Зоран Штерјов

КОНВЕКНОСТ НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=\frac{1}{x}$ НА ИНТЕРВАЛОТ $(0,\infty)$ И ЕДНА ПРИМЕНА

Дефиниција. За функцијата $f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) велиме дека е **конвексна** ако за секои $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ и $a_1,a_2,...,a_n\in(0,1)$ такви што $a_1+a_2+...+a_n=1$ важи неравенството

$$f(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)\le a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+...+a_nf(x_n)$$

Пример за таква функција е функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$. Таа е конвексна на интервалот $(0,\infty)$. Имено, нека $x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)$ и $a_1,a_2,...,a_n\in(0,1)$ се такви што $a_1+a_2+...+a_n=1$. Значи, треба да докажеме дека

$$\frac{1}{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}\le\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+...+\frac{a_n}{x_n}$$

За таа цел ќе го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц:
Ако $y_1,y_2,...,y_n\in\mathbb{R}$, $z_1,z_2,...,z_n\in\mathbb{R}$, *тогаш*

$$({y_1}^2+{y_2}^2+...+{y_n}^2)({z_1}^2+{z_2}^2+...+{z_n}^2)\ge(y_1z_1+y_2z_2+...+y_nz_n)^2.$$

Притоа знак за равенство важи ако и само ако $\frac{y_1}{z_1}=\frac{y_2}{z_2}=...=\frac{y_n}{z_n}$.

Да ставиме $y_i=\sqrt{\frac{a_i}{x_i}}$, $z_i=\sqrt{a_ix_i}$, $i=1,2,...,n$. Бидејќи $a_i>0$, $x_i>0$ следува дека $\frac{a_i}{x_i}>0$, $a_ix_i>0$, за $i=1,2,3,...,n$. Ги заменуваме овие вредности во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и добиваме

$$\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+...+\frac{a_n}{x_n}\right)(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)\ge(a_1+a_2+...+a_n)^2$$

$$\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+...+\frac{a_n}{x_n}\right)(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)\ge1$$

$$\frac{1}{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}\le\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+...+\frac{a_n}{x_n}.$$

што требаше да се докаже.

Ќе решиме неколку задачи во врска со неравенствата во кои се користи конвексноста на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$.

Задача 1. Докажи: ако $x,y,z>0,$ тогаш

$$\frac{x}{x+2y+z}+\frac{y}{x+y+2z}+\frac{z}{2x+y+z}\geq\frac{3}{4}.$$

Решение. Претходно докажаното својство на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ за $n=3$ добива облик

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}\geq\frac{1}{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3} \qquad (1)$$

за $x_1,x_2,x_3\in(0,\infty)$ и $a_1,a_2,a_3\in(0,1)$ такви што $a_1+a_2+a_3=1$. Без да изгубиме од општоста можеме да претпоставиме дека $x+y+z=1$ (Зошто?). Од овде ги добиваме равенствата $x+z=1-y, x+y=1-z$ **и** $y+z=1-x$. Заменувајќи ги во даденото неравенство, го добиваме неравенството

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+z}+\frac{z}{1+x}\geq\frac{3}{4}.$$

Него ќе го докажеме користејќи го (1). Имаме:

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+z}+\frac{z}{1+x}\geq\frac{1}{x(1+y)+y(1+z)+z(1+x)}=$$

$$=\frac{1}{(x+y+z)+xy+yz+zx}=\frac{1}{1+xy+yz+zx}.$$

Бидејќи неравенството

$$xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

е секогаш е исполнето, конечно добиваме дека

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+z}+\frac{z}{1+x}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

Задача 2. Ако a,b,c,d **>0**, тогаш

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2.$$

Докажи!

Решение. Претходно докажаното својство на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ за $n=4$ го добива обликот

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}+\frac{a_4}{x_4} \geq \frac{1}{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4} \qquad (2)$$

за $x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,\infty)$ и $a_1,a_2,a_3,a_4\in(0,1)$ такви што $a_1+a_2+a_3+a_4=1$. Без да изгубиме од општоста можеме да претпоставиме дека $a+b+c+d=1$ (Зошто?). Користејќи го неравенството (2) добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq \frac{1}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}$$

Значи треба да докажеме дека

$$\frac{1}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \geq 2.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2\left(ab+2ac+bc+cd+2bd+da\right)\leq 1$$

Заменувајќи $a+b+c+d=1$ добиваме

$$2\left(ab+2ac+bc+cd+2bd+da\right)\leq \left(a+b+c+d\right)^2$$

а со средување

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2db\geq 0,$$
$$(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bd+d^2)\geq 0$$
$$(a-c)^2+(b-d)^2\geq 0.$$

Задачи за самостојна работа:

1. Ако ***x,y,z*** **> 0**, тогаш $\frac{x}{x+2y+2z}+\frac{y}{2x+y+2z}+\frac{z}{2x+2y+z}\geq\frac{3}{5}$. Докажи!

2. Ако x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 **>0**, тогаш

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_1}+\frac{x_5}{x_1+x_2} \geq \frac{5}{2}.$$ Докажи!

Литература

[1] Andrei, I. Cucurezeanu, C.Caragea,G. H. Bordea – Algebra -G.H
[2] Д. Димовски, К. Тренчевски, Р. Малчески, Б. Јосифовски - Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ