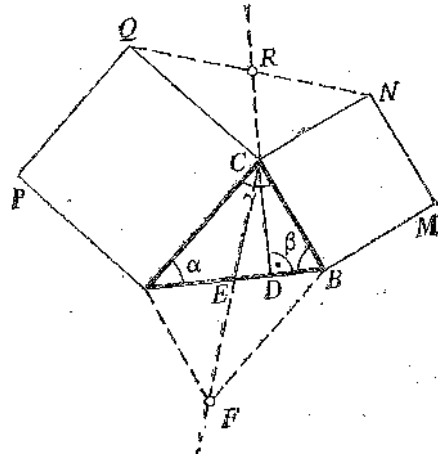
Решение. а) Повлекуваме $AF \parallel CB$ и $BF \parallel CA$ и добиваме паралелограм $AFBC$. Бидејќи CE е тежишна линија на триаголникот ABC , добиваме дека нејзиното продолжение минува низ точката F (цртеж десно). Од $\overline{BC} = \overline{CN}$, $\overline{BF} = \overline{AC} = \overline{QC}$ и

$$\begin{aligned}\angle CBF &= \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma \\ &= 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \gamma = \angle QCN\end{aligned}$$

слекува дека $\triangle CFB \cong \triangle QNC$. Сега

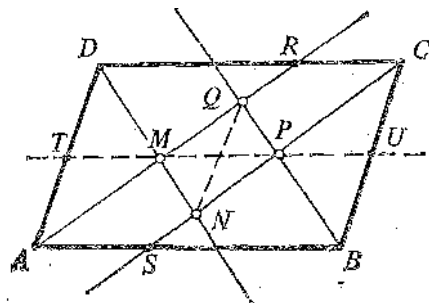
од складноста слекува $\angle QNC = \angle FCB$ и $\overline{QN} = \overline{CF} = 2\overline{CE}$.

б) Од $\overline{BC} = \overline{CN}$, $\angle ECB = \angle RBC$ и $\angle CBE = \angle NCR$ слекува $\triangle ECB \cong \triangle CNF$. Затоа $\overline{NR} = \overline{CE}$. Под а) докажавме дека $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{QN}$, па затоа $\overline{NR} = \frac{1}{2}\overline{QN}$.



44. Докажи дека пресечните точки на симетралите на внатрешните агли на паралелограм се темиња на правоаголник. Пресметај ги должините на дијагоналите на правоаголникот, ако должините на страните на паралелограмот се 4 cm и $2,6\text{ cm}$.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот паралелограм (цртеж десно). Бидејќи триаголниците ARD и SBC се рамнокраки и складни (Зошто?), заклучуваме дека DM и BP се висини и тежишни линии повлечени кон нивните основи. Според тоа, четириаголникот $MNPQ$ е правоаголник. Понатаму, правата MP ги полови AD и BC , па затоа MT и PU се тежишни линии



повлечени кон хипотенузите во правоаголните триаголници AMD и BPC . Според тоа,

$$\overline{MT} = \frac{1}{2} \overline{AD} = 1,3 \text{ cm} \text{ и } \overline{PU} = 1,3 \text{ cm}.$$

Но, $\overline{TU} = \overline{AB} = 4 \text{ cm}$, па затоа $\overline{QN} = \overline{TU} = 4 - 1,3 - 1,3 = 1,4 \text{ cm}$.

45. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е земена точка P . Низ секое теме е повлечена права паралелна на правата која ја поврзува точката P со неговото спротивно теме. Докажи дека така добиените четири прави се сечат во една точка

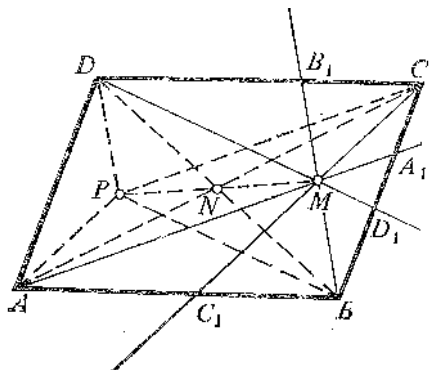
Решение. Повлекуваме прави $AA_1 \parallel PC$, $BB_1 \parallel DP$, $CC_1 \parallel AP$ и $DD_1 \parallel BP$ (цртеж десно). Нека

M е пресечната точка на правите AA_1 и CC_1 . Тогаш четириаголникот $AMCP$ е паралелограм. Пресечната точка на дијагонали AC и PM да ја означиме со N .

Имаме $\overline{PN} = \overline{NM}$. Тогаш точката

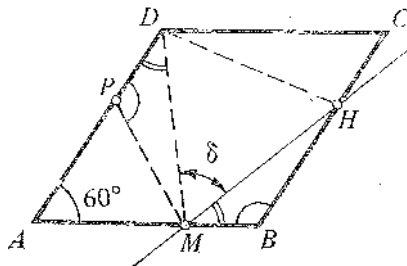
N е пресечна и на дијагоналите AC и BD на паралелограмот $ABCD$.

Паралелограмот формиран од правите $DP \parallel BB_1$ и $PB \parallel DD_1$ има дијагонала BD со средина N . Затоа другата дијагонала лежи на правата PN . Но, бидејќи $\overline{PN} = \overline{NM}$, заклучуваме дека правите BB_1 и DD_1 се сечат во точката M . Со тоа докажавме дека правите AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 се сечат во една точка.



46. Даден е рамб $ABCD$ со остар агол 60° . Правата MH отсекува од страните AB и BC на ромбот отсечки MB и HB , чиј збир на должини е еднаков на должината на страната на ромбот. Докажи дека триаголникот MHD е рамностран.

Решение. Од $\overline{MB} + \overline{BH} = \overline{AB}$ следува $\overline{AM} = \overline{BH}$ (цртеж десно). На страната AD земаме точка P таква што $\overline{AM} = \overline{AP}$. Тогаш триаголникот AMP е рамностран, па затоа $\overline{MP} = \overline{AM} = \overline{BH}$. Понатаму, од



$\overline{MP} = \overline{BH}$, $\overline{PD} = \overline{MB}$, $\angle DPM = 180^\circ - 60^\circ = 180^\circ - \angle BAP = \angle MBH$,
 следува $\triangle MPD \cong \triangle MBH$. Сега од добиената складност следува
 $\overline{MD} = \overline{MH}$ и $\angle ADM = \angle BMH$. Значи,

$$\angle BMH + d + \angle PMD + \angle AMP = 180^\circ,$$

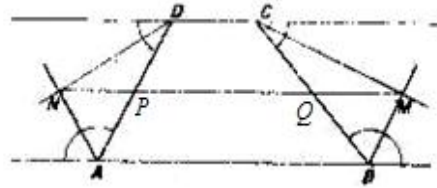
т.е.

$$\angle ADM + d + \angle PMD + 60^\circ = 180^\circ$$

Но, $\angle ADM + \angle PMD - \angle APM = 60^\circ$, па затоа $d + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, т.е.
 $d = 60^\circ$. Конечно, од $\overline{MD} = \overline{MH}$ и $d = 60^\circ$ следува дека триаголникот
 MHD е рамнострани.

47. Основите AB и CD на трапезот $ABCD$ се продолжени на двете страни. Симетралите на надворешните агли на трапезот во темињата A и D се сечат во точката M , а симетралите на надворешните агли во темињата B и C се сечат во точката N . Определи го периметарот на трапезот $ABCD$ ако $\overline{MN} = 2k$.

Решение. Точката M припаѓа на симетралите на надворешните агли во темињата A и D , па затоа таа е еднакво оддалечена од правата AB и правата CD (цртеж десно).

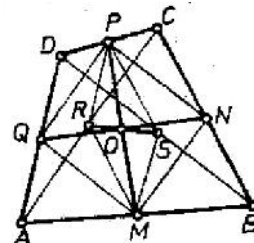


Слично точката N е еднакво оддалечена од правите AB и CD . Затоа MN лежи на средната линија на трапезот. Понатаму $\angle AMP = \angle MAP$, па затоа $\triangle APM$ е рамнокрак и важи $\overline{AP} = \overline{MP}$. Аналогно се докажува дека $\overline{DP} = \overline{MP}$, $\overline{BQ} = \overline{QN}$ и $\overline{CQ} = \overline{QN}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} L &= \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{DA} = 2\overline{PQ} + 2\overline{QN} + 2\overline{MP} \\ &= 2(\overline{MP} + \overline{PQ} + \overline{QN}) = 2\overline{MN} = 4k. \end{aligned}$$

48. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките M, N, P, Q, R, S се средини на отсечките AB, BC, CD, DA, AC, BD , соодветно. Докажи дека правите MP, NQ, RS се сечат во иста точка.

Решение. Отсечката MN е средна линија за триаголникот ABC , па затоа таа е паралелна на страната AC и е еднаква на половина од неа. Слично, отсечката QP е средна линија за

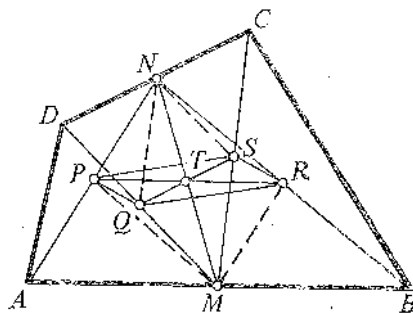


триаголникот ACD , па затоа таа е паралелна на страната AC и е еднаква на половина од неа. Значи, отсечките MN и QP се паралелни и еднакви, па затоа четириаголникот $ABCD$ е паралелограм и неговите дијагонали се половат. Аналогно разгледувајќи ги триаголниците ABD и ACD се докажува дека отсечките MS и PR се паралелни и еднакви, па четириаголникот $MSPR$ е паралелограм и неговите дијагонали MP и RS се половат. Значи, точката O е заедничка средина на отсечките MP, NQ, RS , што и требаше да се докаже.

49. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Точките M и N се средини на страните AB и CD . Докажи дека средините на дијагоналите на четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ се темиња на паралелограм или лежат на една права.

Решение. Нека точките P, Q, R, S се средини на отсечките AN, DM, CM, BN , соодветно (цртеж десно).

Во триаголникот ABN отсечката MR е средна линија и затоа $MR \parallel AN$ и $\overline{MR} = \frac{1}{2} \overline{AN}$. Понатаму, бидејќи $\overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{AN}$, заклучу-



ваме дека $MR \parallel PN$ и $\overline{PN} = \overline{MR}$. Според тоа, четириаголникот $MRNP$ е паралелограм, па неговите дијагонали се половат и нека T е средината на MN и PR .

Аналогно $NS \parallel MQ$ и $\overline{NS} = \overline{MQ}$, па затоа четириаголникот $NSMQ$ е паралелограм. Значи, неговите дијагонали MN и QS се половат.

Сега, бидејќи отсечката MN има една средина, заклучуваме дека точката T е средина на отсечката QS .

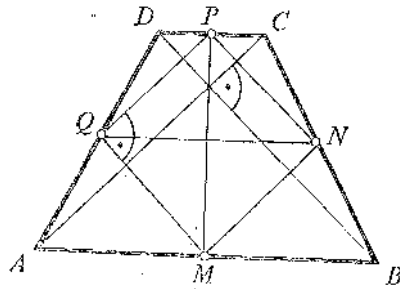
Од претходно изнесеното следува дека отсечките QS и RP заемно се половат, па затоа точките P, Q, R, S се темиња на паралелограм. Јасно, ако точките Q и S се пресечните точки на отсечката PR со отсечките MD и MC , тогаш точките P, Q, R, S лежат на една права.

50. Даден е четириаголник $ABCD$ кај кој отсечките кои ги поврзуваат средините на спротивните страни се еднакви.

Докажи дека дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.

Решение. Нека M, N, P, Q се средините на страните AB, BC, CD, DA , соодветно (цртеж десно). Да го разгледаме четириаголникот $MNPQ$. Бидејќи MN и PQ се средни линии на триаголниците ABC и ACD добиваме $MN \parallel AC \parallel PQ$ и

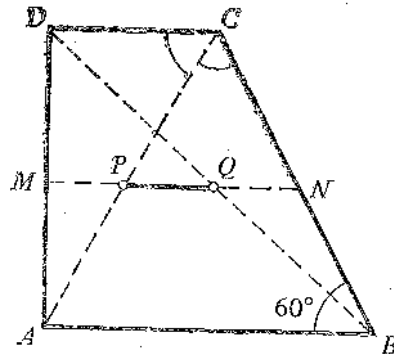
$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \overline{PQ}.$$



Според тоа, четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм. Но, според условот неговите дијагонали MP и QN се еднакви, па затоа овој четириаголник е правоаголник. Значи, $QP \perp QM$. Но, претходно видовме дека $AC \parallel QP$ и $BD \parallel QM$, па затоа $AC \perp BD$.

51. Еден од аглите на правоаголниот трапез е еднаков на 60° . Дијагоналата наспроти овој агол го полови тапиот агол, а делот од средната линија зафатен меѓу дијагоналите на трапезот е долг $1,1\text{ cm}$. Определи ги основите, поголемиот крак и помалата дијагонала на трапезот.

Решение. Нека трапезот е $ABCD$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, дијагоналата AC е симетрала на $\angle C$, MN е средна линија и $\overline{PQ} = 1,1\text{ cm}$ (цртеж десно). Од условот на задачата следува $\triangle ABC$ е рамностран, а триаголникот ACD е правоаголен со остар агол $\angle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Според тоа,



$$\overline{DC} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB}. \quad (1)$$

Понатаму, MP и QN се средни линии во триаголниците ACD и BCD , па затоа

$$\overline{MP} = \overline{QN} = \frac{1}{2} \overline{DC}. \quad (2)$$

Но, PN е средна линија во триаголникот ABC и затоа

$$\overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{AB}. \quad (3)$$

Сега, од (1), (2) и (3) и од $\overline{PQ} + \overline{QN} = \overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ добиваме

$$1,1 + \frac{1}{2} \overline{DC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$1,1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

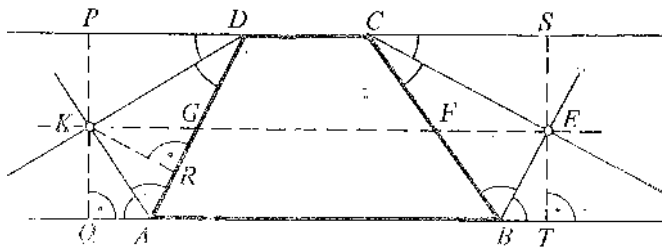
$$\overline{AB} = 4,4 \text{ cm}.$$

Сега,

$$\overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AB} = 4,4 \text{ cm}, \quad \overline{DC} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 2,2 \text{ cm}.$$

52. Во трапезот $ABCD$ секоја од основите AB и CD е продолжена во двете насоки. Симетралите на надворешните агли во темињата A и D се сечат во точката K , а симетралите на надворешните агли во темињата B и C се сечат во точката E . Определи го периметарот на трапезот ако $\overline{KE} = 6 \text{ cm}$.

Решение. Низ точките K и E повлекуваме отсечки PQ и ST нормални на AB (види цртеж). Бидејќи K е точка на симетралата на надворешните агли во A и D , добиваме дека $\overline{KQ} = \overline{KR} = \overline{KP}$, што значи дека K е средина на PQ . Аналогно заклучуваме дека E е средина на ST .



Според тоа, KE е средна линија на правоаголникот $QTSP$ и затоа GF е средна линија на трапезот $ABCD$. Според тоа,

$$L_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Но, $\overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{GF}$, $\overline{AD} = 2\overline{KG}$ и $\overline{BC} = 2\overline{EF}$ (триаголниците AKD и BEC се правоаголници и KG и EF се тежишни линии). Затоа

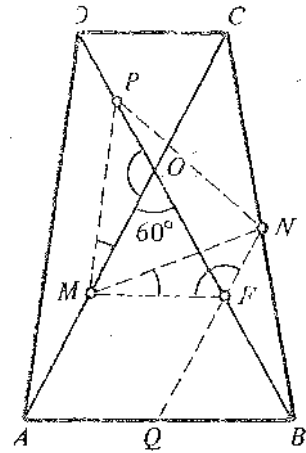
$$L_{ABCD} = 2\overline{GF} + 2\overline{KG} + 2\overline{EF} = 2\overline{KE} = 12 \text{ cm}.$$

53. Во рамнокрак трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) дијагоналите AC и BD се сечат во точката O и $\angle AOB = 60^\circ$.

Докажи дека средините на отсечките AO, DO и BC се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Со M, N, P да ги означиме средините на отсечките AO, BC, DO (цртеж десно). Низ средината F на отсечката BO повлекуваме права NF која ја сече AB во точката Q .

Триаголникот MFO е рамностран, па затоа $\overline{MF} = \overline{MO}$. Понатаму, $\overline{MF} = \overline{MO}$, $\overline{NF} = \overline{OP}$ ($\overline{NF} = \frac{1}{2}\overline{OC}$ како средна линија на триаголникот BCO и OCD е рамностран па затоа $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{OC}$) и



$$\angle MOP = 180^\circ - \angle DOC = 180^\circ - 60^\circ$$

$$= 180^\circ - \angle AOF = 180^\circ - \angle MFQ = \angle MFN,$$

па затоа $\triangle MFN \cong \triangle MOP$. Од оваа складност следува $\angle MFN = \angle MOP$ и $\overline{MN} = \overline{MP}$. Но,

$$\angle PMN = \angle OMP + \angle OMN = \angle FMN + \angle OMN = 60^\circ.$$

Според тоа, триаголникот PMN е рамнокрак $\overline{MN} = \overline{MP}$ и аголот меѓу нив е $\angle PMN = 60^\circ$, па затоа овој триаголник е рамностран.

54. Даден е ромб $ABCD$ со остар агол $\angle A = 60^\circ$. На страните AB и BC се земени точки M и N , соодветно, такви што $\overline{BM} + \overline{BN} = \overline{AD}$. Ако j е осна симетрија со оска DC и $N \xrightarrow{j} P$, докажи дека $MP \parallel AD$.

Решение. Нека NP ја сече DC во точката Q (цртеж десно). Имаме,

$$\angle NCQ = \angle PCQ = 60^\circ.$$

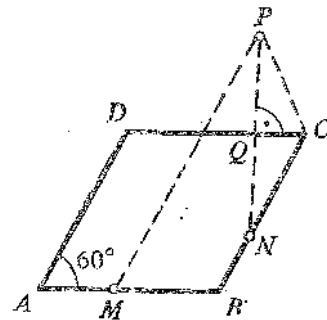
Понатаму, од

$$\overline{BN} + \overline{NC} = \overline{BC} = \overline{AD} \text{ и } \overline{BM} + \overline{BN} = \overline{AD}$$

следува $\overline{BM} = \overline{NC}$. Од $\overline{NC} = \overline{PC}$, следува $\overline{BM} = \overline{PC}$. Понатаму,

$$\angle MBC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ и}$$

$$\angle NCP = \angle NCQ + \angle QCP = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

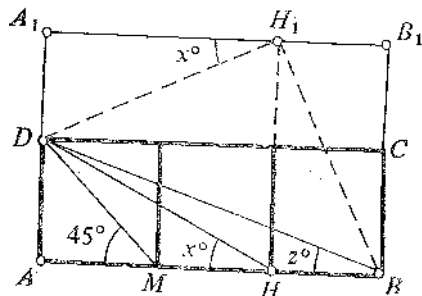


па затоа $\angle MBC = \angle NCP$. Според тоа, четириаголникот $MBCP$ е рамнокрак трапез и $MP \parallel BC \parallel AD$.

55. Од три еднакви квадрати со основи AM, MH, HB наредени хоризонтално еден до друг е составен правоаголник $ABCD$. Од темето D се повлечени правите DM, DN, DB . Докажи дека

$$\angle AMD + \angle AHD + \angle ABD = 90^\circ.$$

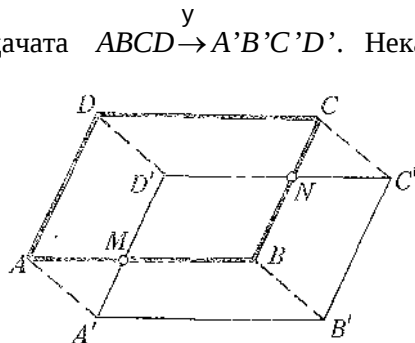
Решение. Јасно, $\angle AMD = 45^\circ$. Нека $\angle AHD = x$ и $\angle ABD = z$ (цртеж десно). Конструираме правоаголник DCB_1A_1 , симетричен на правоаголникот $ABCD$ во однос на правата DC и точка H_1 симетрична на точката H во однос на истата права. Ја поврзуваме точката



H_1 со точките B и D . Јасно, $\angle DH_1A_1 = \angle DAN$ и $\angle A_1DH_1 = 90^\circ - x$. Понатаму, триаголникот DH_1B е рамнокрак правоаголен (Докажи!), па затоа $\overline{DH_1} = \overline{BH_1}$. Од друга страна, $\angle BH_1B_1 = \angle A_1DH_1 = 90^\circ - x$ и $\angle H_1BB_1 = \angle DH_1H = x$. Затоа $\angle DH_1B = 180^\circ - (x + 90 - x) = 90^\circ$. Според тоа, $\angle DBH_1 = \angle BDA_1 = 45^\circ$ и затоа $\angle ABB_1 = z + 45^\circ + x = 90^\circ$, со што тврдењето е докажано.

56. Паралелограмот $A'B'C'D'$ е слика на паралелограмот $ABCD$ при некоја трансформација Y . Двата паралелограма се поставени така што тие се сечат. Докажи дека пресекот на двата паралелограма е паралелограм.

Решение. Според условот на задачата $ABCD \xrightarrow{Y} A'B'C'D'$. Нека четириаголникот $MBND'$ е пресекот на двата паралелограма (цртеж десно). За да докажеме дека $MBND'$ е паралелограм доволно е да докажеме дека $MD' \parallel BN$ и $MB \parallel D'N$. Бидејќи MD' е дел од $A'D'$, а $A'D' \parallel AD \parallel BC$, добиваме



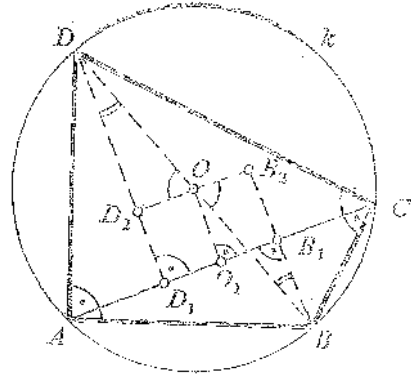
$MD' \parallel BC$. Но, BN е дел од BC , па затоа $MD' \parallel BN$.

Аналогно се докажува дека $MB \parallel D'N$, што значи дека четириаголникот $MBND'$ е паралелограм.

57. Докажи дека ако два спротивни агли во еден триаголник се прави, тогаш проекциите на спротивните страни врз дијагоналата која минува низ темињата на правите агли се еднакви.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот четириаголник во кој $\angle A = \angle C = 90^\circ$ и нека k е кружницата опишана околу него, чиј дијаметар е BD (цртеж десно).

Ги определуваме проекциите на центарот O на k и на темињата A, B, C, D на четириаголникот врз дијагоналата AC која ги поврзува темињата на правите агли. Треба да докажеме дека $\overline{AD_1} = \overline{CB_1}$ и $\overline{AB_1} = \overline{CD_1}$.



Бидејќи $OO_1 \perp AC$, добиваме $\overline{AO_1} = \overline{CO_1}$. Ја транслатираме отсечката D_1B_1 со паровите точки O_1 и O . Ги добиваме складните триаголници BOB_2 и DOD_2 (Докажи!). Од добиената складност следува $\overline{OB_2} = \overline{OD_2}$. Тогаш $\overline{O_1B_1} = \overline{O_1D_1}$ како проекции врз AC на еднаквите отсечки OB_2 и OD_2 , кои се продолженија една на друга. Имаме

$$\overline{AD_1} = \overline{AO_1} - \overline{O_1D_1} \text{ и } \overline{CB_1} = \overline{CO_1} - \overline{O_1B_1},$$

па како $\overline{AO_1} = \overline{CO_1}$ и $\overline{O_1B_1} = \overline{O_1D_1}$, добиваме $\overline{AD_1} = \overline{CB_1}$. Според тоа, $\overline{AD_1} + \overline{D_1B_1} = \overline{CB_1} + \overline{B_1D_1}$, па затоа $\overline{AB_1} = \overline{CD_1}$.

V.3. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

58. Должините на катетите на правоаголникот триаголник се a и b , а должината на хипотенузата е c . Дали постои триаголник со должини на страни a^3, b^3 и c^3 ?

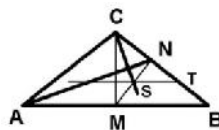
Решение. Од Питагоровата теорема следува:

$$a^3 + b^3 = a^2 \cdot a + b^2 \cdot b < a^2 c + b^2 c = (a^2 + b^2) \cdot c = c^2 \cdot c = c^3,$$

што значи дека не постои триаголник чии должини на страни се a^3, b^3 и c^3 .

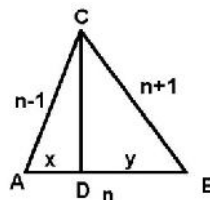
59. Во рамнокрак триаголник ABC точката M е средина на основата AB . Нека N е точка на кракот BC таква што $MN \perp BC$ и нека точката S е средина на отсечката MN . Докажи дека правата AN и нормална на правата CS .

Решение. Од својствата на рамнокракиот триаголник следува дека CM е висината повлечена кон основата AB . Нека T е средина на отсечката BN . Тогаш ST е средна линија на триаголникот BMN , па затоа е паралелна со AB , што значи $ST \perp CM$. Но, $MN \perp BC$, па затоа точката S е ортоцентар на триаголникот CMT . Оттука заклучуваме дека CS е третата висина на овој триаголник, па затоа $CS \perp MT$. Но, MT е средна линија на триаголникот ABN , па затоа е паралелна со AN , што значи дека $CS \perp AN$.



60. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја кои не се помали од 3. Докажи дека висината на триаголникот повлечена кон средната по големина страна ја дели таа страна на делови чија разлика е 4.

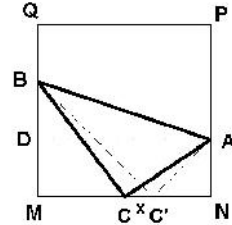
Решение. Нека $h = \overline{CD}$ е висината која соодветствува на средната по големина страна AB и нека x и y се отсекоците на кои точката D ја дели страната AB (цртеж десно). Нека должините на страните AC, AB, BC се $n-1, n, n+1$, соодветно. Тогаш $x + y = n$ и $(n-1)^2 + x^2 = h^2 = (n+1)^2 + y^2$, па затоа $x^2 - y^2 = (n+1)^2 - (n-1)^2$, т.е. $(x-y)(x+y) = 4n$. Но, $x + y = n$, па од последното равенство добиваме $n(x-y) = 4n$, т.е. $x - y = 4$.



61. Даден е квадрат $MNPQ$ со должина на страна $1m$. На страните на овој квадрат се земени точки A, B, C такви што точката A е на $\frac{1}{3}$ од страната NP тргнувајќи од точката N , точката B е на $\frac{2}{3}$ од страната MQ тргнувајќи од точката M и точката C е средина на страната

MN . Триаголникот ABC не е правоаголен. На која страна и за колку треба да се помести точката C за да триаголникот ABC биде правоаголен.

Решение. Нека претпоставиме дека точката C треба да се помести во положбата C' , за да триаголникот ABC' е правоаголен (цртеж десно). Нека $x = \overline{CC'}$ е должината која треба да ја определиме. Нека D е средината на отсечката BM . Тогаш $\overline{BD} = \frac{1}{3} = \overline{AN}$ и $\overline{MC} = \frac{1}{2} = \overline{NC}$. Од



правоаголните триаголници ABD , ANC' , MBC' и ABC' добиваме

$$\overline{AB}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2, \quad \overline{AC'}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2,$$

$$\overline{BC'}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2, \quad \overline{AB}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2,$$

па затоа $1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2$, т.е. $2x^2 = \frac{1}{18}$, од каде добиваме $x = \frac{1}{6}$ или $x = -\frac{1}{6}$, што значи дека точката C може да ја поместиме лево или десно за $\frac{1}{6}$.

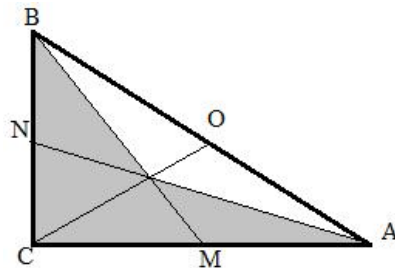
62. Нека C е темето на правиот агол на $\triangle ABC$. Докажи дека за должината на хипотенузата c и должините на тежишните линии t_a, t_b, t_c се исполнети равенствата

$$4(t_a^2 + t_b^2) = 5c^2 \quad (1)$$

$$t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2 \quad (2)$$

$$2(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3c^2 \quad (3)$$

Решение. Ако O е средина на хипотенузата, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$, тогаш $\overline{OC} = \frac{c}{2}$. Од правоаголните триаголници ANC и BMC следува $t_a^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$ и $t_b^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$, па затоа $t_a^2 + t_b^2 = \frac{5a^2}{4} + \frac{5b^2}{4} = \frac{5}{4}c^2$, т.е.



точно е равенството (1).

Имаме, $2t_c = c$, па со замена во (1) добиваме

$$4(t_a^2 + t_b^2) = 5 \cdot (2t_c)^2 = 20t_b^2, \text{ т.е. } t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$$

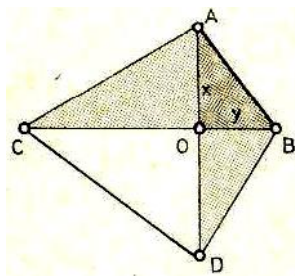
што значи дека еточно и равенството (2). Понатаму, од(1) и $2t_c = c$ следува равенството

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{5}{4}c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

кое е еквивалентно со равенството (3).

63. Илија го гледа сидот AB од две точки C и D , меѓу кои растојанието е 300 m , под агли од 30° . Правите AD и BC се нормални меусебно. Определи ја должината на сидот AB .

Решение. Нека O е пресечната точка на правите AD и BC (цртеж десно). Правоаголните триаголници ACO и BOD се полови од некои рамнострани триаголници (нивните внатрешни агли се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Ако ги воведеме ознаките $\overline{OA} = x, \overline{OB} = y$, добиваме $\overline{OC} = x\sqrt{3}, \overline{OD} = y\sqrt{3}$. Од правоаголниот триаголник CDO имаме $(x\sqrt{3})^2 + (y\sqrt{3})^2 = 300^2$, т.е.



$x^2 + y^2 = 30000$. Меѓутоа од правоаголниот триаголник AOB имаме $x^2 + y^2 = \overline{AB}^2$, па затоа $\overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2} = 100\sqrt{3}$.

64. Ако од средината на едната катета на правоаголниот триаголник се повлече нормала кон хипотенузата, докажи дека тогаш разликата на квадратите на така добиените отсечоци на хипотенузата е еднаква на квадратот на должината на другата катета.

Решение. Нека

$$\overline{MN} = x, \overline{MA} = y, \overline{BN} = p \text{ и } \overline{NA} = q.$$

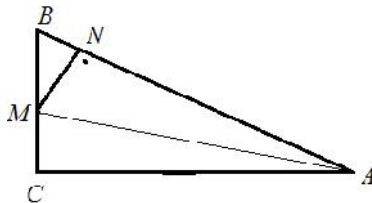
Од триаголниците MNB , MNA и AMC следува:

$$p^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2, q^2 = y^2 - x^2,$$

$$b^2 = y^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = q^2 + x^2 - (p^2 + x^2)$$

$$= q^2 - p^2,$$

што и требаше да се докаже.

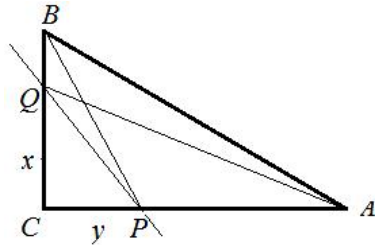


65. Нека C е темето на правиот агол на $\triangle ABC$ и нека права p ја сече катетата AC во точката P , а катетата BC во точка Q . Докажи дека

$$\overline{AQ}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{PQ}^2.$$

Решение. Нека $\overline{CQ} = x$, $\overline{CP} = y$. Од триаголниците ABC и CPQ следува $\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$ и $\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2$, па затоа

$$\overline{AB}^2 + \overline{PQ}^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2. \quad (1)$$



Понатаму, од триаголниците AQC и BPC следува $\overline{AQ}^2 = b^2 + x^2$ и $\overline{BP}^2 = a^2 + y^2$, па затоа

$$\overline{AQ}^2 + \overline{BP}^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2. \quad (2)$$

Конечно, бараното равенство следува од равенствата (1) и (2).

66. Во паралелограм $ABCD$ важи $\overline{AC} > \overline{BD}$. Од темето C се повлечени нормали CE и CF на продолженијата на страните AB и AD . Докажи дека $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF}$.

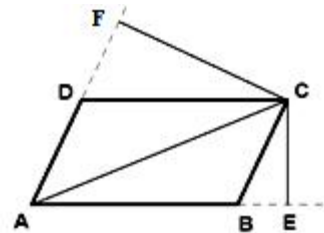
Решение. Од правоаголните триаголници ACE и BCE (цртеж десно) следува

$$\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 \text{ и}$$

$$\overline{CE}^2 = \overline{BC}^2 - (\overline{AE} - \overline{AB})^2,$$

па затоа

$$\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{BC}^2 - (\overline{AE} - \overline{AB})^2.$$



На сличен начин од триаголниците ACF и CDF добиваме

$$\overline{AC}^2 - \overline{AF}^2 = \overline{CD}^2 - (\overline{AF} - \overline{AD})^2.$$

Последните две равенства ги собираме и добиваме

$$2\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 - \overline{AF}^2 = \overline{BC}^2 - (\overline{AE} - \overline{AB})^2 + \overline{CD}^2 - (\overline{AF} - \overline{AD})^2$$

и како $\overline{AD} = \overline{BC}$ и $\overline{CD} = \overline{AB}$, од последното равенство наоѓаме

$$2\overline{AC}^2 = 2\overline{AE} \cdot \overline{AB} + 2\overline{AF} \cdot \overline{AD},$$

од каде по кратењето со 2 го добиваме бараното равенство.

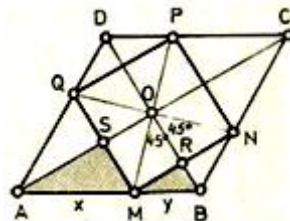
67. Даден е ромб $ABCD$ со агол $\angle BAD = 60^\circ$. Симетралите на аглите меѓу дијагоналите ги сечат страните на ромбот во точките M, N, P, Q .

а) На кој вид припаѓа четириаголникот $MNPQ$?

б) Ако точката M припаѓа на страната AB , определи го односот $\overline{AM} : \overline{MB}$.

в) Определи ги односот на на оние делови на големата и малата дијагонала кои лежат надвор од четириаголникот $MNPQ$.

Решение. Од складноста на триаголниците OBM и OBN следува дека $\overline{OM} = \overline{ON}$, а од складноста на триаголниците OAM и OAN следува дека $\overline{OM} = \overline{ON}$. На ист начин се докажува и дека $\overline{MP} = \overline{NQ}$ и бидејќи



$\angle MON = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, заклучуваме дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.

б) Триаголникот AMQ е рамностран. Страната на овој триаголник да ја означиме со x . Тогаш триаголникот BRM , кој е половина од рамностран триаголник, има висина $\overline{MR} = \frac{x}{2}$. Затоа $\overline{MR} = \frac{\overline{MB}\sqrt{3}}{2}$, па ако ставиме $\overline{MB} = y$, добиваме $\frac{x}{2} = \frac{y\sqrt{3}}{2}$, т.е $x = y\sqrt{3}$. Според тоа, $\overline{AM} : \overline{MB} = x : y = \sqrt{3} : 1$.

в) Од триаголникот AMQ следува $\overline{AS} = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{y\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3y}{2}$, а од триаголникот BRM добиваме $\overline{BR} = \frac{y}{2}$. Според тоа, $\overline{AS} : \overline{BR} = \frac{3y}{2} : \frac{y}{2} = 3 : 1$.

68. Даден е квадрат $ABCD$ со плоштина 2002 cm^2 . Нека P, Q, R, S се точки соодветно од страните AB, BC, CD, DA такви што

$$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{CR} : \overline{RD} = \overline{DS} : \overline{SA} = 4 : 1.$$

Правите AR, BS, CP и DQ се сечат во точките K, L, M и N . Докажи дека точките K, L, M и N се темиња на квадрат и определи ја неговата плоштина.

Решение. Имаме,

$$\triangle ABS \cong \triangle CPB \cong \triangle CDQ \cong \triangle ADR,$$

(правоаголни триаголници со еднакви катети), па затоа

$$\overline{BS} = \overline{PC} = \overline{QD} = \overline{RA} = b,$$

$$\angle ABS = \angle BCP = \angle CDQ = \angle DAR = a \text{ и}$$

$$\angle ASB = \angle BPC = \angle CQD = \angle DRA = b.$$

За $\triangle PBL$ важи $a + b = 90^\circ$ (како остри агли на правоаголен триаголник, па затоа $\angle PLB = \angle KLM = 90^\circ$). Аналогно се докажува дека $\angle LMN = \angle MNK = \angle NKL = 90^\circ$. Понатаму,

$$\triangle PBL \cong \triangle QMC \cong \triangle DNR \cong \triangle AKS,$$

па затоа $\overline{LB} = \overline{MC} = \overline{ND} = \overline{KA} = m$ и $\overline{PL} = \overline{MQ} = \overline{NR} = \overline{SK} = n$, што значи $\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MN} = \overline{NK} = b - (m + n) = x$. Значи четириаголникот $KLMN$ има еднакви страни и прави агли, па затоа тој е квадрат. Имаме,

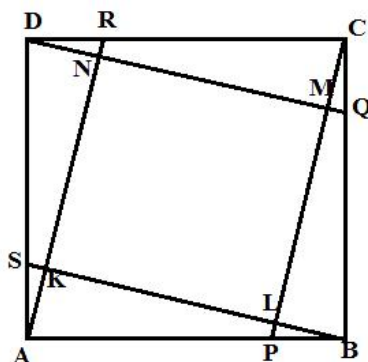
$$b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^2} = \frac{a\sqrt{26}}{5} = \frac{\sqrt{2002} \cdot \sqrt{26}}{5} = \frac{26\sqrt{77}}{5} \text{ и}$$

$$P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2002} \cdot \frac{1}{5} \sqrt{2002} = \frac{1001}{5} = P_{\triangle DQC}.$$

Четириаголникот $SBQD$ е паралелограм (има еднакви спротивни страни $\overline{SB} = \overline{DQ}$ и $\overline{BQ} = \overline{SD}$) и затоа $P_{SBQD} = 2002 - \frac{2002}{5} = \frac{4 \cdot 2002}{5}$.

Страната x на квадратот $KLMN$ е висина на паралелограмот $SBQD$, па затоа $\frac{4 \cdot 2002}{5} = P = bx = \frac{26\sqrt{77}}{5}x$, т.е. $x = 4\sqrt{77}$. Конечно,

$$P_{KLMN} = x^2 = 16 \cdot 77 = 1232 \text{ cm}^2.$$



69. Должините на двете страни на триаголникот се 13 cm и 14 cm , а неговата плоштина е 84 cm^2 . Определи ја должината на третата страна.

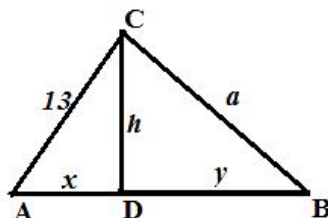
Решение. Нека $\overline{AB} = c = 14 \text{ cm}$ е страната на триаголникот која соодветствува на висината h (цртеж десно). Тогаш $84 = \frac{14 \cdot h}{2}$, од каде добиваме $h = 12 \text{ cm}$.

Нека $\overline{AD} = x$ и $\overline{DB} = y$. Тогаш

$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ и } y = 14 - 5 = 9,$$

па затоа

$$a = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$



70. Должините на основите на траpezот се 55 cm и 25 cm , а дијагоналите се симетрали на аглите при поголемата основа. Определи ја плоштината на овој траpez.

Решение. Нека дадениот траpez е $ABCD$, $AB \parallel CD$. Од

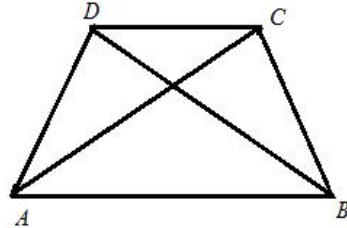
$$\angle DAC = \angle CAD = \angle ACD$$

следува дека триаголникот ACD е рамнокрак и $\overline{AD} = \overline{DC} = 25\text{ cm}$. Слично,

триаголникот BDC е рамнокрак и $\overline{BC} = \overline{CD} = 25\text{ cm}$. Значи, траpezот $ABCD$ е рамнокрак со крак $c = 25\text{ cm}$. Сега за висната добиваме

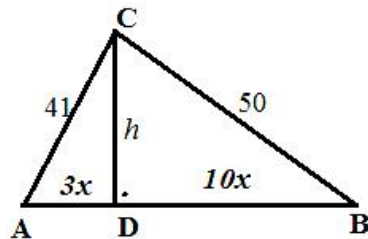
$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\text{ cm}$$

и плоштината на траpezот е $P = \frac{a+b}{2}h = 800\text{ cm}^2$.



71. Во триаголникот ABC дадени се должините на страните $\overline{AC} = 41\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 50\text{ cm}$. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC ако висината CD ја дели страната AB во однос $3:10$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $AD:DB = 3:10$, па затоа $AD = 3x$ и $DB = 10x$. Сега од $\triangle ADC$ следува $h^2 = 41^2 - 9x^2$, а од $\triangle BCD$ следува $h^2 = 50^2 - 100x^2$. Според тоа $41^2 - 9x^2 = 50^2 - 100x^2$, од каде добиваме $x = 3\text{ cm}$. Сега,



$$\overline{AD} = 9\text{ cm}, \overline{BD} = 30\text{ cm}, \overline{AB} = 39\text{ cm} \text{ и } h = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\text{ cm}.$$

Конечно, периметарот на триаголникот е $L = 130\text{ cm}$, а неговата плоштина е $P = \frac{ch}{2} = 780\text{ cm}^2$.

72. Во правоаголен ABC со прав агол во темето C важи $\overline{AC} = 6\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 8\text{ cm}$. Определи го односот на висината и тежишната линија кои соодветствуваат на хипотенузата.

Решение. Од условот на задачата следува $\overline{AB} = c = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$.

Понатаму, $P = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$, па затоа $24 = \frac{10 \cdot h_c}{2}$, т.е. $h_c = 4,8 \text{ cm}$. Конечно, $h_c : t_c = 4,8 : 5$.

73. Односот на должините на хипотенузата и едната катета на правоаголен триаголник е 101:99. Определи го односот на должините на хипотенузата и другата катета.

Решение. Од условот на задачата следува $c : a = 101 : 99$, па затоа $c = 101k$ и $a = 99k$. Сега, од Питагоровата теорема добиваме $b = \sqrt{(101k)^2 - (99k)^2} = 20k$. Конечно, односот на должините на хипотенузата и другата катета е $c : b = 101k : 20k = 101 : 20$.

74. Должините на висината и тежишната линија кои соодветствуваат на хипотенузата на правоаголен триаголник се однесуваат како 40:41. Определи го односот на должините на катетите на овој триаголник.

Решение. Нека ABC е дадениот триаголник со прав агол во темето C . Имаме, $h : t = 40 : 41$, па затоа $h = 40k$, $t = 41k$, $\overline{MB} = \overline{MC} = 41k$ и

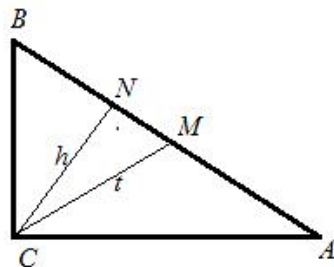
$$\overline{MN} = x = \sqrt{1681k^2 - 1600k^2} = 9k.$$

Тоа значи $\overline{BN} = 41k - 9k = 32k$, па затоа

$$\overline{BC} = a = \sqrt{(32k)^2 + (40k)^2} = \sqrt{2624k^2} = 8\sqrt{41}k \text{ и}$$

$$\overline{AC} = b = \sqrt{6724k^2 - 2624k^2} = \sqrt{4100k^2} = 10\sqrt{41}k.$$

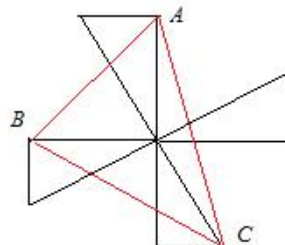
Конечно, бараниот однос е $a : b = 8\sqrt{41}k : 10\sqrt{41}k = 4 : 5$.

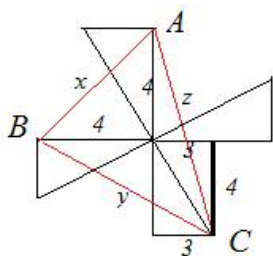


75. Правоаголен триаголник со должини на катети 3 и 4 три пати е ротиран околу темето на еден од остриите агли, како на цртежот десно. Дали триаголникот ABC е правоаголен?

Решение. Од условот на задачата следува

$$x = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad y = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} \text{ и}$$





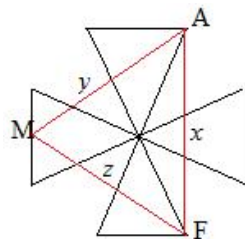
$$z = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}.$$

Според тоа,

$$z^2 = 73 < 65 + 32 = x^2 + y^2,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникот ABC не е правоаголен.

76. Основите на рамнокраките триаголници на цртежот десно, кои имаат заедничко теме, се со должина 10 cm , а краците се со должина 13 cm . При ротација за 90° соседните триаголници се поклопуваат. Определи го периметарот на триаголникот AMF , каде M е средина на страната на која и припаѓа.



Решение. Нека O е заедничкото теме и AB, CD, EF и GH се основите на рамнократите триаголници (цртеж десно). Имаме,

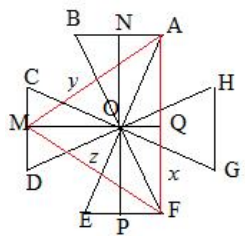
$$MO = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{ cm}.$$

Понатаму, $\triangle MOA \cong \triangle MOF$ (MO е заедничка страна, $\overline{OA} = \overline{OF} = 13\text{ cm}$ и $\angle MOA = \angle MOF$) и како $\overline{OQ} = 5\text{ cm}$ добиваме $\overline{MQ} = 17\text{ cm}$ и затоа

$$\overline{MF} = \overline{MA} = \sqrt{17^2 + 12^2} = \sqrt{433}\text{ cm}.$$

Сега, $\overline{AQ} = \overline{FQ} = 12\text{ cm}$, па затоа

$$\overline{AF} = \overline{AQ} + \overline{FQ} = 2 \cdot 12 = 24\text{ cm} \text{ и } L = 24 + 2\sqrt{433}\text{ cm}.$$



77. Должините на страните на правоаголен триаголник, изразени во сантиметри, се двоцифрени броеви. Најмалиот и најголемиот број имаат иста цифра на единиците и двата броја се прости. Двата поголеми броја се последователни, а разликата на најголемиот и најмалиот број е за 10 помала од третиот број. Определи ги страните на овој триаголник.

Решение. Нека a, b, c се должините на страните на дадениот триаголник, $a < b < c$. Од условот на задачата следува $c = b + 1$ и $c - a = b - 10$ и затоа $c - (c - a) = b + 1 - (b - 10)$, т.е. $a = 11$. Бидејќи c е прост број и завршува на цифрата 1, за него остануваат можностите 31, 41, 61 и 71.

Со непосредна проверка добиваме дека само еден од случаите е решение на задачата, т.е. дека

$$61^2 - 11^2 = (61+11)(61-11) = 72 \cdot 50 = 3600 = 60^2.$$

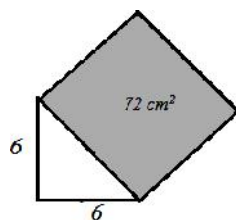
Значи, $a = 11, b = 60, c = 61$.

78. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на половината од плоштината на квадрат со должина на страна 12 cm .

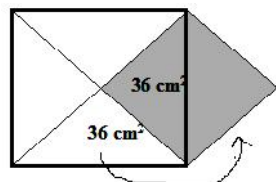
Решение. Нека должината на страната на бараниот квадрат е x . Од условот на задачата следува $P = a^2 = 12^2 = 144$ и

$$P_1 = \frac{144}{2} = 72 = x^2, \text{ т.е. } x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} = \sqrt{6^2 + 6^2}.$$

Прв начин. Конструираме рамнокрак правоаголен триаголник со катета 6 cm , па над неговата хипотенуза конструираме квадрат (цртеж десно).

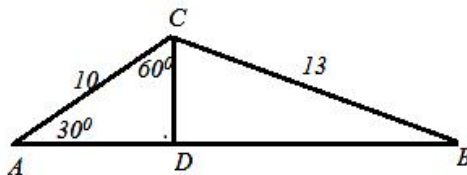


Втор начин. Дадениот квадрат со должина на страна 12 cm со дијагоналите го делиме на четири рамнокраки правоаголни триаголници и од два од нив составуваме квадрат.



79. Должината на едната страна на триаголникот е 10 cm , а должината на другата страна, која е наспроти агол од 30° , е 13 cm . Определи ја должината на третата страна на триаголникот.

Решение. Нека дадениот триаголник е ABC во кој важи $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 13 \text{ cm}$ и $\angle A = 30^\circ$. Нека CD е висината повлечена од темето C .



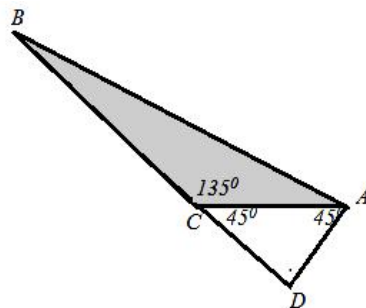
Имаме, $\angle ACD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, што значи дека $\triangle ACD$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$. Според тоа,

$$\overline{AD} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}, \overline{BD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}, \overline{AB} = c = 12 + 5\sqrt{3} \text{ cm}.$$

80. Во $\triangle ABC$ важи $\angle C = 135^\circ$. Определи ја должината на страната AB ако $\overline{BC} = a = 17 \text{ cm}$ и $\overline{AC} = b = 7\sqrt{2} \text{ cm}$.

Решение. Ја продолжуваме страната BC преку темето C и од точката A повлекуваме нормала AD на правата BC . Триаголникот CAD е рамнокрак правоаголен, па затоа $\overline{AD} = \overline{CD} = x$, што значи $2x^2 = (7\sqrt{2})^2$, односно $x = 7 \text{ cm}$. Сега, $\overline{BD} = 17 + 7 = 24 \text{ cm}$.

Триаголникот ABD е правоаголен со прав агол во темето D , па од Питагоровата теорема следува $\overline{AB} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \text{ cm}$.

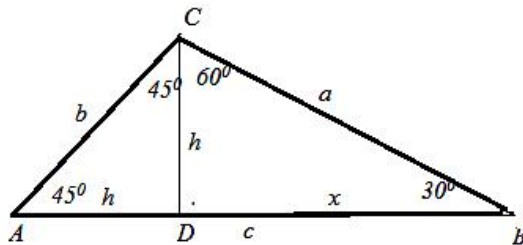


81. Во $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ и $\overline{AB} = (5 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}$. Определи ги периметарот и плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Од темето C повлекуваме нормала CD на страната AB .

Имаме $\angle ACD = 45^\circ$ и $\angle BCD = 60^\circ$, па затоа триаголникот ACD е рамнокрак правоаголен,

а триаголникот BCD е половина од рамностран триаголник. Според тоа,



$$\overline{DC} = h = \frac{\overline{CB}}{2} = \frac{a}{2} \text{ и } \overline{BD} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

па затоа

$$5 + 5\sqrt{3} = c = \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

од каде добиваме $a(1 + \sqrt{3}) = 10(1 + \sqrt{3})$, т.е. $a = 10 \text{ cm}$. Сега, $h = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, $b = 5\sqrt{6} \text{ cm}$, па затоа

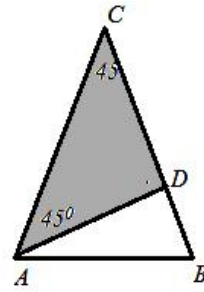
$$L = 10 + 5\sqrt{6} + 5 + 5\sqrt{3} = 15 + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{6} \text{ cm и}$$

$$P = \frac{ch}{2} = \frac{(5+5\sqrt{3})5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2.$$

82. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$ важи $\angle C = 45^\circ$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Од точката A ја повлекуваме висината AD на кракот BC . Имаме $\angle CAD = 45^\circ$, што значи дека триаголникот ACD е рамнокрак правоаголен. Според тоа, $\overline{AD} = \overline{DC} = h_b$, па затоа $2h_b^2 = b^2$, т.е. $2h_b^2 = (10\sqrt{2})^2$, од каде добиваме $\dots$. Конечно,

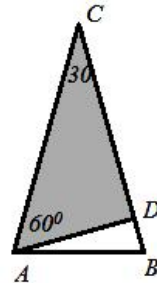
$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 10}{2} = 50\sqrt{2} \text{ cm}.$$



83. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 12 \text{ cm}$ важи $\angle C = 30^\circ$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Од темето A ја повлекуваме висината AD на кракот BC . Имаме $\angle CAD = 60^\circ$, што значи дека триаголникот ACD половина од рамностран триаголник. Според тоа, $\overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 6 \text{ cm}$, па затоа

$$P = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$



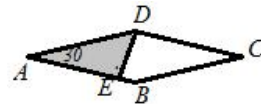
84. Определи ја плоштината на ромб со должина на страна $a = 16 \text{ cm}$, а агли на ромбот се однесуваат како 5:1.

Решение. Соседните агли на ромбот се суплементни, па затоа $a + b = 180^\circ$ и $b = 5a$.

Според тоа, $6a = 180^\circ$, од каде добиваме

$a = 30^\circ$. Значи, $\angle ADE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, па затоа триаголникот ADE е половина од рамностран триаголник. Тоа значи $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AD} = 8 \text{ cm}$ и

за плоштината на ромбот добиваме $P = ah = 16 \cdot 8 = 128 \text{ cm}^2$.

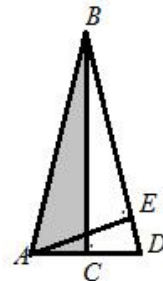


85. Должината на хипотенузата на правоаголен триаголник е 12 cm , а еден остар агол е еднаков на 75° . Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\angle B = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Правоаголниот триаголник ABC го дополнуваме со складен правоаголен триаголник BCD и добиваме рамнокрак триаголник ADC чиј агол при врвот е



еднаков на 30° . Од темето A повлекуваме висина AE на кракот BD . Имаме, $\angle BAE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, што значи дека триаголникот AEB е половина од рамнокрак триаголник. Затоа, $\overline{AE} = h = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ cm}$, од што следува

$$P_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2,$$

а затоа $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_{\triangle ADB} = 18 \text{ cm}^2$.

86. Острите агли на правоаголен триаголник се разликуваат за 45° , а должината на неговата хипотенуза е $c = 10 \text{ cm}$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

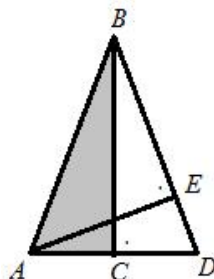
Решение. Имаме, $a - b = 45^\circ$ и $a + b = 90^\circ$, од

каде добиваме $2a = 135^\circ$, т.е. $a = 135^\circ : 2 = 67^\circ 30'$

и $b = 22^\circ 30'$. Правоаголниот триаголник ABC го

дополнуваме со складен правоаголен триаголник BCD и добиваме рамнокрак триаголник ADB

чиј агол при врвот е еднаков на 45° . Од темето A повлекуваме висина AE на кракот BD .



Имаме, $\angle BAE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, што значи дека триаголникот AEB е рамнокрак правоаголен. Затоа $\overline{AE} = \overline{EB} = h$, т.е. $2h^2 = 10^2$ и

$h = 5\sqrt{2} \text{ cm}$. Конечно, $P_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2} \text{ cm}^2$ и

затоа $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_{\triangle ADB} = \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2$.

87. Определи ги сите правоаголни триаголници со целобројни должини на страни изразени во сантиметри, кај кои должината на едната катета е 15 cm .

Решение. Нека a е должината на другата катета, а c е должината на хипотенузата. Од условот на задачата следува равенката $15^2 = c^2 - a^2$, која е еквивалентна на равенката

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = (c + a)(c - a).$$

Можни се следниве случаи:

- 1) $c + a = 225$, $c - a = 1$, од каде добиваме $2c = 226$, т.е. $c = 113 \text{ cm}$ и $a = 112 \text{ cm}$,

- 2) $c + a = 75$, $c - a = 3$, од каде добиваме $2c = 78$, т.е. $c = 39 \text{ cm}$ и $a = 36 \text{ cm}$,
- 3) $c + a = 45$, $c - a = 5$, од каде добиваме $2c = 50$, т.е. $c = 25 \text{ cm}$ и $a = 20 \text{ cm}$,
- 4) $c + a = 25$, $c - a = 9$, од каде добиваме $2c = 34$, т.е. $c = 17 \text{ cm}$ и $a = 8 \text{ cm}$.

88. Должините на страните на триаголникот се 13 cm , 14 cm и 15 cm . Определи ја неговата плоштина.

Решение. Прв начин. Имаме, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{ cm}$. Сега од Хероновата формула следува

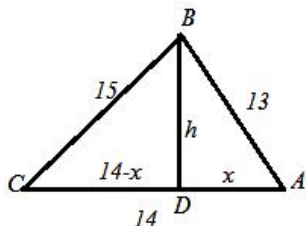
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ cm}^2.$$

Втор начин. При ознаки како на цртежот десно, имаме:

$$h^2 = 13^2 - x^2 \text{ и } h^2 = 15^2 - (14-x)^2,$$

па затоа $169 - x^2 = 225 - (14-x)^2$, од каде добиваме $x = 5 \text{ cm}$ и $h = 12 \text{ cm}$. Конечно,

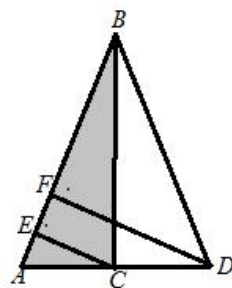
$$P = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 \text{ cm}^2.$$



89. Определи ги должините на катетите на правоаголен триаголник чија хипотенуза е долга 4 cm , а мерните броеви на неговите остри агли се однесуваат како $3:1$.

Решение. Нека $\overline{CE} = h$. Правоаголникот триаголник ABC го дополнуваме со складен правоаголен триаголник BCD и добиваме рамнокрак триаголник ADB (цртеж десно). Имаме $\overline{DF} = 2h$, бидејќи CE е средна линија на триаголникот ADF . Од $a = 3b$ и $a + b = 90^\circ$ следува $a = 67^\circ 30'$ и $b = 22^\circ 30'$. Според тоа, аголот во темето B на триаголникот BDF е еднаков на 45° , па затоа

$\overline{BD}^2 = 2 \cdot (2h)^2$, т.е. $8h^2 = 16$, односно $h = \sqrt{2}$. Понатаму, ако ставиме $\overline{AE} = x$, добиваме $b^2 = 2 + x^2$, $(4-x)^2 + 2 = a^2$ и $a^2 + b^2 = 4^2$, од каде ја добиваме равенката



$$2 + 16 - 8x + x^2 + 2 + x^2 = 16,$$

која е еквивалентна на равенката $x^2 - 4x + 2 = 0$, т.е. на равенката

$$(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2}) = 0.$$

Решенијата на последната равенка се $x \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$, па добиваме

$$a = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \text{ и } b = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}.$$

V.4. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

90. Во правоаголен триаголник ABC важи $c + h_c > a + b$, каде a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h_c е должината на висината повлечена кон хипотенузата. Докажи!

Решение. Имаме $c^2 = a^2 + b^2$ и $2ch_c = 2ab$, па затоа

$$c^2 + 2ch_c = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$c^2 + 2ch_c + h_c^2 > a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(c + h_c)^2 > (a + b)^2$$

$$c + h_c > a + b.$$

91. Во триаголникот ABC важи $h_a h_b = ch_c$, каде h_a, h_b, h_c се должините на висините, а c е должината на страна на триаголникот. Определи еден од аглиите на овој триаголник.

Решение. Од даденото равенство следува дека $P = \frac{ch_c}{2} = \frac{h_a h_b}{2}$, каде P е плоштината на триаголникот. Освен тоа $P = \frac{ah_a}{2}$ и $P = \frac{bh_b}{2}$, па добиваме дека $\frac{ah_a}{2} = \frac{h_a h_b}{2}$ и $\frac{bh_b}{2} = \frac{h_a h_b}{2}$, т.е. $a = h_b$ и $b = h_a$. Според тоа, овој триаголник е правоаголен, т.е. еден од неговите агли е прав агол.

92. Докажи дека во правоаголен триаголник реципрочната вредност на квадратот на должината на висината повлечена кон хипотенузата е еднаква на збирот на реципрочните вредности на квадратите од должините на катетите.

Решение. Нека a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h_c е должината на висината повлечена кон хипотенузата. Имаме, $a = \frac{2P}{b}$, $b = \frac{2P}{a}$, $c = \frac{2P}{h_c}$ и ако замениме во равенството

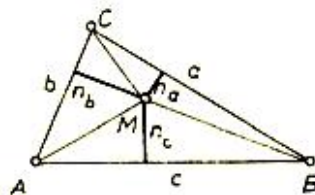
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{добиваме} \quad \frac{4P^2}{a^2} + \frac{4P^2}{b^2} = \frac{4P^2}{h_c^2}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h_c^2}, \quad \text{што и}$$

требаше да се докаже.

93. Во внатрешноста на произволен триаголник ABC е избрана произволна точка M . Нека n_a, n_b, n_c се растојанијата од точката M до страните BC, CA, AB , соодветно. Докажи дека $\frac{n_a}{h_a} + \frac{n_b}{h_b} + \frac{n_c}{h_c} = 1$ каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини на триаголникот.

Решение. Отсечките MA, MB, MC го делат триаголникот на три триаголници со плоштини $\frac{an_a}{2}, \frac{bn_b}{2}, \frac{cn_c}{2}$, од каде добиваме дека $P = \frac{an_a}{2} + \frac{bn_b}{2} + \frac{cn_c}{2}$, односно

$$1 = \frac{an_a}{2P} + \frac{bn_b}{2P} + \frac{cn_c}{2P}. \quad \text{Но, } h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}, \text{ па ако замениме во последното равенство добиваме } \frac{n_a}{h_a} + \frac{n_b}{h_b} + \frac{n_c}{h_c} = 1.$$



94. Во даден триаголник односот на висините е $h_a : h_b : h_c = 6 : 4 : 3$, а периметарот на триаголникот е 9 cm . Определи ги должините на страните a, b, c на триаголникот.

Решение. Имаме, $h_a = 6k$, $h_b = 4k$ и $h_c = 3k$, па затоа

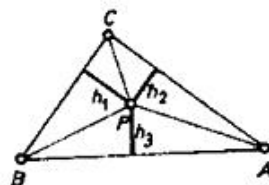
$$a = \frac{2P}{6k} = \frac{P}{3k}, \quad b = \frac{2P}{4k} = \frac{P}{2k} \quad \text{и} \quad c = \frac{2P}{3k}.$$

Според тоа, $9 = a + b + c = \frac{P}{3k} + \frac{P}{2k} + \frac{2P}{3k}$, односно $\frac{P}{k} = 6$. Значи,

$$a = \frac{P}{3k} = 2 \text{ cm}, \quad b = \frac{P}{2k} = 3 \text{ cm} \quad \text{и} \quad c = \frac{2P}{3k} = 4 \text{ cm}.$$

95. Даден е триаголник со должини на страни 3, 4 и 5. Дали во внатрешноста на овој триаголник постои точка која од секоја страна е оддалечена помалку од 1?

Решение. Од $3^2 + 4^2 = 5^2$ следува дека дадениот триаголник е правоаголен (цртеж дес-



но) и неговата плоштина е $P = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Ако постои точка P таква што нејзините растојанија до страните AB, BC, CA се помали од 1, т.е. $h_1 < 1, h_2 < 1, h_3 < 1$, тогаш

$$\begin{aligned} 6 = P &= P_{ABP} + P_{BCP} + P_{CAP} = \frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot h_2}{2} + \frac{\overline{CA} \cdot h_3}{2} \\ &< \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2} = \frac{12}{2} = 6, \end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои точка со саканото својство.

96. Докажи дека во секој триаголник ABC е исполнето равенството $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, каде h_a, h_b, h_c се висините на триаголникот, а r е радиусот на впишаната кружница во него.

Решение. Имаме, $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$, па затоа $a = \frac{2P}{h_a}, b = \frac{2P}{h_b}, c = \frac{2P}{h_c}$

Понатаму, $P = \frac{(a+b+c)r}{2}$, т.е. $\frac{2P}{r} = a + b + c$, па затоа

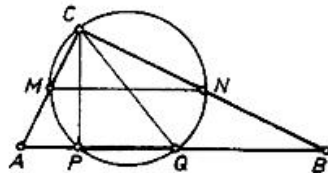
$$\frac{2P}{r} = \frac{2P}{h_a} + \frac{2P}{h_b} + \frac{2P}{h_c},$$

од каде следува бараното равенство.

97. Правоаголен триаголник ABC има катети AC и BC со должини 60 cm и 80 cm, соодветно. Нека M и N се средините на катетите. Кружницата со дијаметар MN ја сече хипотенузата AB во точките P и Q . Определи ја должината на отсечката PQ .

Решение. Должината на хипотенузата AB е 100 cm, па затоа отсечката MN ,

како средна линија на триаголникот има должина 50 cm (цртеж десно). Дадената кружница минува низ темето C на

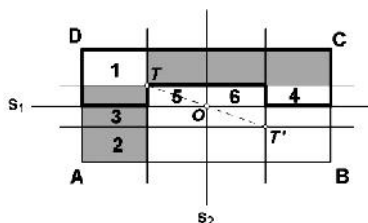


правиот агол, бидејќи аголот над дијаметарот е прав. Точката која е симетрична на C во однос на правата MN припаѓа на хипотенузата и како кружницата е симетрична во однос на својот дијаметар, а отсечката MN е нејзин дијаметар, заклучуваме дека оваа точка припаѓа и на кружницата. Поточно, тоа е една од пресечните точки на кружницата и хипотенузата, да кажеме точката P . Тоа значи дека $\angle CPQ$ е прав агол. Но, тоа значи дека отсечката CQ е дијаметар на круж-

ницатаи дека нејзината должина е 50 cm . За должината на отсечката CP добиваме $\overline{CP} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CP}}{\overline{AB}} = 48\text{ cm}$. Конечно, од правоаголниот триаголник CPQ добиваме $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CQ}^2 - \overline{CP}^2} = 14\text{ cm}$.

98. Даден е правоаголник $ABCD$. Во неговата внатрешност е земена точка низ која се повлечени две прави паралелни на страните на правоаголникот. Докажи дека плоштината на барем еден од правоаголниците кои ја содржат точката A или точката C е помала или еднаква на четвртина од плоштината на четириаголникот $ABCD$.

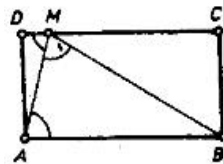
Решение. Нека s_1 и s_2 се оските на симетрија на правоаголникот $ABCD$ (цртеж десно). Тие го делат правоаголникот на 4 еднакви дела, секој со плоштина $\frac{P}{4}$. Ако точката ја избереме



во еден од деловите кои ја содржат точката A или точката C , тогаш тврдењето е очигледно. Нека точката, да кажеме T , ја избереме надвор од овие два дела на правоаголникот. Ја конструираме точката T' симетрична на точката T до однос на центарот O и да го поделиме правоаголникот $ABCD$ со прави низ T и T' . Ќе докажеме дека збирот на плоштините на бараните правоаголници (осенчени на цртежот) е помал од $\frac{P}{2}$. Да забележиме дека заради симетрија правоаголниците означени со 1 и 2 се еднакви, а исто така еднакви се и правоаголниците означени со 3 и 4. Оттука следува дека збирот на плоштините на осенчените правоаголници е еднаков на плоштината на осумаголникот чији страни се означени со задебелена линија. Јано, оваа плоштина е помала од $\frac{P}{2}$ (не се содржат правоаголниците означени со 5 и 6), па затоа барем еден од осенчените правоаголници има плоштина помала од $\frac{P}{4}$.

99. Даден е правоаголник $ABCD$ чија страна AB е два пати подолга од страната BC . На страната CD е земена точка M таква што $\angle AMD$ е еднаков на $\angle AMB$.
- Пресметај го $\angle AMB$.
 - Ако $\overline{DM} = 1$, определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. а) Имаме $\angle BAM = \angle AMD$ како наизменични агли, па како според условот на задачата $\angle AMD = \angle AMB$, добиваме $\angle BAM = \angle AMB$. Според тоа триаголникот ABM е рамнокрак и $\overline{AB} = \overline{BM}$. Според тоа во правоаголникот триаголник BCM хипотенузата BM е два пати поголема од катетата BC , што значи дека овој триаголник е половина од некој рамностран триаголник. Последното значи дека $\angle BMC = 30^\circ$, па затоа



$$\angle AMB + \angle AMD = 150^\circ, \text{ т.е. } \angle AMB = \angle AMD = 75^\circ$$

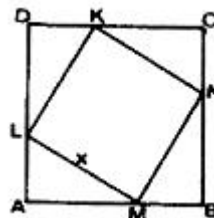
б) Нека $\overline{BC} = b$. Тогаш $\overline{CD} = 2b$ и како $\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{MD}$, а $\overline{DM} = 1$ и $\overline{CM} = b\sqrt{3}$, добиваме дека $2b = b\sqrt{3} + 1$, односно $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.

Конечно, за плоштината на правоаголникот добиваме

$$P = b \cdot 2b = 2(2 + \sqrt{3})^2 = 2(7 + 4\sqrt{3}).$$

100. Во квадрат со страна a впишан е квадрат чии темиња лежат на страните на првиот квадрат, но така што страните на дадениот и впишаниот квадрат формираат агол од 30° . Определи го односот на плоштините на двата квадрати?

Решение. Нека x е должината на страната на впишаниот квадрат (цртеж десно). Бидејќи $\angle LMA = 30^\circ$, заклучуваме дека триаголникот LMA е половина од рамностран триаголник со страна $\overline{LM} = x$, па затоа $\overline{AL} = \frac{x}{2}$ и $\overline{AM} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.



Според тоа,

$$a = \overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + \overline{AL} = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}(\sqrt{3} + 1), \text{ т.е. } x = a(\sqrt{3} - 1).$$

Значи, односот на плоштините на двата квадрати е:

$$P_1 : P = a^2(\sqrt{3} - 1)^2 : a^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 = 2(2 - \sqrt{3}).$$

101. Определи ги периметарот и плоштината на ромбот ако:

- радиусот на впишаната кружница во ромбот е $r = 1,5 \text{ cm}$ и остриот агол е $\alpha = 30^\circ$,
- страната е $a = 10 \text{ cm}$ и надворешниот агол $\beta_1 = 30^\circ$,
- висината е $h = 3 \text{ cm}$, а аголот меѓу страната и висината е 60° .

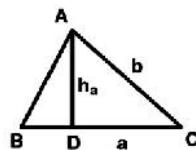
Решение. а) Правите на кои лежат страните на ромбот се тангенти на впишаната кружница во ромбот, па затоа радиусите повлечени во допирните точки се нормални на страните. Оттука следува дека $h = 2r = 3\text{ cm}$. Сега ако AD' е висина во ромбот, тогаш $\triangle AD'D$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AD} = 2 \cdot 3 = 6\text{ cm}$, што значи дека $L = 4a = 24\text{ cm}$ и $P_{rh} = 18\text{ cm}^2$.

б) Имаме: $\alpha = \beta_1 = 30^\circ$. Сега задачата се решава на ист начин како задачата под а).

в) Имаме: $\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Сега задачата се решава на ист начин како задачата под а).

102. Докажи дека за секој конвексен четириаголник полузбирот на производите на соседните страни кои тргнуваат од несоседни темиња е поголем или еднаков од плоштината на тој четириаголник.

Решение. Прво ќе докажеме дека во секој триаголник со должини на страни a, b, c е исполнето неравенството $\frac{ab}{2} \geq P$. Плоштината на триаголникот



(цртеж десно) е $P = \frac{ah_a}{2}$. Во правоаголниот триаголник

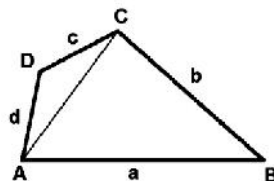
CAD h_a е катета, а b е хипотенуза, па затоа $h_a \leq b$. Според

тоа, $P = \frac{ah_a}{2} \leq \frac{ab}{2}$.

Нека сега $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник. Од претходно докажаното имаме

$$P = P_{ABC} + P_{CDA} \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2},$$

што и требаше да се докаже.



103. Даден е четириаголник $ABCD$. Конструирани е паралелограм $DBCM$. Докажи дека плоштината на триаголникот ACM е еднаква на плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Нека правата повлечена ни точката A нормално на правата CM ја сече оваа права во точката L , а правата BD во точката K (направи цртеж). Тогаш

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{KL}}{2} + \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AK}}{2}$$

$$= \frac{\overline{BD} \cdot (\overline{KL} + \overline{AK})}{2} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AL}}{2} = \frac{\overline{CM} \cdot \overline{AL}}{2} = P_{ACM}.$$

104. Должините на страните на паралелограмот се $a = 10 \text{ cm}$ и $b = 6 \text{ cm}$.

Симетралата на аголот го дели паралелограмот на триаголник и трапез. Определи го односот на плоштините на овие фигури.

Решение. Имаме

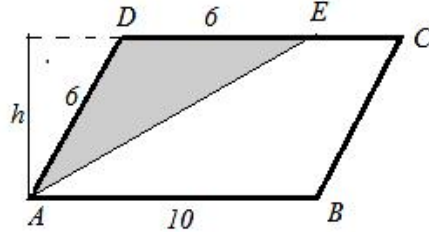
$$\angle DAE = \angle EAB = \angle AED = \frac{a}{2},$$

па затоа $\triangle AED$ е рамнокрак,

што значи $\overline{AD} = \overline{DE} = 6 \text{ cm}$.

Понатаму, триаголникот AED и трапезот $ABCE$ имаат ед-

накви висини, па затоа $P_{\triangle} = \frac{1}{2} 6 \cdot h = 3h$, $P_{ABCE} = \frac{1}{2} (10 + 4) \cdot h = 7h$, што значи дека $P_{\triangle} : P_{ABCE} = 3h : 7h = 3 : 7$.



105. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h , а неговата плоштина е еднаква на h^2 . Определи го аголот под кој се сечат дијагоналите на овој трапез.

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокракиот трапез $\overline{AD} = \overline{BC}$, CE е нормалата од C на основата AB , т.е. $\overline{CE} = h$ (направи цртеж). Според условот на задачата имаме $\frac{a+b}{2} h = h^2$, т.е. $\frac{a+b}{2} = h$. Сера,

$$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE} = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = h = \overline{CE},$$

што значи дека $\triangle ACE$ е рамнокрак правоаголен, па затоа добиваме дека $\angle EAC = \angle ABD = 45^\circ$. Ако O е пресекот на дијагоналите, тогаш за $\triangle ABO$ имаме $\angle BAO = \angle ABO = 45^\circ$, па затоа $\angle AOB = 90^\circ$, т.е. дијагоналите се сечат под прав агол.

106. Во рамнокрак трапез средната линија s е два пати пократка од дијагоналата d . Определи ја плоштината на овој трапез.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез и M и N се крајните точки на средната линија (цртеж десно). Имаме $\overline{MN} = s$ и $\overline{AC} = 2s$.

Понатаму, ако H е висината на трапезот,

$\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$ тогаш $\overline{AC}^2 + (a - \frac{a-b}{2})^2 = H^2$, па затоа

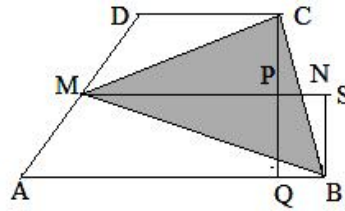


$$H = \sqrt{(2s)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{(2s)^2 + s^2} = s\sqrt{3}.$$

Конечно, за плоштината на траpezот добиваме $P = \overline{MN} \cdot H = s^2\sqrt{3}$.

107. Точката M е средина на кракот AD на траpezот $ABCD$. Докажи дека плоштината на $\triangle MBC$ е еднаква на половината од плоштината на траpezот $ABCD$.

Решение. Нека $\overline{MN} = m$ е средната линија на траpezот (цртеж десно). Тогаш $\overline{CP} = \overline{PQ} = \overline{BS} = \frac{h}{2}$. Плоштината на траpezот е $P = mh$. Триаголниците MBN и MCN имаат заедничка основа m и висина $\frac{h}{2}$, па затоа



$$P_{MBC} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} mh = \frac{1}{2} P,$$

што и требаше да се докаже.

108. Дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точка O и го делат четириаголникот на триаголниците OAB, OBC, OCD и ODA . Докажи дека производот на плоштините на триаголниците OAB и OCD е еднаков на производот на плоштините OBC и ODA .

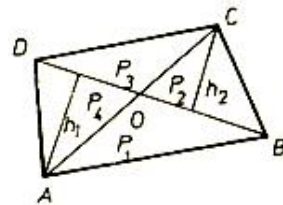
Решение. Плоштините на наведените триаголници да ги означиме со P_1, P_2, P_3, P_4 (цртеж десно). Имаме

$$P_1 = \frac{\overline{BO} \cdot h_1}{2}, P_2 = \frac{\overline{BO} \cdot h_2}{2}, P_3 = \frac{\overline{DO} \cdot h_2}{2}, P_4 = \frac{\overline{DO} \cdot h_1}{2},$$

па затоа

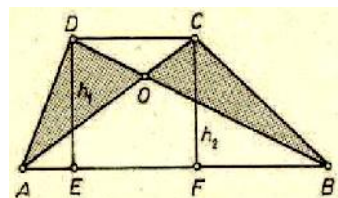
$$P_1 P_3 = \frac{\overline{BO} \cdot h_1}{2} \cdot \frac{\overline{DO} \cdot h_2}{2} = P_2 P_4,$$

што и требаше да се докаже.



109. Во четириаголникот $ABCD$ со различни должини на страни дијагоналите AC и BD се сечат во точката O . Ако плоштините на триаголниците ADO и BCO се еднакви, докажи дека четириаголникот е траpez.

Решение. Ако на триаголниците AOD и BOC кои имаат еднакви плоштини го додадеме триаголникот ABO ги добиваме триаголниците ABD и ABC , кои



исто така имаат еднакви плоштини, т.е. $P_{ABD} = P_{ABC}$. Значи, $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h_2$, па затоа $h_1 = h_2$, т.е. $\overline{DE} = \overline{CF}$. Според тоа, четириаголникот $CDEF$ е правоаголник, па затоа $DC \parallel CF$. Конечно, бидејќи страните AB и CD не се еднакви заклучуваме дека $ABCD$ е трапез.

110. Во трапез $ABCD$ права паралелна со основата AB ги сече отсечките AC и BC во точките M и N , соодветно. Докажи дека плоштините на триаголниците DAM и DBN се еднакви.

Решение. Триаголниците ACD и BCD имаат заедночка страна CD , а висините кои соодветствуваат на оваа страна се еднакви на висината на трапезот (цртеж десно). Затоа

$$P_{ACD} = \frac{\overline{CD} \cdot h}{2} = P_{BCD}.$$

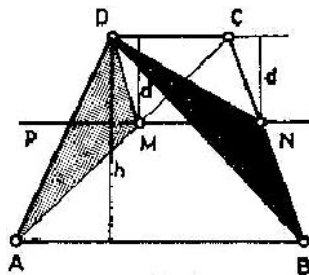
Триаголниците MCD и NCD имаат заедничка страна CD , а соодветните висини се еднакви на растојанието d межу паралелните прави CD и p . Според тоа,

$$P_{MCD} = \frac{\overline{CD} \cdot d}{2} = P_{NCD}.$$

Конечно,

$$P_{AMD} = P_{ACD} - P_{MCD} = P_{BCD} - P_{NCD} = P_{BND},$$

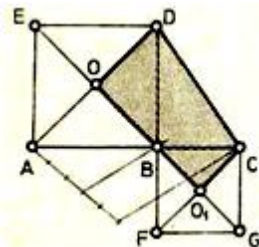
што и требаше да се докаже.



111. Точката B ја дели отсечката AC , $\overline{AC} = a$ во однос 3:2. Над отсечките AB и BC од различни страни во однос на отсечката AC се конструирани квадрати $ABDE$ и $CBFG$. Нека O и O_1 се пресеците на дијагоналите на овие квадрати. Определи го односот на плоштината на четириаголникот OO_1CD и плоштината на квадратот со страна AC .

Решение. Четириаголникот OO_1CD е составен од три правоаголни триаголници, такви што OBD и O_1BC се четвртини на соодветни квадрати (цртеж десно). Бараната плоштина е

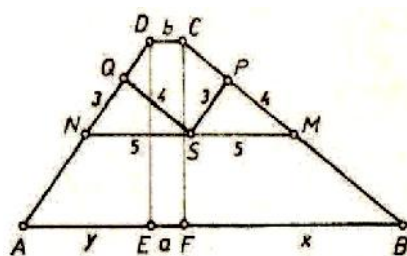
$$P = \frac{1}{4} \left(\frac{3a}{5}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{5}\right)^2 + \frac{13a}{24} \cdot \frac{2a}{5} = \frac{a^2}{4}$$



вртина од плоштината на квадрат со должина на страна $\overline{AC} = 1$. Затоа бараниот однос е 1:4.

112. Траpez има плоштина 80 cm^2 и должина на висина 8 cm . Средината на средната линија на траpezот од едниот крак е оддалечена 3 cm , а од другиот крак е оддалечена 4 cm . Определи ги должините на основите на овој траpez.

Решение. Нека траpezот е $ABCD$, MN е средната линија, S е нејзината средина, $\overline{SP} = 3 \text{ cm}$, $\overline{SQ} = 4 \text{ cm}$, и E и F се подножјата на висините спуштени соодветно од темињата D и C (цртеж десно). За плоштината на траpezот важи

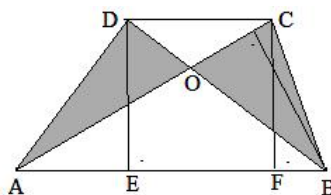


$$80 \text{ cm}^2 = P = \overline{MN} \cdot h = 8\overline{MN},$$

па затоа $\overline{MN} = 10 \text{ cm}$, т.е. $\overline{MS} = \overline{NS} = 5 \text{ cm}$. Сега, од Питагоровата теорема следува $\overline{QN} = 3 \text{ cm}$, $\overline{PM} = 4 \text{ cm}$. Понатаму, правоаголните триаголници SMP и BCF се слични и затоа $\overline{SP} : \overline{PM} = \overline{CF} : \overline{BF}$, односно $3:4 = 8:x$, па е $x = \frac{32}{3} \text{ cm}$. На ист начин од сличноста на триаголниците NQS и AED следува пропорцијата $\overline{SQ} : \overline{QN} = \overline{DE} : \overline{AE}$, т.е. $4:3 = 8:y$, па е $y = 6 \text{ cm}$. Бидејќи четириаголникот $CDEF$ е правоаголник добиваме $\overline{EF} = \overline{CD} = b$, па затоа $x + y = a - b$. Сега ги добиваме равенките $a - b = \frac{50}{3}$ и $a + b = 20$, од каде наоѓаме $a = \frac{55}{3} \text{ cm}$ и $b = \frac{5}{3} \text{ cm}$.

113. Даден е траpez $ABCD$ со основи $a = 10 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ и висина $h = 4 \text{ cm}$. Нека точката O е пресек на дијагоналите AC и BD . Определи ги плоштините на $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$.

Решение. Триаголниците ABC и ABD имаат заедничка основа AB и еднакви висини $\overline{DE} = \overline{CF} = h$, па затоа нивните плоштини се $P = \frac{ah}{2} = 10 \text{ cm}^2$.



Нивен заеднички дел е триаголникот ABO , што значи дека плоштините на триаголниците AOD и B се еднакви. Триаголниците ABO и BOC имаат основи AO и OC и заедничка висина повлечена од темето B . Од сличноста на триаголниците ABO и CDO (агли со паралелни краци и накрсни агли) следува дека $\overline{AO}:\overline{OC}=10:6=5:3$, па затоа $\overline{AO}=5k, \overline{OC}=3k$. Сега имаме:

$$P_{ABO} = \frac{1}{2} \overline{AO} \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 5k \cdot h_1, \quad P_{BCO} = \frac{1}{2} \overline{OC} \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot h_1$$

па затоа $P_{ABO} : P_{BCO} = \frac{1}{2} \cdot 5kh_1 : \frac{1}{2} \cdot 3kh_1 = 5:3$, што значи $P_{ABO} = 5l$ и $P_{BCO} = 3l$. Сега од триаголникот ABC добиваме $5l + 3l = 20$, па затоа $l = 2,5$. Конечно,

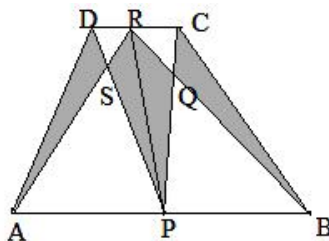
$$P_{ABO} = 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ cm}^2,$$

$$P_{BCO} = P_{ADO} = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ cm}^2,$$

$$P_{CDO} = 32 - (2 \cdot 7,5 + 12,5) = 4,5 \text{ cm}^2.$$

114. Точките P и R се соодветно средини на основите AB и CD на трапезот $ABCD$. Отсечките BR и CP се сечат во точка Q , а отсечките AR и DP се сечат во точка S . Докажи дека плоштината на четириаголникот $PQRS$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците ASD и BCQ .

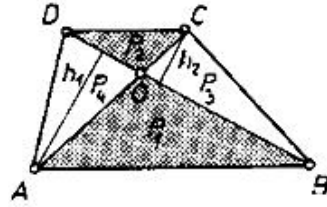
Решение. Четириаголникот $APRD$ е трапез, па како во претходната задача важи дека плоштината на триаголникот ASD е еднаква на плоштината на триаголникот PSR . Понатаму, четириаголникот $PBCR$ е трапез, па затоа плоштината на триаголникот PQR е еднаква на плоштината на триаголникот BCQ . Конечно,



$$P_{PQRS} = P_{PRS} + P_{PQR} = P_{ASD} + P_{BCQ}.$$

115. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на триаголниците на кои им припаѓаат основите на трапезот се P_1 и P_2 . Изрази ја плоштината на трапезот P со помош на P_1 и P_2 .

Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите на траpezот $ABCD$ (цртеж десно). Триаголниците ABD и ABC имаат заедничка основа AB и еднакви висини, па затоа $P_1 + P_3 = P_1 + P_4$, т.е. $P_3 = P_4$. Триаголниците ABO и ADO

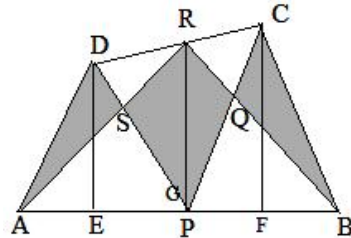


имаат основи BO и OD и заедничка висина h_1 , повлечена од темето A , па затоа $P_1 = \frac{\overline{BO} \cdot h_1}{2}$ и $P_4 = \frac{\overline{DO} \cdot h_1}{2}$, т.е. $P_1 : P_4 = \overline{BO} : \overline{DO}$. На потполно ист начин се добива дека $P_3 : P_2 = \overline{BO} : \overline{DO}$ и како $P_3 = P_4$, добиваме дека $P_4 : P_2 = \overline{BO} : \overline{DO}$. Според тоа, $P_1 : P_4 = P_4 : P_2$, од каде добиваме $P_3 = P_4 = \sqrt{P_1 P_2}$. Конечно, за плоштината на траpezот добиваме

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

116. Точките P и R се соодветно средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Отсечките BR и CP се сечат во точка Q , а отсечките AR и DP се сечат во точка S . Докажи дека плоштината на четириаголникот $PQRS$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците ASD и BCQ .

Решение. Од точките D, R и C повлекуваме висини на триаголниците APD, ABR и PBC и така добиваме правоаголен траpez $EFCD$ во кој RG е средна линија и е еднаква на полузбирот на основите DE и CF . Затоа важи:

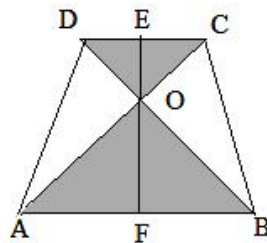


$$\begin{aligned} P_{PQRS} &= P_{ABR} - P_{APS} - P_{PBQ} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{GR} - P_{APS} - P_{PBQ} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} (\overline{DE} + \overline{FC}) - P_{APS} - P_{PQR} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{ED} + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{FC} - P_{APS} - P_{PBQ} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AP} \cdot \overline{ED} + \frac{1}{2} \overline{PB} \cdot \overline{FC} - P_{APS} - P_{PQR} \\ &= P_{APD} + P_{PBC} - P_{APS} - P_{PBQ} = P_{ASD} + P_{BQC}. \end{aligned}$$

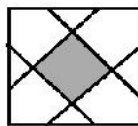
117. Определи ја плоштината на рамнокракиот трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 10\text{ cm}$, $\overline{CD} = 6\text{ cm}$ и заемно нормални дијагонали.

Решение. Бидејќи дијагоналите AC и BD се сечат под прав агол, триаголниците ABO и CDO се рамнокраки правоаголници. Затоа $\overline{FO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 5\text{ cm}$ и $\overline{EO} = \frac{1}{2}\overline{CD} = 3\text{ cm}$. Според тоа, $\overline{EF} = 8\text{ cm}$ и конечно

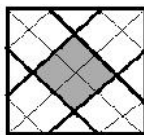
$$P_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{EF} = 64\text{ cm}^2.$$



118. Страните на квадратот се поделени на три еднакви делови и некои од овие точки се поврзани со отсечки (цртеж десно). Колкав дел од плоштината на квадратот е осенчен.

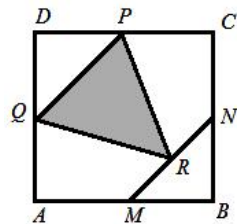


Решение. Ако ги повлечеме дијагоналите на квадратот и на нив паралелните отсечки кои поминуваат низ делбените точки добиваме 12 квадратчиња и 12 триаголници од кои може да се 6 квадратчиња (цртеж десно). Според тоа, имаме вкупно 18 квадратчиња, од кои 4 се осенчени. Значи осенчени се $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ од квадратот.



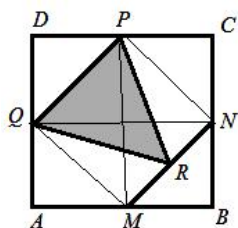
119. Точките M, N, P, Q се средини на страните AB, BC, CD, DA на квадратот $ABCD$, а R е средина на отсечката MN . Колкав дел од плоштината на квадратот е осенчен?

Решение. Нека $2a$ е должината на страната на квадратот $ABCD$. Тогаш неговата плоштина е



$4a^2$. Должината на страната на квадратот $MNPQ$ е еднаква на $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, што значи дека неговата плоштина е еднаква на $2a^2$. Понатаму, плоштината на триаголникот PQR е половина од плоштината на квадратот $MNPQ$ (зошто?). Значи плоштината на триаголникот

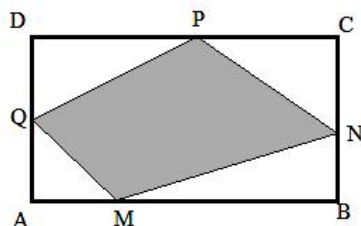
PQR е a^2 . Конечно, осенчена е $\frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}$ од плоштината на квадратот.



120. Даден е правоаголник $ABCD$ со плоштина 1890 cm^2 . Точките M, N, P и Q ги делат страните AB, BC, CD и DA соодветно во односи $1:2, 2:3, 3:4$ и $4:5$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

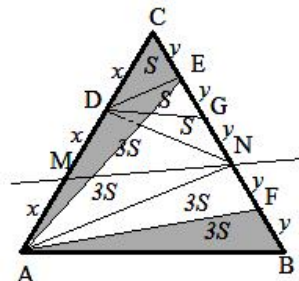
Решение. Од плоштината на правоаголникот $ABCD$ ги одземаме плоштините на триаголниците AMQ, BNM, CPN и DQP и добиваме

$$\begin{aligned} P &= ab - \left(\frac{5a \cdot b}{2} + \frac{2a \cdot 2b}{2} + \frac{3a \cdot 3b}{2} + \frac{4a \cdot 4b}{2} \right) \\ &= ab - \frac{ab}{2} \left(\frac{5}{27} + \frac{4}{15} + \frac{9}{35} + \frac{16}{63} \right) \\ &= ab - \frac{910}{1890} ab = 1890 - \frac{910}{1890} \cdot 1890 \\ &= 1890 - 910 = 980 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



121. Даден е рамностран триаголник ABC . На страната AC е дадена точка M таква што $\overline{AM} : \overline{MC} = 1:2$, а на страната BC е дадена точка N таква што $\overline{BN} : \overline{NC} = 2:3$. Определи го односот на плоштините на четириаголникот $ABMN$ и триаголникот CMN .

Решение. Триаголниците кои имаат еднакви основи и еднакви висини имаат еднакви плоштини. Бидејќи $\overline{AM} : \overline{MC} = 1:2$ добиваме дека $\overline{AM} = x, \overline{MC} = 2x$. Понатаму, од $\overline{BN} : \overline{NC} = 2:3$ следува $\overline{BN} = 2y, \overline{NC} = 3y$.

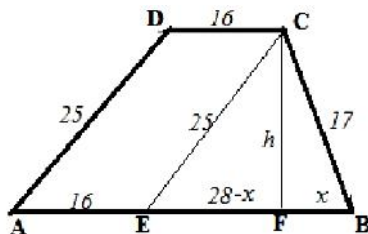


Триаголниците DEC, GED и NGD имаат еднакви основи y и заедничка висина од темето D . Нека нивните плоштини се S . ND е тежишна линија на триаголникот MNC , па затоа плоштината на триаголникот MND е $3S$. MN е тежишна линија на триаголникот AND , па затоа плоштината на триаголникот ANM е $3S$. Понатаму, $\triangle AEC \cong \triangle ABF$, па како плоштината на триаголникот AEC е $3S$ заклучуваме дека и плоштината на триаголникот ABF е $3S$. Отсечката AF е тежишна линија на триаголникот ABN и плоштината на триаголникот AFN е $3S$. Конечно, од претходните разгледувања следува

$$P_{ABMN} : P_{MNC} = 9S : 6S = 3:2.$$

122. Определи ја плоштината на трапез со основи чии должини се 44 cm и 16 cm , а должините на краците му се 17 cm и 25 cm .

Решение. Низ темето C повлекуваме права паралелна на кракот AD и нека E е пресечната точка на оваа права и основата AB . Тогаш, при ознаки како на цртежот десно имаме $\overline{AD} = \overline{AE} = 25\text{ cm}$. Го разгледуваме



триаголникот EBC во која едната висина е CF , која истовремено е и висина на трапезот. Од Питагоровата теорема следува:

$$h^2 = 17^2 - x^2 \text{ и } h^2 = 25^2 - (28 - x)^2,$$

па затоа $289 - x^2 = 625 - (784 - 56x + x^2)$, од каде добиваме $x = 8\text{ cm}$.

Според тоа, $h^2 = 17^2 - 8^2 = 225$, т.е. $h = 15\text{ cm}$. Конечно, плоштината на трапезот е $P = \frac{44+16}{2} \cdot 15 = 450\text{ cm}^2$.

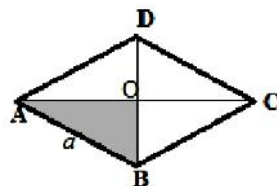
123. Збирот на дијагоналите на робот е еднаков на 34 cm , а неговата плоштина е еднаква на 120 cm^2 . Определи го периметарот на ромбот.

Решение. Нека $\overline{AC} = d_1$ и $\overline{BD} = d_2$ се дијагоналите на ромбот. Имаме:

$$\frac{d_1 d_2}{2} = P = 120, \text{ т.е.}$$

$$d_1 d_2 = 240 \text{ и}$$

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2, \text{ т.е. } d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$



Сега од условот на задачата и претходните равенства следува

$$34^2 = (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 = 4a^2 + 2 \cdot 240, \text{ т.е. } 4a^2 = 676.$$

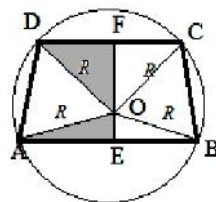
Од последното равенство следува $a = 13\text{ cm}$, па затоа $L = 4a = 52\text{ cm}$.

124. Определи го радиусот на опишаната кружница околу рамнокрак трапез чии основи се со должини 8 cm и 6 cm , а должината на висината е 7 cm

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу трапезот $ABCD$ и нека и

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = R.$$

Отсечката EF е висина на трапезот, па затоа



$\overline{EF} = h = 7 \text{ cm}$. Ако ставиме $\overline{OE} = x$, добиваме $\overline{OF} = 7 - x$. Сега од правоаголните триаголници AEO и DFO следува

$$R^2 = x^2 + 4^2 \text{ и } R^2 = (7 - x)^2 + 3^2,$$

па затоа $x^2 + 16 = 49 - 14x + x^2 + 9$, од каде наоѓаме $x = 3 \text{ cm}$. Конечно, $R^2 = 3^2 + 4^2$, т.е. $R = 5 \text{ cm}$.

125. Должината на едната страна на триаголникот е 36 cm , збирот на должините на другите две страни е 60 cm . Определи ја должината на секоја од страните на триаголникот за да радиусот на впишаната во него кружница е најголем.

Решение. Имаме, $P = \frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{r}{2} \cdot 96 = 48r$ и $s = \frac{a+b+c}{2} = 48$. Понатаму, од Хероновата формула добиваме

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 24\sqrt{(48-a)(a-12)}$$

и затоа $r = \frac{\sqrt{(48-a)(a-12)}}{2}$. Според тоа, радиусот r ќе прима најголема вредност ако производот $(48-a)(a-12)$ прима најголема вредност. Но, $(48-a)(a-12) = -a^2 + 60a - 576 = 324 - (a-30)^2$, па затоа најголемата вредност на производот се достигнува за $a = 30 \text{ cm}$ и притоа $b = 30 \text{ cm}$.

126. Нека a е должината на основата и b е должината на кракот на рамнокракиот триаголник за кои важи

$$a^3 + b^3 + 3b^2(b-a) + 2b(b^2 - a^2) = 0.$$

Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Последователно добиваме

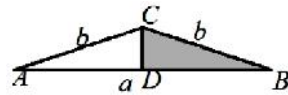
$$a^3 + b^3 + 3b^2(b-a) + 2b(b^2 - a^2) = 0$$

$$a^3 + b^3 + 3b^3 - 3b^2a + 2b^3 - 2ba^2 = 0$$

$$a^3 + 6b^3 - 3ab^2 - 2a^2b = 0$$

$$a^2(a-2b) - 3b^2(a-2b) = 0$$

$$(a-2b)(a^2 - 3b^2) = 0.$$



Збирот на краците во рамнокракиот триаголник е поголем од основата, па затоа $a - 2b \neq 0$. Сега, од последното равенство добиваме

$a^2 - 3b^2 = 0$, од каде следува дека $a = b\sqrt{3}$, односно $\frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, $\overline{CD} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}$, што значи дека триаголникот BCD е половина од рамностран триаголник, па затоа $\angle DBC = 30^\circ$ и оттука следува дека $\angle ACB = 120^\circ$.

127. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник за кои важи

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) + ac(a+c) - bc(b+c).$$

Докажи дека овој триаголник е правоаголен.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенставата

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 + b^2c + bc^2 \\ a^2(a-b-c) - b^2(a-b-c) - c^2(a-b-c) = 0 \\ (a-b-c)(a^2 - b^2 - c^2) = 0. \end{aligned}$$

Но, a, b и c се должини на страни на триаголник, па затоа $a - b - c \neq 0$ и од последното равенство следува $a^2 - b^2 - c^2 = 0$, т.е. $a^2 = b^2 + c^2$, што според обратната Питагорова теорема значи дека дадениот триаголник е правоаголен.

128. Определи го перимтарот на правоаголникот триаголник со плоштина 30 cm^2 за чии страни важи $5a = b + c$, a и b се катети.

Решение. Од условот на задачата следува $c = 5a - b$ и $c^2 = a^2 + b^2$, па затоа $(5a - b)^2 = a^2 + b^2$, од каде добиваме $12a^2 = 5ab$. Според тоа, $24a^2 = 10 \cdot 2 \cdot 30$, па затоа $a = 5 \text{ cm}$. Значи, $b = \frac{12}{5}a = 12 \text{ cm}$ и оттука $c = 5a - b = 25 - 12 = 13 \text{ cm}$. Знаи, перимтарот на триаголникот е

$$L = 5 + 12 + 13 = 30 \text{ cm}.$$

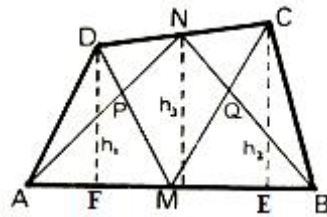
129. Определи ја плоштината на правоаголникот триаголник со периметар 36 cm и за чии страни важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$, a и b се катети.

Решение. Од $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ следува $\frac{a+b}{c} + 1 = \frac{7}{5} + 1$, т.е. $\frac{a+b+c}{c} = \frac{12}{5}$, па затоа $\frac{36}{c} = \frac{12}{5}$, т.е. $c = 15 \text{ cm}$. Значи, $a + b = 21$ и $a^2 + b^2 = 225$. Според тоа,

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{4} = \frac{21^2 - 225}{4} = 54 \text{ cm}^2.$$

130. Во четириаголникот $ABCD$ точките M и N се средини соодветно на спротивните страни AB и DC . Нека отсечките MD и AN се сечат во точката P , а MC и BN во точката Q . Докажи дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците APD и BCQ .

Решение. Нека h_1, h_2, h_3 се висините на триаголниците AMD, MBC, ABN (цртеж десно). Тогаш $h_3 = \frac{h_1 + h_2}{2}$, како средна линија на правоаголниот трапез $ECDF$. Нека $\overline{AB} = a$. Последователно добиваме



$$\begin{aligned}
 P_{MQNP} &= P_{ABN} - P_{AMP} - P_{MBQ} \\
 &= P_{ABN} - (P_{AMD} - P_{APD}) - (P_{MBC} - P_{BCQ}) \\
 &= \frac{ah_3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ah_1}{2} + P_{APD} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ah_2}{2} + P_{BCQ} \\
 &= P_{APD} + P_{BCQ} - \frac{a}{2} \left(h_3 - \frac{h_1 + h_2}{2} \right) \\
 &= P_{APD} + P_{BCQ},
 \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

V.5. МНОГУАГОЛНИК

131. Еден многуаголник има три пати поголем збир на внатрешните агли од друг. Докажи дека или и двата многуаголници имаат парен број страни или и двата многуаголници имаат непарен број страни.

Решение. Нека првиот многуаголник има m , а вториот има n страни. Но m и n се природни броеви поголеми од 2, па затоа $S_m = 3S_n$, т.е.

$$(m - 2) \cdot 180^\circ = 3(n - 2) \cdot 180^\circ. \text{ Според тоа, } m = 3n - 4, \text{ што значи:}$$

- 1) ако n е парен број, тогаш и m е парен број,
- 2) ако n е непарен број, тогаш и m е непарен број.

132. Ако бројот на страните на еден многуаголник се зголеми за 3, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува неколку пати. Определи ги сите такви многуаголници.

Решение. Нека едниот многуаголник има n , а другиот има $n + 3$ страни. Од условот на задачата следува

$$k \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n(n+3)}{2},$$

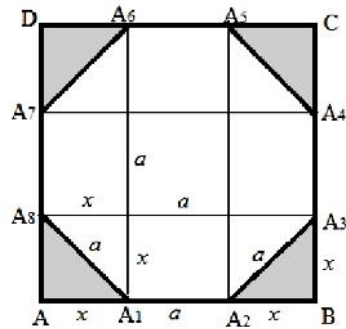
од каде добиваме $n+3=k(n-3)$, односно $k = \frac{n+3}{n-3} = 1 + \frac{6}{n-3}$. Според

тоа, $n-3 \mid 6$ и можни се следниве случаи:

- 1) $n-3=1$, т.е. $n=4$, $n+3=7$, $k=7$,
- 2) $n-3=2$, т.е. $n=5$, $n+3=8$, $k=4$,
- 3) $n-3=3$, т.е. $n=6$, $n+3=9$, $k=3$,
- 4) $n-3=6$, т.е. $n=9$, $n+3=12$, $k=2$.

133. Во даден квадрат со должина на страна 10 cm со отсекување на рамнокраки правоаголни триаголници чии прави агли се наоѓаат во темињата на квадратот е добиен правилен осумаголник. Определи ги должината на страната и плоштината на овој осумаголник.

Решение. За да ја добиеме плоштината на правилен осумаголник од плоштината на квадратот треба да ја одземеме плоштината на четирите рамнокраки правоаголни триаголници (цртеж десно).



Со повлекување на четирите дијагонали како на цртежот правилен осумаголник е поделен на еден квадрат со должина на страна a , четири рамнокраки правоаголни триаголници со катети x и четири правоаголници со должини на страни a и x . Имаме, $a^2 = 2x^2$, т.е. $a = x\sqrt{2}$ и $a + 2x = 10$, па затоа $2x + x\sqrt{2} = 10$, т.е. $x = \frac{10}{2+\sqrt{2}} = 5(2-\sqrt{2})\text{ cm}$.

Според тоа,

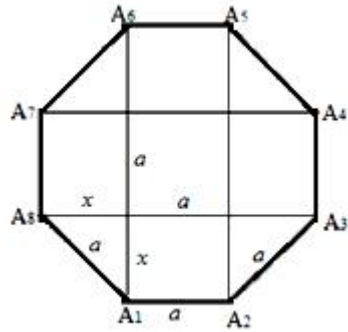
$$a = x\sqrt{2} = 5(2-\sqrt{2})\sqrt{2} = 10(\sqrt{2}-1)\text{ cm и}$$

$$P_8 = 10^2 - 4 \cdot \frac{(5(2-\sqrt{2}))^2}{2} = 100 - 50(6-4\sqrt{2}) = 200(\sqrt{2}-1)\text{ cm}^2.$$

134. Определи ги периметарот и плоштината на правилен осумаголник за кој е дадено:

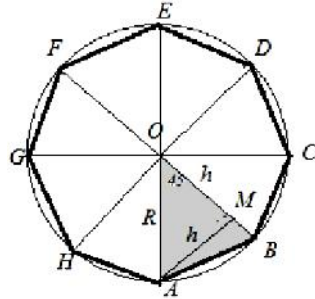
- а) должината на страната $a = 6\text{ cm}$,
- б) радиусот на опишаната кружница R ,
- в) радиусот на впишаната кружница $r = 4 + 2\sqrt{2}\text{ cm}$.

Решение. а) Со повлекување на четирите дијагонали како на цртежот десно правилниот осумаголник е поделен на еден квадрат со должина на страна a , четири рамнокраки правоаголни триаголници со катети x и четири правоаголни со должини на страни a и x .
Имаме, $a^2 = 2x^2$, т.е. $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, па затоа



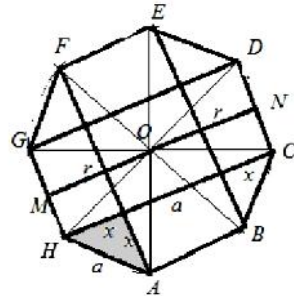
$$P_8 = a^2 + 4ax + 4 \frac{x^2}{2} = a^2 + 2a^2\sqrt{2} + a^2 = 2a^2(\sqrt{2} + 1) = 72(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2.$$

б) Централниот агол на правилниот осумаголник е $360^\circ : 8 = 45^\circ$. Да разгледаме еден карактеристичен триаголник ABO на правилниот осумаголник. Неговата висина која соодветствува на кракот е $\overline{AM} = h$. Понатаму, $\angle OAM = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, па затоа $\overline{OM} = \overline{AM} = h$. Сега



$$R^2 = 2h^2, \text{ т.е. } h = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \text{ па затоа } P_{\triangle ABO} = \frac{Rh}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4} \text{ и } P_8 = 2R^2\sqrt{2}.$$

в) Отсечката $\overline{MN}$, $\overline{MN} = 2r$ е дијаметар на впишаната кружница на правилниот осумаголник и е еднаква на дијагоналата $\overline{CH} = a + 2x$, што значи $2r = a + 2x$. Од друга страна $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, па затоа



$$2r = a + \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ т.е. } a = 2r(\sqrt{2} - 1).$$

$$\text{Конечно, } P = 2a^2(\sqrt{2} + 1) = 8r^2(\sqrt{2} - 1) = 64(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2.$$

135. Конвексниот m -аголник има 2012 дијагонали повеќе од конвексниот n -аголник. Определи ги сите такви броеви m и n .

Решение. Според условот на задачата важи

$$\frac{m(m-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 2012, \quad m > 3, n > 3, m, n \in \mathbb{N}$$

од каде последователно добиваме

$$\begin{aligned}m(m-3) - n(n-3) &= 4024 \\m^2 - 3m - n^2 + 3n &= 4024 \\(m-n)(m+n) - 3(m-n) &= 4024 \\(m-n)(m+n-3) &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 503.\end{aligned}$$

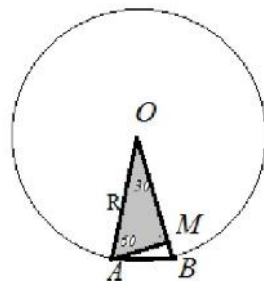
Од последната равенка добиваме:

- 1) $m - n = 1, m + n = 4027$, т.е. $m = 2014$ и $n = 2013$,
- 2) $m - n = 503, m + n = 11$, т.е. $m = 257$ и $n = -256$, што не е можно бидејќи n е негативен број, и
- 3) Во сите останатите случаи добиваме дека $2m$ е непарен број, што не е можно.

Според тоа, единствено решение на задачата е $m = 2014$ и $n = 2013$.

136. За колку се разликуваат плоштините на правилен дванаесетаголник и правилен шестаголник, ако и двата се впишани во кружница со радиус 12 cm .

Решение. Нека $\triangle ABO$ е карактеристичен триаголник на дванаесетаголникот. Централниот агол на правилниот дванаесетаголник е еднаков на $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Отсечката AM е висина која соодветствува на кракот на карактеристичниот триаголник, па затоа $\angle OAM = 60^\circ$ што значи дека $\triangle OAM$ е половина од некој рамностран триаголник, односно $\overline{AM} = h = \frac{R}{2}$. Според тоа,



$$P_{12} = 12P_{\triangle ABO} = 12 \cdot \frac{R \cdot \frac{R}{2}}{2} = 3R^2 = 432\text{ cm}^2 \text{ и}$$

$$P_6 = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{432\sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3}\text{ cm}^2,$$

па затоа

$$P_{12} - P_6 = 432 - 216\sqrt{3} = 216(2 - \sqrt{3})\text{ cm}^2.$$

137. Во кружница со радиус $R = 10\text{ cm}$ е впишан правилен осумаголник. Определи го збирот на неговите дијагонали.

Решение. Правилниот осумаголник има $8 \cdot 5 : 2 = 20$ дијагонали, од кои 4 со најголема должина, осум со средна должина и 8 со најмала должина.

Јасно, за дијагоналите со најголема должина важи $d_1 = \overline{HD} = 2R = 20 \text{ cm}$. За да ја пресметаме дијагоналата со најмала должина ќе го разгледаме $\triangle HOB$ кој е правоаголен бидејќи централниот агол е еднаков на $360^\circ : 8 = 45^\circ$. Имаме,

$$d_3 = \overline{HB} = R\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Понатаму,

$$\overline{BM} = \overline{MO} = \frac{\overline{HB}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm} \text{ и } \overline{AM} = \overline{OA} - \overline{OM} = 5(2 - \sqrt{2}) \text{ cm},$$

па затоа

$$a = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2} = 10(2 - \sqrt{2}) \text{ cm}.$$

Сега, триаголникот HCD е правоаголен бидејќи HD е дијаметар на опишаната кружница, па затоа

$$d_2 = \overline{HC} = \sqrt{\overline{HD}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{(2R)^2 - a^2} = 10\sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ cm}.$$

Конечно, збирот на дијагоналите на правилниот осумаголник е

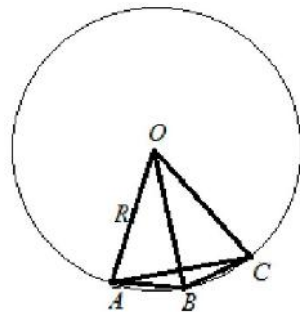
$$S_d = 4 \cdot 20 + 8 \cdot 10\sqrt{2} + 8 \cdot 10\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 80(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) \text{ cm}.$$

138. Должината на најкратката дијагонала на правилен дванаесетаголник е

$$d = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ cm}. \text{ Определи ја плоштината на овој дванаесетаголник.}$$

Решение. Да разгледаме два карактеристични триаглици на правилниот дванаесетаголник. Централниот агол на правилниот дванаесетаголник е еднаков на $360^\circ : 12 = 30^\circ$, па затоа $\angle AOC = 60^\circ$, т.е. триаголникот ACO е рамнострани, односно $\overline{AC} = R = d$. Плоштината на дванаесетаголникот е еднаква на шест плоштини на делтоидот $ABCO$, па затоа

$$P_2 = 6 \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OB}}{2} = 3R^2 = 3(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$



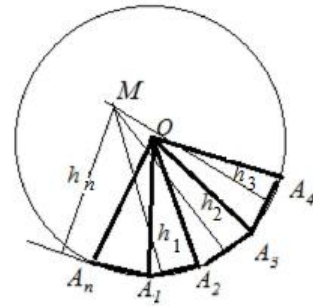
139. Нека M е точка во внатрешноста на правилен n -аголник со n страни и нека $h_1, h_2, \dots, h_n$ се растојанијата од точката M до правите на кои лежат страните на n -аголникот и r радиусот на впишаната кружница во n -аголникот. Докажи дека $h_1 + h_2 + \dots + h_n = nr$.

Решение. Нека должината на страната на многуаголникот е a . За плоштината на многуаголникот имаме:

$$P_n = n \frac{ar}{2} \text{ и}$$

$$P_n = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \dots + \frac{ah_n}{2},$$

па затоа $n \frac{ar}{2} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \dots + \frac{ah_n}{2}$, од каде добиваме $h_1 + h_2 + \dots + h_n = nr$.



140. Правилен шестаголник и рамностран триаголник имаат еднакви плоштини. Која фигура има поголем периметар.

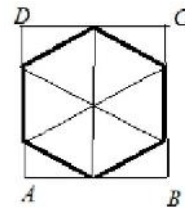
Решение. Нека должината на страната на триаголникот е b , а должината на страната на шестаголникот е a . Имаме $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, па затоа $b = a\sqrt{6}$. Затоа, $L_3 = 3b = 3a\sqrt{6} > 6a = L_6$.

141. Во правоаголник чија една страна е со должина a впишан е правилен шестаголник чии темиња припаѓаат на страните на правоаголникот. Определи ја плоштината на овој шестаголник.

Решение. Можни се два случаја.

- 1) $\overline{AD} = \overline{BC} = a$ и тогаш важи $a = 2x$, каде x е страната на шестаголникот. Затоа $x = \frac{a}{2}$ и

$$P_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$



- 2) $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$, каде r е радиусот на впишаната кружница во шестаголникот и тогаш важи $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, па затоа

$$P_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

142. Два многуаголници заедно имаат 119 дијагонали. Бројот на страните на едниот многуаголник е за еден поголем од бројот на страните на другиот многуаголник. Определи ги овие многуаголници.

Решение. Нека бројот на страните на првиот многуаголник е x . Од условот на задачата следува равенката

$$\frac{(x+1)(x-2)}{2} + \frac{x(x-3)}{2} = 119,$$

која последователно е еквивалентна со равенките

$$x^2 - 2x - 120 = 0$$

$$(x-1)^2 - 121 = 0$$

$$(x-1)^2 - 11^2 = 0$$

$$(x+10)(x-12) = 0$$

Од последната равенка добиваме $x = -10$ и $x = 12$, па како бројот на страните не може да биде негативен број заклучуваме дека првиот многуаголник е дванаесетаголник, а вториот е тринаесетаголник.

143. Ако бројот на дијагоналите на многуаголникот се зголеми за 235, се добива бројот на дијагоналите кој има 10 страни повеќе од почетниот многуаголник. Определи ги овие многуаголници.

Решение. Ако првиот многуаголник има x страни, тогаш вториот многуаголник има $x+10$ страни. Од условот на задачата следува равенката

$$\frac{(x+10)(x+7)}{2} - \frac{x(x-3)}{2} = 235,$$

чие решение е $x = 20$. Според тоа, станува збор за дваесетаголник и триесетаголник.

144. Ако многуаголникот има n страни и $kn, k \in \mathbb{N}$ дијагонали, тогаш n е непарен број. Докажи!

Решение. Од условот на задачата следува $\frac{n(n-3)}{2} = kn$, па затоа $n = 2k + 3$, односно n е непарен број.

145. Правилен многуаголник со n страни има 15 дијагонали помалку од правилен многуаголник со $n+2$ страни. За колку е помал внатрешниот агол на првиот многуаголник од внатрешниот агол на вториот многуаголник?

Решение. Од условот на задачата следува равенката

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 15,$$

чие решение е $n = 8$. Според тоа, станува збор за осумаголник и десетаголник. Имаме, $a'_8 = 360^\circ : 8 = 45^\circ$ и $a_8 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, односно

$$a'_{10} = 360^\circ : 10 = 36^\circ \text{ и } a_{10} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ.$$

Конечно, бараната разлика е $a_{10} - a_8 = 144^\circ - 135^\circ = 9^\circ$.

146. Ако бројот на страните на правилниот многуаголник се зголеми за 2, тогаш неговиот централен агол се намалува за 6° . За кој многуаголник станува збор?

Решение. Нека n е бројот на страните на правилниот многуаголник.

Од условот на задачата следува $\frac{360^\circ}{n} - \frac{360^\circ}{n+2} = 6^\circ$, од каде добиваме

$$60(n+2) - 60n = n(n+2).$$

Според тоа, $n(n+2) = 10 \cdot 12$, па затоа $n = 10$.

V.6. КРУЖНИЦА И КРУГ

147. Дадени се правите g_1 и g_2 , кои се сечат во точка O и точка M , која не припаѓа на ниту една од овие прави. Нека j_1 и j_2 се осните симетрии со оски g_1 и g_2 . Ако $M \xrightarrow{j_1} M_1$, $M_1 \xrightarrow{j_2} M_2$ и $M \xrightarrow{j_1} M_3$ докажи дека:

а) точките M, M_1, M_2, M_3 се конциклични,

б) правата определена од точката O и средината на отсечката M_2M_3 е нормална на отсечката M_2M_3 .

Решение. а) Бидејќи правите g_1 и g_2 се сечат во точката O ,

заклучуваме дека $O \xrightarrow{j_1} O \xrightarrow{j_2} O$ (цртеж десно). Според тоа,

$$OM \xrightarrow{j_1} OM_1 \xrightarrow{j_2} OM_2 \text{ и}$$

$$OM \xrightarrow{j_2} OM_3.$$

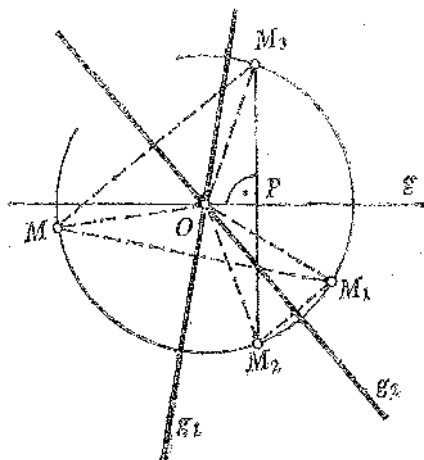
Последното значи дека

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} = \overline{OM_2} = \overline{OM_3},$$

т.е. точките M, M_1, M_2, M_3 се

еднакво оддалечени од точката O , па затоа тие се конциклични.

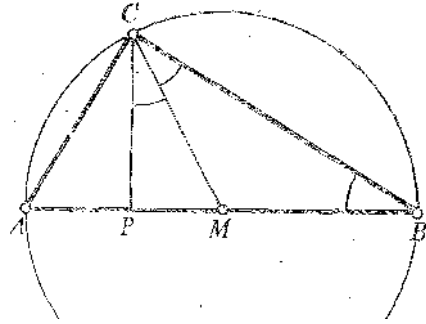
б) Видовме дека $\overline{OM_2} = \overline{OM_3}$, што значи дека точката O припаѓа на симетралата g на отсечката M_2M_3 . Бидејќи g минува низ средината



P на M_2M_3 , заклучуваме дека g е правата определена од точката O и средината на отсечката M_2M_3 и таа е нормална на M_2M_3 .

148. Во триаголникот ABC страната AB е два пати поголема од страната AC . Нека $\overline{CM} = \overline{AC}$ е тежишна линија на триаголникот ABC (точката M припаѓа на страната AB), а CP е тежишна линија на триаголникот AMC (точката P припаѓа на страната AM). Докажи дека CM е симетрала на $\angle PCB$.

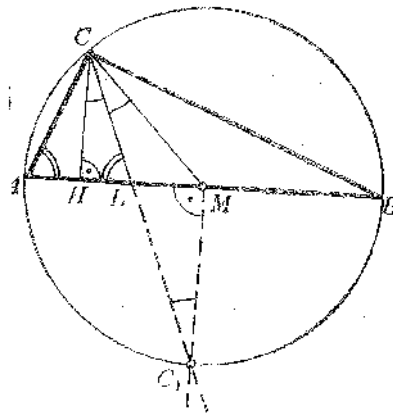
Решение. Бидејќи CM е тежишна линија во триаголникот ABC важи $\overline{AM} = \overline{MB}$ (цртеж десно). Според условот $\overline{CM} = \overline{AC}$ и $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{MB}$. Значи, $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$, па затоа M е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC . Според тоа,



AB е дијаметар на опишаната кружница околу триаголникот ABC , па затоа овој триаголник е правоаголен и $\angle ACB = 90^\circ$. Сега имаме $\overline{AC} = \overline{AM} = \overline{MC}$, па затоа триаголникот AMC е рамностран. Посленото значи дека CP е симетрала на $\angle ACP = 60^\circ$. Според тоа, $\angle PCM = 30^\circ$ и $\angle MCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, од каде следува дека CM е симетрала на $\angle PCB$.

149. Висната, симетралата на аголот и тежината линија (медијаната) повлечени од темето C на триаголникот ABC го делат аголот во ова теме на четири еднакви дела. Определи ги аглите триаголникот ABC .

Решение. Нека висината, симетралата на аголот и медијаната повлечени во темето C на триаголникот ABC ја сечат страната AB во точките H, L и M , соодветно (цртеж десно). Нека продолжението на симетралата CL и нормалата на AB во точката M се сечат во точката C_1 , која припаѓа на опиша-



ната кружница околу триаголникот ABC . Навистина од $\angle ACL = \angle LCB$ следува дека продолжението на симетралата CL ќе го сече лакот $\widehat{AB}$ во точка C_1 која го полови лакот $\widehat{AB}$. Исто така нормалата на AB во точката M го сече лакот $\widehat{AB}$ во точка која го полови овој лак. Затоа нормалата на AB во M и продолжението на CL се сечат на опишаната кружница околу триаголникот ABC .

Од $MC_1 \perp AB$ и $CH \perp AB$ следува дека $MC_1 \parallel CH$, од каде следува $\angle HCC_1 = \angle CC_1M$. Но, според условот на задачата $\angle HCC_1 = \angle C_1CM$, па затоа $\angle CC_1M = \angle C_1CM$, т.е. триаголникот C_1CM е рамнокрак. Тоа значи дека M центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC и бидејќи M припаѓа на AB заклучуваме дека триаголникот ABC е правоаголен со $\angle ACB = 90^\circ$.

Понатаму, триаголникот ALC е рамнокрак (висината CL е симетрала на $\angle ACL$), па затоа $\angle CAB = \angle ALC$. Сега,

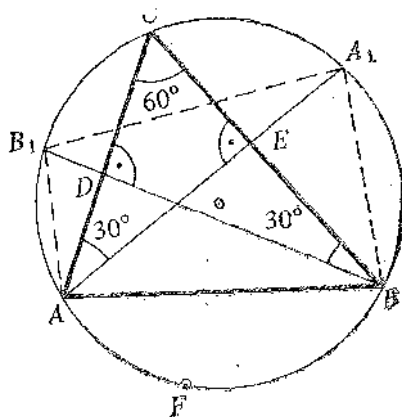
$$\angle CAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACL) = \frac{1}{2}(180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 90^\circ) = 67^\circ 30' \text{ и}$$

$$\angle CBA = 90^\circ - 67^\circ 30' = 22^\circ 30'.$$

150. Околу триаголникот ABC е опишана кружница. Висините повлечени од темињата A и B ја сечат кружницата во точките A_1 и B_1 , соодветно. Докажи, ако $\angle C = 60^\circ$, тогаш $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$.

Решение. Од $\angle C = 60^\circ$ следува дека $\angle AFB = 120^\circ$ (цртеж десно). Понатаму, триаголниците AEC и BDC се правоаголни, па затоа $\angle CAA_1 = \angle CBB_1 = 30^\circ$. Тоа значи дека $\widehat{CA_1} = \widehat{CB_1} = 60^\circ$, па затоа $\widehat{A_1CB_1} = 120^\circ$.

Докажавме, $\widehat{A_1CB_1} = \widehat{AFB} = 120^\circ$, од каде следува $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ (еднакви лаци се отсекуваат од еднакви тетиви) и $AB_1 \parallel BA_1$ (во една кружница две еднакви тетиви отсекуваат лаци чии тетиви се паралелни). Според



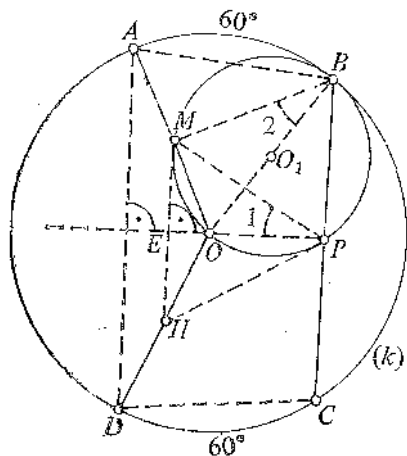
тоа, четириаголникот BA_1B_1A е рамнокрак трапез, чии дијагонали се еднакви, т.е. $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$.

151. На кружницата k со центар O во иста насока се земени точките A, B, C, D , при што важи $\widehat{AB} = \widehat{CD} = 60^\circ$. Точките M, P, H се средини на отсечките OA, BC, OD , соодветно. Докажи дека:

- а) околу четириаголникот $OPBM$ може да се опише кружница,
 б) триаголникот HPM е рамностран.

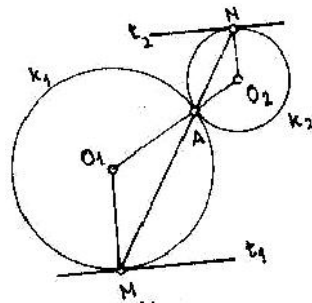
Решение. а) Искористи дека триаголникот AOB е рамностран и докажи дека $\angle OMB = 90^\circ$. Потоа искористи дека OP ја поливи тетивата BC и докажи дека $\angle OPB = 90^\circ$.

б) Од $\widehat{AB} = \widehat{CD} = 60^\circ$ следува $\overline{AB} = \overline{CD}$ и затоа $AD \parallel BC$. Сега $PO \perp AD$, а бидејќи MH е средна линија во триаголникот AOD добиваме дека $MH \parallel AD$ и следствено $PO \perp MH$ и правата PO ја поливи MH , т.е. $\overline{ME} = \overline{EH}$. Според тоа, триаголникот HPM е рамнокрак ($\overline{MP} = \overline{MH}$) и PE е висина, медијана и симетрала на агол во овој триаголник. Понатаму, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \widehat{OM}$. Но, MB е висина, медијана и симетрала на агол во рамностраниот триаголник AOB , па затоа $\angle 2 = 30^\circ$. Тоа значи дека $\angle 1 = 30^\circ$, од каде следува дека $\angle MPH = 60^\circ$, т.е. триаголникот HPM е рамностран.



152. Кружниците k_1 и k_2 надворешно се допираат во точката A . Правата која ја содржи точката A по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките M и N , соодветно. Докажи дека тангентите t_1 и t_2 на кружниците k_1 и k_2 во точките M и N се паралелни.

Решение. Триаголниците O_1AM и O_2AN се рамнокраки, па затоа важи



$$\angle AMO_1 = \angle MAO_1 \text{ и } \angle ANO_2 = \angle NAO_2 .$$

Но, $\angle MAO_1 = \angle NAO_2$, како накрсни агли, па затоа $\angle AMO_1 = \angle ANO_2$ (цртеж горе). Бидејќи A е точка од правата MN , следува дека еднаквите агли $\angle AMO_1$ и $\angle ANO_2$ се наизменични, па затоа $MO_1 \parallel NO_2$. Но, $t_1 \perp O_1M$ и $t_2 \perp O_2N$, па затоа $t_1 \parallel t_2$.

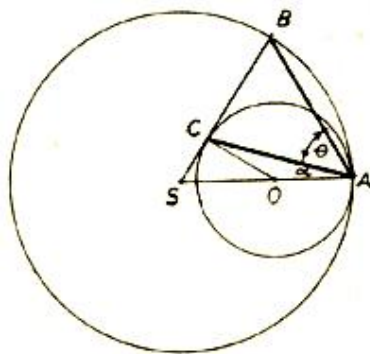
153. Две кружници внатрешно се допираат во точката A . Од центарот O на поголемата кружница е нацртан радиус OB на големата кружница кој воедно е тангента на помалата кружница во точката C . Определи го $\angle BAC$.

Решение. Нека $\theta = \angle BAC$ е бараниот агол и нека $\angle SAC = \alpha$ и $\angle SBA = \beta$ (цртеж десно). Според претпоставката триаголниците SAB и ACO се рамнокраки, а триаголникот SOC е правоаголен. Нека $\angle ASB = \varphi$. Тогаш од триаголникот ABS следува дека

$$2\beta + \varphi = 180^\circ, \text{ т.е. } \beta = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} .$$

Понатаму, а $\angle SOC$ е надворешен за триаголникот ACO , па затоа $\angle SOC = \angle OAC = \angle OCA = 2\alpha$.

Од триаголникот SOC следува $\varphi + 2\alpha = 90^\circ$, па затоа $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Значи, бараниот агол е $\theta = \angle SAB - \alpha = \beta - \alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} - (45^\circ - \frac{\varphi}{2}) = 45^\circ$.



154. Даден е триаголник ABC во кој најголемиот внатрешен агол е помал од 120° . Над секоја страна на триаголникот е конструиран рамностран триаголник така што секој од рамностраните триаголници е во различна полурамнина со триаголникот ABC во однос на правите на кои лежат заедничките страни. Околу рамностраните триаголници се опишани три кружници. Докажи дека

- секои две од опишаните три кружници се сечат,
- трите кружници се сечат во една точка.

Решение. а) Кружниците k_2 и k_3 се сечат во точките C и M (цртеж долу десно), бидејќи ако се допираат, тогаш допирната точка ќе биде темето C и тогаш $\angle O_3CO_2 = 180^\circ$. Но,

$$\angle O_3CA = 30^\circ,$$

$$\angle ACB < 120^\circ,$$

$$\angle BCO_2 = 30^\circ$$

па затоа

$$\angle O_3CO_2 = \angle O_3CA + \angle ACB + \angle BCO_2 < 30^\circ + 120^\circ + 30^\circ = 180^\circ,$$

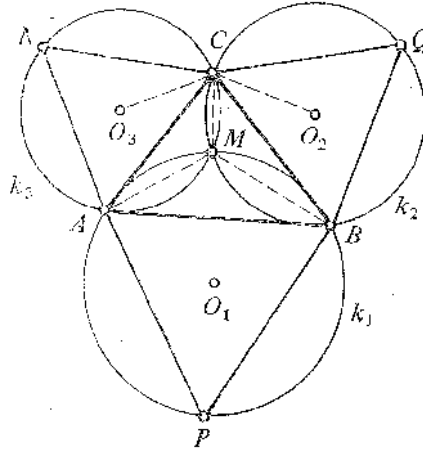
што е противречност. Аналогно се докажува дека и другите парови кружници се сечат.

б) За да докажеме дека трите кружници се сечат во една точка, треба да докажеме дека $k_2 \cap k_2 \cap k_3 = \{M\}$. За таа цел доволно е да докажеме дека околу четириаголникот $APBM$ може да се опише кружница.

Бидејќи $\angle APB = 60^\circ$, доволно е да докажеме дека $\angle AMB = 120^\circ$.

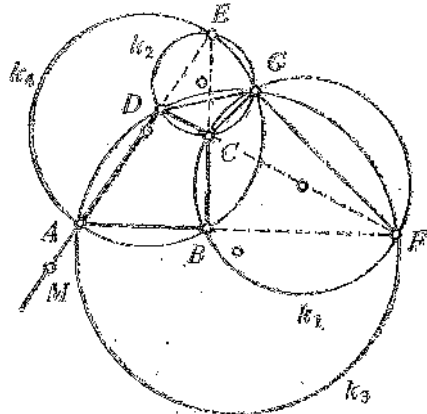
Но четириаголниците $ANCM$ и $BQCM$ се тетивни, па затоа важи $\angle AMC = \angle BMC = 120^\circ$ (спротивни агли се еднакви на 60°). Според тоа,

$$\angle AMB = 360^\circ - (\angle AMC + \angle BMC) = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ.$$



155. Двата пара спротивни страни на еден четириаголник кој не е трапез се продолжени до неvnите пресеци. Околу добиените четири триаголници се опишани кружници. Докажи дека овие кружници се сечат во една точка.

Упатство. Нека кружниците k_1, k_2, k_3, k_4 се опишани околу триаголниците BFC, DCE, AFD, ABE , соодветно. Треба да докажеш дека - кружниците k_1 и k_2 освен точката C имаат уште една заедничка точка G ,



- кружницата k_3 опишана околу триаголникот AFD минува низ точката G , за што треба да докажеш дека точките A, D, F, G припаѓаат на кружницата k_3 , т.е. $\angle DFG + \angle DFA = 180^\circ$ или $\angle DGF = \angle BAM$.

156. Впишаната кружница k_1 во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC во точките D и E . Докажи дека пресечните точки N и M на симетралите на $\angle B$ и $\angle C$ соодветно со правата DE и точките B и C лежат на една кружница.

Решение. Бидејќи $\angle AEM$ е надворешен за триаголникот MCE добиваме

$$\angle NMC = \angle AED - \angle ECM. \quad (1)$$

Од $\overline{AE} = \overline{AD}$ следува дека триаголникот ADE е рамнокрак, па затоа $\angle AED = \angle ADE$. Сега, од триаголникот ADE добиваме

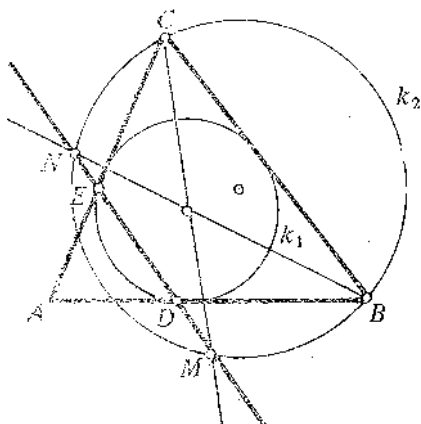
$$2\angle AED + \angle A = 180^\circ,$$

т.е. $\angle AED = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$. Понатаму,

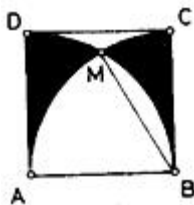
бидејќи CM е симетрала на $\angle C$ важи $\angle ECM = \frac{1}{2}\angle C$. Сега од равенството (1) добиваме

$$\angle NMC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C. \quad (2)$$

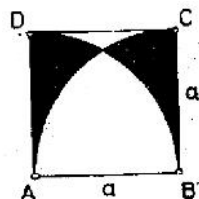
Од триаголникот ABC имаме $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$, па затоа од (2) добиваме $\angle NMC = \frac{1}{2}\angle B$, т.е. $\angle NMC = \angle NBC$, што значи дека точките M, N, B, C лежат на една кружница.



157. Пресметај ја плоштината на осенчениот дел од квадратот даден на цртежот десно. Центрите на кружниците се во точките A и B .

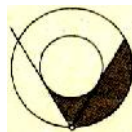


Решение. Половината од осенчената површина се добива кога од четвртина од кругот со радиус a ќе се одземе исечокот ABM и отсечокот над тетивата BM од истиот круг. Според тоа,

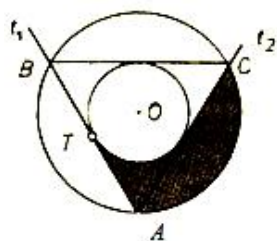


$$P = 2\left[\frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{6} - \left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\right] = a^2 \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}.$$

158. Радиусите на кружниците кои формираа кружен прстен прикажан на цртежот десно се r и $2r$. Определи ја плоштината на осенчениот дел на прстенот.



Решение. Нека A, B, C се заедничките точки на поголемата кружница и тангентите t_1 и t_2 на помалата кружница (цртеж десно), и нека T е точката во која t_1 ја допира малата кружница. Од $\overline{OB} = 2\overline{OT}$ следува дека $\angle OBT = 30^\circ$, па затоа $\angle ABC = 60^\circ$. Слично

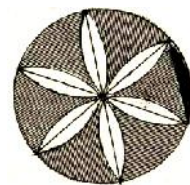


се докажува дека $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$. Значи, триаголникот ABC е рамностран, па затоа отсечоците во големиот круг се еднакви. Осенчениот дел на прстенот е еднаков на третина од целиот прстен, па затоа неговата плоштина е еднаква на $\frac{1}{3}(\pi(2r)^2 - \pi r^2) = \pi r^2$.

159. Колкав дел од плоштината на кругот зафаќа осенчениот дел на фигурата прикажана на цртежот десно?



Решение. Неосенчениот дел со дијаметри е поделен на 12 делови, секој од кои е еднаков на отсечокот кој на цртежот десно е обоен црно. Плоштината на овој отсечок е $P_0 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, каде r е радиусот на кругот. Според тоа, плоштината на осенчениот дел од кругот е



$$P = \pi r^2 - 12\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = 3r^2\sqrt{3} - \pi r^2.$$

Конечно, осенчениот дел од кругот зафаќа

$$\frac{3r^2\sqrt{3} - \pi r^2}{\pi r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1$$

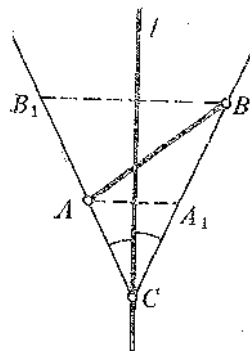
делови од целиот круг.

V.7. КОНСТРУКЦИИ

160. Дадени се права l и точки A и B кои не лежат на правата l такви што отсечката AB ја сече правата l . Определи точка C на правата l таква што симетралата на $\angle ACB$ лежи на l .

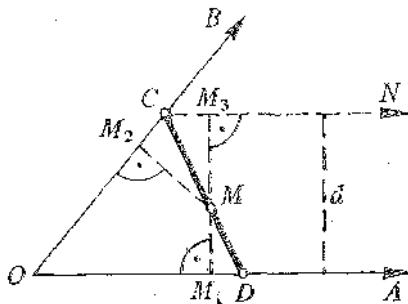
Решение. Бидејќи правата l е симетрала на $\angle ACB$ заклучуваме дека симетричните точки A_1 и B_1 на A и B во однос на l припаѓаат на полуправите CB и CA , соодветно. Според тоа, $AB_1 \cap l = C$ и $A_1B \cap l = C$ (цртеж десно).

Значи, за да се определи точката C , доволно е да се најде симетричната точка A_1 на A во однос на l и потоа да се определи $A_1B \cap l = C$. На читателот за вежба му оставаме да го разгледа случајот кога $AB \perp l$.



161. Определи го множеството внатрешни точки во рамнината на остриот $\angle AOB$ за кои збирот на растојанијата до двата краци на аголот е еднаков на дадена отсечка d .

Решение. Нека точката M припаѓа на бараното множество (цртеж десно), а $\overline{MM_1}$ и $\overline{MM_2}$ се растојанијата од M до OA и OB , соодветно. Нека $\overline{M_3M} = \overline{M_2M}$ и точката M_3 припаѓа на полуправата M_1M . Тогаш $\overline{M_1M_3} = d$,



што значи дека точката M припаѓа на полуправата CN ($C \in OB$) која е истонасочена со полуправата OA и од неа е на растојание d . Понатаму, бидејќи $\overline{M_3M} = \overline{M_2M}$ точката M припаѓа на симетралата на $\angle OCN$.

Не е тешко да се докаже и обратното, дека секоја точка од отсечката CD ($D \in OA$) која припаѓа на симетралата на $\angle OCN$ ги задоволува условите на задачата.

Конечно, отсечката CD без крајните точки е бараното множество.

162. Дадена е права a и две точки A и B кои се на различни страни од правата a . На правата a определи точка таква што разликата на растојанијата од неа до точките A и B е најголема.

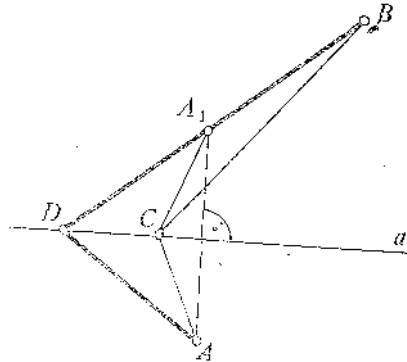
Решение. *Анализа.* Нека C е произволна точка на правата a (цртеж десно). Конструираме отсечка CA_1 симетрична на отсечката CA во однос на правата a , $\overline{CA_1} = \overline{CA}$. Според тоа, при секоја положба на точката C ќе имаме $\overline{CB} - \overline{CA_1} = \overline{CB} - \overline{CA}$.

Ако триаголникот CBA_1 постои, тогаш $\overline{CB} - \overline{CA_1} < \overline{A_1B}$. Кога точката

C ќе се совпадне со точката D (D е пресечната точка на правата a со правата BA_1 , тогаш разликата $\overline{DB} - \overline{DA}$ е еднаква на $\overline{A_1B}$ и тоа е најголемата вредност на разгледуваната разлика.

Конструкција. Наоѓаме точка A_1 симетрична на точката A во однос на правата a . Ја повлекуваме правата BA_1 и во пресек со правата a ја определуваме точката D , која е бараната точка.

Доказот и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.



163. Над едниот крак на даден прав агол се земени точки A и B , различни од темето на аголот. Конструирај точка која припаѓа на другиот крак и од неа отсечката AB се гледа под најголем можен агол.

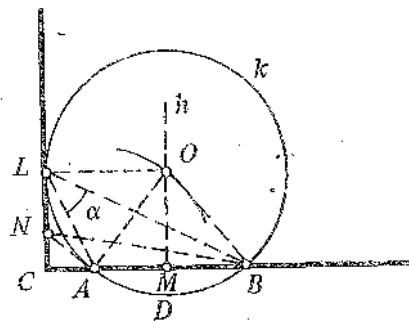
Решение. *Анализа.* Нека LCB е дадениот прав агол, A и B се две точки од едниот крак, а L е бараната точка на другиот крак на аголот (цртеж десно).

Низ средината M на отсечката AB повлекуваме права h нормална на AB . Кружницата k со центар A и радиус $\overline{AO} = \overline{CM}$, каде C е

теме на правиот агол, ја сече нормалата h во точката O . Проекцијата на точката O врз вториот крак на правиот агол е бараната точка L .

Конструкција. Непосредно следува од анализата.

Доказ. Имаме $CL \perp OL$ и



$$\overline{OL} = \overline{CM} = \overline{OA} = \overline{OB}.$$

Според тоа, правата CL е тангентата на кружницата $k(O, R = \overline{OA})$ во точката L . Од точката L отсечката AB се гледа под агол $\alpha = \frac{1}{2} \widehat{ADB}$.

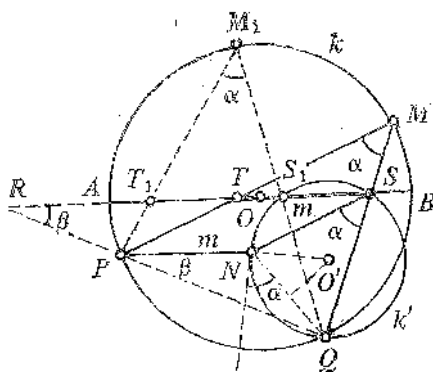
Ако N е точка од кракот CL и $N \neq L$, тогаш точката N е надвор од кружницата k и од N отсечката AB се гледа под агол помал од α .

Дискусија. Задачата има единствено решение.

164. На кружницата од една иста страна на даден дијаметар AB се дадени две точки P и Q . На другата полуокружница конструирај точка M таква што отсечките PM и QM од дијаметарот AB отсекуваат отсечка со дадена должина m .

Решение. *Анализа.* Нека M е бараната точка, т.е. MP и MQ отсекуваат на AB отсечка $\overline{TS} = m$ (цртеж десно). Притоа $\angle PMQ = \alpha$, каде $\alpha = \frac{1}{2} \widehat{PQ}$. Од

точките P и S повлекуваме прави паралелни на правите AB и MP . Нека овие прави се сечат во точката N . Четириаголникот $PNST$ е паралелограм. Јасно, $\angle NSQ = \angle PMQ = \alpha$ и $\angle QPN = \angle QRB = \beta$. Тогаш триаголникот PQN може да се конструира (две страни $\overline{PQ}$, $\overline{PN} = m$ и $\angle QPN = \beta$ меѓу нив).



Од претходно кажаното следува дека точката S е пресек на дијаметарот AB на дадената кружница k со множеството точки од кои отсечката NQ се гледа под агол α (т.е. со кружницата k').

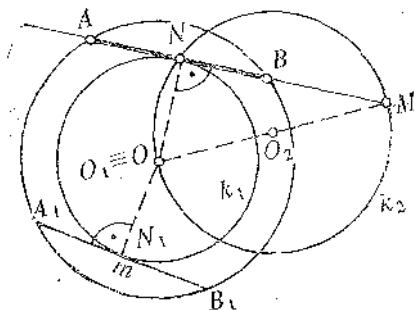
Конструкцијата и доказот следуваат од анализата.

Дискусија. Задачата нема да има решение ако кружницата k' не го сече или не го допира дијаметарот AB .

165. Низ точка M која лежи надвор од кружница конструирај секанта од која кружницата ќе отсеке тетива AB со должина m .

Решение. *Анализа.* Ако $\overline{AB} = m$, добиваме дека растојанието d од центарот O на кружницата k до тетивата AB е точно определено

(цртеж десно). Цртаме кружница $k_1(O_1 \equiv O, R_1 = \overline{ON} = d)$ и на неа од точката M повлекуваме тангента. За таа цел цртаме кружница k_2 со центар средината O_2 на отсечката MO и радиус $R_2 = \overline{O_2O}$. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точката N . Правата MN е бараната права.



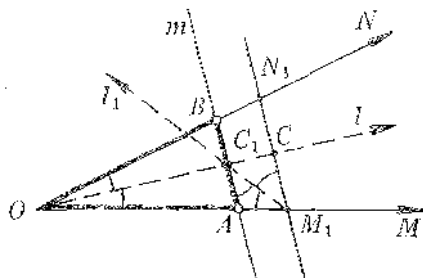
Конструкција. Во дадената кружница k цртаме произволна тетива $\overline{A_1B_1} = m$ и на неа повлекуваме нормала ON_1 . Потоа конструираме кружница $k_1(O_1 \equiv O, R_1 = \overline{O_1N_1})$. Ја конструираме кружницата $k_1(O_2, R_2 = \overline{O_2O})$ и наоѓаме $k_1 \cap k_2 = N$. Тогаш MN е бараната права.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Задачата има две решенија ако $m < 2R$, ако $m = 2R$ има едно решение и ако $m > 2R$ нема решение.

166. Дадени се отсечка со должина a и остар $\angle MON$. Конструирај права која е нормална на симетралата на дадениот агол и од него отсекува триаголник со периметар еднаков на a .

Решение. На кракот OM на $\angle MON$ нанесуваме точка M_1 таква што $\overline{OM_1} = \frac{a}{2}$. Ја конструираме симетралата l на $\angle MON$ и низ M_1 конструираме нормала M_1C на l . Ја конструираме симетралата l_1 на $\angle OM_1C$. Симетралите l и l_1 се сечат во точката C_1 .



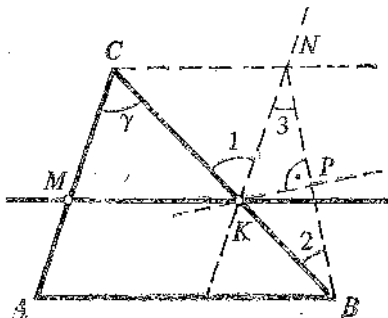
Низ C_1 повлекуваме права m паралелна на M_1N_1 . Правата m ги сече краците на $\angle MON$ во точките A и B . Добиениот триаголник AOB има периметар еднаков на a . Навистина, $\overline{AC_1} = \overline{AM_1}$, бидејќи триаголникот C_1AM_1 е рамнокрак (Докажи!) и аналогно $\overline{BC_1} = \overline{BN_1}$, па затоа

$$\begin{aligned}
 L_{AOB} &= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC_1} + \overline{BC_1} + \overline{OB} \\
 &= \overline{OA} + \overline{AM_1} + \overline{BN_1} + \overline{OB} = \overline{OM_1} + \overline{ON_1} \\
 &= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.
 \end{aligned}$$

Значи, бараната права е m .

167. Даден е триаголник ABC . Конструирај права паралелна на страната AB , која страните AC и BC ги сече во точки M и K , соодветно такви што $\overline{MC} = \overline{KB}$.

Решение. *Анализа.* Нека бараната права ги сече страните AC и BC во точки M и K , соодветно такви што $\overline{MC} = \overline{KB}$ (цртеж десно). Низ точката K повлекуваме права $KN \parallel AC$ и низ точката C - права $CN \parallel AB$, кои се сечат во точката N . Тогаш четириаголникот $MKNC$ е паралелограм и $\overline{KN} = \overline{MC} = \overline{KB}$ (по услов $\overline{MC} = \overline{KB}$). Според тоа, триаголникот BKN е рамнокрак и $\angle 2 = \angle 3$. Од триаголникот BKN следува $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 2$, па затоа $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle 1$. Но, $\angle 1 = \gamma$, што значи дека



$$\angle 2 = \frac{\gamma}{2}.$$

Конструкција. Низ точката B повлекуваме права BN таква што $\angle NBC = \frac{\gamma}{2}$, Низ точката C повлекуваме права $CN \parallel AB$. Двете прави BN и CN се сечат во точката N . Повлекуваме симетрала PK на отсечката BN , која ја сече страната BC во точката K . Низ K повлекуваме права $KM \parallel AB$, која ја сече AC во точката M .

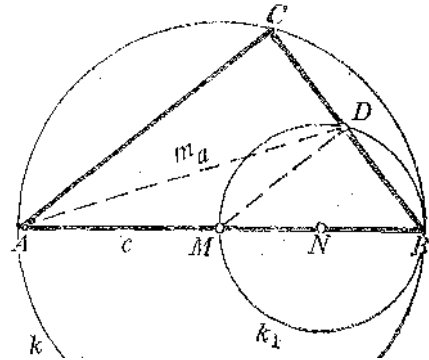
Доказ. $\overline{MC} = \overline{KB}$, бидејќи $\overline{KB} = \overline{KN} = \overline{MC}$, бидејќи триаголникот BKN е рамнокрак и четириаголникот $MKNC$ е паралелограм.

Дискусија. Задачата секогаш има решение.

168. Конструирај правоаголен триаголник за кој се дадени хипотенузата и медијаната кон една од катетите.

Решение. *Анализа.* Нека ABC е бараниот триаголник (цртеж десно). Тогаш $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AD} = m_a$, $\overline{AB} = c$ и $\overline{CD} = \overline{BD}$. Нека правата DM ја сече хипотенузата AB во точката M која е средина на AB (DM е

средна линија на триаголникот ABC). Сега, ако N е средина на MB , тогаш точката D е пресек на кружниците $k(A, m_a)$ и $k_1(N, \frac{c}{4})$. Конечно темето C се наоѓа во пресекот на правата BD и кружницата $k_2(M, \frac{c}{2})$.



Конструкција. Ја конструираме хипотенузата $\overline{AB} = c$ и ја конструираме нејзината средина M , а потоа ја конструираме средината N на отсечката MB . Конструираме кружници $k(A, m_a)$ и $k_1(N, \frac{c}{4})$ во чиј пресек ја определуваме точката D . Ги конструираме правата BD и кружницата $k_2(M, \frac{c}{2})$ во чи пресек го наоѓаме темето C .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Задачата има едно решение до складност ако $\frac{c}{2} < m_a < c$.

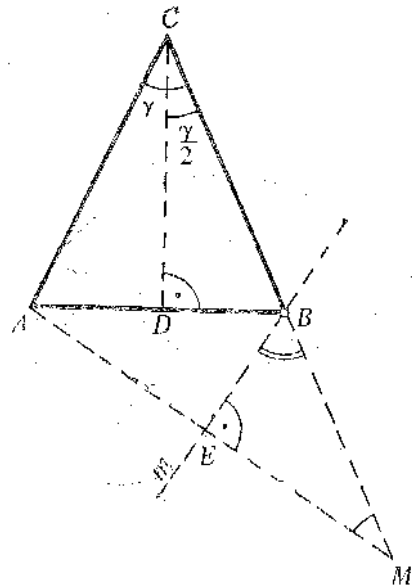
169. Конструирај рамнокрак триаголник за кој се дадени аголот при врвот и збирот на основата и едниот крак еднаков на d .

Решение. *Анализа.* Нека ABC е бараниот триаголник ($\overline{AC} = \overline{BC}$) и да означиме $\angle ACB = g$ (цртеж десно). Висината CD е симетрала на аголот g . Ја продолжуваме CB преку точката B и наоѓаме точка M таква што $\overline{BM} = \overline{AB}$. Тогаш $\overline{CM}$ е дадена. Понатаму,

$$\begin{aligned}\angle AMB &= \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (180^\circ - g) \\ &= 45^\circ - \frac{g}{4},\end{aligned}$$

па затоа триаголникот AMC може да се конструира.

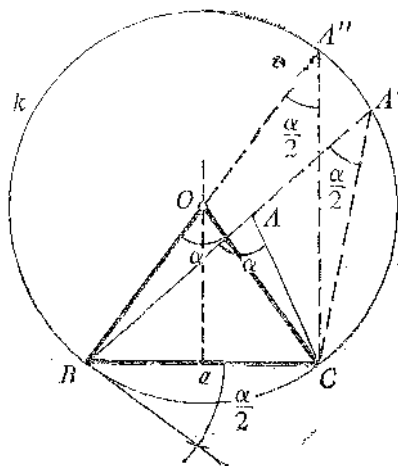
Конструкција. Го конструираме триаголникот AMC за кој се по-



знати $\angle ACM = g$, $\angle AMB = 45^\circ - \frac{g}{4}$ и $\overline{MC} = d$. Повлекуваме симетралата m на AM и во пресек со страната CM го наоѓаме трето теме B .
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.
Дискусија. Задачата има единствено решение до складност ако $g < 180^\circ$.

170. Конструирај триаголник ABC за кој се дадени $\angle A = \alpha$, $\overline{BC} = a$ и $\overline{AB} + \overline{AC}$ има најголема можна должина.

Решение. *Анализа.* Нека за триаголникот ABC важи $\angle A = \alpha$ и $\overline{BC} = a$ (цртеж десно). На продолжението на BA нанесуваме $\overline{AA'} = \overline{AC}$ и ги поврзуваме A' и C . Добиваме рамнокрак триаголник $CA'A$ за кој $\angle BAC = \alpha$ е надворешен агол, па затоа $\angle CA'A = \frac{\alpha}{2}$. Според тоа, множеството точки на кои припаѓа точката A' е делот $\widehat{BA'C}$ од кружницата со центар O од која $\overline{BC} = a$ се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$. Притоа



$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BA} + \overline{AA'} = \overline{BA'},$$

и овој збир е најголем кога тетивата има најголема должина, т.е. кога таа е дијаметарот BA' .

Конструкција. Ја нанесуваме отсечката $\overline{BC} = a$ и наоѓаме кружница k со центар O од која отсечката BC се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$. Тогаш BCO е бараниот триаголник.

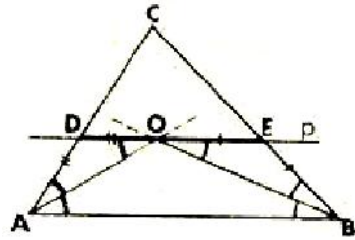
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност ако $\alpha < 180^\circ$.

171. Даден е триаголник ABC . Конструирај права p паралелна со страната AB така што $\overline{AD} + \overline{EB} = \overline{DE}$, каде D е пресекот на правата p со

AC , а E е пресекот на правата p со страната BC на дадениот триаголник.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека $DE \parallel AB$ и $\overline{AD} + \overline{EB} = \overline{DE}$ (цртеж десно). Нека O е точка на DE таква што $\overline{AD} = \overline{DO}$. Тогаш $\overline{OE} = \overline{EB}$. Триаголникот AOD е рамнокрак, па затоа од својствата на рамнокракиот триаголник и наизменичните агли следува $\angle DAO = \angle DOA = \angle OAB$. Според тоа, AO е симетрала на $\angle BAC$. Аналогно се добива дека BO е симетрала на $\angle ABC$.



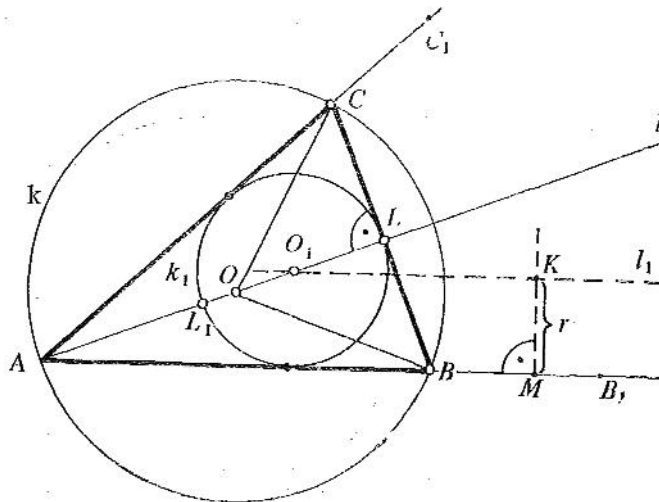
Конструкција. Ги повлекуваме симетралите на аглите во темињата A и B и нека O е нивната пресечна точка. Низ точката O конструираме права паралелна на страната AB и тоа е бараната права p .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

172. Конструирај триаголник ABC ако се дадени $\angle C$ и радиусот r на впишаната кружница во триаголникот, а центарот на опишаната кружница околу триаголникот лежи на симетралата на $\angle A$.

Решение. *Анализа.* Нека ABC е бараниот триаголник и l е симетралата на $\angle A$, а точката O е центарот на опишаната кружница k околу триаголникот ABC (види цртеж).



Ги разгледуваме триаголниците AOB и AOC . Од $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, следува дека овие триаголници се рамнокраки и

$$\angle CAO = \angle BAO = \angle ACO = \angle ABO = \frac{1}{2} \angle A.$$

Според тоа, $\angle AOB = \angle AOC$, па затоа $\triangle AOB \cong \triangle AOC$. Оттука следува дека $\overline{AB} = \overline{AC}$, т.е. триаголникот ABC е рамнокрак. Според тоа, $\angle A = 180^\circ - 2\angle C$.

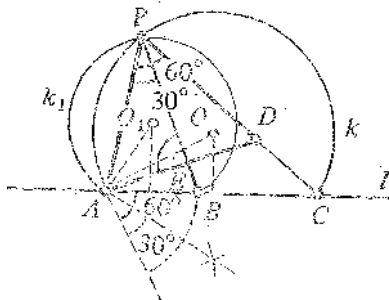
Конструкција. Конструираме $\angle B_1AC_1 = \angle A = 180^\circ - 2\angle C$ и ја повлекуваме неговата симетрала l . Од произволна точка M на кракот AB_1 кон внатрешноста на аголот издигаме нормала на AB_1 и на неа нанесуваме $\overline{MK} = r$ (r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот). Низ точката K повлекуваме права $l_1 \parallel AB_1$ која ја сече l во точката O_1 (центар на впишаната кружница во триаголникот). Конструираме кружница $k_1(O_1, r)$ и во пресек на оваа кружница со симетралата на аголот l ги наоѓаме точките L и L_1 . Ни подалечната точка од темето A конструираме нормала на l која краците на $\angle B_1AC_1$ ги сече во точките B и C , со што триаголникот е конструиран.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност ако $\angle C < 90^\circ$.

173. На дадена права l земени се точки A, B, C така што отсечката AB е пократка од отсечката BC (B е меѓу A и C). Конструирај рамностран триаголник ADP така што темињата D и P припаѓаат на права која минува низ C , а висината повлечена од темето P лежи на права која минува низ точката B .

Решение. *Анализа.* Нека ADP е бараниот триаголник (цртеж десно). За да го контруираме триаголникот APD доволно е да ја знаеме положбата на темето P . Лесно се гледа дека точката P е во пресекот на делот на кружницата k од кој AC се гледа под агол од 60° и делот од



кружницата k_1 од кој AB се гледа под агол од 30° .

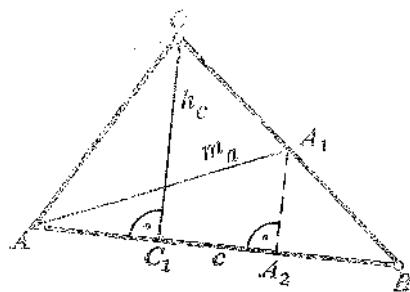
Конструкција. Согласно анализата конструираме кружници k и k_1 и наоѓаме $k_1 \cap k = P$. Ги повлекуваме правите PB и PC , а потоа повлекуваме нормала од A на PB и во пресек на оваа нормала го наоѓаме темето D .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

174. Конструирај триаголник ако се дадени една негова страна, висината повлечена кон неа и медијаната кон една од другите две страни.

Решение. Нека ABC е бараниот триаголник (цртеж десно), во кој се дадени страната c , висината h_c и медијаната m_a . Повлекуваме нормала A_1A_2 на AB . Тогаш A_1A_2 е средна линија во триаголникот CBC_1 и затоа $\overline{A_1A_2} = \frac{h_c}{2}$. Според

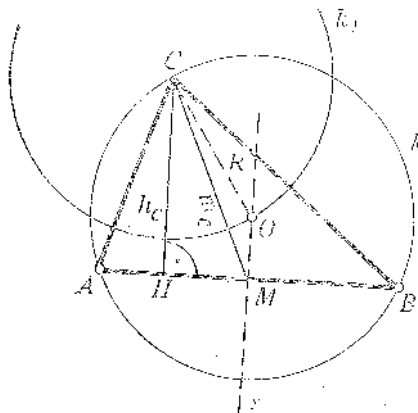


тоа, триаголникот AA_1A_2 може да се конструира, бидејќи се дадени катетата $\overline{A_1A_2} = \frac{h_c}{2}$ и хипотенузата $\overline{A_1A} = m_a$.

Оттука следува конструкцијата. Го конструираме триаголникот AA_1A_2 . На полуправата AA_2 нанесуваме $\overline{AB} = c$ и ја добиваме точката B . Ја поврзуваме B со A_1 и на полуправата BA_1 нанесуваме $\overline{A_1C} = \overline{BA_1}$ со што го добиваме темето C .

175. Конструирај го триаголникот за кој се дадени висина и медијана повлечени од едно исто теме и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. **Анализа.** Нека ABC е бараниот триаголник (цртеж десно). Правоаголниот триаголник CMH може да се конструира (дадени се катета h_c и хипотенуза m_c). Центарот O на опишаната



кружница k околу триаголникот ABC лежи на симетралата s на AB која е нормална на MH и минува низ точката M и е на растојание R од темето C . Значи $s \cap k_1(C, R) = O$.

Конструкција. Го конструираме правоаголникот CMH (катета h_c и хипотенуза m_c). Во точката M конструираме нормала s на MH и конструираме $k_1(C, R)$. Наноаѓаме $s \cap k_1(C, R) = O$ и конструираме кружница $k(O, R)$. Конечно, во пресекут на $k(O, R)$ и правата MH ги наоѓаме темињата A и B .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност ако $h_c < m_c$ и $R > MH$.

176. Конструирај рамнокрак триаголник ABC ако се дадени висината h_a повлечена кон кракот и висината h_c повлечена кон основата.

Решение. *Анализа.* Нека ABC

($\overline{AC} = \overline{BC}$) е бараниот триаголник

(цртеж десно) во кој $\overline{AE} = h_a$ и

$\overline{CD} = h_c$. Точката D е средина на

страната AB . Од точката D по-

влекуваме права паралелна на AE

и нека таа ја сече BC во точката

F . Значи, DF е средна линија за

триаголникот ABE , т.е. $\overline{DF} = \frac{1}{2} h_a$. Според тоа, правоаголникот три-

аголник CDF може да се конструира (познати му се хипотенузата и

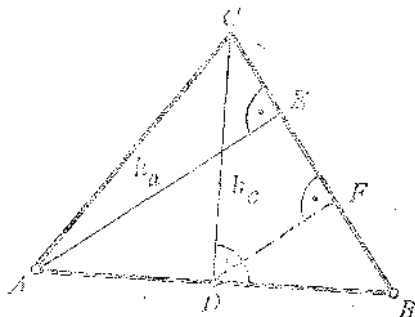
едната катета). Понатаму, темето B е во пресекут на правата CF и

нормалата на CD во точката D , а темето A се добива како

симетрична точка на B во однос на D .

Конструкцијата и доказот непосредно следуваат од анализата.

Дискусија. Задачата има решение ако $\frac{1}{2} h_a < h_c$, а во спротивно нема решение.

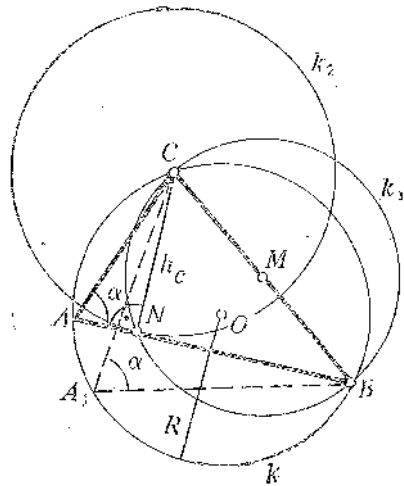


177. Конструирај триаголник за кој се дадени радиусот R на опишаната кружница k , $\angle A = \alpha$ и висината h_c .

Решение. *Анализа.* Нека ABC е бараниот триаголник (цртеж десно).

Бидејќи страната BC во кружницата k се гледа под $\angle A = \alpha$ таа е

позната. Нека M е средина на BC . Сега точката N се наоѓа во пресекот на кружниците $k_2(C, h_c)$ и $k_1(M, \overline{MB})$. Конечно темето A се наоѓа во пресекот на правата BN и кружницата $k(O, R)$.



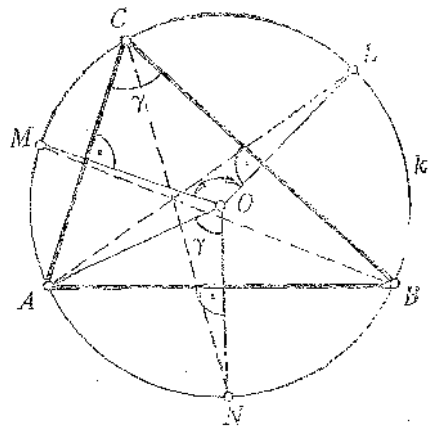
Конструкција. Конструираме кружница $k(O, R)$ и во неа во произволна точка нанесуваме агол со големина α . Краците на аголот ја сечат кружницата k во точките B и C . Ја наоѓаме точката M која е средина на BC . Конструираме кружници $k_1(M, \overline{MB})$ и $k_2(C, h_c)$ и наоѓаме $k_1 \cap k_2 = N$. Ја повлекуваме правата BN и наоѓаме $BN \cap k = A$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има решение ако $\alpha < 180^\circ$ и h_c во кружницата $k(O, R)$ се гледа под агол помал од α .

178. Продолженијата на симетралите на аглите A, B, C на триаголникот ABC ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките L, M, N , соодветно. Ако се дадени точките L, M, N , конструирај го триаголникот ABC .

Решение. *Анализа.* Нека ABC е бараниот триаголник и O е центарот на опишаната околу него кружница (цртеж десно). Бидејќи AL е симетрала на $\angle A$, важи $\widehat{BL} = \widehat{CL}$, т.е. точката L е средина на $\widehat{BC}$. Слично M е средина на $\widehat{AC}$ и N е средина на $\widehat{AB}$. Тоа значи дека $OL \perp BC$, $OM \perp AC$ и $ON \perp AB$.



Понатаму, $\angle MOL = 180^\circ - \gamma$, бидејќи правите AC, BC, OM, OL формираат четириаголник со два спротивни прави агли и

$$\angle AON = \widehat{AN} = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2g = g.$$

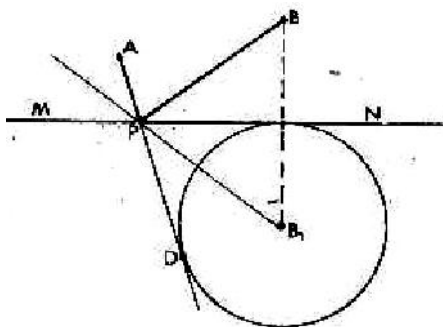
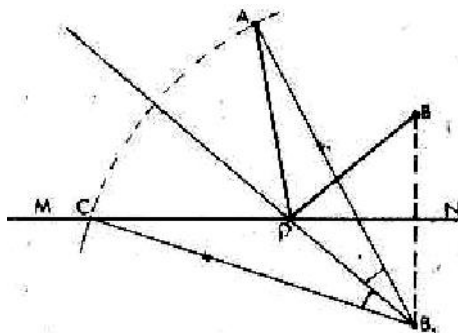
Конструкција. Ја конструираме кружницата k опишана околу триаголникот ABC , која минува низ точките L, M, N . Ја поврзуваме точката O со точките M и L и го добиваме $\angle MOL = 180^\circ - g$, со што го добиваме аголот g . Го конструираме аголот $\angle NOA = g$. Сега од A повлекуваме нормала на ON и во пресек со кружницата k го добиваме темето B . Аналогно се добива темето C .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има решение ако аглите $\angle MOL, \angle MON, \angle NOL$ чиј збир е 360° се тапи (тогаш триаголникот ABC е остроаголен), или два се тапи и едниот е прав или остар агол.

179. Дадени се права MN и точки A и B од иста нејзина страна. На правата MN определи точка P таква што $\angle MPA = 2\angle NPB$.

Решение. *Прв начин.* Конструираме точка B_1 симетрична на точката B во однос на правата MN (цртеж десно). Потоа на правата MN определуваме точка C таква што $\overline{B_1C} = \overline{B_1A}$. Сега ја конструираме симетралата на $\angle CB_1A$ и во пресекот со правата MN ја наоѓаме бараната точка P



Втор начин. Конструираме точка B_1 симетрична на точката B во однос на правата MN (цртеж лево). Потоа конструираме кружница k со центар во B_1 која ја допира правата MN . Од точката A повлекуваме тангентата AD на кружницата k . Точката P е

пресекот на тангентата AD и правата MN , бидејќи

$$\angle MPA = \angle NPD = 2\angle NPB_1 = 2\angle NPB.$$

На читателот за вежба му оставаме и во двата случаја да ја докаже исправноста на конструкцијата и да го испита бројот на решенијата.

180. Во рамнината е даден правилен шестаголник чија страна е еднаква на 1 cm . Само со помош на линијар конструирај отсечка чија должина е $\sqrt{7}\text{ cm}$.

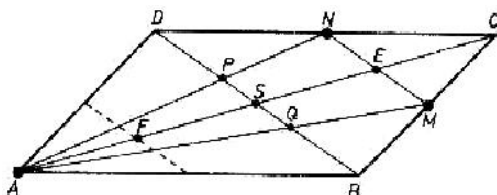
Решение. Нека дадениот шестаголник е $ABCDEF$. Ако точката G е пресекот на правите BC и ED , тогаш $\overline{AG} = \sqrt{7}\text{ cm}$, што непосредно се докажува со помош на Питагоровата теорема (направи цртеж).

181. Милан нацртал паралелограм $ABCD$, потоа ги означил средината M на страната BC и средината N на страната CD и излегол од собата. Неговата сестра Илина од цртежот избришала се освен точките A, M, N . Помогни му на Милан да ги определи точките B, C, D .

Решение. Средината E на отсечката MN припаѓа на дијагоналата AC и како

$$\overline{CE} = \overline{ES} = \overline{CF} = \overline{AF},$$

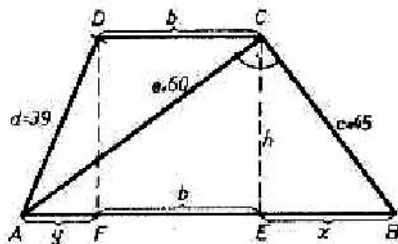
добиваме $\overline{AE} = 3\overline{EC}$ (цртеж



десно). Сега ја определуваме точката E , ја делиме AE на три еднакви дела и ги определуваме точките S и C . Низ S повлекуваме паралелна права на MN и ги повлекуваме правите CN и CM , по што ги наоѓаме темињата B и D .

182. Даден е траpez со должини на краци 39 mm и 45 mm , дијагоналата која е нормална на подолгиот крак има должина 60 mm . Конструирај го овој траpez, а потоа пресметај ги неговите периметар и плоштина.

Решение. Анализа. За правоаголникот триаголник ABC се познати двете катети, па затоа тој може да се конструира (цртеж десно). Понатаму, $CD \parallel AB$ и позната ни е должината на страната AD , па затоа може да се конструира триаголникот ACD .



Конструкција. Го конструираме правоаголникот триаголник ABC . Низ темето C повлекуваме права $p \parallel AB$. Конструираме кружница $k(A, 39\text{ mm})$ и во пресекот со правата p кој е поблизо до точката C ја наоѓаме точката D .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

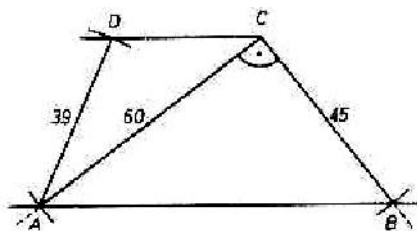
Имаме $\overline{AB} = a$. Од Питагоровата теорема следува $a^2 = 60^2 + 45^2 = 5625$, т.е. $a = 75 \text{ mm}$. Висината на траpezот е висина на триаголникот ABC повлечена кон хипотенузата, па затоа $\frac{75h}{2} = \frac{60 \cdot 45}{2}$, т.е. $h = 36 \text{ mm}$.

Понатаму,

$$x^2 = c^2 - h^2 = (c - h)(c + h) = 81 \cdot 9, \text{ т.е. } x = 27 \text{ mm} \text{ и}$$

$$y^2 = d^2 - h^2 = (d - h)(d + h) = 75 \cdot 3, \text{ т.е. } y = 25 \text{ mm}.$$

Според тоа, $b = a - (x + y) = 33 \text{ mm}$, па затоа $L = a + b + c + d = 192 \text{ mm}$ и $P = \frac{a+b}{2}h = 1944 \text{ mm}^2$.

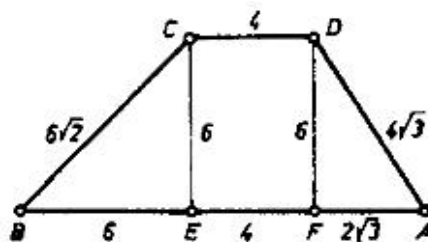


183. Должината на висината на траpezот е еднаква на 6 cm , а должината на едната основа е 4 cm . Внатрешните агли на траpezот на таа основа се 120° и 135° .

а) Конструирај го овој траpez.

б) Определи ги периметарот и плоштината на овој траpez.

Решение. а) Прво ја конструираме отсечката CD , а потоа аглите $\angle C = 135^\circ$ и $\angle D = 120^\circ$. Потоа повлекуваме права паралелна на CD на растојание 6 cm и во пресек со краците на конструираниите агли ги наоѓаме темињата A и B (цртеж десно).



б) Триаголникот BCE е рамнокрак правоаголен и како $\overline{BE} = \overline{CE} = 6 \text{ cm}$ од Питагоровата теорема следува $\overline{BC} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$. Триаголникот AFD е половина од рамностран триаголник, со висина $\overline{DF} = 6 \text{ cm}$, па затоа $\overline{AD} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ и $\overline{AF} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. Понатаму,

$$\overline{AB} = \overline{BE} + \overline{EF} + \overline{FA} = (10 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}.$$

Конечно,

$$P^* = P - P' = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \cdot \overline{AB} - \frac{\pi \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2} - \frac{\pi \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} - \frac{2^2 \pi}{2} = 10 - 2\pi.$$

185. Конвексен шестаголник $ABCDEF$ е составен од рамнокрак трапез $ACDF$ и два рамнокраки триаголници ABC и FDE со еднакви висини ($h = 12 \text{ cm}$). Притоа важи $\overline{AB} = 15 \text{ cm}$, $\overline{AF} = 25 \text{ cm}$, $\overline{FE} = 20 \text{ cm}$. Конструирај го шестаголникот во размер 1:5 и пресметај ја неговата плоштина.

Упатство. Со примена на Питагоровата теорема пресметај (цртеж десно):

$$\overline{DH} = 16 \text{ cm}, \overline{CG} = 9 \text{ cm}, \overline{CK} = 24 \text{ cm}.$$

Сега,

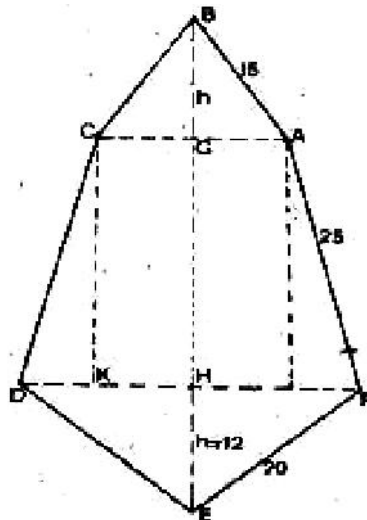
$$\overline{DF} = 32 \text{ cm}, \overline{AC} = 18 \text{ cm}.$$

Бараната плоштина е

$$P = P_{ABC} + P_{ACDF} + P_{FDE}$$

$$= 9 \cdot 12 + 25 \cdot 24 + 16 \cdot 12 = 900 \text{ cm}^2.$$

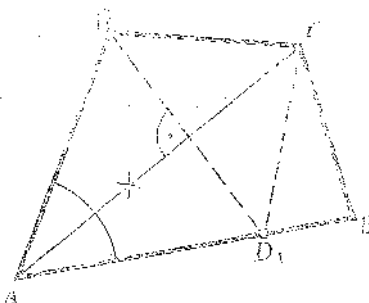
На читателот му оставаме да го конструира шестаголникот $ABCDEF$.



186. Да се конструира четириаголник за кој се дадени четирите страни и една од дијагоналите е симетрала на еден од аглите на четириаголникот.

Решение. *Анализа.* Нека $ABCD$ е бараниот четириаголник и дијагоналата AC е симетрала на $\angle BAD$ (цртеж десно). Од $\angle DAC = \angle CAB$ следува дека точката D_1 која е симетрична на D во однос на AC припаѓа на AB . Според тоа, $\overline{AD_1} = \overline{AD}$ и

$\overline{CD_1} = \overline{CD}$. Според тоа, за триаголникот D_1BC страните се: BC , $\overline{CD_1} = \overline{CD}$ и $\overline{D_1B} = \overline{AB} - \overline{AD_1} = \overline{AB} - \overline{AD}$, па затоа тој може да се конструира. Потоа го наоѓаме темето A со тоа што на полуправата



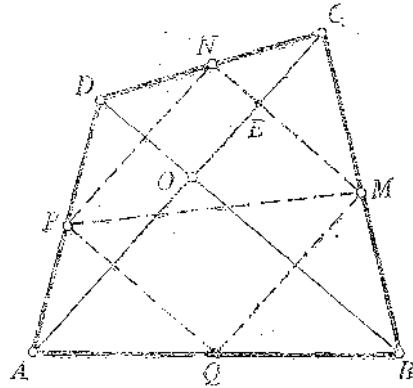
BD_1 ја нанесуваме страната AB . Конечно темето D го конструираме како пресек на кружниците $k(A, \overline{AD})$ и $k_1(C, \overline{CD})$.

Конструкцијата и доказот непосредно следуваат од анализата. Деталите ги препуштаме на читателот за вежба.

Дискусија. Задачата има решение ако може да се конструира триаголникот D_1BC , т.е. ако $\overline{AB} - \overline{AD} > \overline{DC} - \overline{BC}$.

187. Конструирај конвексен четириаголник за кој се познати средините на трите страни и пресечната точка на дијагоналите.

Решение. *Анализа.* Нека $ABCD$ е бараниот четириаголник (цртеж десно); M, N, P се средините на страните BC, CD, AD , соодветно; O е пресек на неговите дијагонали. Бидејќи PN е средна линија на триаголникот ACD , важи $AC \parallel PN$, а MN е средна линија на триаголникот BCD , важи $EM \parallel OB$ и $\overline{OE} = \overline{EC}$ (E е пресек на OC и MN). Според тоа, точката C може да се конструира, по што едноставно се конструираат и другите темиња на четириаголникот.



Конструкција. Разгледуваме случај кога N е средина на страната CD и оваа страна е соседна на страните DA и CB , чии средини се P и M , соодветно. Аналогно се разглеуваат останатите случаи.

Низ точката O повлекуваме права паралелна со PN , која ја сече MN во точката E . Темето C го добиваме како симетрична точка на точката O во однос на точката E . Сега D е симетрична на C во однос на N , A е симетрична на D во однос на P и B е симетрична на C во однос на M .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

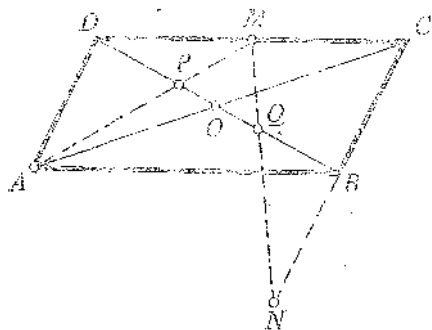
Дискусија. Нека Q е средината на страната AB на четириаголникот $ABCD$. Тогаш не е тешко да се докаже дека O ќе биде внатрешна точка за четириаголникот $MNPQ$.

Трите точки M, N, P може да бидат темиња на три паралелограми $MNPQ$, $NPMQ$ и $PMNQ$ кои соодветствуваат на трите можни случаи (последните два случаи не се прикажани на цртежот). Според тоа:

- задачата има едно решение, кога точката O е внатрешна за еден од овие три паралелограми,
- задачата има три решенија, кога точката O е внатрешна за триаголникот MNP (ќе биде внатрешна за сите три паралелограми),
- задачата нема решение кога точката O не е внатрешна за ниту еден од разгледуваните паралелограми,

188. Точката M е средина на страната CD на паралелограмот $ABCD$, а точката N е симетрична на точката C во однос на точката B . Конструирај го паралелограмот $ABCD$ ако се дадени точките A, M, N .

Решение. *Анализа.* Нека $ABCD$ е бараниот паралелограм (цртеж десно). Ја поврзуваме точката M со точките A и N . Нека AM и MN ја сечат дијагоналата BD во точките P и Q , соодветно. Тогаш точката P е тежиште за триаголникот ACD , а точката Q е тежиште за триаголникот NCD .

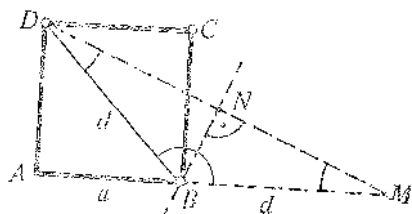


Според тоа, $\overline{AP} : \overline{PM} = \overline{NQ} : \overline{QM} = 2 : 1$, па затоа точките P и Q може да се конструираат. Понатаму, ако O е пресекокот на дијагоналите AC и BD , тогаш $\overline{DP} : \overline{PO} = \overline{BQ} : \overline{QO} = 2 : 1$. Бидејќи $\overline{DO} = \overline{BO}$, заклучуваме дека $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$, од каде следува дека точките B и D може да се конструираат. Конечно, точката C е симетрична на точката D во однос на M .

На читателот за вежба му препуштаме да ги реализира конструкцијата, доказот и дискусијата.

189. Конструирај квадрат за кој се дадени збирот на страната и дијагоналата, т.е. $s = a + d$

Решение. *Анализа.* Нека $ABCD$ е бараниот квадрат (цртеж десно). На полуправата AB од точката B



нанесуваме $\overline{BM} = d$ и ја поврзуваме D со M . Во добиениот рамнокрак триаголник MBD важи

$$\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ,$$

па затоа $\angle BMD = 22^\circ 30'$, а висината BN е симетрала на страната MD . Според тоа, правоаголниот триаголник AMD може да се конструира, бидејќи за него е позната катетата $\overline{AM} = s$ и двата наклонети агли. Така ја добивме страната на квадратот AD , по што квадратот едноставно се конструира.

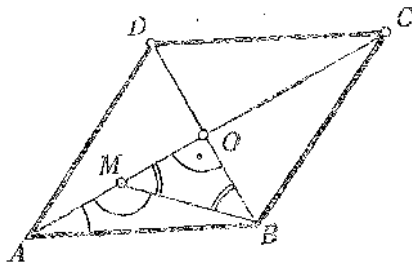
Конструкцијата, доказот и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.

190. Конструирај ромб за кој се дадени разликата меѓу дијагоналите $d_1 - d_2 = m$ и еден негов агол α .

Решение. *Анализа.* Нека $ABCD$ е бараниот ромб (цртеж десно).

Нека $\overline{AC} = d_1$, $\overline{BD} = d_2$ и $\angle A = \alpha$.

Дадена е разликата на дијагоналите на ромбот, па затоа е дадена е половината од оваа разлика. Нека на OA нанесеме точка M



таква што $\overline{OM} = \overline{OD}$ и да ја поврземе B со M . Добивме триаголник ABM за кој важи $\overline{AM} = \overline{AO} - \overline{OM} = \frac{1}{2}(d_1 - d_2) = \frac{m}{2}$, $\angle BAM = \frac{1}{2}\alpha$ и

$\angle AMB = 135^\circ$ (надворешен агол на рамнокрак правоаголен триаголник), па затоа овој триаголник може да се конструира. Сега лесно се конструира бараниот ромб.

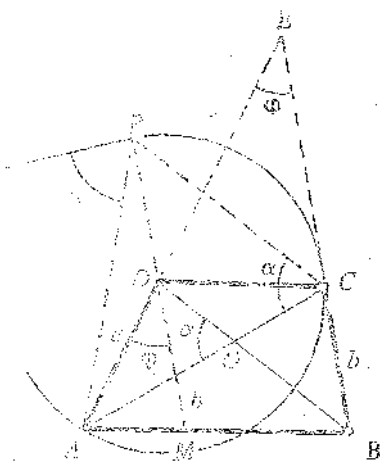
Конструкцијата, доказот и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.

191. Конструирај трапез за кој се дадени краците, аголот меѓу краците на трапезот и аголот меѓу неговите дијагонали.

Решение. Нека $ABCD$ е бараниот трапез (цртеж долу). Краците AD и BC се со должини a и b , соодветно, нека аголот меѓу краците го означиме со β , а аголот меѓу дијагоналите со α . Повлекуваме $DM \parallel CB$ и добиваме паралелограм $MBCD$, па затоа $\overline{MD} = \overline{BC} = b$ и $\angle ADM = \angle AEB = \beta$. За триаголникот AMD имаме $\overline{AD} = a$, $\overline{MD} = b$ и

$\angle ADM = j$, па затоа тој може да се конструира. Потоа ги определуваме темињата A и D на трапезот и правецот на кракот BC (BC е паралелна со MD). На продолжението на MD нанесуваме $\overline{DP} = \overline{DM}$. Тогаш отсечката AP се гледа од точката C под агол α . Според тоа, C припаѓа на множеството точки од кои отсечката AP се гледа по агол α и на правата DC , која е паралелна на AM . Така го добиваме темето C .

Конструкцијата, доказот и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.

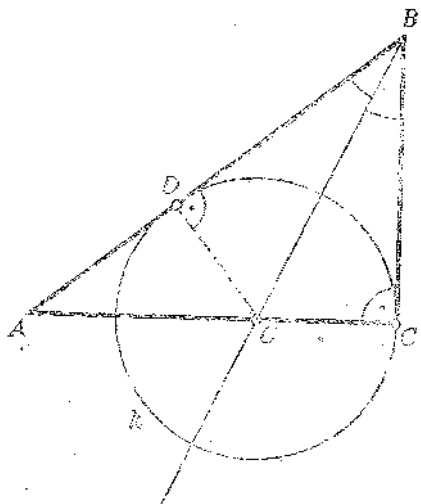


192. Даден е правоаголен триаголник. Конструирај кружница која минува низ темето на правиот агол, ја допира хипотенузата и центарот е припаѓа на една од катетите.

Решение. *Анализа.* Нека ABC

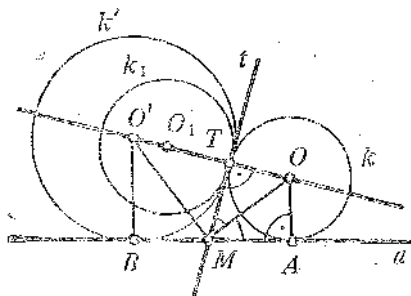
($\angle C = 90^\circ$) е дадениот триаголник и нека k е бараната кружница чиј центар O припаѓа, на пример, на катетата AC и ја допира хипотенузата во точката D (цртеж десно). Бидејќи центарот O на кружницата k лежи на катетата AC и k минува низ темето на правиот агол C , заклучуваме дека катетата BC е тангента на кружницата k во точката C . Од $OD \perp AB$ и $OC \perp BC$ следува дека BO е симетрала на $\angle ABC$.

Последното значи дека центарот на кружницата O е пресечната точка на симетралата на $\angle ABC$ и катетата AC , а радиусот е отсечката OC .



193. Конструирај кружница која дадена кружница k_1 ја допира во дадена точка T и допира дадена права a .

Решение. *Анализа.* Нека k е бараната кружница (цртеж десно). Ја повлекуваме заедничката тангента t на кружниците k и k_1 , која правата a ја сече во точката M . Центарот O на k е еднакво оддалечен од краците на аголот меѓу правите a и t . Значи MO е симетрала на $\angle aOt$.



Конструкција. Конструираме тангента t на k_1 во точката T и наоѓаме $t \cap a = M$. Повлекуваме симетрала на $\angle aOt$ и во пресек со правата O_1T го наоѓаме центарот O на кружницата k . Конечно, ја конструираме кружницата $k(O, \overline{OT})$.

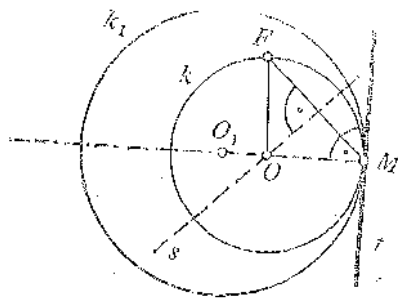
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата може да нема, да има едно или две решенија.

194. Дадена е кружница k_1 со центар O_1 , точка M од k_1 и точка F која не лежи на k_1 . Конструирај кружница k која минува низ точката F , ја допира кружницата k_1 во точката M , ако точката F е:

- а) внатрешна за кружницата k_1 ,
- б) надворешна за кружницата k_1 .

Решение. а) *Анализа.* Бидејќи бараната кружница k се допира до кружницата k_1 во точката M , заклучуваме дека правата OM која го поврзува центарот на k со M е нормална на тангентата на k_1 во точката M (цртеж десно). Но, кружницата k минува низ точките F и M , па затоа нејзиниот центар припаѓа на симетралата на отсечката FM .

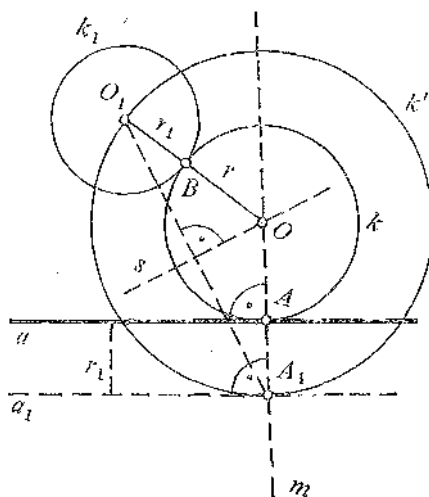


Конструкцијата, доказот и дискусијата ги препуштаме на читателот за вежба.

- б) Постапи аналогно како во решението под а).

195. Конструирај кружница која допира дадена кружница $k_1(O_1, r_1)$ и допира дадена права a во дадена точка A ,

Решение. Анализа. Нека $k(O, r)$ е бараната кружница (цртеж десно). Ако k' е кружница со центар O и радиус $r' = r + r_1$, тогаш k' минува низ точката O_1 и во точката A_1 ја допира правата a_1 која е паралелна со правата a и од неа се наоѓа на растојание r_1 . Сега центарот O на кружницата k е пресечната точка на нормалата m на a_1 во точката A_1 и симетралата s на отсечката O_1A_1 (триаголникот O_1A_1O е рамнокрак). Конечно, бараната кружница е $k(O, \overline{OA})$.

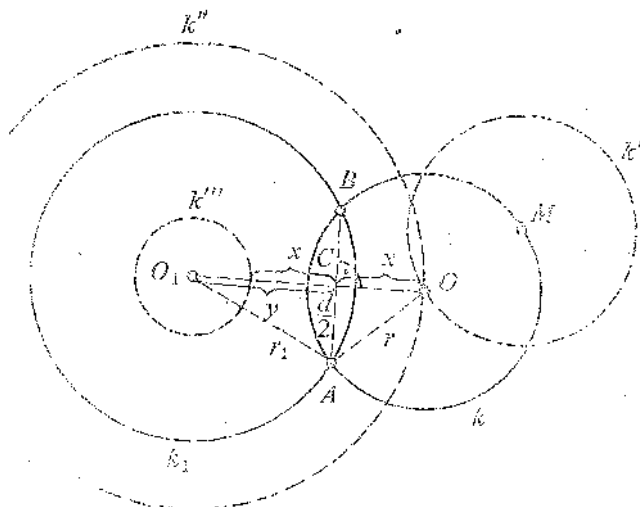


Конструкцијата и доказот следуваат од анализата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Задачата има решение, ако s и m се сечат. Задачата има и друго решение, ако правата $a_2 \parallel a$ лежи во полурамнината определена од a во која не лежи a_1 . Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

196. Конструирај кружница k со даден радиус r , која минува низ точка M и сече дадена кружница $k_1(O_1, r_1)$ така што заедничката тетива AB има должина d .

Решение. Анализа. Нека $k(O, r)$ е бараната кружница (види цртеж). Тогаш центарот O на кружницата k е пресек на множествата точки: кружниците $k(M, r)$ и $k(O_1, x + y)$ или кружниците $k(M, r)$ и $k(O_1, |y - x|)$. Овде x е катетата на правоаголниот триаголник ACO со втора катета $\overline{AC} = \frac{d}{2}$ и хипотенуза $\overline{OA} = r$, а y е катетата на правоаголниот триаголник ACO_1 со втора катета $\overline{CA} = \frac{d}{2}$ и хипотенуза $\overline{O_1A} = r_1$.



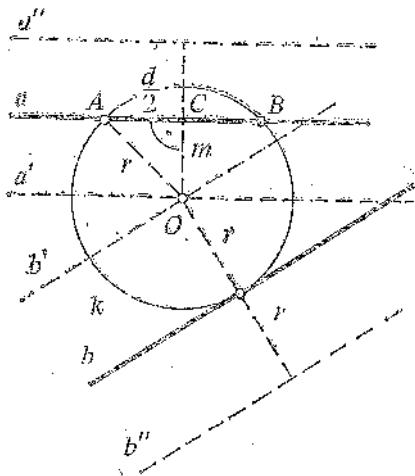
Конструкција. Прво ги наоѓаме катетите x и y , при што ги конструираме посочените правоаголници ACO и ACO_1 со катета $\frac{d}{2}$ и хипотенуза r и r_1 , соодветно. Потоа конструукцијата ја реализираме согласно анализата.

Доказ. Непосредно следува од анализата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. задачата има решение ако $k' \cap k'' \neq \emptyset$ и $k' \cap k''' \neq \emptyset$.

197. Конструирај кружница со даден радиус r , која од дадена права a отсекува отсечка со дадена должина d и допира друга дадена права b .

Решение. Анализа. Нека k е ба-
раната кружница (цртеж десно). За
да се допира k до правата b
нејзиниот центар треба да лежи на
множеството точки оддалечени од
 b на растојание r од k , т.е. на
правите b' и b'' . Од друга страна,
за да кружницата k отсекува од
правата a отсечка со должина d
нејзиниот центар O треба да биде
оддалечен од a на растојание m ,
еднакво на должината на катетата
 OC на правоаголниот триаголник



ACO со друга катета $\overline{AC} = \frac{d}{2}$ и хипотенуза $\overline{OA} = r$. Тоа значи дека O

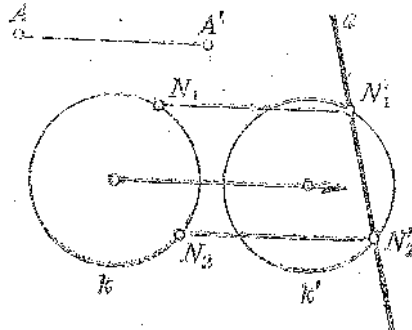
треба да припаѓа на множеството точки еднакво оддалечени од правата a на растојание m , т.е. на правите a' и a'' . Тогаш центарот O на k ќе биде пресекот на a' со b' и b'' , т.е. пресекот на a'' со b' и b'' .

На читателот за вежба му поставаме да ги реализира конструкцијата, доказот и дискусијата.

198. Дадени се кружница k , права a и транслација u , определена со пар соодветни точки A и A' (A' е слика на A). На правата a да се конструира точка N' , која е слика на точка од k при транслацијата u . Да се конструира и прасликата на N' .

Решение. *Анализа.* Бидејќи на правата a треба да конструираме точка која е слика на непозната точка од k , при дадена транслација u , доволно е да ја најдеме сликата k' на k при u , а потоа да ги земеме точките од k' кои припаѓаат на a .

Конструкција. Ја конструираме сликата k' на k при u , определена од дадените точки A и A' , каде A' е слика на A (цртеж десно). Ги наоѓаме пресечните точки на k' и a , т.е. точките N'_1 и N'_2 . Ги конструираме прасликите N_1 и N_2 на N'_1 и N'_2 при транслацијата u .



Доказ. Непосредно следува од анализата.

Дискусија. Бидејќи права и кружница може да имаат нула, една или две пресечни точки, задачата нема решение, има едно или две решенија.

199. Дадена е отсечка AB . Конструирај отсечка MN еднаква и паралелна на AB чии крајни точки припаѓаат на правите a и b , секоја од кои ја сече правата AB .

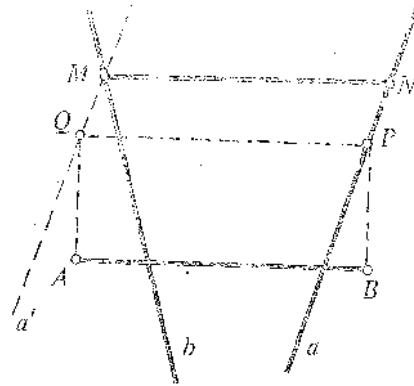
Решение. *Анализа.* Нека MN е бараната отсечка (цртеж десно). Ако примениме транслација u со пар соодветни точки A и B , тогаш

$a \xrightarrow{u} a'$. Тогаш точката M ќе биде слика при таа транслација, а N ќе биде праслика.

Конструкција. Непосредно следува од анализата.

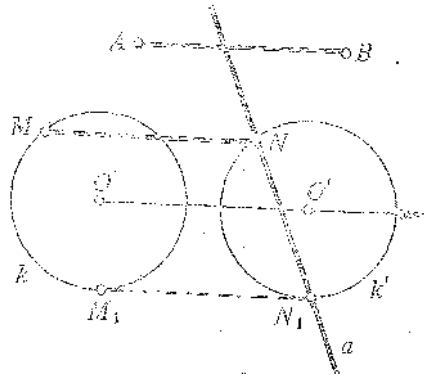
Доказ. Непосредно следува од анализата.

Дискусија. Ако правите a и b не се паралелни, задачата има едно решение. Ако $a \parallel b$ и $a \xrightarrow{y} b$ задачата има бесконечно многу решенија, а ако $a \parallel b$ и $a \not\xrightarrow{y} b$ задачата нема решение.



200. Дадена е отсечка AB . Конструирај отсечка MN еднаква и паралелна на AB чии крајни точки припаѓаат на дадени права a и кружница $k(O, r)$, при што правата a ја сече правата AB .

Решение. Нека MN е бараната отсечка (цртеж десно). Таа може да се конструира ако точката N ја разгледуваме како слика на точката M при транслација y која е определена со точките A и B (B е слика на A). Според тоа, конструкцијата се сведува на конструкција на точка на правата a која е слика на точка од кружницата k при y , т.е. на конструкција на кружница $k'(O', r)$ и наоѓање на пресек правата a , точки N и N_1 , а потоа наоѓање на нивните праслики M и M_1 . Задачата има две, едно или ниту едно решение.



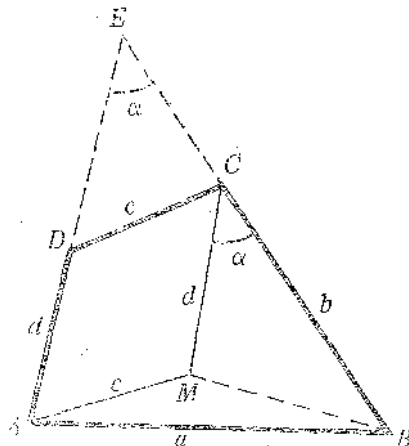
201. Дадена е отсечка AB . Конструирај отсечка MN еднаква и паралелна на AB чии крајни точки припаѓаат на две дадени кружници $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$.

Решение. Крајните точки на отсечката MN треба да припаѓаат на двете кружници k и k_1 и MN треба да е паралелна и еднаква на AB . Затоа доволно е кружницата k да ја пресликаме во кружница k' со транслација y зададена со точките A и B . Потоа точката N припаѓа

на $k' \cap k_1$, а точката M ја определуваме како праслика на точката N при транслагацијата u . Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

202. Конструирај четириаголник за кој се дадени четирите страни и аголот меѓу продолженијата на две негови спротивни страни.

Решение. Нека $ABCD$ е бараниот четириаголник (цртеж десно). Ако направиме транслагација u која точката D ја пресликува во точката C , тогаш $AD \xrightarrow{u} CM$ и добиваме паралелограм $AMCD$. Сега триаголникот BCM може да се конструира (познати се страните BC и MC , а аголот меѓу нв е α). Потоа го конструирме триаголникот ABM и на крајот ги конструираме паралелограмот $AMCD$, со што четириаголникот $ABCD$ е конструиран,



Задачата има решение ако $\alpha < 180^\circ$ и $a + c > \overline{BM}$.

203. Конструирај четириаголник за кој се дадени страните и отсечка која поврзува средини на две спротивни страни.

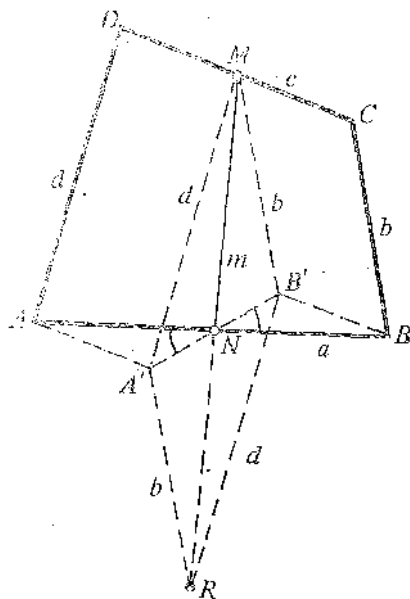
Решение. Нека $ABCD$ е бараниот етириаголник, во кој отсечката MN ги поврзува соодветно средините на страните CD и AB (цртеж десно).

Ако направиме транслагации u_1 и u_2 соодветно со паровите точки D и M , C и M , ги добиваме паралелограмите $AA'MD$ и $BB'MC$. Понатаму, од

$$\overline{AN} = \overline{NB}, \overline{AA'} = \overline{BB'} = \frac{c}{2} \text{ и}$$

$$\angle ANA' = \angle BNB',$$

следува дека $\triangle AA'N \cong \triangle BB'N$, па затоа $\overline{A'N} = \overline{NB'}$. Според тоа, MN

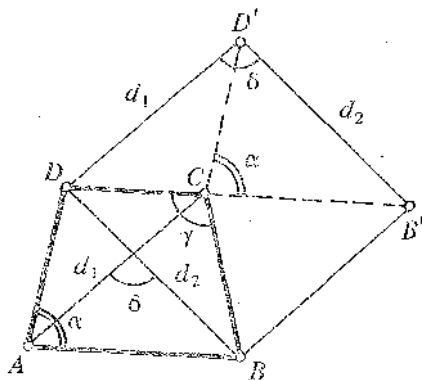


е медијана за триаголникот $A'MB'$. Затоа триаголникот $A'MB'$ може да се конструира. Прво го конструираме триаголникот MRB' за кој се познати страните b, d и $2m$, па потоа го добиваме триаголникот $A'MB'$. Сега ги конструираме триаголниците NBB' и NAA' за кои се познати должините на пресотанатите две страни ($\frac{c}{2}$ и $\frac{a}{2}$). На крајот темињата C и D ги наоѓаме со конструирање на паралелограмите $NBCM$ и $NADM$, соодветно.

204. Конструирај четириаголник $ABCD$ за кој се дадени дијагоналите $\overline{AC} = d_1, \overline{BD} = d_2$, аголот d меѓу нив, $\angle DAB = \alpha$ и $\angle BCD = \gamma$.

Решение. Анализа. Нека $ABCD$ е бараниот четириаголник (цртеж десно). Со транслација u определена од точките A и C (C е слика на A) ги пресликува точките B и D во точките B' и D' , соодветно. Притоа четириаголникот $BB'D'D$ е паралелограм со страни

$$\overline{DD'} = d_1, \overline{D'D} = d_2 \text{ и } \angle DD'B = d,$$



па затоа тој може да се конструира. Темето C ја конструираме како пресек на множествата точки од кои отсечката $B'D'$ се гледа под агол α , а отсечката BD се гледа под агол γ . Конечно, темето A се добива како четврто теме на паралелограмот $BB'CA$.

Конструкцијата, доказот и дискусијата следуваат непосредно од анализата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

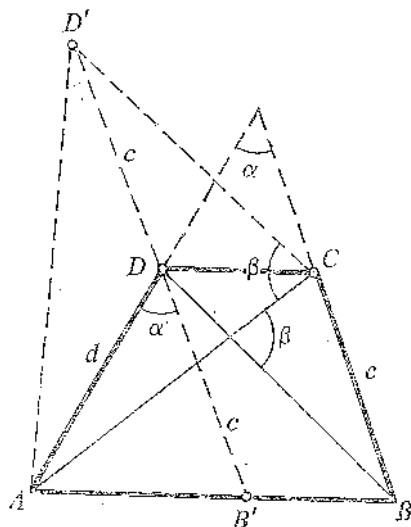
205. Конструирај трапез $ABCD$ за кој се дадени краците $\overline{BC} = c, \overline{AD} = d$, аголот α меѓу продолженијата на краците и аголот β меѓу дијагоналите на трапезот.

Решение. Анализа. Нека $ABCD$ е бараниот трапез. Со транслации u_1 и u_2 определени соодветно со паровите точки C и D ; B и C се добиваат паралелограмите $BCDB'$ и $BCD'D$, Значи, точките B', D' и D лежат на една права ($DB' \parallel CB$ и $DD' \parallel CB$) и важи $\overline{B'D'} = 2c$. Триаголникот $AB'D$ може да се конструира ($\overline{AD} = d, \overline{B'D} = c$ и $\angle ADB' = \alpha$). Понатаму, точката C е пресек на множеството точки од

кои отсечката AD' се гледа под агол b и правата која минува низ D е паралелна со AB' . Конечно, B е четврто теме на паралелограмот $BCDB'$.

Конструкцијата и доказот непосредно следуваат од анализата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Задачата има решение ако $a < 180^\circ$ и $b < 180^\circ$.



206. Конструирај рамнокрак триаголник ABC така што темето C е дадена точка, $\angle ACB = g$ и темињата A и B соодветно припаѓаат на дадена права a и дадена кружница $k(O, r)$.

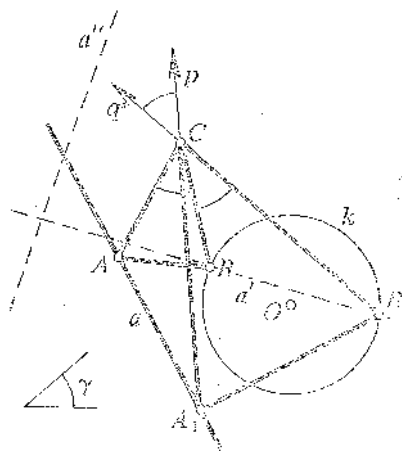
Решение. *Анализа.* Нека ABC е барариот триаголник (цртеж десно). Бидејќи треба да е $\overline{CA} = \overline{CB}$ и $\angle ACB = g$, точката B е слика на точката A при ротација W со центар во точката C и ориентиран $\angle PCQ = g$ (види цртеж).

Според тоа, решението на задачата се сведува на конструкција на точка B врз кружницата k која е слика на некоја точка од правата a при ротација w .

Конструкција. Конструираме слика a' на правата a при ротација w . Го наоѓаме пресекот $M = a' \cap k$. Ја определуваме прасликата на точките M при ротацијата w . Го конструираме триаголникот кога ќе ја поврземе точката C со точките M и нивните праслики.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Бидејќи постојат две ротации W околу точката C за агол еднаков на g (во насока на движењето на стрелките на часовникот и



во обратна насока), правата a има две слики a' и a'' , па затоа можни се следниве случаи:

- а) ако a' и a'' ја сечат k задачата има четири решенија,
- б) ако a' ја сече k , а a'' ја допира, или обратно, задачата има три решенија,
- в) ако една од правите a' и a'' ја сече k , а другата нема заеднички точки со k задачата има две решенија,
- г) ако една од правите a' и a'' ја допира k , а другата нема заеднички точки со k , задачата има едно решение,
- д) ако a' и a'' немаат заеднички точки со k задачата нема решение.

207. Дадени се кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ и точката O , различна од O_1 и O_2 . Конструирај рамностран триаголник кај кој едното теме е точката O , а другите две темиња припаѓаат на кружниците k_1 и k_2 .

Решение. *Анализа.* Нека ABO е бараниот триаголник (цртеж десно).

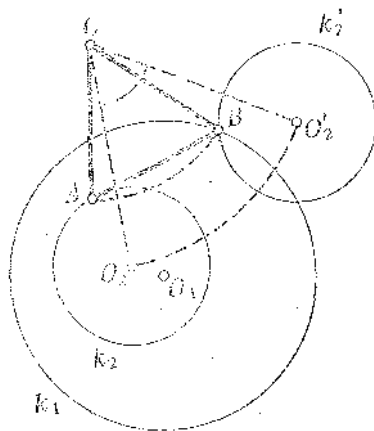
Тогаш $\angle AOB = 60^\circ$ и $\overline{AO} = \overline{BO}$. Точката B е слика на точката A од k_2 на кружницата k_1 при ротација w со центар во O и агол $\alpha = 60^\circ$.

Конструкција. Ја ротираме кружницата k_2 околу точката O за агол $\alpha = 60^\circ$ и добиваме кружница k_2' .

Наоѓаме пресек на k_2' и k_1 и го определуваме темето B . Ако B е точка од пресекот, тогаш A ја определуваме како нејзина праслика при ротацијата w .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение, има едно или има две решенија, во зависност да кружниците k_2' и k_1 не се сечат, имаат една или имаат две пресечни точки.



208. Точката O е внатрешна за рамностранниот триаголник ABC и од неа страната AC се гледа под агол 150° . Докажи дека отсечките $\overline{OA} = m$, $\overline{OB} = n$ и $\overline{OC} = s$ се страни на правоаголен триаголник.

Решение. Нека ABC е дадениот триаголник и страната AC се гледа од точката O под агол 150° (цртеж десно).

Ќе конструираме триаголник со страни m, n, s . Со ротација w со центар C и агол 60° ја наоѓаме сликата на точката O , т.е.

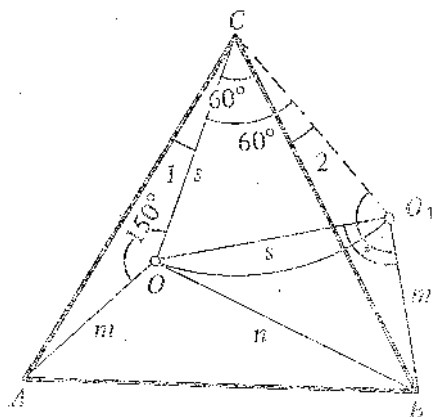
$O \xrightarrow{w} O_1$ и ја поврзуваме точката O_1 со точките O, B, C . Тогаш од $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{CO} = \overline{CO_1}$ и

$$\angle 1 = \angle ACB - \angle OCB = 60^\circ - \angle OCB = \angle OCO_1 - \angle OCB = \angle 2,$$

следува дека триаголниците AOC и BO_1C се складни. Од складноста на овие триаголници следува $\overline{O_1B} = \overline{AO}$ и $\angle BO_1C = \angle AOC = 150^\circ$. Така конструираме триаголник OO_1B со страни m, n, s . Понатаму,

$$\angle OO_1B = \angle BO_1C - \angle OO_1C = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$$

т.е. триаголникот OO_1B е правоаголен.



V.7. СТЕРЕОМЕТРИЈА

209. Докажи дека сите правоаголни паралелопипеди кај кои плоштината и волуменот (во cm^2 и cm^3) се изразени со ист број имаат еднаков збир на реципрочните вредности на должините на рабовите повлечени од исто теме.

Решение. Нека a, b, c се должините на рабовите на правоаголниот паралелопипед. Според условот на задачата имаме

$$2ab + 2bc + 2ca = abc$$

$$\frac{2ab}{abc} + \frac{2bc}{abc} + \frac{2ca}{abc} = \frac{abc}{abc}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2},$$

што и требаше да се докаже.

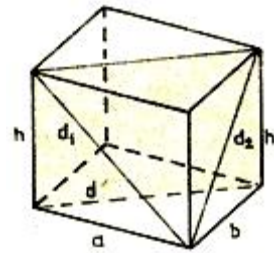
210. Основата на права призма е квадрат со должина на работ a . Должината на работ a е два пати поголема од должината на висината на призмата. Мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви. Определи ги должините на рабовите на оваа призма.

Решение. Висината на призмата е $H = \frac{a}{2}$. Плоштината на призмата е

$$P = 2a^2 + 4aH = 4a^2, \text{ а волуменот е } V = a^2H = \frac{a^3}{2}. \text{ Според тоа, } \frac{a^3}{2} = 4a^2, \text{ од каде добиваме } a = 8. \text{ Според тоа } H = 4.$$

211. Основните рабови на квадратот се однесуваат како $4:3$, дијагоналите на бочните сидови меѓусебно се однесуваат како $\sqrt{20}:\sqrt{13}$, а плоштината на дијагоналниот пресек се однесува спрема волуменот на квадратот како $2:1$. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадрат.

Решение. Нека a и b се основните рабови, d_1 и d_2 се соодветните дијагонали на бочните сидови, d е дијагоналата на основата и h е висината на квадратот (цртеж десно). Од дадените размери ги добиваме пропорциите $a:b = 4:3$, $d_1:d_2 = \sqrt{20}:\sqrt{13}$ и $dh:abh = 2:1$.



Според тоа, $d_1^2:d_2^2 = 20:13$, т.е.

$$(a^2 + h^2):(b^2 + h^2) = 20:13 \text{ и } d:ab = 2:1.$$

Оттука добиваме $\sqrt{a^2 + b^2}:ab = 2:1$ или $(a^2 + b^2):a^2b^2 = 4:1$. Од равенките $a:b = 4:3$ и $(a^2 + b^2):a^2b^2 = 4:1$, добиваме $a = \frac{5}{6}, b = \frac{5}{8}$.

Сега, од равенката $(a^2 + h^2):(b^2 + h^2) = 20:13$ добиваме

$$\left(\frac{25}{36} + h^2\right):\left(\frac{25}{64} + h^2\right) = 20:13, \text{ т.е. } h = \frac{5}{12}.$$

Конечно, за волуменот и плоштината на квадратот добиваме

$$P = 2ab + 2ah + 2bh = \frac{325}{144} \text{ и } V = abh = \frac{125}{576}.$$

212. Основата на права призма е правоаголник со должини на страни 5 cm и 8 cm , а плоштината на омотачот на оваа призма е еднаква на $408,2\text{ cm}^2$. Определи ја плоштината на цилиндарот чиј дијаметар на основата е 4 cm , ако неговиот волумен е еднаков на 64% од волуменот на призмата.

Решение. Имаме $M_p = 408,2 \text{ cm}^2$ и $L = 26 \text{ cm}$, па од $M_p = LH$ добиваме $H = \frac{408,2}{26} \text{ cm}$. Значи, волуменот на призмата е

$$V_p = BH = 8 \cdot 5 \cdot \frac{408,2}{26} \text{ cm}^3,$$

па затоа за волуменот на цилиндарот деобиваме

$$V_c = \frac{64}{100} V_p = \frac{64}{100} \cdot \frac{8 \cdot 5 \cdot 408,2}{26} \text{ cm}^3.$$

Но, $V_c = \pi r^2 H_c$, па затоа $16\pi H_c = \frac{64}{100} \cdot \frac{8 \cdot 5 \cdot 408,2}{26}$, од каде добиваме

$$H_c = \frac{4 \cdot 408,2}{513\pi} = \frac{25,12}{\pi} \text{ cm}.$$

Конечно, за плоштината на омотачот добиваме

$$M_c = 2\pi r H_c = 8\pi \cdot \frac{25,12}{\pi} = 200,96 \text{ cm}^2.$$

213. Дадена е права правилна еднакворабна тристрана призма чија основа има плоштина $6,25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

а) Определи го основниот раб на ова тело.

б) Определи го односот на волумените на впишаниот и опишаниот цилиндар околу ова тело.

Решение. а) Од $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6,25\sqrt{3}$ добиваме $a = 5 \text{ cm}$.

б) Радиусот на впишаниот цилиндар е $r = \frac{1}{3}h = \sqrt{3} \text{ cm}$, а радиусот на опишаниот цилиндар е $R = \frac{2}{3}h = 2r = 2\sqrt{3} \text{ cm}$, каде h е висината на основата. Разгледуваните цилиндри се со исти висини, па затоа

$$V : V' = \pi R^2 H : \pi r^2 H = R^2 : r^2 = (2r)^2 : r^2 = 4 : 1.$$

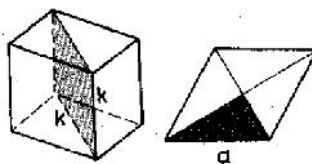
214. Основата на права четиристрана призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$. По-

малиот дијагонал пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2 .

а) Определи ги плоштината и волуменот на призмата.

б) Определи го k ако мерните броеви на плоштината и волуменот се еднакви.

Решение. Од плоштината на малиот дијагонал пресек заклучуваме дека помалата дијагонала на ромбот и висината на призмата имаат должина k . Од плоштината на ромбот за должината d на големата



мата дијагонала добиваме $\frac{dk}{2} = \frac{2}{3}k^2$, т.е. $d = \frac{4}{3}k$. Сега за страната на

ромбот имаме $a = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{3}\right)^2} = \frac{5}{6}k$.

а) Сега добиваме $V = \frac{2}{3}k^2k = \frac{2}{3}k^3$ и $P = 2 \cdot \frac{2}{3}k^2 + 4 \cdot \frac{5}{6}k \cdot k = \frac{14}{3}k^2$.

б) Од $V = P$ следува $\frac{2}{3}k^3 = \frac{14}{3}k^2$, т.е. $k = 7$.

215. Дадена е коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со должина на раб a . Нека точката M е пресекот на дијагоналите на основата $ABCD$ и нека отсечките DB_1 и MD_1 се сечат во точката K . Определи ги плоштините на триаголниците KDM и $KB_1 D_1$.

Решение. На цртежите десно се прикажани коцката и дијагоналниот пресек $DBB_1 D_1$, кој е правоаголник и чии страни се $B_1 B = a$ и $BD = a\sqrt{2}$.

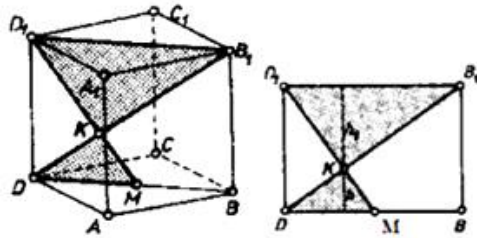
Од $DM \parallel B_1 D_1$, заклучуваме

дека триаголниците KDM и $B_1 D_1 K$ се слични, па затоа

$h : h_1 = DM : D_1 B_1 = 1 : 2$. Според тоа, $h = \frac{h_1}{2}$, па како $h + h_1 = a$ доби-

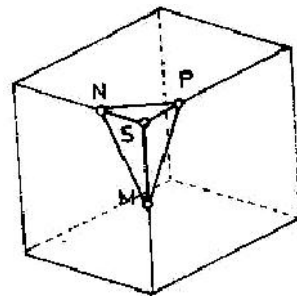
ваме дека $h = \frac{a}{3}$ и $h_1 = \frac{2a}{3}$. Сега имаме:

$$P_{KDM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12} \text{ и } P_{B_1 D_1 K} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$



216. Рамнина сече коцка така што трите рабови на коцката со заедничко теме ги сече во точки кои тие рабови ги делат во односи 1:1, 2:1 и 3:1, сметајќи од заедничкото теме. Определи го односот на волумените на телата на кои рамнината ја дели коцката.

Решение. Нека a е работ и $V = a^3$ волуменот на коцката. Отсеченото тело е пирамида $SMNP$ (цртеж десно). Волуменот V_1 на оваа пирамида ќе го пресметаме земајќи го правоаголникот SMN за основа, а отсечката $\overline{SP} = \frac{a}{4}$ за нејзина висина.



на. Според тоа, $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^3}{144}$. Значи, $V_2 = V - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{144} = \frac{143a^3}{144}$, па затоа $V_2 : V_1 = 143:1$.

217. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $5a^2$, каде a е должината на основата на пирамидата. Изрази го волуменот на пирамидата во функција од a . Пресметај го волуменот на пирамидата ако $a = 6 \text{ dm}$.

Решение. Имаме, $P = a^2 + 4 \frac{ah}{2}$,

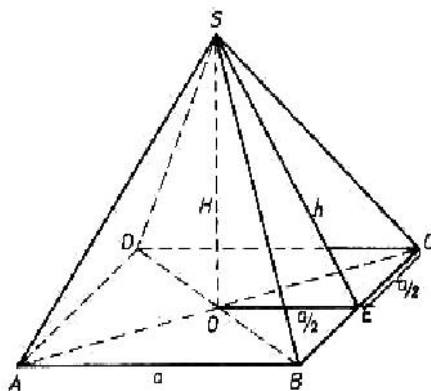
па затоа $a^2 = 2ah = 5a^2$, односно $h = 2a$. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ т.е. } H = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Според тоа,

$$V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}.$$

Конечно, $V = \frac{6^3 \sqrt{15}}{6} 36\sqrt{15} \text{ dm}^3$.



218. Даден е правоаголен триаголник ABC . Од темето A на правиот агол е повлечена тежишната линија AM , $M \in BC$. Висината AD , $D \in CM$ на триаголникот ACM ја полови спротивната страна.

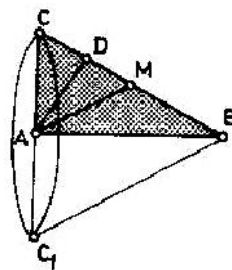
а) Определи ги аглите на триаголникот ABC .

б) Определи ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот ABC околу страната AB , ако $\overline{AD} = k\sqrt{3}$.

Решение. а) Во правоаголен триаголник должината на тежишната линија повлечена кон хипотенузата е еднаква на половина од должината на хипотенузата, па затоа $\overline{AM} = \overline{CM}$ (цртеж десно). Понатаму, од

$$\overline{DM} = \overline{CD}, \overline{AD} = \overline{AD} \text{ и } \angle ADM = \angle ADC = 90^\circ$$

Следува дека триаголниците ADM и ADC се складни, па затоа $\overline{AM} = \overline{AC}$. Според тоа, триаголникот AMC е рамнострани. Значи, $\angle ACB = 60^\circ$ и $\angle ABC = 30^\circ$.



б) Од $\overline{AD} = k\sqrt{3}$ и $\overline{AD} = \frac{\overline{AC}\sqrt{3}}{2}$ следува $\overline{AC} = 2k$. Понатаму, $\overline{BC} = 4k$ и $\overline{AB} = 2k\sqrt{3}$. Добиеното тело е конус со радиус AC , висина AB и изводница BC . Затоа,

$$P = (2k)^2\pi + 2k \cdot 4k\pi = 12k^2\pi \text{ и } V = \frac{(2k)^2 \cdot 2k\sqrt{3}\pi}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}k^3\pi.$$

219. Дадени се правите

$$p_1: y = x - 4 \text{ и } p_2: y - 2x + 2 = 0.$$

Пресметај ги:

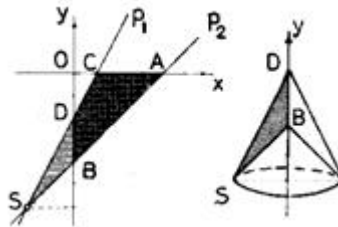
- плоштината на фигурата определена со правите p_1 и p_2 со координатните оски,
- волуменот на ротационото тело кое се добива со ротација на триаголникот ограничен со правите p_1 и p_2 и ординатната оска околу ординатната оска.

Решение. а) Имаме

$$P_{ABCD} = P_{OAB} - P_{OCD} = 7 \text{ cm}^2.$$

- Бараниот волумен е еднаков на разликата на волумените на два конуси со заедничка база и врвови D и B . Имаме,

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2^2\pi \cdot 4}{3} - \frac{2^2\pi \cdot 2}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$



220. Правата $y = ax + b$ минува низ точката $T(0, 6)$, со координатните оски формира триаголник со плоштина 24 и не минува низ третиот квадрант.

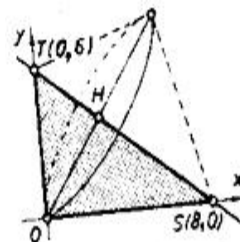
- Опреди ги a и b .
- Опреди го плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот околу неговата најдолга страна.

Решение. а) Според условот на задачата

$$\overline{OT} = 6, 24 = P = \frac{\overline{OT} \cdot \overline{OS}}{2} = 3\overline{OS},$$

т.е. $\overline{OS} = 8$. Значи, правата минува низ точките $T(0, 6)$ и $S(8, 0)$. Со замена во $y = ax + b$ добиваме $b = 6$ и $8a + b = 0$, т.е. $b = 6$ и $a = -\frac{3}{4}$.

- Со ротација околу најдолгата страна се фор-



мира тело составено од два конуси со заедничка основа. Радиусот на основата е еднаков на висината повлечена кон хипотенузата, а збирот на висините е еднаков на хипотенузата. Имаме

$$\overline{ST} = \sqrt{\overline{OS}^2 + \overline{OT}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ и}$$

$$\overline{OH} = \frac{2P}{ST} = 4,8.$$

Сега имаме

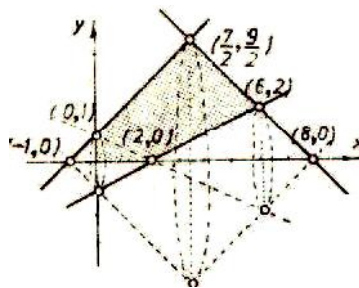
$$P = \overline{OH} \cdot \overline{OT}\pi + \overline{OH} \cdot \overline{OS}\pi = 67,2\pi \text{ и}$$

$$V = \frac{\pi \overline{OH}^2}{3} (\overline{SH} + \overline{HT}) = \frac{\pi \overline{OH}^2}{3} \overline{ST} = 76,8\pi.$$

221. Правите $x - y = -1$, $x + y = 8$ и $x - 2y = 2$ и двете координатни оски формираат петаголник. Определи го волуменот на ротационото тело кое се добива со ротација на тој петаголник околу апсисната оска.

Решение. Координатите на темињата на петаголникот се добиваат како пресеци на соодветните прави и тоа се точките

$$(-1, 0), (2, 0), (6, 2), \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) \text{ и } (0, 1).$$



Притоа третата права ја сече x -оската во точката $(8, 0)$, цртеж десно. Барани-

от волумен ќе го добиеме ако од волуменот на двојниот конус со радиус $\frac{9}{2}$ и висина 9 го одземеме волуменот на двојниот конус со радиус 2 и висина 6 и волуменот на конусот со радиус 1 и висина 1. Имаме

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot 9 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 6 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{629}{12}\pi.$$

222. Врвот на прав конус е во центарот на едната основа на цилиндарот. Втората основа на цилиндарот и основата на конусот лежат во иста рамнина и имаат ист центар. Волумените на конусот и цилиндарот се еднакви. Радиусот на основата на цилиндарот е r , а висината на цилиндарот е h .

а) Определи го радиусот на основата на конусот.

б) Определи го волуменот на ној дел од конусот кој се наоѓа во цилиндарот.

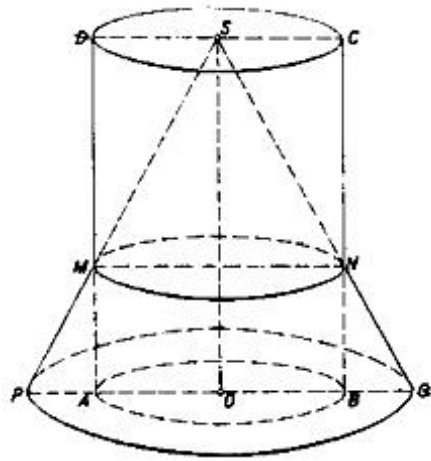
Решение. Нека R е радиусот на основата на конусот. Од $V_k = V_c$

следува $\frac{\pi R^2 h}{3} = \pi r^2 h$, т.е. $R = r\sqrt{3}$.

Од сличноста на триаголниците BQN и OQS следува

$$\frac{BN}{OS} = \frac{R-r}{R}, \text{ т.е. } BN = OS \frac{r\sqrt{3}-r}{r\sqrt{3}},$$

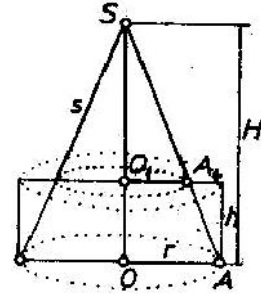
па затоа $h' = h \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$. Затоа волуменот на делот од цилиндарот кој е во конусот е $V = \frac{\pi r^2 h(3-\sqrt{3})}{3}$.



223. Даден е конус со радиус на основата 3 dm . Над истата основа и од истата страна конструиран е цилиндар чија плоштина е еднаква на плоштината на конусот, а волуменот е еднаков на волуменот на конусот. Определи ги плоштината и волуменот на телото кое е пресек на конусот и цилиндарот.

Решение. Од еднаквоста на волумените (цртеж десно) добиваме $\pi r^2 h = \frac{\pi r^2 H}{3}$, па затоа

$H = 3h$, а од еднаквоста на плоштините следува $2\pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + \pi rs$ и со замена $r = 30 \text{ cm}$ добиваме $s = 30 + 2h$. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот SOA



добиваме $s^2 = r^2 + H^2$. Со замена во последната равенка добиваме $(30 + 2h)^2 = 900 + 9h^2$, т.е. $5h^2 - 120h = 0$, од каде бидејќи $h > 0$ наоѓаме $h = 24 \text{ cm}$. Значи, $H = 72 \text{ cm}$ и $s = 78 \text{ cm}$. Уште треба да да ги пресметаме димензиите на конусот чија висина е $\overline{SO_1} = \frac{2}{3}H = 28 \text{ cm}$.

Триаголиците SOA и SO_1A_1 се слични, па затоа $\overline{O_1A_1} = \frac{2}{3}r$, $\overline{SA_1} = \frac{2}{3}s$.

Бараниот волумен е разлика на волумените на двата конуси

$V = \frac{\pi r^2 H}{3} - \frac{\pi \left(\frac{2r}{3}\right)^2 \left(\frac{2s}{3}\right)}{3} = 28000\pi \text{ cm}^3$. Плоштината е еднаква на збирот на

плоштините на два круга зголемен за разликата на омотачите на два конуси, т.е. $P = \pi r^2 + \pi \left(\frac{2r}{3}\right)^2 + \pi rs - \pi \frac{2r}{3} \cdot \frac{2s}{3} = 2600\pi \text{ cm}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V. (1991). Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I. (1988). Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd
3. Ilić, N. V. (1991). Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd
4. Kostić, Z. K. (1963). Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd
5. Mičić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
6. Stojanović, V. (1985). Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd
7. Stojanović, V. (1999). Vodič za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd
8. Stojanović, V.; Zolić, A. (1991). Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd
9. Tošić, R. (1990). Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd
10. Tošić, R.; Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
11. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbija u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
12. Zolić, A. (1990). Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd
13. Андрић, В. (2006). Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В. (1997). 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд
15. Аневска, К. (2014). Логички парадокси, Нумерус, Скопје
16. Аневска, К. (2014). Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје
17. Аневска, К. (2018). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
18. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје

19. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје
20. Аневска, К., Гоговска, В. (2015). Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје
21. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
22. Аневска, К., Малчески, С. (2013). Геометриско пресметување на зборови, Нумерус, Скопје
23. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И. (1961). Сборник задач по элементарной математике, Наука, Москва
24. Будуров, С.; Серафимов, Д. (1980). Математически олимпиади 2, Народна просвета, София
25. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
26. Главче, М. (2016). Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. (2016). Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
28. Главче, М. (2016). Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје
29. Главче, М. (2018). Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
30. Главче, М. (2018). Периметар и неравенство на триаголник, Нумерус, Скопје
31. Главче, М. (2018). Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје
32. Главче, М., Ангелкоска, В. (2013). Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, Скопје
33. Главче, М., Аневска, К. (2019). Решавање конструктивни задачи со помош на Питагорова теорема, Нумерус, Скопје
34. Главче, М., Малчески, С. (2019). Решавање на аритметички задачи со доведување до противречност, Нумерус, Скопје
35. Гоговска, В. Вкупен број можности, Нумерус, Скопје
36. Гоговска, В. Да започнеме од крајот, Нумерус, Скопје
37. Гоговска, В. Математички игри во кои се определува најголема и најмала вредност, Нумерус, Скопје
38. Гоговска, В. Неменливи големини, Нумерус, Скопје
39. Граврилов, Ј.; Давидов, Л. (1977). Делимост на числата, Народна просвета, София
40. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје

41. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје
42. Гроздев, С. Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје
43. Гроздев, С. Црвенката и Диофантовата равека од прв ред, Нумерус, Скопје
44. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Боиме броеви, Нумерус, Скопје
45. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Броиме со помош на графови, Нумерус, Скопје
46. Гроздев, С., Аневска, К. (2018). Патување на островот на витезите и лажговците, Нумерус, Скопје
47. Гроздев, С., Малчески, А. (2016). Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
48. Гроздев, С., Малчески, А. (2017). Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2016
49. Димовски, И. Број на делители, Нумерус, Скопје
50. Димовски, И. Проблемот на Швејк, Нумерус, Скопје
51. Дојчев, С. Дали е можно Дали постои?, Нумерус, Скопје
52. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
53. Дуденков, С.; Чакърян, К. (1999). Задачи по теория на числата, Регалия 6, София
54. Зубелевич, Г. И. (1967). Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва
55. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус, Скопје
56. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
57. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
58. Јанев, К.; Мишовски, К. (1985). Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје
59. Јошеска Јованчева, Б. Функционални равенки, Нумерус, Скопје
60. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
61. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, Скопје
62. Малчески, А. Адам Рис и лекомислениот геометар, Нумерус, Скопје
63. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
64. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решаваме задачи со множества, Нумерус, Скопје
65. Малчески, Р. (1994). Математички игри 1, Нумерус, Скопје
66. Малчески, Р. (1994). Математички игри 2, Нумерус, Скопје

67. Малчески, Р. (1995). Математички игри 3, Нумерус, Скопје
68. Малчески, Р. (1995). Математички игри 4, Нумерус, Скопје
69. Малчески, Р. (1995). Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје
70. Малчески, Р. (1996, 2015). Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје
71. Малчески, Р. (1997). Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
72. Малчески, Р. (1998). За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово
73. Малчески, Р. (2001). Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје
74. Малчески, Р. (2002). Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје
75. Малчески, Р. (2003). Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София
76. Малчески, Р. (2003). Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје
77. Малчески, Р. (2004). И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус, Скопје
78. Малчески, Р. (2004). Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје
79. Малчески, Р. (2005). Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје
80. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје
81. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје
82. Малчески, Р. (2012). Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје
83. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
84. Малчески, Р. (2012). Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје
85. Малчески, Р. (2013). Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје
86. Малчески, Р. (2014). Пресметување на зборови од производи и степени, Нумерус, Скопје
87. Малчески, Р. (2015). Покривање рамнострани триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје)
88. Малчески, Р. (2017). Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје
89. Малчески, Р. (2018). Решаваме конструктивни задачи, Нумерус, Скопје

90. Малчески, Р. (2019). Пресметување плоштина на паралелограм и триаголник, Нумерус, Скопје
91. Малчески, Р. (2020). Занимливости со броеви, armaganka.org.mk
92. Малчески, Р. (2020). Расекување и составување геометриски фигури, armaganka.org.mk
93. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, armaganka.org.mk
94. Малчески, Р., (1998). Еден елементарен доказ на Хероновата формула, Сигма, Скопје
95. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
96. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
97. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К. (1993). Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје
98. Малчески, Р., Малчески, А. (1995). За златниот пресек, Нумерус, Скопје
99. Малчески, Р., Малчески, А. (2017). Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
100. Малчески, Р., Малчески, А. (2018). Откривање на непознат број, магија или математика, Нумерус, Скопје
101. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје
102. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
103. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје
104. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). По патеките на шампионите за математика (второ издание), Армаганка, Скопје
105. Малчески, С. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
106. Малчески, С. Конструкција на аритметичка, геометриска и хармониска средина на две отсечки, Нумерус, Скопје
107. Малчески, С. Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
108. Малчески, С., Аневска, К. (2013). Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус, Скопје
109. Малчески, С., Аневска, К. (2018). Една теорема многу начини на докажување, Нумерус, Скопје

-
110. Малчески, С., Лукарески, М. Пополнуваме табели со броеви, Нумерус, Скопје
 111. Милошевиќ, Д. Еден проблем во врска со расекување на коцка, Нумерус, Скопје
 112. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – втор дел, Нумерус, Скопје
 113. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – прв дел, Нумерус, Скопје
 114. Милошевиќ, Д. Квадрат и точка, Нумерус, Скопје
 115. Милошевиќ, Д. Некои теореми за точки во рамнината на триаголникот, Нумерус, Скопје
 116. Милошевиќ, Д. Основни својства на магичните квадрати од ред четири, Нумерус, Скопје
 117. Михајлова, Е. Брзо множење, Нумерус, Скопје
 118. Михајлова, Е. Како едноставно да решаваме текстуални задачи – вештина за составување равенки, Нумерус, Скопје
 119. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
 120. Муминагиќ, А. За една олимписка задача, Нумерус, Скопје
 121. Муминагиќ, А. Плоштина на правилен петаголник; Нумерус, Скопје
 122. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
 123. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
 124. Петревски, Н. Максимум и минимум во задачи од геометрија, Нумерус, Скопје
 125. Петревски, Н. Ојлерова кружница, Нумерус, Скопје
 126. Петровиќ, В. Натпревар во повеќебој, Нумерус, Скопје
 127. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1993). Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София
 128. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1995). Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София
 129. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
 130. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
 131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. (1994). Занимлива математика, МММ, Скопје

132. Тфекчиев, И.; Лесов, Х. (1988). Задачи за извнкласна работа по математака в IV и V клас, Софија
133. Филипоски, С. Неколку избрани задачи од неравенства, Нумерус, Скопје
134. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч. (1998). Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София
135. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збирите на елементите на некои низи броеви, Нумерус, Скопје
136. Шарик, Милан Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
137. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје
138. Шаркова, И., Карацова, Р. Бројните ребуси помагаат, Нумерус, Скопје