Још једна теорема у вези са правоуглим троуглом

др Шефкет Арсланагић, Сарајево, БИХ
Алија Миминагић, Nykøbing F, Данска

Већ при помисли на правоугли троугао одмах се сетимо и Питагорине[1] теореме.

У правоуглом троуглу ABC, квадрат највеће странице (хипотенузе) с једнак је збиру квадрата других двеју страница (катета) a и b, тј. $c^2 = a^2 + b^2$.

Име је добила по Питагори јер се сматра да ју је Питагора први доказао. Његов доказ је чисто геометријски. Иначе за ову теорему су пре Питагоре знали у Месопотамији и Египту (египатски троугао $a = 3, b = 4, c = 5$). Рецимо још и то да данас постоји више од сто доказа Питагорине теореме. (О овоме погледати [2], страна 52).

Одмах након доказивања ове теореме, формулише се и доказује и обрат (конверзија) ове теореме. Обрнута Питагорина теорема гласи:

Ако је у неком троуглу квадрат највеће странице с једнак збиру квадрата других двеју страница a и b, тј. $c^2 = a^2 + b^2$, тада је тај троугао правоугли.

Обе ове теореме се исказују у виду једне теореме која гласи:

Троугао ABC је правоугли ако и само ако за његове странице важи $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказује се такође да важи и следећа теорема:

Троугао ABC је правоугли ако и само ако важи једнакост $a + b + c = 4R + 2r$

(где су a, b, c дужине страница троугла, а R и r полупречници описане и уписане кружнице тог троугла). О доказу ове теореме видети [1], страна 153.

Сада ћемо се бавити још једном теоремом за правоугли троугао која гласи:

Троугао ABC је правоугли ако и само ако је тачна једнакост

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

где су α, β и γ унутрашњи углови тог троугла.

Теорема. Ако је троугао ABC правоугли, онда важи једнакост

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

Доказ. Нека је троугао ABC правоугли и нека је нпр. $\gamma = 90°$, тј. $\sin\gamma = \sin 90° = 1$. Тада је $\alpha + \beta = 90°$, па је $\beta = 90° - \alpha$ и $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. Сада имамо да је $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1 = 1 + 1 = 2$. □

[1] Питагора, старогрчки математичар из 6. века пре нове ере.

Овај доказ је веома једноставан и кратак. Но, то није случај са доказом обрата ове теореме што ћемо у наставку и показати. Даћемо неколико интересантних доказа обрата претходне теореме.

Теорема. Ако важи једнакост $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$, онда је троугао ABC правоугли.

Први доказ. Доказаћемо да важи једнакост

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2. \tag{1}$$

Због $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$ имамо:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + \frac{1-\cos 2\gamma}{2} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2(\alpha+\beta)\right) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) - 1\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \cos(\alpha+\beta)\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right) \\
&= 2 - \cos(180° - \gamma)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta \\
&= 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,
\end{aligned}$$

а одавде следи (1). Стављајући у (1) да је $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ добијамо:

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0,$$

а ова једнакост је тачна ако је један од углова α, β или γ прав, тј. ако је троугао ABC правоугли. $\square$

Други доказ. Због $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, следи да је $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$, па је

$$\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta).$$

Дакле,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta) = 2. \tag{2}$$

Како је

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta = 2, \tag{3}$$

из (2) и (3) добијамо:

$$\begin{aligned}
& \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta \\
\Leftrightarrow\quad & (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = \sin^2\beta + \cos^2\beta \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\beta + \cos^2\beta \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2\beta(1-\cos^2\alpha) + \cos^2\beta(1-\sin^2\alpha) - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos^2(\alpha+\beta) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \alpha+\beta = 90^\circ,
\end{aligned}$$

па је $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 90^\circ$, те је троугао ABC правоугли. $\square$

Трећи доказ. Због $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$ имамо да је

$$\begin{aligned}
& \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos^2\alpha + \cos^2\beta - (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1-\sin^2\beta)\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta + (1-\sin^2\alpha)\cos^2\beta = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos^2\beta\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 0,
\end{aligned}$$

па је одавде

$$\cos\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \cos\beta = 0 \quad \text{или} \quad \cos(\alpha+\beta) = 0,$$

тј.

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{или} \quad \beta = 90^\circ \quad \text{или} \quad \alpha+\beta = 90^\circ.$$

Дакле, троугао ABC је правоугли. $\square$

У ова три доказа користили смо основну тригонометријску идентичност, адиционе формуле и формуле за претварање збира (разлике) тригонометријских функција у производ. У наредна два доказа ћемо користити синусну и косинусну теорему.

Четврти доказ. Претпоставимо да је $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. Применом синусне теореме на троугао ABC имамо:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R} = k,$$

где је R полупречник описане кружнице троугла. Одавде је

$$\sin\alpha = ak, \quad \sin\beta = bk, \quad \sin\gamma = ck,$$

па је

$$\begin{aligned} & \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2k^2 + b^2k^2 + c^2k^2 = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & (a^2+b^2+c^2)k^2 = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & k^2 = \frac{2}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

Тако је сада

$$\sin^2\alpha = a^2k^2 = \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

па из $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ следи

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}. \tag{4}$$

Из косинусне теореме примењене на троугао ABC имамо

$$b^2+c^2-a^2 = 2bc\cos\alpha,$$

па је из (4)

$$\cos^2\alpha = \frac{2bc\cos\alpha}{a^2+b^2+c^2}.$$

Аналогно се добија да је

$$\cos^2\beta = \frac{2ac\cos\beta}{a^2+b^2+c^2} \quad \text{и} \quad \cos^2\gamma = \frac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2+c^2}.$$

Одавде следи да су $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ ненегативни јер је $\cos^2\alpha \geqslant 0, \cos^2\beta \geqslant 0$ и $\cos^2\gamma \geqslant 0$, и бар један од бројева $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ је позитиван. Ако претпоставимо да је $\cos\alpha > 0$, онда је

$$\cos\alpha = \frac{2bc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Тада из косинусне теореме $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$, тј. $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, имамо да је:

$$
\begin{aligned}
& \frac{2bc}{a^2+b^2+c^2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
\Leftrightarrow\quad & (b^2+c^2+a^2)(b^2+c^2-a^2) = 4b^2c^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (b^2+c^2)^2 - a^4 = 4b^2c^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (b^2-c^2)^2 - a^4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (b^2-c^2-a^2)(b^2-c^2+a^2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (b^2-b^2-2ac\cos\alpha)(b^2+a^2-a^2-b^2+2ab\cos\gamma) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -4a^2bc\cos\beta\cos\gamma = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\beta = 0 \vee \cos\gamma = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \beta = 90^\circ \vee \gamma = 90^\circ,
\end{aligned}
$$

што значи да је троугао ABC правоугли.

Аналогно се доказује да је троугао ABC правоугли, ако је $\cos\beta > 0$ или $\cos\gamma > 0$. □

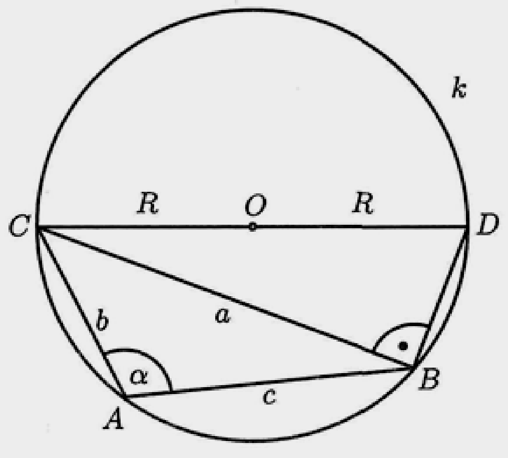
Пети доказ. Применом синусне теореме на троугао ABC добијамо

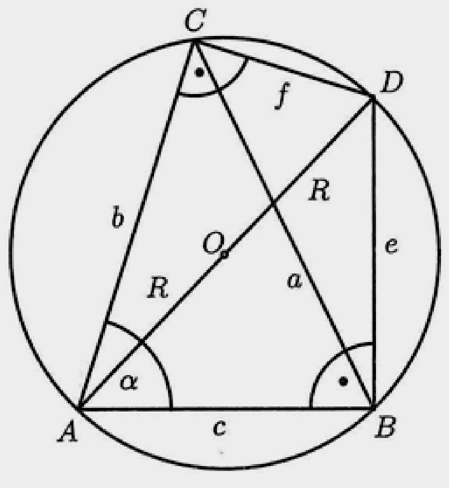
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1}{4R^2}(a^2+b^2+c^2). \tag{5}$$

Употребићемо индиректан доказ, тј. претпоставићемо да троугао ABC није правоугли. Разликујемо два случаја.

1° Један од углова у троуглу ABC је туп. Нека је на пример $\alpha > 90^\circ$ (видети слику). Како је $BC < CD$ (јер је CD, због $\sphericalangle CDB = 90^\circ$, хипотенуза правоуглог троугла CBD), имамо да је $a < 2R$ па је и $a^2 < 4R^2$, односно на основу косинусне теореме:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha < 4R^2, \;\text{ тј. } b^2 + c^2 < 4R^2 \;\text{ (јер је } \cos\alpha < 0).$$





Сабирајући сада неједнакости $a^2 < 4R^2$ и $b^2 + c^2 < 4R^2$, добијамо:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2, \text{ тј. } \frac{1}{4R^2}(a^2 + b^2 + c^2) < 2,$$

односно због (5):

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma < 2,$$

што је супротно претпоставци теореме. Дакле, троугао ABC није тупоугли.

2° Нека је троугао ABC оштроугли, тј. $\alpha < 90°$ (слика 2). Нека је тачка D дијаметрално супротна тачка тачки A датог троугла. Тада је $AD = 2R$. Уведимо следеће ознаке: $BD = e$ и $CD = f$. Троуглови ABD и ACD су правоугли, па применом Питагорине теореме на њих добијамо: $b^2 + f^2 = 4R^2$ и $e^2 + c^2 = 4R^2$ и након сабирања ових једнакости

$$b^2 + c^2 + e^2 + f^2 = 8R^2. \tag{6}$$

Даље је угао $\sphericalangle BCD$ туп (јер је α оштар угао, а четвороугао $ABCD$ је тетивни) па је на основу косинусне теореме

$$e^2 + f^2 - 2ef\cos\sphericalangle BDC = a^2$$

и чињенице да је $\cos\sphericalangle BDC = 90°$:

$$e^2 + f^2 < a^2.$$

Сада из (6) и горње неједнакости следи

$$8R^2 = b^2 + c^2 + e^2 + f^2 < b^2 + c^2 + a^2, \text{ тј. } \frac{1}{4R^2}(a^2 + b^2 + c^2) > 2,$$

односно због (5):

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2,$$

што је супротно претпоставци теореме. Дакле, троугао ABC није оштроугли. Из 1° и 2° следи да је троугао ABC правоугли. □

Напомена 1. Обрат дате теореме можемо доказати и користећи формуле за површину троугла: $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$, односно $\sin\alpha = \frac{2P}{bc}$, $\sin\beta = \frac{2P}{ac}$ и $\sin\gamma = \frac{2P}{ab}$, као и Херонов образац за површину троугла $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је $s = (a+b+c)/2$, који се може записати и у облику

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Напомена 2. Докажимо да за оштроугли троугао ABC важи неједнакост:

$$2 < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant \frac{9}{4}. \tag{7}$$

Доказ се може спровести употребом неједнакости (1) и $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$. Последња неједнакост се лако доказује помоћу неједнакости $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$ (дванаест доказа ове неједнакости се налазе у [3], стр. 162-173). Наиме, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине три позитивна броја имамо да је

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \geqslant \sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 \quad [\text{јер је } \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}.$$

Сада имамо

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{9}{4},$$

као и

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) > 2 \Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geqslant 0,$$

што је очигледно тачно јер су α, β, γ оштри углови. Једнакост у (7) важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

НАПОМЕНА 3. За тупоугли троугао ABC важи неједнакост

$$0 < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma < 2. \tag{8}$$

Доказ. Сигурно је $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 0$. Пошто је један од углова α, β, γ туп а остала два оштра, то је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 0$, па из (1) имамо да је

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) < 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.
[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[4] J. Carstensen, A. Muminagić, P. Mladinić, *Pravokutni trokut*, HMD Zagreb, 2001.
[5] S. Mintaković, M. Franić, *Trigonometrija*, Element, Zagreb, 1999.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2011/12 година