Сојузен натпревар 1964

III година

1. Определи го множеството отчки (a,b) во Декартовиот правоаголен координатен систем Oab така што сите решенија на равенката

$$x^4-2(a-b)x^2+2(4-ab)=0$$

се реални.

Решение. Од дадената равенка добиваме

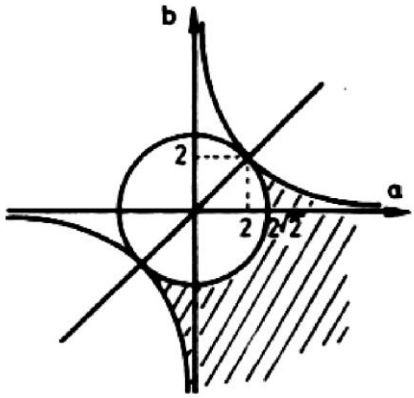
$$x^2=a-b\pm\sqrt{a^2+b^2-8}\,.$$

За да сите решенија на дадената равенка се реални поребно и доволно е да важи:

1) $a^2+b^2\geq 8$ и

2) $a-b\pm\sqrt{a^2+b^2-8}\geq 0$.

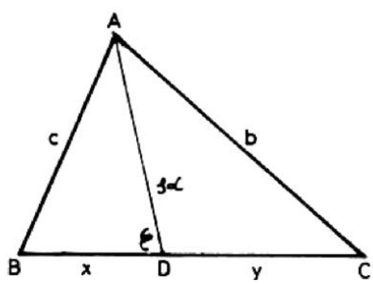
Условот 1) го задоволуваат сите точки на рамнината Oab кои припаѓаат на кружницата $a^2+b^2=8$ или се надвор од неа, а условот 2) го задоволуваат сите точки за кои $a\geq b$ и $ab\leq 4$, т.е. точките кои се под правата $b=a$ и се меѓу двете гранки на хиперболата $ab=4$. Бараното множество е прикажано на цртежот десно.



2. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголник со плоштина p и $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ се должините на симетралите на внатрешните агли на тој триаголник, докажи дека $rs_\alpha s_\beta s_\gamma\leq p^2$ и знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамностран.

Решение. Прво ќе докажеме дека, ако a,b,c се должини на страни на триаголник и $s=\frac{a+b+c}{2}$ е неговиот полупериметар, тогаш важи равенството

$$s_\alpha=\frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}\,. \qquad (1)$$



За таа цел со A,B,C да ги означиме темињата на триаголникот, со D пресекот на симетралата на аголот во темето A со страната BC, со x и y отсечоците кои симетралата ги прави на страната BC и $\varphi=\measuredangle ADB$. Од релациите $x+y=a$ и

$x:y=c:b$ добиваме $x=\frac{ac}{b+c}$ и $y=\frac{ab}{b+c}$. Од друга страна, применувајќи ја косинусната теорема за триаголниците ADC и ABD, добиваме

$$c^2=x^2+s_\alpha^2-2xs_\alpha\cos\varphi,$$
$$b^2=y^2+s_\alpha^2+2ys_\alpha\cos\varphi.$$

Ако првото равенство го помножиме со y, а второто со x и добиените равенства ги собереме, добиваме

$$c^2y+b^2x=axy+as_\alpha^2 \ .$$

Во последното равенство ги заменуваме вредностите за x и y и добиваме равенство кое е еквивалентно со равенството (1).

Од равенството (1), бидејќи $bc\le(\frac{b+c}{2})^2$ следува

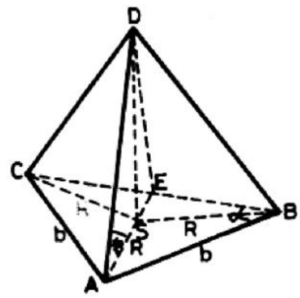
$$s_\alpha\le\sqrt{s(s-a)} \ .$$

Аналогно се докажува дека $s_\beta\le\sqrt{s(s-b)}$ и $s_\gamma\le\sqrt{s(s-c)}$. Затоа

$$rs_\alpha s_\beta s_\gamma\le rs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=p^2 \ .$$

3. Рамнокрак триаголник со агол α при основата е основа на пирамида таква што сите нејзини бочни ѕидови со основата формираат еднакви агли $\varphi=90^\circ-\alpha$. Рамнината која минува низ висината на пирамидата и врвот на рамнокракиот триаголник на основата ја сече пирамидата во фигура чија плоштина е p. Определи го волуменот на пирамидата.

Решение. Со A,B,C да ги означиме темињата на основата на пирамидата, врвот на пирамидата со D, подножјето на висината на бочниот ѕид BCD со E (цртеж десно). Понатаму, нека кракот на основата е b, радиусот на нејзината опишана кружница е R и S е подножјето на висината повлечена од врвот на пирамидата. Триаголниците DAS и DBS имаат соодветно прави агли $\measuredangle ASD$ и $\measuredangle BSD$, заедничка страна SD и $\measuredangle DAS=\measuredangle DBS=\varphi$, па затоа се складни. Според тоа, $AS=BS$ и слично $AS=CS$, што значи дека S е центар на опишаната кружница на основата и $AS=BS=R=\frac{b}{2\sin\alpha}$.



Од правоаголниот триаголник ABE добиваме $AE=b\sin\alpha$, а од правоаголниот триаголник DAS следува

$$SD=R\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{2\sin\alpha}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} \ .$$

Затоа

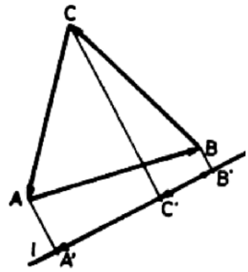
$$p=\frac{1}{2}AE\cdot SD=\frac{1}{2}b\sin\alpha\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{1}{4}b^2\operatorname{ctg}\alpha\text{, т.е. } b^2=4p\operatorname{tg}\alpha\text{ .}$$

За волуменот на пирамидата добиваме

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin(180^\circ-2\alpha)\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{1}{6}b^3\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}(p\operatorname{tg}\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

4. Рамностран триаголник ABC ортогонално се проектира на произволна оска. Определи го аголот на еден од векторите $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ спрема таа оска, така што збирот на третите степени на проекциите на тие вектори е еднаков на нула.

Решение. Јасно е дека збирот на третите степени (на алгебарските вредности) на проекциите на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ на оската l ќе биде еднаков на нула само во случај кога една од проекциите е еднаква на нула, т.е.кога една од страните на триаголникот ABC е нормална на оската l .



IV година

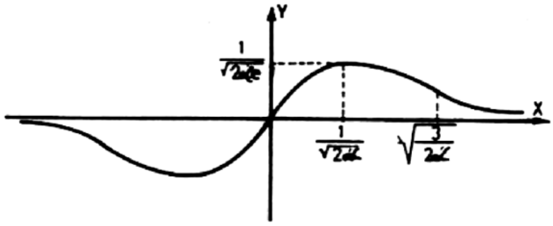
1. Дадена е функцијата $y=xe^{-ax^2}$, каде a е позитивен параметар.

а) Испитај го текот на графикот на оваа функција за произволно a и скицирај го графикот за $a=2$.

б) Екстремните точки на дадената функција ја менуваат со a својата положба во xOy рамнината. Определи ја кривата $y=f(x)$ на која и припаѓаат овие екстремни точки.

в) Определи ја плоштината $P(b)$ на делот од рамнината ограничен со лакот на делот од графикот на дадената функција, $x-$оската и правата $x=b\ (b>0)$. Колкава е граничната вредност на плоштината $P(b)$ кога $b\to+\infty$?

Решение. а) Дадената функција е дефинирана за секој $x\in\mathbb{R}$ и е непарна. Нулата и знакот на функцијата се совпаѓаат со нулата и знакот на аргументот. Од $y'=(1-2ax^2)e^{-ax^2}$ следува дека функцијата има стационарни точки во $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2a}}$ и $x_2=\frac{1}{\sqrt{2a}}$. Притоа функцијата има минимум $y_1=y(x_1)=-\frac{1}{\sqrt{2ae}}$, односно максимум $y_2=y(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2ae}}$. Интервалите на монотоност, како и конвексноста се прикажани на дадениот график. Понатаму, од $y''=2ax(2ax^2-3)e^{-ax^2}$, заклучуваме дека функцијата има три превосјни точки и тоа $(-\sqrt{\frac{3}{2a}},-\sqrt{\frac{3}{2ae^3}})$, $(\sqrt{\frac{3}{2a}},\sqrt{\frac{3}{2ae^3}})$ и $(0,0)$.



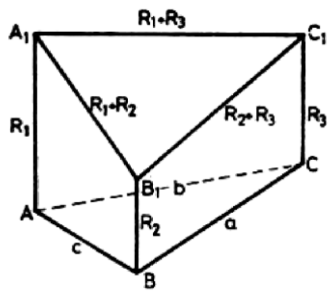
б) Од $y(x_1) = -\frac{1}{\sqrt{2ae}}$ и $y(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2ae}}$ следува дека сите екстремни точки припаѓаат на правата $y = \frac{x}{\sqrt{e}}$.

в) Имаме:

$$P(b) = \int_0^b xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}(1 - e^{-ab^2}), \quad \lim_{b\to\infty} P(b) = \frac{1}{2a}.$$

2. Три сфери допираат една рамнина во точките A, B, C при што $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Определи ги радиусите на овие сфери, ако се знае дека тие меѓусебно се допираат.

Решение. Центрите на дадените сфери да ги означиме со A_1, B_1, C_1, а радиусите со R_1, R_2, R_3 (цртеж десно). Во правоаголниот трапез ABB_1A_1 важи $AB = c$, $BB_1 = R_2$, $B_1A_1 = R_1 + R_2$, $A_1A = R_1$, па затоа



$$c^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2.$$

Слично се добива $a^2 = 4R_2R_3$ и $b^2 = 4R_3R_1$. Од последните три равенства се добиваат бараните вредности на радиусите на сферите:

$$R_1 = \frac{bc}{2a}, \; R_2 = \frac{ca}{2b}, \; R_3 = \frac{ab}{2c}.$$

3. Дали може броевите $2, \sqrt{6}, 4\frac{1}{2}$ да бидат членови на една иста аритметичка или една иста геоемтриска прогресија?

Решение. За да броевите $2, \sqrt{6}, 4\frac{1}{2}$ се членови на аритметичка прогресија потребно и доволно е да постојат реален број d и природни броеви k и l такви што

$$\sqrt{6} - 2 = kd, \; \frac{9}{2} - \sqrt{6} = ld.$$

Но, тоа не е можно, бидејќи тогаш треба да важи

$$\frac{k}{l} = \frac{\sqrt{6}-2}{\frac{9}{2}-\sqrt{6}} = \frac{2(11\sqrt{6}-30)}{57},$$

што не е можно, бидејќи левата страна е рационален, а десната страна е ирационален број.

Дадените броеви се членови на геометриска прогресија со коефициент q, кој е така избран што

$$\frac{\sqrt{6}}{2}=q^k,\ \frac{9}{2\sqrt{6}}=(\frac{\sqrt{6}}{2})^3=q^{3k}$$

за некој природен број k.

4. Докажи дека неравенството

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$$

каде a,b,c се позитивни броеви е потребен и доволен услов за да a,b,c се должини на страни на триаголник.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a^4+b^4+c^4-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)<0,$$

односно со

$$-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)<0.$$

Но, $a,b,c>0$, па затоа последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0,$$

од каде следува тврдењето на задачата.

5. Дадени се две паралелни прави a_1 и a_2 и m точки на a_1 и n точки на a_2. Секоја од m-те точки на правата a_1 е поврзана со секоја од n-те точки на правата a_2. Ако во ниту една точка меѓу правите a_1 и a_2 не се сечат повеќе од две од добиените отсечки определи го бројот на овие пресечни точки.

Решение. Сите четириелементи множества кои содржат по две од дадените точки од секоја од дадените прави определуваат точно една од опишаните пресечни точки и обратно. Затоа бараниот број е еднаков на $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$.