Ристо Малчески
Алекса Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С1
(збирка задачи за I година, прв дел)

Скопје, 2019

Рецензенти
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент С1 : (збирка задачи за I година, прв дел) Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2019. - 321 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Даниел Велинов, Самоил Малчески, Сања Костадинова. - Библиографија: стр. 317-321

ISBN 978-608-4904-00-7

1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Велинов, Даниел [автор] 4. Малчески, Самоил [автор] 5. Костадинова, Сања [автор]
а) Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111542794

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С1 е наменета за талентираните ученици по математика од прва година од средното образование. Книгата, всушност, е прв дел од збирка и истата содржи 815 решени задачи. Во овој дел во пет одделни целини се обработени алгебарските изрази, задачи од теоријата на броеви, линеарните равенки и неравенки и нивната примена, како и елементарното докажување на неравенства, нивното докажување со помош на математичка индукција и со користење на неравенствата меѓу средините.

Како и во книгите *Математички талент* наменети за учениците од основното образование и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од теоријата на броеви се распределени во четири дела, и тоа: Воведни задачи, Деливост во множеството цели броеви, Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател, Прости и сложени броеви, Конгруенции, мала теорема на Ферма и Диофантови равенки.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Зоран Мисајлески и д-р Томи Димовски, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје, октомври, 2019 г.

Авторите

I АЛГЕБРА

1. ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Дадени се 17 броја. Ако збирот на секои пет од нив е позитивен, тогаш и збирот на сите броеви е позитивен. Докажи!

Решение. Најмногу 4 од броевите може да бидат негативни, бидејќи ако би имале 5 негативни броја, тогаш и нивниот збир ќе биде негативен, што противречи на условот на задачата.

Збирот на овие 4 броја мора по апсолутна вредност да е помал од кој било од преостанатите 13 броја. Оттука следува дека збирот на овие 4 броеви и преостанатите 13 позитивни броеви е позитивен.

2. Колку природни броеви има меѓу броевите 1984^2 и 1985^2?

Решение. Меѓу природните броеви a и b ($b>a$) има вкупно $b-a-1$ природни броеви. Значи, меѓу броевите 1984^2 и 1985^2 има вкупно

$$1985^2-1984^2-1=(1984+1985)(1985-1984)-1=3968$$

броеви.

3. Каде е направена грешка?

$$100-205=\tfrac{441}{4}-\tfrac{861}{4}, \qquad (1)$$

$$100-205+\tfrac{1681}{16}=\tfrac{441}{4}-\tfrac{861}{4}+\tfrac{1681}{16}, \qquad (2)$$

$$(10-\tfrac{41}{4})^2=(\tfrac{21}{2}-\tfrac{41}{4})^2, \qquad (3)$$

$$10-\tfrac{41}{4}=\tfrac{21}{2}-\tfrac{41}{4}, \qquad (4)$$

$$10=\tfrac{21}{2} \qquad (5)$$

$$20=21.$$

Решение. Почетното равенство е очигледно точно. Во првиот ред од обете страни на равенството е додаден еден ист број, па равенството не се нарушува, т.е $(1)\Rightarrow(2)$. Во третиот ред изразите се напишани како биноми на квадрат, па очигледно $(2)\Rightarrow(3)$. Во третиот ред ја имаме еднаквоста $(-\tfrac{1}{4})^2=(\tfrac{1}{4})^2$, која очигледно е точна, додека во четвртиот ред, при „ослободувањето“ од квадратите е направена грешка, т.е. $(3)\not\Rightarrow(4)$.

4. Димитар на некој начин цифрите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ги распоредил на кружница. Секои три последователни цифри, во насока на стрелките на часовникот, формираат трицифрен број. Сите такви броеви тој ги собрал. Кој збир го добил Димитар?

Решение. Секоја запишана цифра ќе се појави во три различни броја, еднаш како цифра на стотки, еднаш како цифра на десетки и еднаш како цифра на единици. Според тоа, цифрата n во вкупниот збир ќе учествува со

$$(1+10+100)n=111n.$$

Бидејќи вкупно има 9 такви броја, добиваме дека вкупниот збир ќе биде

$$111(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=111\cdot\frac{9\cdot10}{2}=111\cdot45=4995\,.$$

5. За броевите x,y,z и k се исполнети равенствата $\frac{7}{x+y}=\frac{k}{x+z}=\frac{11}{z-y}$. Да се определи вредноста на k.

Решение. Од равенствата $\frac{7}{x+y}=\frac{k}{x+z}$, $\frac{7}{x+y}=\frac{11}{z-y}$, $\frac{k}{x+z}=\frac{11}{z-y}$, добиваме

$$7(x+z)=k(x+y)$$
$$7(z-y)=11(x+y)$$
$$k(z-y)=11(x+z)$$

Ако од првото равенство го одземеме второто равенство добиваме

$$7(x+y)=(k-11)(x+y)\,.$$

Бидејќи $x+y\neq0$, добиваме $k-11=7$, односно $k=18$.

6. Од пропорциите $a:b=2:3$ и $b:c=9:11$, образувај ја пропорцијата $a:b:c$.

Решение. *Прв начин.* Ако десната страна на првата пропорција ја помножиме со 3, добиваме $a:b=6:9$, па имајќи ја предвид втората пропорција $b:c=9:11$, добиваме

$$a:b:c=6:9:11.$$

Втор начин. Од $a:b=2:3$ следува $a=2k$, $b=3k$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, а од втората пропорција $b:c=9:11$, т.е. $c=\frac{11k}{3}$. Тогаш

$$a:b:c=2k:3k:\frac{11k}{3}=6:9:11\,.$$

7. Докажи дека за секој природен број k следниве тврдења се еквивалентни:

а) постојат ненегативни цели броеви a и b такви што $k=a^2+b^2+ab$.

б) постојат ненегативни цели броеви c и d такви што $k=c^2+d^2-cd$.

Решение. Ќе ги употребиме следните два идентитети, чија точност не е тешко да се провери:

$$n^2+m^2+mn=(n+m)^2+m^2-(n+m)m \qquad (1)$$

$$n^2+m^2-mn=(n+m)^2+m^2+(n-m)m \qquad (2)$$

Нека k може да се претстави во облик a^2+b^2+ab. Воведуваме ознаки $a=n,b=m$ за левата страна на (1) и тогаш за $c=m+n$, $d=m$ за десната страна на (1). Според тоа,

$$k=a^2+b^2+ab=n^2+m^2+mn=(n+m)^2+m^2-(m+n)m=c^2+d^2-cd\,.$$

Значи, од точноста на а) се добива точноста на б).

Обратно, нека k може да се претстави во облик $k=c^2+d^2-cd$, каде c и d се ненегативни цели броеви. Без ограничување на општоста, од причини на симетрија, можеме да претпоставиме дека $c\geq d$. Бираме $c=n$, $d=m$ за левата страна на (2), и $a=n-m$, $b=m$ за десната страна на (2). Тогаш

$$k = c^2 + d^2 - cd = n^2 + m^2 - mn = (n-m)^2 + m^2 + (n-m)m = a^2 + b^2 + ab\,.$$

Значи, од точноста на б) се добива точноста на а).

8. За реалните броеви a, b и c се исполнети неравенствата

$$|a| \geq |b+c|\,,\ |b| \geq |c+a| \text{ и } |c| \geq |a+b|\,.$$

Докажи, дека $a+b+c=0$.

Решение. Ако дадените равенства ги квадрираме добиваме

$$a^2 \geq (b+c)^2\,,\ b^2 \geq (a+c)^2 \text{ и } c^2 \geq (a+b)^2\,.$$

Ако добиените неравенства ги собереме добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\,,$$

кое е еквивалентно со

$$0 \geq (a+b+c)^2\,. \qquad (1)$$

Но, (1) е точно ако и само ако $a+b+c=0$, што требаше и да се докаже.

9. За целите броеви a, b, c и d се исполнети равенствата

$$|ac+bd| = |ad+bc| = 1\,.$$

Докажи, дека $|a| = |b| = 1$ или $|c| = |d| = 1$.

Решение. Можни два случаи.

Случај 1. $ac+bd$ и $ad+bc$ имаат исти знаци, т.е. двата се позитивни или двата се негативни. Тогаш $ac+bd = ad+bc$, па затоа

$$0 = ac+bd-ad-bc = a(c-d) - b(c-d) = (a-b)(c-d)\,.$$

Според тоа $a-b=0$ или $c-d=0$, т.е. $a=b$ или $c=d$. Но, тогаш $|a|=|b|$ или $|c|=|d|$.

Случај 2. $ac+bd$ и $ad+bc$ имаат спротивни знаци, т.е. едниот е позитивен а другиот негативен. Во тој случај $ac+bd = -(ad+bc)$, па затоа

$$0 = ac+bd+ad+bc = (a+b)(c+d)\,.$$

Од последното равенство добиваме $a+b=0$ или $c+d=0$, т.е. $a=-b$ или $c=-d$ Сега, $|a|=|b|$ или $|c|=|d|$.

Ако $|a|=|b|$, тогаш од $1=|ac+bd|$ следува дека $|a|=|b|$ е делител на $|ac+bd|$ добиваме $|a|=|b|=1$.

Ако $|c|=|d|$, тогаш од $1=|ac+bd|$ следува дека $|c|=|d|$ се делители на $|ac+bd|$ добиваме дека $|c|=|d|=1$.

10. Дали постојат по парови различни природни броеви x, y, u, v такви што

$$(x+u)(y+v) = (y+u)(x+v)\,? \qquad (1)$$

Решение. Нека x, y, u, v се попарно различни броеви, т.е. $x, y, u, v \in \mathbb{N}$ и $x \neq y \neq$. $u \neq v \neq x \neq u$. Равенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$xy + xv + uy + uv = xy + vy + xu + uv$$

$$y(u-v) - x(u-v) = 0$$

$$(y-x)(y-v)=0\,.$$

Значи, $y-x=0$ или $u-v=0$, т.е. $x=y$ или $u=v$, што противречи на претпоставката дека броевите се по парови различни. Според тоа, не постојат по парови различни природни броеви x,y,u,v за кои е исполнето равенството (1).

11. Докажи, дека ако $ac-a-c=b^2-2b$, $bd-b-d=c^2-2c$ и $b\neq 1$, $c\neq 1$, тогаш $ad+b+c=bc+a+d$.

Решение. Ако додадеме 1 на двете страни од првото равенство, добиваме $ac-a-c+1=b^2-2b+1$, од каде со разложување се добива $(a-1)(c-1)=(b-1)^2$. Слично, со додавање 1 на двете страни и од второто равенство, а потоа и со разложување се добива $(b-1)(d-1)=(c-1)^2$. Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=(b-1)^2(c-1)^2,$$

од каде

$$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)\,,$$

па со множење се добива $ad-a-d+1=bc-b-c+1$, од каде со средување се добива

$$ad+b+c=bc+a+d\,,$$

што требаше да се докаже.

12. Нека a,b и c се различни меѓу себе цели броеви. Докажи дека

$$\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

е цел број.

Решение. Користејќи ги формулите за скратено множење имаме

$$\begin{aligned}
a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b) &= a^4b-a^4c+b^4c-b^4a+c^4(a-b)\\
&= ab(a^3-b^3)-c(a^4-b^4)+c^4(a-b)\\
&= ab(a-b)(a^2+ab+b^2)-c(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+c^4(a-b)\\
&= (a-b)(a^3b+a^2b^2+ab^3-ca^3-ca^2b-cab^2-cb^3+c^4)\\
&= (a-b)[a^3(b-c)+a^2b(b-c)+ab^2(b-c)-c(b^3-c^3)]\\
&= (a-b)(b-c)(a^3+a^2b+ab^2-cb^2-c^2b-c^3)\\
&= (a-b)(b-c)[(a^3-c^3)+b(a^2-c^2)+b^2(a-c)]\\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)
\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\in\mathbb{Z}\,.$$

13. Нека $a\,,b$ и c се цифри, такви што $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{a}{c}$. Докажи дека $\frac{\overbrace{abb...b}^{n}}{\underbrace{bb...bc}_{n}}=\frac{a}{c}$.

Решение. Равенството $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{a}{c}$ ќе го запишеме во облик $10ac+bc=10ab+ac$. Ако последното равенство го помножиме со 10-ки добиваме конечна низа од равенства од облик $10^k ac+10^{k-1}bc=10^k ab+10^{k-1}ca$ за $k=1,2,3,...,n-1$. Ако ги собереме левите и десните страни на добиените равенства, и го упростиме добиеното равенство, имаме

$$10^{n-1}ac+10^{n-2}bc+....+10bc+bc=10^{n-1}ab+10^{n-2}ab+...+10ab+ac.$$

Последното равенство може да се запише во облик $\frac{\overbrace{abb...b}^{n}}{\underbrace{bb...bc}_{n}}=\frac{a}{c}$.

14. Пресметај ги збировите

а) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+1987\cdot 1988$

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1987\cdot 1988}$.

Решение. Ќе ја решиме задачата поопшто, т.е. ќе го пресметаме збирот

$$A_n=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1).$$

Имаме

$$\begin{aligned}A_n&=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+...+n(n+1)\\&=1+1^2+2+2^2+...+n+n^2\\&=(1+2+3+...+n)+(1^2+2^2+...+n^2)\\&=\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Според тоа, бараниот збир е

$$A_{1987}=\tfrac{1}{3}1987\cdot 1988\cdot 1989=2618953428.$$

Забелешка. Користевме дека

$$S_1=1+2+3+...+n=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Ќе дадеме еден начин на пресметување на S_1 и S_2 кој се обопштува, до начин за пресметување збирови од облик $1^k+2^k+...+n^k$. Да ги разгледаме разложувањата $(1+k)^2=1+2k+k^2$, $(1+k)^3=1+3k+3k^2+k^3$, за $k=0,1,2,...,n$:

$(1+0)^2=1$	$(1+0)^3=1$
$(1+1)^2=1+2\cdot 1+1^2$	$(1+1)^3=1+3\cdot 1+3\cdot 1^2+1^3$
$(1+2)^2=1+2\cdot 2+2^2$	$(1+2)^3=1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+2^3$
$(1+3)^2=1+2\cdot 3+3^2$	$(1+3)^3=1+3\cdot 3+3\cdot 3^2+3^3$
$\vdots$	$\vdots$
$(1+n)^2=1+2\cdot n+n^2$	$(1+n)^3=1+3\cdot n+3\cdot n^2+n^3$

Собирајќи ги левите равенства добиваме:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(1+n)^2=n+1+2(1+2+3+...+n)+1^2+2^2+3^2+...+n^2$$

од каде што следува дека

$$1+2+3+...+n=\tfrac{1}{2}n(n+1)\ .$$

Собирајќи ги десните равенства добиваме:

$$1^3+2^3+...+n^3+(1+n)^3=n+1+3(1+2+...+n)+3(1^2+2^2+...+n^2)+(1^3+2^3+...+n^3)$$

од каде што следува дека

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ .$$

б) Задачата пак ќе ја решиме во општ случај, т.е. ќе го пресметаме збирот

$$B_n=\tfrac{1}{1\cdot2}+\tfrac{1}{2\cdot3}+\tfrac{1}{3\cdot4}+...+\tfrac{1}{1987\cdot1988}\ ,$$

користејќи го идентитетот

$$\tfrac{1}{k(k+1)}=\tfrac{1}{k}-\tfrac{1}{k+1}\ ,\ k=1,2,3,...,$$

кој се докажува на едноставен начин. Имаме

$$B_n=(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+...+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1})=1-\tfrac{1}{n+1}=\tfrac{n}{n+1}\ .$$

Според тоа, бараниот збир е $B_{1987}=\frac{1987}{1988}$.

15. Нека n е природен број. Докажи го равенството

$$1^5+2^5+...+n^5+1^7+2^7+...+n^7=2(1+2+...+n)^4\ .$$

Решение. Бидејќи

$$2(1+2+...+n)^4=2(\tfrac{n(n+1)}{2})^4=\tfrac{n^4(n+1)^4}{8}\ ,$$

всушност треба да го докажеме равенството

$$1^5+2^5+...+n^5+1^7+2^7+...+n^7=\tfrac{n^4(n+1)^4}{8}\ .$$

Доказот ќе го изведеме со математичка индукција.

За $n=1$ тврдењето е точно.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n-1$, т.е. важи

$$1^5+2^5+...+(n-1)^5+1^7+2^7+...+(n-1)^7=\tfrac{(n-1)^4n^4}{8}\ .$$

Тогаш

$$\begin{aligned}1^5+...+(n-1)^5+n^5+1^7+...+(n-1)^7+n^7&=\tfrac{(n-1)^4n^4}{8}+n^5+n^7\\&=\tfrac{n^4(n^4-4n^3+6n^2-4n+1+8n^3+8n)}{8}\\&=\tfrac{n^4(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)}{8}=\tfrac{n^4(n+1)^4}{8}\end{aligned}$$

т.е. равенството важи и за n. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството важи за секој природен број.

16. Докажи го идентитетот

$$(A^2+B^2)(a^2+b^2)=(Aa-Bb)^2+(Ab+Ba)^2\ .$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(A^2+B^2)(a^2+b^2) &= A^2a^2+A^2b^2+B^2a^2+B^2b^2\\ &= (A^2a^2-2AaBb+B^2b^2)+(A^2b^2+2AbBa+B^2a^2)\\ &= (Aa-Bb)^2+(Ab+Ba)^2.\end{aligned}$$

17. За кои природни броеви n, бројот $(a^2+b^2)^n$, каде што a и b се различни природни броеви, е еднаков на збирот од квадратите на два природни броеви?

Решение. За $n=1$ имаме $(a^2+b^2)^1=a^2+b^2$, па тврдењето важи. Да претпоставиме дека за природниот број n тврдењето важи, т.е. постојат природни броеви x и y така што $(a^2+b^2)^n=x^2+y^2$. Тогаш:

1° Ако $xa\neq yb$ имаме:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^{n+1} &= (x^2+y^2)(a^2+b^2)\\ &= ((xa)^2-2xayb+(yb)^2)+((xb)^2+2xayb+(yb)^2)\\ &= (xa-yb)^2+(xb+ya)^2\end{aligned}$$

2° Ако $xa=yb$, тогаш $xb-ya\neq 0$. Во спротивно би имале $xb=\frac{a}{b}xa$ односно $a^2=b^2$ од што ќе следува дека $a=b$, што не е можно. Во овој случај претставувањето е

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^{n+1} &= (x^2+y^2)(a^2+b^2)\\ &= ((xa)^2+2xayb+(yb)^2)+((xb)^2-2xayb+(yb)^2)\\ &= (xa+yb)^2+(xb-ya)^2.\end{aligned}$$

Значи тврдењето е точно за секој природен број n.

18. Целите броеви a,b,c и d се такви што $bc+ad=1$ и $ac+2bd=1$. Докажи дека $a^2+c^2=2b^2+2d^2$.

Решение. Од условот $bc+ad=1$ имаме $2(ad+bc)^2=2$, односно

$$2b^2c^2+4abcd+2a^2d^2=1. \qquad (*)$$

Од условот $ac+2bd=1$ имаме $(ac+2bd)^2=1$, односно

$$a^2c^2+4abcd+4b^2d^2=1. \qquad (**)$$

Од (*) и (**) добиваме

$$2b^2c^2+2a^2d^2-a^2c^2-4b^2d^2=-1, \text{ т.е. } (a^2-2b^2)(2d^2-c^2)=1.$$

Бидејќи a,b,c и d се цели броеви, имаме

$$a^2-2b^2=2d^2-c^2=1 \text{ или } a^2-2b^2=2d^2-c^2=-1,$$

а и во двата случаи важи

$$a^2+c^2=2b^2+2d^2.$$

19. Ако броевите a, b, c се различни од нула, тогаш од равенствата

$$a^2-b^2=bc \text{ и } b^2-c^2=ca,$$

следува равенството $a^2-c^2=ab$. Докажи!

Решение. Нека $a,b,c\neq 0$ и нека

$$a^2-b^2=bc \quad (1)$$

$$b^2-c^2=ca \quad (2)$$

Имаме, $a^2-b^2=bc \Leftrightarrow a^2=b(b+c)$, т.е.

$$\tfrac{b+c}{a}=\tfrac{a}{b} \quad (3)$$

и $b^2-c^2=ca \Leftrightarrow (b-c)(b+c)=ca$, т.е.

$$(b-c)\tfrac{b+c}{a}=c \quad (4)$$

Со замена на $\tfrac{b+c}{a}$ од (3) во (4) добиваме

$$ac+bc=ab. \quad (5)$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме $a^2-c^2=ac+bc$, па ако во ова равенство го замениме (5) добиваме $a^2-c^2=ab$.

20. Пресметај го x^3+y^3, ако $x+y=5$, $xy=8$?

Решение. Имаме:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=5$$

10. Докажи, дека ако $x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$ тогаш $xyz=0$.

Решение. Дадени се равенствата

$$x+y+z=1$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$x^3+y^3+z^3=1$$

Ако го квадрираме првото равенство, имаме $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=1$ и ако го одземеме второто равенство, добиваме: $xy+xz+yz=0$. Ако пак ги помножиме првото и второто равенство, а потоа ги искористиме првото и претходното равенство последователно добиваме

$$x^3+y^3+z^3+(x+y)xy+(x+z)xz+(y+z)yz=1$$

$$1+(1-z)xy+(1-y)xz+(1-x)yz=1$$

$$xy+yz+zx-3xyz=0$$

$$xyz=0$$

Забелешка. Задачата може да се реши со користење на идентитетот

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

21. За броевите x и y се точни равенствата $x+y=1$ и $x^2+y^2=3$. Дали е точно равенството $x^4+y^4=8$.

Решение. Ако го квадрираме равенството $x+y=1$, добиваме $(x+y)^2=1$, односно $x^2+2xy+y^2=1$, $2xy=1-(x^2+y^2)=1-3=-2$. Според тоа, $xy=-1$. Изразот x^4+y^4, можеме да го запишеме во облик

$$x^4+y^4=(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-2(xy)^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$$
$$=3^2-2(-1)^2=9-2=7.$$

Според тоа, за броевите x и y кои ги задоволуваат равенствата $x+y=1$ и $x^2+y^2=3$, не е точно равенството $x^4+y^4=8$.

22. Нека x и y се броеви за кои $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$. Пресметај ја вредноста на $x+y$.

Решение. Равенството можеме да го запишеме во облик

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-1000+(x+y)^3-1000+30xy-3x^2y-3xy^2=0$$
$$2[(x+y)^3-10^3]-3xy(x+y-10)=0$$
$$2(x+y-10)(x^2+y^2+2xy+10x+10y+100)+3xy(x+y-10)=0,$$
$$(x+y-10)(2x^2+2y^2+4xy+20x+20y+200-3xy)=0. \quad (1)$$

Понатаму,

$$2x^2+2y^2+xy+20x+20y+200=x^2+20x+100+y^2+20y+200+x^2+2x\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{3y^2}{4}$$
$$=(x+10)^2+(y+10)^2+(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2.$$

Не постои подреден пар на реални броеви (x,y) за кои

$$(x+10)^2+(y+10)^2+(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2=0.$$

Бидејќи секој од собироците на десната страна од последното равенство е ненегативен реален број, добиваме дека

$$(x+10)^2+(y+10)^2+(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2>0.$$

Според тоа, во (1) равенство е можно ако и само ако $x+y-10=0$, односно $x+y=10$.

23. Мартин на таблата напишал неколку алгебарски изрази. Секој од напишаните изрази го квадрирал, а потоа ги собрал. По собирањето Мартин го добил полиномот $x^2+y^2+z^2+3y+4x+xz+1$. Дали направил грешка при изведување на алгебарските операции?

Решение. Секој алгебарски израз, за допуштените вредности на своите независно променливи добива некоја бројна вредност, било позитивна, било негативна било нула. Квадратот на секој таков број е ненегативен. Според тоа, вредностите на квадрираните алгебарски изрази за допуштените вредности на своите променливи се ненегативни. Значи, вредноста на нивниот збир

$$x^2+y^2+z^2+3y+4x+xz+1,$$

за допуштените вредности на своите променливи треба да е секогаш позитивен. Во овој случај, допуштени вредности за променливите x, y, z е множеството реални броеви. За $x=z=0$ и $y=-1$, добиваме:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+3y+4x+xz+1 &= 0^2+(-1)^2+0^2+3(-1)+4\cdot 0+0\cdot 0+1 \\ &= 1-3+1=-1. \end{aligned}$$

Заради добиената контрадикција добиваме дека Мартин направил грешка при изведувањето на алгебарските операции.

24. Разложи го на множители изразот

$$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b) &= bc(b+c)+a(c^2-ac-ab-b^2) \\ &= bc(b+c)+a[(c-b)(c+b)-a(c+b)] \\ &= bc(b+c)+a(b+c)(c-b-a) \\ &= (b+c)(bc+ac-ab-a^2) \\ &= (b+c)[c(b+a)-(a(b+a)] \\ &= (a+b)(b+c)(c-a). \end{aligned}$$

25. За реалните броеви a, b, c и d важи

$$a+b+c+d=0 \text{ и } a^3+b^3+c^3+d^3=0.$$

Докажи, дека збирот на некои два од овие броеви е еднаков на 0.

Решение. Од $a+b+c+d=0$ следува дека $a+b+c=-d$. Ако последното равенство го степенуваме на трета добиваме

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3=-d^3.$$

Оттука и од вториот услов следува

$$\begin{aligned} &3a^2b+3ab^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2=0 \\ &3ab(a+b)+3ac(a+b)+3bc(a+b)+3c^2(a+b)=0 \\ &3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=0 \\ &3(a+b)(a(b+c)+c(b+c))=0 \\ &3(a+b)(b+c)(c+a)=0. \end{aligned}$$

Конечно, од последното равенство следува дека еден од множителите $a+b$, $b+c, c+a$ мора да е еднаков на нула, што и требаше да се докаже.

26. Ако $x+y+z=0$ и $x \neq y \neq z \neq x$, тогаш

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}=\frac{1}{3}.$$

Докажи!

Решение. Ако $x+y+z=0$, тогаш

$$(x+y+z)^2=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=-2xy-2yz-2zx,$$
$$3(x^2+y^2+z^2)=x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+z^2,$$
$$3(x^2+y^2+z^2)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2,$$
од каде што следува ($x\neq y\neq z\neq x$)
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}=\frac{1}{3}.$$

27. Нека $a+b+c=0$ и $a^3+b^3+c^3=0$. Да се докаже дека
$$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}=a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}.$$

Решение. Бидејќи $a+b+c=0$ добиваме $a^3+b^3+c^3=3abc$, од каде поради условот следува дека $3abc=a^3+b^3+c^3=0$. Значи барем еден од броевите a, b или c е еднаков на нула. Без губење на општоста нека $c=0$. Тогаш $b=-a$, па затоа
$$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}=a^{2009}+(-a)^{2009}=a^{2009}-a^{2009}=0.$$
Аналогно се докажува дека $a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}=0$, од каде следува тврдењето на задачата.

28. Ако $a+b+c=0$, тогаш $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$. Докажи!

Решение. Со квадрирање на $a+b+c=0$ добиваме
$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca). \tag{1}$$
Ако го квадрираме и равенството (1), добиваме
$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)),$$
од каде што поради условот $a+b+c=0$, следува
$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \tag{2}$$
За левата страна на (2) наоѓаме
$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$
од каде што, поради (2) наоѓаме
$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \tag{3}$$
Од (2) и (3) следува
$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4).$$

29. Разложи ги на множители полиномите

а) x^4+4 б) x^4+x^2+1 в) x^5+x+1.

Решение. Во првите два случаи дополнуваме до полн квадрат:

а) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

б) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

в) Во овој случај го имаме:

$$\begin{aligned}x^5+x+1&=x^5+x^4+x^3-(x^4+x^3+x^2)+x^2+x+1\\&=x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+1(x^2+x+1)\\&=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).\end{aligned}$$

30. Разложи го на множители изразот

$$A=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-x^5.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-x^5\\&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-1-(x^5-1)\\&=(2+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x+x^2+x^3+x^4+x^5)-(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)\\&=(2x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4)-(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4\\&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4).\end{aligned}$$

31. Разложи го на множители изразот

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

Решение. Забележуваме дека важи

$$(a+2b-3c)+(b+2c-3a)+(c+2a-3b)=0.$$

Нека x,y и z се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Тогаш

$$-z^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+y^3-3xyz$$

па затоа точно е равенство

$$x^3+y^3+z^3=3xyz. \qquad (1)$$

Конечно, ако во (1) ставиме $x=a+2b-3c,\ y=b+2c-3a,\ z=c+2a-3b$, добиваме дека

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3=3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b).$$

32. Докажи, дека производот на било кои два елементи на множеството

$$\{m\,|\,m=a^2-5b^2,\ a,b\in\mathbb{N}\}$$

исто така припаѓа на ова множество.

Решение. Ако m и n се елементи на даденото множество, тогаш $m=a^2-5b^2$ и $n=c^2-5d^2$, каде $a,b,c,d\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$\begin{aligned}mn=(a^2-5b^2)(c^2-5d^2)&=ac^2+25b^2d^2-5a^2d^2-5b^2c^2\\&=a^2c^2+10abcd+25b^2d^2-5a^2d^2-10abcd-5b^2c^2\\&=(ac+5bd)^2-5(ad+bc)^2.\end{aligned}$$

Сега тврдењето на задачата следува од последното равенство и од тоа што $ac+5bd, ad+bc\in\mathbb{N}$.

33. Нека a,b,c се произволни реални броеви. Докажи, дека барем еден од броевите $(a+b+c)^2-9ab,\ (a+b+c)^2-9bc,\ (a+b+c)^2-9ca$ е ненегативен.

Решение. Да го претпоставиме спротивно, т.е. дека сите три броја се негативни. Тогаш имаме

$$(a+b+c)^2-9ab<0,\ (a+b+c)^2-9bc<0,\ (a+b+c)^2-9ca<0.$$

Ги собираме трите неравенства и после средувањето го добиваме неравенството

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0, \text{ т.е. } \tfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]<0.$$

Но, збир на квадрати на три реални броеви не може да биде негативе, па од добиената противречност следува дека барем еден од разгледуваните три броја е ненегативен, што и требаше да се докаже.

34. Природните броеви $a,\ b,\ c$ и d се такви што

$$ab^2+ad^2+cb^2=ba^2+bd^2+ca^2\ ,$$

и $a^2+b^2+c^2+d^2$ е прост број. Докажи, дека $a=b$.

Решение. Нека $a\neq b$. Даденото равенство е еквивалентно на равенството $(a-b)d^2-ab(a-b)-ac(a-b)-(a-b)bc=0$, т.е. на равенството

$$(a-b)(d^2-ab-ac-bc)=0\ .$$

Бидејќи, $a-b\neq 0$, од последното равенство следува $d^2-ab-ac-bc=0$, односно $d^2=ab+bc+ca$. Тогаш

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-ab-bc-ca\\ &=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\\ &=(a+b+c)^2-d^2\\ &=(a+b+c-d)(a+b+c+d)\end{aligned}$$

Според условот $a^2+b^2+c^2+d^2$ е прост број и $a+b+c-d<a+b+c+d$, па затоа $a+b+c-d=1$, односно $d=a+b+c-1$. Сега

$$\begin{aligned}&d^2=(a+b+c-1)^2\\ &ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-2a-2b-2c+1\\ &a(a+b-2)+b(b+c-2)+c(c+a-2)+1=0\end{aligned}$$

Во последното равенство сите собирци се ненегативни, при што последниот е позитивен број, што претставува противречност. Од добиената противречност следува дека нашата претпоставка не е точна, па затоа $a=b$.

35. Нека a,b,c,x,y,z се броеви такви што

$$y^2+yz+z^2=a^2\ ,\ z^2+zx+x^2=b^2\ ,\ x^2+xy+y^2=c^2 \text{ и } yz+zx+xy=0\ .$$

Докажи, дека

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)=0\ . \qquad (1)$$

Решение. Левата страна на равенството (1) можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned} L &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) \\ &= [(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2] \\ &= (a+b)^2(a-b)^2-c^2(a-b)^2-c^2(a+b)^2+c^4 \\ &= a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2 \end{aligned}$$

Ако замениме $a^2=y^2+yz+z^2$, $b^2=z^2+zx+x^2$ и $c^2=x^2+xy+y^2$ во последниот израз, добиваме

$$\begin{aligned} L &= a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2 \\ &= (y^2+yz+z^2)^2+(z^2+zx+x^2)^2+(x^2+xy+y^2)^2-2(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)- \\ &\quad -2(y^2+yz+z^2)(x^2+xy+y^2)-2(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2) \\ &= -3x^2y^2-3x^2z^2-3y^2z^2-6x^2yz-6xy^2z-6xyz^2 \\ &= -3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2) \\ &= -3(xy+yz+zx)^2=-3\cdot 0^2=0, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

36. Докажи, дека збирот на производот на четири поседователни природни броеви и бројот 1 е точен квадрат на природен број.

Решение. *Прв начин.* Нека $n,n+1,n+2,n+3$ се произволни четири последователни природни броеви. Имаме,

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1.$$

За да го докажеме тврдењето на задачата доволно е да најдеме $a,b\in\mathbb{N}$ такви што

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=(n^2+an+b)^2.$$

Јасно, $b=1$, па затоа доволно е да провериме дали постои $a\in\mathbb{N}$ таков што

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=(n^2+an+1)^2.$$

Ако квадрираме во последното равенство, после средувањето на изразот добиваме

$$(6-2a)n^3+(9-a^2)n^2+(6-2a)n=0.$$

Последното равенство е исполнето за секој $n\in\mathbb{N}$, кога $a=3$. Конечно,

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=(n^2+3n+1)^2,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Да ставиме $A(n)=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} A(n) &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

37. Нека a и b се цели броеви со различна парност. Докажи, дека постои цел број c таков што броевите $ab+c, a+c$ и $b+c$ се точни квадрати на цели броеви.

Решение. Ќе определиме број c таков што $a+c$ и $b+c$ се квадрати на два последователни цели броеви. Имаме $a+c=n^2$ и $b+c=(n+1)^2$, за некој цел број n, од каде следува дека $b-a=2n+1$, т.е.

$$n=\frac{b-a-1}{2} \text{ и } c=(\frac{b-a-1}{2})^2-a .$$

Броевите a и b се со ралична парност, па затоа бројот $n=\frac{b-a-1}{2}$ и $n+1=\frac{b-a+1}{2}$ се цели броеви, од каде следува дека $c=(\frac{b-a-1}{2})^2-a$ и $\frac{1-b-a}{2}$ се цели броеви и важи

$$a+c=n^2=(\frac{b-a-1}{2})^2,$$

$$b+c=(n+1)^2=(\frac{b-a+1}{2})^2,$$

$$ab+c=ab+(\frac{b-a-1}{2})^2-a=\frac{1+a^2+b^2-2a-2b+2ab}{4}=(\frac{1-b-a}{2})^2.$$

38. На колку нули завршува бројот

$$A=99(100^{990}+100^{989}+100^{988}+...+100^2+100+1)+1 .$$

Решение. *Прв начин.* Ако го искористиме идентитетот

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a^2+a+1) ,$$

изразот A можеме да го запишеме во облик

$$A=(100-1)(100^{990}+100^{989}+100^{988}+...+100^2+100+1)+1=100^{991}-1+1=10^{1982} .$$

Значи бројот A завршува на 1982 нули.

Втор начин. Степенот 100^n завршува на $2n$-нули, т.е. $100^n=1\underbrace{00...00}_{2n}$. Ако ова го примениме на бројот A, ќе добиеме

$$A=99(1\underbrace{000...000}_{1980\text{ нули}}+1\underbrace{000...000}_{1978\text{ нули}}+...+10000+101)=99(1\underbrace{01010...10}_{990\text{ парови}}+1)+1 .$$

По множењето на изразот во заградите со 99, се добива

$$A=\underbrace{999...9999}_{1982\text{ деветки}}+1=1\underbrace{000...000}_{1982\text{ нули}} .$$

Значи, бројот A завршува на 1982 нули.

39. Докажи дека бројот $a=\underset{n}{11...1}\underset{n+1}{22...2}5$ е точен квадрат.

Решение. Имаме:

$$a=\underset{n}{11...1}\underset{n+1}{22...2}5=100(\underset{2n}{11...1}+\underset{n}{11...1})+25=\frac{100}{9}(\underset{2n}{99...9}+\underset{n}{99...9})+25$$

$$=\frac{100}{9}(10^{2n}+10^n-2)+25=\frac{1}{9}(10^{2(n+1)}+10^{n+2}+25)=(\frac{10^{n+1}+5}{3})^2$$

40. Пресметај

$$A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n}+\underbrace{111...1}_{n+1}+\underbrace{666...6}_{n}+8} .$$

Решение. *Прв начин.* Ако ставиме $\underset{n}{11...1}=a$, ќе имаме

$$\underset{n}{66...6}=6\cdot\underset{n}{11...1}=6a$$

$$\underbrace{11...11}_{n+1}=10a+1,$$

$$\underbrace{11...11}_{2n}=10^n a+a=(\underbrace{99...9}_{n}+1)a+a=9a^2+2a\,,$$

па добиваме:

$$A=\sqrt{9a^2+2a+10a+1+6a+8}=\sqrt{9a^2+18a+9}=3a+3=3\cdot\underbrace{111...1}_{n}+3=\underbrace{33...33}_{n-1}6\,.$$

Втор начин. Од $\underbrace{11...1}_{m}=\frac{10^m-1}{9}$, следува

$$A=\sqrt{\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}+6\frac{10^n-1}{9}+8}=\frac{1}{3}\sqrt{10^{2n}-1+10\cdot 10^n+6\cdot 10^n-6+72}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{10^{2n}+16\cdot 10^n+64}=\frac{1}{3}(10^n+8)=\underbrace{33...3}_{n-1}6\,.$$

41. Дадена е низата броеви 49, 4489, 444889, …(секој нареден член на низата се добива од претходниот со допишување на бројот 48 во неговата средина. Докажи, дека секој член на низата е точен квадрат.

Решение. Нека претпоставиме дека бројот $A=444...488...89$, има n-четворки и $(n-1)$-на осумки, т. е. $A=\underbrace{444...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9$. Според тоа, бројот A можеме да го запишеме во облик

$$A=4\cdot\underbrace{111...1}_{n}\cdot 10^n+8\cdot\underbrace{111...1}_{n}+1\,. \qquad (1)$$

Бројот $\underbrace{111...1}_{n}$ можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{111...1}_{n}=10^{n-1}+10^{n-1}+...+10^2+10+1=\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}$$

па според тоа, бројот A можеме да го запишеме во облик

$$A=\frac{4}{9}(10^n-1)10^n+\frac{8}{9}(10^n-1)+1=\frac{4}{9}10^{2n}+\frac{4}{9}10^n+\frac{1}{9}=(\frac{2\cdot 10^n+1}{3})^2\,.$$

42. Докажи дека секој број од низата $16, 1156, 111556, 11115556, ...$ е точен квадрат.

Решение. *Прв начин.* Доволно е да се докаже дека општиот член на низата, т.е. бројот $N=\underbrace{111...11}_{n}\underbrace{55...55}_{n-1}6$ е точен квадрат. Имаме

$$N=\underbrace{111...11}_{n}\cdot 10^n+5\cdot\underbrace{11...11}_{n-1}\cdot 10+6\,.$$

Да ставиме поради краткост, $\underbrace{11...11}_{n-1}=a$. Тогаш:

$$\underbrace{111...11}_{n}=10a+1,\ 10^n=\underbrace{999...99}_{n}+1=9\cdot\underbrace{111...11}_{n}+1=9(10a+1)+1=90a+10\,.$$

На крајот имаме

$$N=(10a+1)\cdot(90a+10)+50a+6=900a^2+240a+16=(30a+4)^2=(\underbrace{33...33}_{n-1}4)^2.$$

Втор начин. Од

$$\underbrace{11...11}_{k}=\tfrac{1}{9}(\underbrace{99...99}_{k})=\tfrac{1}{9}(10^k-1),$$

следува

$$N=\underbrace{111...1}_{n}\cdot 10^n+5\cdot\underbrace{11...11}_{n}\cdot 10+6=\tfrac{1}{9}(10^n-1)\cdot 10^n+5\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^n-1)\cdot 10+6$$

$$=\tfrac{1}{9}(10^{2n}+4\cdot 10^n+4)=(\tfrac{10^n+2}{3})^2.$$

43. Колку е a, ако $a^2=1\underbrace{000...00}_{n-1}5\cdot\underbrace{11...11}_{n}+1$?

Решение. Имаме

$$a^2=1\underbrace{000...00}_{n-1}5\cdot\underbrace{11...11}_{n}+1=(\underbrace{100...0}_{n}+5)\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\underbrace{999...9}_{n}+1=(10^n+5)\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^n-1)+1.$$

Ако ставиме $10^n=x$, добиваме

$$a^2=\tfrac{1}{9}[(x+5)(x-1)+1]=\tfrac{1}{9}(x^2+4x+4)=\tfrac{1}{9}(x+2)^2=[\tfrac{1}{3}(x+2)]^2.$$

$$a=\tfrac{1}{3}(x+2)=\tfrac{1}{3}\cdot(10^n+2)=\tfrac{1}{3}\cdot 1\underbrace{00...0}_{n-1}2=\underbrace{33..3}_{n}4.$$

44. Докажи дека секој број од низата $\frac{107811}{3}$, $\frac{110778111}{3}$, $\frac{111077781111}{3}$, … е точен куб на природен број.

Решение. Нека a_n е општиот член во низата, тогаш имаме:

$$3a_n=\underbrace{11...1}_{n}0\underbrace{77...7}_{n}8\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n}\cdot 10^{2n+3}+7\cdot\underbrace{11...1}_{n}\cdot 10^{n+2}+8\cdot 10^{n+1}+\underbrace{11...11}_{n+1}.$$

Да ставиме $c=\underbrace{11...1}_{n}$, тогаш имаме:

$$10^n=9c+1,\qquad 10^{n+1}=10(9c+1),\quad 10^{n+2}=10^2(9c+1),\qquad 10^{2n+3}=10^3(9c+1)^2,$$

па затоа

$$3a_n=10^3c(9c+1)^2+7c\cdot 10^2(9c+1)+8\cdot 10(9c+1)+10c+1$$

$$=81(1000c^3+300c^2+30c+1)]=81(10c+1)^3,$$

т.е.

$$a_n=[3(10c+1)]^3=\underbrace{333...3}_{n+1}{}^3.$$

45. Докажи дека разликата на броевите $\underbrace{111...111}_{2000\text{ пати }1}$ и $\underbrace{222...222}_{1000\text{ пати }2}$ е точен квадрат на природен број.

Решение. *Прв начин.* Бројот $\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати}}$ можеме да го запишеме во обликот

$$\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати}} = \underbrace{1...111}_{1000-\text{пати}} + \underbrace{1...111}_{1000-\text{пати}},$$

а бројот $\underbrace{111...111}_{2000-\text{пати}}$ можеме да го запишеме во обликот

$$\underbrace{111...111}_{2000-\text{пати}} = \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}}\underbrace{000...000}_{1000-\text{пати}} + \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}}.$$

Според тоа, разликата ја запишуваме во обликот

$$\begin{aligned}\underbrace{111...111}_{2000-\text{пати}} - \underbrace{222...222}_{1000-\text{пати}} &= \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}}\underbrace{000...000}_{1000-\text{пати}} - \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}}\\ &= \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}}\cdot 10^{1000} - \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}}\\ &= \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}}\cdot(10^{1000}-1)\\ &= \tfrac{1}{9}\underbrace{999...999}_{1000-\text{пати}}\cdot(10^{1000}-1)\\ &= \tfrac{1}{9}(10^{1000}-1)(10^{1000}-1)\\ &= (\tfrac{10^{1000}-1}{3})^2 = (\underbrace{333...333}_{1000-\text{пати}})^2,\end{aligned}$$

т.е. таа е точен квадрат.

Втор начин. Со математичка индукција ќе докажеме дека

$$\underbrace{111...1}_{2n} - \underbrace{222...2}_{n} = (\underbrace{333...3}_{n})^2. \qquad (1)$$

За $n=1$ имаме $11-2=9=3^2$, т.е. равенството (1) е точно.

Нека претпоставиме дека равенството е точно за $n=k$, односно

$$\underbrace{111...1}_{2k} - \underbrace{222...2}_{k} = (\underbrace{333...3}_{k})^2.$$

За $n=k+1$ имаме:

$$\begin{aligned}\underbrace{111...1}_{2(k+1)} - \underbrace{222...2}_{k+1} &= 100\cdot\underbrace{111...1}_{2k} - 10\cdot\underbrace{222...2}_{k} + 9\\ &= 100(\underbrace{111...1}_{2k} - \underbrace{222...2}_{k}) + 90\cdot\underbrace{222...2}_{k} + 9\\ &= 10^2(\underbrace{333...3}_{k})^2 + 2\cdot 3\cdot 10\cdot\underbrace{333...3}_{k} + 9\\ &= [10\cdot(\underbrace{333...3}_{k}) + 3]^2 = (\underbrace{333...3}_{k+1})^2\end{aligned}$$

т.е. тоно е равенството (1). Сега од принципот на математичка индукција следува дека равенството (1) е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

46. Докажи дека разликата $(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n-1}5)^2 - (\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n})^2$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме

$$(\underset{n-1}{55...5}\underbrace{444...4}_{n-1}5)^2-(\underset{n-1}{55...5}\underbrace{444...4}_{n})^2=\underset{n-1}{55...5}\underbrace{444...4}_{n-1}5+\underset{n-1}{55...5}\underbrace{444...4}_{n}$$
$$=\underbrace{111...1}_{n-1}0\underbrace{888...8}_{n-1}9$$
$$=\underbrace{111...1}_{n-1}\cdot 10^{n+1}+80\cdot\underbrace{111...1}_{n-1}+9$$
$$=\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 10^{n+1}+\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 80+9$$
$$=\frac{10^{2n}-2\cdot 10^{n}+1}{2}=(\frac{10^{n-1}-1}{9})^2=(\underbrace{333...3}_{n})^2$$

што и требаше да се докаже.

47. Одреди го природниот број n, ако: $n^2=\underset{1994}{100...0}5\cdot\underbrace{11...11}_{1995}+1$.

Решение. *Прв начин.* Од условот следува:

$$n^2-1=(10^{1995}+5)\cdot\frac{\overbrace{999...9}^{1995}}{9}=(\frac{10^{1995}+2}{3}+1)\frac{10^{1995}-1}{3}\ ,$$
$$(n-1)(n+1)=(\frac{10^{1995}+2}{3}+1)(\frac{10^{1995}+2}{3}-1)$$

па оттука $n=\frac{10^{1995}+2}{3}=\frac{\overbrace{999..9}^{1995}}{3}+1=\underset{1994}{33...3}4$

Втор начин. Во општ случај имаме ($m=1995$):

$$n^2=(1\underbrace{000...0}_{m}+5)\cdot\frac{\overset{m}{99...9}}{9}+1=(10^m+5)\frac{10^m-1}{9}+1\ .$$

Ставајќи $10^m=x$, добиваме:

$$n^2=(x+5)\frac{x-1}{9}+1=\frac{1}{9}(x^2+4x-5+9)$$
$$=\frac{1}{9}(x^2+4x+4)=(\frac{1}{3}(x+2))^2,$$

а оттука

$$n=\frac{1}{3}(10^m+2)=\underset{m-1}{33...3}4\ .$$

48. Производот на осум последователни природни броеви не може да биде четврт степен на природен број. Докажи!

Решение. Нека x е најмалиот од осумте последователни природни броеви, т.е. нека броевите се $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, x+7$. Нивниот производ е

$$P=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\ ,$$

кој можеме да го запишеме во облик

$$P=[x(x+7)][(x+1)(x+6)][(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)]$$
$$=(x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)$$

Ако воведеме смена $a=x^2+7x+6$, тогаш P можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}P&=(a-6)a(a+4)(a+6)=(a^2-36)(a^2+4a)\\&=a^4+4a^3-36a^2-144a=a^4+4a(a^2-9a-36)\\&=a^4+4a(a+3)(a-12).\end{aligned}$$

Од условот на задачата x е природен број така што $x\geq 1$, па според тоа $a=x^2+7x+6\geq 14$. Значи $a-12>0$, од каде добиваме дека $a^4<P$. Од друга страна

$$P=a^4+4a^3-36a^2-144a<a^4+4a^3+6a^2+4a+1=(a+1)^4.$$

Од последните две неравенства добиваме дека $a^4<P<(a+1)^4$, а тврдењето на задачата следува од тоа што a и $a+1$ се последователни природни броеви.

49. Пресметај го збирот $S=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot k!$.

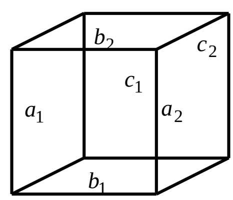
Решение. Имаме

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}((k+1)-1)\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!=(n+1)!-1.$$

50. На секоја од шесте страни на една коцка е запишан по еден природен број. За секое теме на коцката е пресметан производот на броевите на страните на кои тоа теме припаѓа. Збирот на осумте производи е еднаков на 1001.

Определи го збирот на запишаните броеви на страните на коцката?

Решение. Нека на едниот пар спротивни старни на коцката се запишани броевите b_1 и b_2, на другиот пар се запишани броевите c_1 и c_2, и на третиот пар се запишани броевите a_1 и a_2. Тогаш осумте пресметани производи (за секое теме по еден број) се



$$b_1c_1a_1,\ b_2c_1a_1,\ b_1c_1a_2,\ b_2c_1a_2,$$
$$b_1c_2a_2,\ b_2c_2a_2,\ b_1c_2a_1 \text{ и } b_2c_2a_1.$$

Нивниот збир е еднаков на

$$\begin{aligned}&b_1c_1a_1+b_2c_1a_1+b_1c_1a_2+b_2c_1a_2+b_1c_2a_2+b_2c_2a_2+b_1c_2a_1+b_2c_2a_1=\\&=(b_1+b_2)c_1a_1+(b_1+b_2)c_1a_2+(b_1+b_2)c_2a_2+(b_1+b_2)c_2a_1\\&=(b_1+b_2)(c_1a_1+c_1a_2+c_2a_2+c_2a_1)\\&=(b_1+b_2)(c_1+c_2)(a_1+a_2)\end{aligned}$$

Понатаму, броевите a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 се природни, па затоа a_1+a_2,b_1+b_2, $c_1+c_2>1$. Од условот на задачата следува

$$(b_1+b_2)(c_1+c_2)(a_1+a_2)=1001=7\cdot 11\cdot 13,$$

па затоа

$$(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(a_1+a_2)=7+11+13=31.$$

51. За реалните броеви x,y и z е точно равенството

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2 .$$

Дали се точни равенствата $x=y=z$?

Решение. Ќе воведеме смени $x-y=a$, $y-z=b$ и $z-x=c$. Според тоа

$$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0 \text{, т. е.}$$

$$a+b+c=0 . \tag{*}$$

Левата страна на равенството е еднаква

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=a^2+b^2+c^2 ,$$

а десната страна е еднаква на

$$(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 .$$

Значи, почетното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 ,$$

т. е.

$$a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) . \tag{1}$$

Бидејќи

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

и

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca) ,$$

равенството (1) можеме да го презапишеме во обликот

$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca) . \tag{2}$$

Заради условот (*) равенството (2) го добива обликот

$$2(ab+bc+ca)=6(ab+bc+ca) .$$

Според тоа

$$ab+bc+ca=0 . \tag{**}$$

Заради (*) и (**) добиваме

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0^2-2\cdot 0=0 .$$

Равенството $a^2+b^2+c^2=0$ важи ако и само ако $a=b=c=0$, т.е. ако и само ако

$$x-y=y-z=z-x=0 ,$$

од каде добиваме $x=y=z$.

52. Збирот на три цели броја a,b,c е еднаков на нула. Докажи дека

$$2a^4+2b^4+2c^4$$

е точен квадрат на цел број.

Решение. Нека $a+b+c=0$. Тогаш

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(a+b)^2 \\ &= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab \\ &= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c) \\ &= (a^2+b^2+c^2)^2-a^4-b^4-c^4 , \end{aligned}$$

од каде што следува

$$2a^4+2b^4+2c^4=(a^2+b^2+c^2)^2\,.$$

52. Докажи дека ако m и n се реални броеви со еднакви знаци, тогаш бројот

$$B=(m^3+m^2n-mn^2-n^3)^2-(m^3-m^2n-mn^2+n^3)^2$$

е ненегативен.

Решение. Имаме,

$$B=(m^3+m^2n-mn^2-n^3+m^3-m^2n-mn^2+n^3)(m^3+m^2n-mn^2-n^3-(m^3-m^2n-mn^2+n^3))$$

$$=(2m^3-2mn^2)(2m^2n-2n^3)=4(m^3-mn^2)(m^2n-n^3)$$

$$=4mn(m^2-n^2)(m^2-n^2)=4mn(m^2-n^2)^2.$$

Бидејќи m и n се со еднакви знаци, добиваме дека mn е ненегативен број, пас затоа бројот B е ненегативен.

54. а) Упрости го изразот $n(n+1)^2-n(n-1)^2$.

б) Со помош на упростениот израз под а) најди формула за пресметување на збирот на квадратите на првите n природни броеви.

Решение. Имаме

$$n(n+1)^2-n(n-1)^2=n((n+1)^2-(n-1)^2)=n(n+1-n+1)(n+1+n-1)=4n^2\,.$$

б) Ако во горното равенство последователно замениме $1,2,3,...,n$ добиваме

$$4\cdot 1^2=1\cdot(1+1)^2-1\cdot(1-1)^2$$

$$4\cdot 2^2=2\cdot(2+1)^2-2\cdot(2-1)^2$$

$$4\cdot 3^2=3\cdot(3+1)^2-3\cdot(3-1)^2$$

....

$$4\cdot n^2=n(n+1)^2-n(n-1)^2.$$

Горните равенства ги собираме и добиваме

$$4(1^2+2^2+3^2+...+n^2)=-2(1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2)+(n-1)n^2+n(n+1)^2$$

$$6(1^2+2^2+3^2+...+n^2)=2n^2+(n-1)n^2+n(n+1)^2$$

$$6(1^2+2^2+3^2+...+n^2)=n(2n^2+3n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

55. Нека $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Пресметај го збирот на сите броеви во табелата

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & ... & k \\ 2 & 3 & 4 & ... & k+1 \\ 3 & 4 & 5 & ... & k+2 \\ . & . & . & . & . \\ k & k+1 & k+2 & ... & 2k-1 \end{array}\,.$$

Решение. Нека $j \in \{1,2,...,k\}$. Тогаш збирот на елементите во j-тата редица е

$$S_j = (j+0)+(j+1)+(j+2)+...+(j+k-1) = kj + \frac{(k-1)k}{2}.$$

Значи, бараниот збир е

$$\begin{aligned} S_1+S_2+...+S_k &= k\cdot 1+\frac{(k-1)k}{2}+k\cdot 2+\frac{(k-1)k}{2}+k\cdot 3+\frac{(k-1)k}{2}+...+k\cdot k+\frac{(k-1)k}{2} \\ &= k\,\frac{(k-1)k}{2}+k(1+2+...+k) = k\,\frac{(k-1)k}{2}+k\,\frac{(k+1)k}{2} \\ &= \frac{k^2}{2}(k-1+k+1) = k^3. \end{aligned}$$

56. Пресметај го производот

$$P = (1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2^2})(1+\tfrac{1}{2^4})(1+\tfrac{1}{2^8})\cdot ...\cdot(1+\tfrac{1}{2^{2^n}}).$$

Решение. Множејќи ги двете страни на равенството со $1-\frac{1}{2}$ и користејќи ја формулата за разлика на квадрати, добиваме $(1-\frac{1}{2})P = 1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$. Оттука следува дека $P = 2(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})$.

57. Нека $a_1, a_2, ..., a_k$ се природни броеви. Докажи дека производот

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1)...(a_k^2+1)$$

може да се претстави како збир на квадрати на два природни броја.

Решение. Тврдењето од задачата ќе го покажеме со помош на принципот на математичка индукција. Јасно е дека тврдењето е точно за $n=1$, бидејќи a_1^2+1 може да се запише како

$$a_1^2+1 = a_1^2+1^2.$$

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $k=n$, т.е. дека постојат природни броеви x и y такви што

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1)...(a_n^2+1) = x^2+y^2.$$

Нека $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ се дадени природни броеви. Согласно индуктивната претпоставка за природните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ добиваме

$$\begin{aligned} (a_1^2+1)(a_2^2+1)...(a_n^2+1)(a_{n+1}^2+1) &= (x^2+y^2)(a_{n+1}^2+1) = a_{n+1}^2x^2+a_{n+1}^2y^2+x^2+y^2 \\ &= a_{n+1}^2x^2+2a_{n+1}xy+y^2+a_{n+1}^2y^2+2a_{n+1}xy+x^2 \\ &= (a_{n+1}x+y)^2+(a_{n+1}y-x)^2 \end{aligned}$$

Значи, тврдењето е точно и за $k=n+1$. Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точна за било кој природен број n.

58. Нека $a_1, a_2, a_3, ..., a_{1993}$ и $b_1, b_2, b_3, ..., b_{1993}$, p и q се реални броеви различни од нула и нека

$$a_1^2+a_2^2+...+a_{1993}^2 = p^2$$

$$b_1^2+b_2^2+...+b_{1993}^2=q^2$$
$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_{1993}b_{1993}=pq\ .$$

Докажи дека
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_{1993}}{b_{1993}}\ .$$

Решение. Ако првото равенство го помножиме со q^2, второто со p^2, а третото со $-2pq$ и потоа ги собереме трите така добиени равенства, добиваме
$$(a_1p-b_1q)^2+(a_2p-b_2q)^2+...+(a_np-b_1q)^2=0\ .$$
Збирот на квадрати е 0 ако и само ако сите собироци се 0, од каде што веднаш следува
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_{1993}}{b_{1993}}=\frac{q}{p}\ .$$

59. Нека n е природен број. Природните броеви a,b,c,d се помали или еднакви на n, при што d е најголемиот меѓу нив и важи
$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)=(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2\ . \qquad (1)$$
Докажи, дека $d=a+b+c$.

Решение. Со непосредна проверка се добива дека за $a+b+c=d$ е исполнет условот (1). Нека претпоставиме дека $a+b+c>d$. Тогаш
$$d(a+b+c)>d^2$$
$$ab+cd>d^2-ad-bd+ab$$
$$ab+cd>(d-a)(d-b).$$
Аналогно добиваме дека $bc+ad>(d-b)(d-c)$ и $ac+bd>(d-a)(d-c)$. Ако ги помножиме последните три неравенства добиваме дека
$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)>(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2\ ,$$
што проптивречи на (1). Аналогно, ако претпоставиме дека $a+b+c<d$, повторно добиваме противречност на (1). Според тоа, $a+b+c=d$.

60. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што
$$\tfrac{5}{a}=b+c\ ,\ \tfrac{10}{b}=c+a \text{ и } \tfrac{13}{c}=a+b\ .$$
Определи го производот abc, а потоа и вредностите на a,b и c.

Решение. Дадените равенsства можеме да ги запишеме во облик
$$ab+ac=5,\ ab+bc=10 \text{ I } ac+cb=13\ . \qquad (1)$$
Сега, ако трите равенства ги собереме добиваме $2(ab+bc+ca)=28$, односно $ab+bc+ca=14$. Понатаму, од последното равенство последователно ги одземаме равенствата (1) и добиваме $bc=9$, $ac=4$ и $ab=1$, соодветно. Добиените равенства ги множиме и добиваме $(abc)^2=36$, и како a,b,c се позитивни реални броеви важи $abc=6$. Сега, лесно се гледа дека $a=\frac{6}{9}, b=\frac{3}{2}, c=6$.

61. Определи ги сите решенија реални броеви x и y за кои е исполнето равенството $\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x}$.

Решение. Јасно, $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Сега, ако даденото равенство го помножиме со xy го добиваме равенството $x^2+6x+13=4y-y^2$, кое последователно е еквивалентно со равенствата

$$x^2+6x+y^2-4y+13=0$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2=0.$$

Но, збир на два квадрати на два броја е нула, ако секој од броевите е нула. Според тоа, $x+3=0$ и $y-2=0$, т.е. $x=-3$ и $y=2$.

62. Нека a,b,c се реални бгоеви за кои важат: $ab-a=b+119$, $bc-b=c+59$, $ca-c=a+71$. Пресметај ги сите можни вредности на $a+b+c$.

Решение. Од првата равенка имаме

$$a(b-1)=(b-1)+120\text{, т.е. } (a-1)(b-1)=120.$$

Слично, втората е еквивалентна со $(b-1)(c-1)=60$ и третата со $(c-1)(a-1)=72$. Оттука, $\frac{a-1}{c-1}=2$, $a-1=2(c-1)$ и заменето во третата добиваме $2(c-1)^2=72$. Добиваме, $c_1=7, c_2=-5$ и оттука $a_1=13, a_2=-11$ и $b_1=11, b_2=-9$. Затоа, можните вредности за $a+b+c$ се: $13+11+7=31$ и $-11-9-5=-25$.

2. ДРОБНОРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Определи ја вредноста на количникот

$$\mathrm{S\cdot T\cdot R\cdot U\cdot G\cdot A\ :\ (O\cdot H\cdot R\cdot I\cdot D)},$$

ако на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Бидејќи има 10 различни букви, а на нив соодветствуваат 10 различни цифри, следува дека една од буквите е еднаква на нула. Но ниту една од буквите O, H, R, I, D не може да биде еднаква на нула, бидејќи тогаш количникот не би имал смисла, па следува дека некоја од буквите S, T, U, G, A е еднаква на нула. Тогаш производот $\mathrm{S\cdot T\cdot R\cdot U\cdot G\cdot A}$ е еднаков на нула, па и количникот е еднаков на нула.

2. Нека m и n се броеви за кои што $\frac{n-2m}{m}=3$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{n^2-2mn}{4m^2}$.

Решение. *Прв начин.* Ако m и n се природни броеви такви што $\frac{n-2m}{m}=3$, тогаш $n-2m=3m$, т.е. $n=5m$. Сега

$$\frac{n^2-2mn}{4m^2}=\frac{(5m)^2-10m^2}{4m^2}=\frac{20m^2}{4m^2}=5.$$

Втор начии. Од равенството $\frac{n-2m}{m}=3$, имаме $\frac{n}{m}-\frac{2m}{m}=3$, т.е. $\frac{n}{m}=5$. Сега

$$\frac{n^2-2mn}{4m^2}=\frac{(\frac{n}{m})^2-\frac{n}{m}}{4}=\frac{5^2-5}{4}=5.$$

3. Ако x, y, z се позитивни реални броеви за кои $xyz=1$, тогаш

$$\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{xz+z+1},$$

е константа. Докажи!

Решение. Ако вториоит собирок го прошириме множејќи го броителот и именителот со x а третиот собирок го прошириме множејѓи го и броителот и именителот со xy добиваме

$$\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{xz+z+1}=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{xy+x}{xyz+xy+x}+\frac{xyz+xy}{x^2yz+xyz+xy}$$

$$=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{xy+x}{x1+xy+x}+\frac{1+xy}{x+1+xy}=\frac{2(1+x+xy)}{x+1+xy}=2.$$

4. Нека m и n се природни броеви такви што $m+\frac{1}{n}=n+\frac{1}{m}$. Пресметај ја вредноста на $\frac{m}{n}$.

Решение. Нека m и n се природни броеви за кои што е исполнето равнството

$$m+\frac{1}{n}=n+\frac{1}{m}. \qquad (1)$$

Бидејќи $m,n\in\mathbb{N}$, имаме $m,n\geq 1$ па според тоа $mn\neq 0$. Ако равенството (1) го помножиме со mn добиваме $m^2n+m=n^2m+n$, т.е. $(m-n)(mn+1)=0$. Понатаму, $mn+1\geq 1$, па затоа $m-n=0$, односно $m=n$. Сега е јасно дека $\frac{m}{n}=1$.

5. Докажи го равенството

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}.$$

Решение. Имаме

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{200})$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100})+(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100})$$

$$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}.$$

6. Ако $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, тогаш $a=b=c$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Нека $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$; тогаш $a=bk$, $b=ck$, $c=ak$, т.е. $b=ak^2$ и $a=ak^3$, $k^3=1$, $k=1$ од каде што следува дека $a=b=c$.

Втор начин. Од условот следува дека $ac=b^2$, $a^2=bc$, а оттука $a^3c=b^3c$, $a^3=b^3$, $a=b$. Понатаму од $a^2=bc$ следува $a=c$ и конечно $a=b=c$.

Трет начин. Од условот следува дека $b^2=ac$, $c^2=ab$, $a^2=bc$, односно

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$$

Ако последното равенство го помножиме со 2 и го запишеме во видот

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0,$$

т.е.

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,$$

тогаш ќе добиеме дека $a=b=c$.

7. Пресметај ја вредноста на изразот $(x+y)^2$, ако $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$ и $y-x=1$.

Решение. Од $1=\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=2\frac{y-x}{xy}=2\frac{1}{xy}$ следува дека $xy=2$. Сега,

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2-2xy+y^2+4xy=(x-y)^2+4xy=1^2+4\cdot 2=9.$$

8. Броевите a,b и c се различни од нула и за нив се точни равенствата

$$a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1.$$

Докажи, дека $ab+bc+ca=0$.

Решение. Од равенствата $a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1$ добиваме

$$ac+b=c,\ ab+c=a,\ bc+a=b,$$
$$ac=c-b,\ ba=a-c,\ bc=b-a.$$

Ако ги собереме последните три равенства, добиваме

$$ca+ab+bc=(c-b)+(a-c)+(b-a)=0,$$

што и требаше да се докаже.

9. Ако $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, докажи дека $x=y=z$ или $|xyz|=1$.

Решение. Очигледно $xyz\neq 0$. Од $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ следува $x-y=\frac{y-z}{yz}$. Аналогно $y-z=\frac{z-x}{zx}$ и $z-x=\frac{x-y}{xy}$. Оттука добиваме $x-y=\frac{\frac{z-x}{zx}}{yz}=\frac{1}{xyz^2}\frac{x-y}{xy}=\frac{x-y}{x^2y^2z^2}$ односно $(x-y)(1-\frac{1}{x^2y^2z^2})=0$.

Ако $x-y\neq 0$, тогаш $1-\frac{1}{x^2y^2z^2}=0$, а оттука добиваме $x^2y^2z^2=1$, т.е. $|xyz|=1$.

Ако $1-\frac{1}{x^2y^2z^2}\neq 0$, тогаш $x=y$, односно $x=y=z$.

10. Докажи, дека:

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=\frac{1}{xyz}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=-\frac{1}{x(x-y)(z-x)}-\frac{1}{y(x-y)(y-z)}-\frac{1}{z(y-z)(z-x)}$$
$$=-\frac{yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=-\frac{y^2z-yz^2+xz^2-x^2z+x^2y-xy^2}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=-\frac{-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=-\frac{(x-y)(-zx-zy+z^2+xy)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=-\frac{(x-y)(x(y-z)-z(y-z))}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{1}{xyz}.$$

11. Дропката $\frac{1+n^2+n^7}{1+n+n^8}$ може да се скрати за секој природен број n. Докажи!

Решение. Броителот и именителот ќе ги разложиме на следниот начин:

$$1+n^2+n^7=1+n+n^2-n-n^2-n^3+n^2+n^3+n^4-n^4-n^5-n^6+n^5+n^6+n^7$$
$$=(1+n+n^2)-n(1+n+n^2)+n^2(1+n+n^2)-n^4(1+n+n^2)+n^5(1+n+n^2)$$
$$=(1+n+n^2)(1-n+n^2-n^4+n^5)$$
$$1+n+n^8=1+n+n^2-n^2-n^3-n^4+n^5-n^5-n^6-n^7+n^6+n^7+n^8$$
$$=(1+n+n^2)(1-n^2+n^3-n^5+n^6).$$

Значи, броителот и именителот имаат заеднички делител за секој природен број n. Тоа е бројот $1+n+n^2$, за кој имаме

$$n^2+n+1=n^2+2\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=(n+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq 3>0.$$

Според тоа

$$1+n+n^8=\frac{(1+n+n^2)(1-n+n^2-n^4+n^5)}{(1+n+n^2)(1-n^2+n^3-n^5+n^6)}=\frac{1-n+n^2-n^4+n^5}{1-n^2+n^3-n^5+n^6}.$$

12. Скрати ја дропката $\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}$.

Решение. Според претходната задача имаме

$$x^8+x^4+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

па затоа

$$\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)=x^6-x^5+x^3-x+1.$$

13. Докажи дека

$$\frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=abc,$$

ако $a\neq b\neq c\neq a$ и $a+b+c=0$.

Решение. Бидејќи $a+b+c=0$, имаме $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ и затоа

$$\frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^3(-b)(-c)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(-c)(-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(-a)(-b)}{(c-a)(c-b)}$$
$$=abc(\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)})$$
$$=abc\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-c)(c-b)(b-a)}$$
$$=abc\frac{a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b}{(ac-c^2-ab+bc)(b-a)}$$
$$=abc\frac{a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b}{abc-c^2b-ab^2+b^2c-a^2c+c^2a+a^2b-abc}$$
$$=abc\frac{a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b}{a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+c^2a-c^2b}=abc.$$

14. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}\ ,$$

ако $abc=1$ и $a\neq b\neq c\neq a$.

Решение. Според претходната задача имаме

$$A=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

и како $abc=1$, добиваме $A=\frac{1}{abc}=1$.

15. Ако за реалните броеви x, y и z важи $xyz=1$, докажи дека:

$$(x+\tfrac{1}{x})^2+(y+\tfrac{1}{y})^2+(z+\tfrac{1}{z})^2-(x+\tfrac{1}{x})(y+\tfrac{1}{y})(z+\tfrac{1}{z})=4\ .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
&(x+\tfrac{1}{x})^2+(y+\tfrac{1}{y})^2+(z+\tfrac{1}{z})^2-(x+\tfrac{1}{x})(y+\tfrac{1}{y})(z+\tfrac{1}{z})=\\
&=x^2+2+\tfrac{1}{x^2}+y+2+\tfrac{1}{y^2}+z+2+\tfrac{1}{z^2}-\tfrac{1}{xyz}(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\\
&=6+x^2+y^2+z^2+\tfrac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}-(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\\
&=6+x^2+y^2+z^2+y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2-(x^2y^2+x^2+y^2+1)(z^2+1)\\
&=6+x^2+y^2+z^2+y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2-x^2y^2z^2-\\
&\quad-x^2y^2-x^2z^2-x^2-y^2z^2-y^2-z^2-1\\
&=6-x^2y^2z^2-1=6-1-1=4,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

16. Нека за позитивните броеви a,b и c важи равенството $2b^2=a^2+c^2$. Докажи дека $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$.

Решение. Равенството $2b^2=a^2+c^2$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}
&2b^2+2bc+2ab+2ac=a^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\
&2[b(a+b)+c(a+b)]=(a+c)(2b+a+c)\\
&2(a+b)(b+c)=(a+c)(2b+a+c)\\
&\tfrac{2}{a+c}=\tfrac{(b+a)+(c+a)}{(b+a)(c+a)}\ ,\\
&\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}=\tfrac{2}{c+a}\ ,
\end{aligned}$$

бидејќи $a,b,c>0$.

17. Нека a,b,c се по парови различни реални броеви, такви што

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\ . \qquad (1)$$

Докажи дека $a+\frac{1}{b}=-abc$.

Решение. Нека

$$p=a+\tfrac{1}{b}=b+\tfrac{1}{c}=c+\tfrac{1}{a}.$$

Треба да се докаже дека $p=-abc.$ Последните равенства ги множиме со b,c,a соодветно и добиваме

$$ab+1=pb,\quad bc+1=pc,\quad ca+1=pa.$$

Потоа, со одземање на последните равенства добиваме:

$$b(a-c)=p(b-c),\quad c(b-a)=p(c-a),\quad a(c-b)=p(a-b).$$

Последните три равенства ги множиме и добиваме:

$$abc(a-c)(b-a)(c-b)=p^3(b-c)(c-a)(a-b)$$

т.е.

$$-abc(c-a)(b-c)(a-b)=p^3(b-c)(c-a)(a-b). \qquad (2)$$

Броевите a,b,c се по парови различни, па затоа $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$, па од равенството (2) добиваме $p^3=-abc$. Понатаму, од равенства (1) следува:

$$a-b=\tfrac{1}{c}-\tfrac{1}{b}=\tfrac{b-c}{bc},\quad b-c=\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{c}=\tfrac{c-a}{ac},\quad c-a=\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a}=\tfrac{a-b}{ab},$$

и множејќи ги последните три равенства добиваме:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\tfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}.$$

Што значи дека $(abc)^2=1$, т.е. $abc=\pm 1$. Сега $p^3=-abc=\mp 1$, па затоа $p=-abc$.

18. Нека a, b и c се реални броеви такви што $a^2+b^2=(a+b-c)^2$, $a+b\neq c$ и $b\neq c$. Докажи дека

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$a^2=(a+b-c)^2-b^2=(a-c)(a+2b-c),\ b^2=(a+b-c)^2-a^2=(b-c)(2a+b-c)$$

Според тоа,

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c)+(a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c)+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c+a-c)}{(b-c)(2a+b-c+b-c)}=\frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

19. Нека x,y,z се реални броеви за кои важи равенството $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$.

Докажи дека $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

Решение. Равенството $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$ го множиме со x,y,z и ги добиваме равенствата

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xz}{x+y}=x,\ \frac{xy}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{zy}{x+y}=y \text{ и } \frac{zx}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=z.$$

Ги собираме последните три равенства и последователно добиваме

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{xy}{z+x}+\frac{yz}{z+x}+\frac{xz}{x+y}+\frac{zy}{x+y}+\frac{xy}{y+z}+\frac{zx}{y+z}=x+y+z$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{xy+yz}{z+x}+\frac{xz+zy}{x+y}+\frac{xy+zx}{y+z}=x+y+z$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{(x+z)y}{z+x}+\frac{(x+y)z}{x+y}+\frac{(y+z)x}{y+z}=x+y+z$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+x+y+z=x+y+z$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0.$$

20. Ако $\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0$, тогаш $\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}=0$. Докажи!

Решение. Воведуваме ознаки $A=\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}$ и $B=\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}$.

Ако A се помножи со изразот $C=\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}$ се добива

$$\begin{aligned}AC&=B+\frac{x+y}{(z-x)(y-z)}+\frac{x+z}{(y-z)(x-y)}+\frac{y+z}{(z-x)(x-y)}\\&=B+\frac{(x+y)(x-y)+(z-x)(x+z)+(y-z)(y+z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=B\end{aligned}$$

Конечно, од $A=0$, следува $B=0$.

22. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$. Ако

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=\tfrac{1007}{1008},$$

докажи дека

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=2017.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}&=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(ab)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}\\&=\frac{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3}{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-1}\\&=\frac{\frac{1007}{1008}-3}{\frac{1007}{1008}-1}=2017.\end{aligned}$$

23. Нека x,y,z,u,v,w се реални броеви различни од нула и такви што

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=1 \text{ и } \frac{u}{x}+\frac{v}{y}+\frac{w}{z}=0.$$

Докажи, дека

$$\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}+\frac{z^2}{w^2}=1.$$

Решение. Нека $a=\frac{x}{u}$, $b=\frac{y}{v}$, $c=\frac{z}{w}$. Тогаш,

$$a+b+c=1 \text{ и } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Од последното равенство следува $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$, па затоа $ab+bc+ca=0$. Според тоа,

$$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2.$$

Ако во последното равенство замениме $a=\frac{x}{u}$, $b=\frac{y}{v}$, $c=\frac{z}{w}$, го добиваме равенството $1=\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}+\frac{z^2}{w^2}$, кое и требаше да се докаже.

24. Определи ги реалните броеви x,y,z ако

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2},\quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Решение. Дадените равенства се еквивалентни со равенствата

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2},\quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Од $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}$ следува дека $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$, од каде добиваме $x=\frac{az}{c}, y=\frac{bz}{c}$. Сега,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a}{\frac{az}{c}}+\frac{b}{\frac{bz}{c}}=\frac{2c}{z} \tag{1}$$

Од друга страна

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{\frac{a^2z^2}{c^2}+\frac{b^2z^2}{c^2}+z^2}=\frac{4c^2(a^2+b^2+c^2)}{z^2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{4c^2}{z^2} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека $\frac{2c}{z}=\frac{4c^2}{z^2}$, од каде добиваме $z=2c$. Конечно со замена во $x=\frac{az}{c}$ и $y=\frac{bz}{c}$ наоѓаме $x=2a$ и $y=2b$.

25. Упрости го изразот:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x-6}{3x-3}\cdot(\frac{x+1}{x-2}-\frac{2x+3}{x-3}+\frac{x^2+4x-9}{x^2-5x+6})$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x-6}{3x-3}\cdot(\frac{x+1}{x-2}-\frac{2x+3}{x-3}+\frac{x^2+4x-9}{x^2-5x+6})&=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{3(x-1)}\cdot(\frac{x+1}{x-2}-\frac{2x+3}{x-3}+\frac{x^2+4x-9}{(x-2)(x-3)})\\&=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{3(x-1)}\cdot\frac{(x+1)(x-3)-(2x+3)(x-2)+x^2+4x-9}{(x-2)(x-3)}\\&=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{3(x-1)}\cdot\frac{3x-6}{(x-2)(x-3)}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2\cdot3(x-2)}{3(x-1(x-2)}\\&=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1.\end{aligned}$$

26. Упрости го изразот:

$$\frac{(5c-6d)^2-(3a-4b)^2}{25c^2-(6d+3a-4b)^2}-\frac{25c^2-(6d-3a+4b)^2}{36d^2-(3a-4b+5c)^2}-\frac{36d^2-(3a-4b-5c)^2}{(3a-4b)^2-(5c+6d)^2}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{(5c-6d)^2-(3a-4b)^2}{25c^2-(6d+3a-4b)^2}-\frac{25c^2-(6d-3a+4b)^2}{36d^2-(3a-4b+5c)^2}-\frac{36d^2-(3a-4b-5c)^2}{(3a-4b)^2-(5c+6d)^2}=$$

$$=\frac{(5c-6d-3a+4b)(5c-6d+3a-4b)}{(5c-6d-3a+4b)(5c+6d+3a-4b)}-\frac{(5c-6d+3a-4b)(5c+6d-3a+4b)}{(6d-3a+4b-5c)(6d+3a-4b+5c)}-\frac{(6d-3a+4b+5c)(6d+3a-4b-5c)}{(3a-4b-5c-6d)(3a-4b+5c+6d)}$$

$$=\frac{5c-6d+3a-4b}{5c+6d+3a-4b}+\frac{5c+6d-3a+4b}{6d+3a-4b+5c}+\frac{6d+3a-4b-5c}{3a-4b+5c+6d}=\frac{5c+6d+3a-4b}{5c+6d+3a-4b}=1.$$

27. Нека a,b и c се по парови различни цели броеви. Докажи, дека

$$m=\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

е цел број.

Решение. Имаме

$$m=\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=\frac{a^2b^2(a-b)-c^2(a^3-b^3)+c^3(a^2-b^2)}{ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)}$$

$$=\frac{a^2b^2-c^2(a^2+ab+b^2)+c^3(a+b)}{ab-c(a+b)+c^2}=\frac{a^2b^2-c^2a^2-c^2ab-c^2b^2+c^3a+c^3b}{ab-ac-bc+c^2}$$

$$=\frac{a^2(b^2-c^2)-bc^2(b-c)-ac^2(b-c)}{a(b-c)-c(b-c)}=\frac{a^2(b+c)-bc^2-ac^2}{a-c}=\frac{b(a^2-c^2)+ac(a-c)}{a-c}$$

$$=b(a+c)+ac=ab+bc+ca.$$

Конечно, бидејќи $a,b,c\in\mathbb{Z}$, добиваме дека

$$m=\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca\in\mathbb{Z}.$$

28. Нека x,y,z,u се природни броеви такви што $xy=zu$. Докажи, дека

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2} \tag{1}$$

е природен број.

Решение. Во броителот на (1) ги множиме првиот и третиот множител, вториот и четвртиот множител и ако го искористиме равенството $xy=zu$, добиваме

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}=\frac{(xy+xz+zy+z^2)(xy+xu+uy+u^2)}{(x+y+z+u)^2}=\frac{(uz+xz+zy+z^2)(uz+xu+uy+u^2)}{(x+y+z+u)^2}$$

$$=\frac{z(u+x+y+z)u(z+x+y+u)}{(x+y+z+u)^2}=zu$$

Бидејќи z и u се природни броеви, добиваме дека и бројот (1) е природен број.

29. Броевите x,y,z,a,b и c се такви што

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \text{ и } a+b+c=1,\ a^2+b^2+c^2=1.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $xy+yz+zx$.

Решение. Јасно е дека $a,b,c\neq 0$. Ако $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=0$, тогаш $x=y=z=0$ и затоа $xy+yz+zx=0$.

Ќе докажеме дека и за било која вредност k, $k\neq 0$ таква што $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, важи $xy+yz+zx=0$. Ако го квадрираме равенството $a+b+c=1$ добиваме

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1\,.$$

Сега, од $a^2+b^2+c^2=1$, следува $2(ab+bc+ca)=0$, т.е.

$$ab+bc+ca=0\,. \qquad (1)$$

Понатаму, $a=\frac{1}{k}x, b=\frac{1}{k}y, c=\frac{1}{k}z$, и ако замениме во (1) добиваме

$$\tfrac{1}{k^2}(xy+yz+zx)=0\text{, т.е. } xy+yz+zx=0\,.$$

30. Нека за реалните броеви x,y,z и a важи $x+y+z=a$ и

$$\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}=\tfrac{1}{a}\,. \qquad (1)$$

Докажи дека $x=a$ или $y=a$ или $z=a$..

Решение. Од равенството (1) следува дека $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$ и $a\neq 0$. Според тоа, $x+y+z\neq 0$, па од $x+y+z=a$ следува

$$\tfrac{1}{x+y+z}=\tfrac{1}{a}\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува равенството

$$\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}=\tfrac{1}{x+y+z}\,,$$

кое последователно е еквивалентно со равенствата

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)=xyz\,,$$

$$x^2y+xy^2+xyz+xyz+y^2z+yz^2+zx^2+xyz+z^2x=xyz\,,$$

$$x^2(y+z)++yz(y+z)+xy(y+z)+xz(y+z)=0\,,$$

$$(y+z)(x^2+xy++yz+zx)=0\,,$$

$$(y+z)[x(x+y)+z(x+y)]=0\,,$$

т.е. со неравенството

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0\,. \qquad (3)$$

Од равенството $x+y+z=a$ следува $x+y=a-z$, $y+z=a-x$, $z+x=a-y$, и ако замениме во (3) добиваме

$$(a-z)(a-x)(a-y)=0\,.$$

Од последното равенство следува дека барем еден од броевите $a-x, a-y, a-z$ е еднаков на нула. Значи, $x=a$ или $y=a$ или $z=a$.

31. Определи ја вредноста на изразот

$$\tfrac{x+y}{z+t}+\tfrac{y+z}{t+x}+\tfrac{z+t}{x+y}+\tfrac{t+x}{y+z}$$

ако

$$\tfrac{x}{y+z+t}=\tfrac{y}{z+t+x}=\tfrac{z}{t+x+y}=\tfrac{t}{x+y+z}\,.$$

Решение. *Прв начин.* Додадеме 1 на секоја страна од равенствата и после средувањето добиваме:

$$\tfrac{x+y+z+t}{y+z+t}=\tfrac{x+y+z+t}{z+t+x}=\tfrac{x+y+z+t}{t+x+y}=\tfrac{x+y+z+t}{x+y+z}\,.$$

Ако броителот на дропката е различен од нула, тогаш сите именители се меѓу себе еднакви, т.е.

$$y+z+t=z+t+x=t+x+y=x+y+z\,,$$

а оттука следува дека $x=y=z=t$. Во овој случај вредноста на дадениот израз е еднаква на 4.

Ако броителот е нула, тогаш $x+y=-(z+t)$, па вредноста на првата дропка е еднаква на -1 . Аналогно, вредноста и на останатите дропки е еднаква на -1 , а на дадениот израз таа е еднаква на -4 .

Втор начин. Од $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}$ добиваме

$$x(z+t)+x^2=y^2+y(z+t)$$

$$x^2-y^2+(z+t)(x-y)=0$$

$$(x+y+z+t)(x-y)=0$$

Аналогно добиваме дека

$$(x+y+z+t)(y-z)=0\,,$$

$$(x+y+z+t)(z-t)=0\,,$$

$$(x+y+z+t)(t-x)=0\,.$$

Ако $x+y+z+t=0$, тогаш во дадениот израз секоја од четирите дропки е еднаква на -1 , а вредноста на изразот е -4 .

Ако $x-y=0$, $y-z=0$, $z-t=0$, $t-x=0$, т.е. $x=y=z=t\neq 0$, тогаш вредноста на изразот е 4.

32. Определи ја вредноста на збирот $x+y+u+v$ каде x,y,u,v се по парови различни броеви, такви што

$$\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}\,.$$

Решение. Од условот на задачата имаме $x\neq y\neq u\neq x$, $x\neq u\neq v\neq x$ и $y\neq v$. Дадениот израз можеме да го запишеме во облик

$$(x+u)(y+u)=(x+v)(y+v)$$

$$xy+xu+yu+u^2=xy+xv+yv+v^2$$

$$xu-xv+yu-yv+u^2-v^2=0$$

$$x(u-v)+y(u-v)+(u-v)(u+v)=0$$

$$(u-v)(x+y+u+v)=0\,.$$

Од условот на задачата следува дека $u-v\neq 0$, па затоа $x+y+u+v=0$, што и требаше да се определи.

33. За целите броеви a,b и c е исполнето равенството

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}=\frac{2c}{b+c}\,. \qquad (1)$$

Докажи дека производот bc е точен квадрат.

Решение. Ако $b=0$ или $c=0$, тогаш bc е точен квадрат. Ако $a=0$, тогаш лесно се добива (со замена во равенството) дека $b=c$, па според тоа $bc=c^2=b^2$ е точен квдрат. Затоа нека претпоставиме дека a,b,c се цели броеви различни од нула. Во овој случај равенството (1) можеме да го запишеме во обликот

$$\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}+\frac{1}{1+\frac{a^2}{c^2}}=\frac{2}{1+\frac{b}{a}\frac{a}{c}}.$$

Ќе воведеме смени $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{a}{c}$ и последното равенство ќе го добие обликот

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}=\frac{2}{1+xy}.$$

Последното равенство е еквивалентно со низата равенства

$$\frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{1+xy}$$

$$(2+x^2+y^2)(1+xy)=2(1+x^2)(1+y^2)$$

$$2+x^2+y^2+2xy+x^3y+y^3x=2+2x^2+2y^2+2x^2y^2$$

$$x^3y-2x^2y^2+xy^3-x^2+2xy-y^2=0$$

$$xy(x-y)^2-(x-y)^2=0$$

$$(xy-1)(x-y)^2=0.$$

Од точноста на последното равенство, добиваме два случаи.

Случај 1. $x=y$. Тогаш $\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$, т.е. $bc=a^2$ што и требаше да се докаже.

Случај 2. $xy=1$. Тогаш $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}=1$, т.е. $b=c$ и $bc=c^2=b^2$, што и требаше да се докаже.

34. Рационалните броеви a и b го задоволуваат равенството

$$a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0.$$

Докажи дека бројот $1-ab$ е квадрат на рационален број.

Решение. *Прв начин.* Ќе направиме трансформација на изразот од левата страна на равенството

$$\begin{aligned}a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1&=ab(a^2+2ab+b^2)+2(a+b)+1\\&=ab(a+b)^2-(a+b)^2+(a+b)^2+2(a+b)+1\\&=(ab-1)(a+b)^2+(a+b+1)^2\end{aligned}$$

Сега, од

$$(ab-1)(a+b)^2+(a+b+1)^2=0,$$

Имаме

$$1-ab=\frac{(a+b+1)^2}{(a+b)^2}=(\frac{a+b+1}{a+b})^2.$$

Бидејќи $\frac{a+b+1}{a+b}$ е рационален број кога $a,b\in\mathbb{Q}$, $a+b\neq 0$, следува решението на задачата. Случајот $a+b=0$ не е можен, бидејќи тогаш би добиле $0=1$.

Втор начин. Ако даденото равенство го помножиме со ab, добиваме

$$a^4b^2+a^2b^4+2a^3b^3+2a^2b+2b^2a+ab=0\,.$$

Понатаму,

$$a^2b^2(a^2+2ab+b^2)+2ab(a+b)+1=1-ab$$

$$1-ab=[ab(a+b)]^2+2ab(a+b)+1=[ab(a+b)+1]^2,$$

т.е. $1-ab=[ab(a+b)+1]^2$, што требаше да се докаже.

35. Ако a,b,c се по парови различни рационални броеви, тогаш

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

е точен квадрат на рационален број. Докажи!

Решение. Бидејќи a,b и c се по парови различни рационални броеви, добиваме дека $a-b,b-c,c-a,\frac{1}{c-a},\frac{1}{a-b},\frac{1}{b-c},\frac{1}{(a-b)^2},\frac{1}{(b-c)^2},\frac{1}{(c-a)^2}$ се исто така рационални броеви. Сега дадениот израз можеме да го запишеме во обликот:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})^2-2(\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)})$$

$$=(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})^2-2\,\frac{a-b+b-c+c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})^2$$

Бидејќи $\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}$ е рационален број, тврдењето од задачата е докажано.

36. За природните броеви a,b,c,d се исполнети равенствата $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{ab+1}{cd+1}$. Докажи, дека $a=c$ и $b=d$.

Решение. Бидејќи $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, постои рационален број α таков што

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{ab+1}{cd+1}=\alpha\,.$$

Тогаш $a=\alpha c$, $b=\alpha d$ и $ab+1=\alpha(cd)+1$. Ако во последното равенство замениме $a=\alpha c$ и $b=\alpha d$, добиваме

$$\alpha^2cd-\alpha cd-\alpha+1=0\,,$$

$$\alpha cd(\alpha-1)-(\alpha-1)=0\,,$$

$$(\alpha-1)(\alpha cd-1)=0\,.$$

Притоа можни се два случаи

а) Ако $\alpha-1=0$, т.е. $\alpha=1$, тогаш $a=c$ и $b=d$.

б) Ако $\alpha-1\neq 0$, тогаш $\alpha cd-1=0$, па затоа $(\alpha c)d-1=0$, т.е. $ad=1$. Бидејќи $a,d\in\mathbb{N}$, последното равенство е можно ако и само ако $a=d=1$. Но тогаш $\frac{1}{c}=\frac{b}{1}$, односно $bc=1$. Повторно, бидејќи $b,c\in\mathbb{N}$, добиваме $b=c=1$.

Значи, и во овој случај важи $a=c$ и $b=d$.

37. Нека a,b,c се позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=1$. Докажи, дека

$$ab(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b})+bc(\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c})+ca(\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-a})=1\ ..$$

Решение. Ако изразот од левата страна на равенството го означиме со A, добиваме

$$A=\frac{ab}{1-a}+\frac{ab}{1-b}+\frac{bc}{1-b}+\frac{bc}{1-c}+\frac{ca}{1-c}+\frac{ca}{1-a}=\frac{ab+ac}{1-a}+\frac{ab+bc}{1-b}+\frac{bc+ca}{1-c}$$
$$=\frac{a(b+c)}{1-a}+\frac{b(a+c)}{1-b}+\frac{c(b+a)}{1-c}=\frac{a(1-a)}{1-a}+\frac{b(1-b)}{1-b}+\frac{c(1-c)}{1-c}=a+b+c=1.$$

380. За ненултите реални броеви a, b, c и d се исполнети равенствата $a+b+c+d=0$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0$. Определи ја вредноста на изразот

$$(ab-cd)(c+d).$$

Решение. Условот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0$ можеме да го запишеме во облик $bcd+acd+abd+abc=-1$. Сега, од условот $a+b+c+d=0$ имаме $c+d=-(a+b)$ т.е. $a+b=-(c+d)$. Според тоа,

$$-1=bcd+acd+abd+abc=(bcd+cda)+(dab+abc)=cd(a+b)+ab(d+c)$$
$$=ab(c+d)-cd(c+d)=(c+d)(ab-cd).$$

Значи, за било кои a, b, c, d кои ги исполнуваат условите од задачатавредноста на изразот $(c+d)(ab-cd)$ е еднаква на -1.

39. Нека x, y, z се позитивни реални броеви, такви што $xyz(x+y+z)=1$. Докажи, дека

$$(x^2+\frac{1}{y^2})(y^2+\frac{1}{z^2})(z^2+\frac{1}{x^2})=(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2.$$

Решение. Ако го искористиме равенството $xyz(x+y+z)=1$ добиваме дека

$$x^2+\frac{1}{y^2}=x^2+\frac{xyz(x+y+z)}{y^2}=x^2+\frac{xz(x+y+z)}{y}=\frac{x(x+z)(y+z)}{y}.$$

Аналогно се добива дека $y^2+\frac{1}{z^2}=\frac{y(z+x)(y+x)}{z}$ и $z^2+\frac{1}{x^2}=\frac{z(z+y)(x+y)}{x}$. Според тоа,

$$(x^2+\frac{1}{y^2})(y^2+\frac{1}{z^2})(z^2+\frac{1}{x^2})=\frac{x(x+z)(y+z)}{y}\frac{y(z+x)(y+x)}{z}\frac{z(z+y)(x+y)}{x}$$
$$=(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2.$$

40. Определи ја вредноста на изразот

$$w=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}.$$

Решение. Нека

$$A=(a+b-c)^2,\ B=(c+b-a)^2,\ C=(c+a-b)^2 \text{ и } D=(a-b)(b-c)(c-a).$$

Тогаш, бидејќи

$$A-B=(a+b-c)^2-(c+b-a)^2=(a+b-c+c+b-a)(a+b-c-c-b+a)$$
$$=4b(a-c)$$
$$A-C=(a+b-c)^2-(c+a-b)^2=(a+b-c+c+a-b)(a+b-c-c-a+b)$$
$$=4a(b-c).$$

добиваме

$$w=\frac{A}{(a-c)(b-c)}+\frac{B}{(b-a)(c-a)}+\frac{C}{(c-b)(a-b)}=\frac{-A(a-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D}$$
$$=\frac{A(a-c+c-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D}=\frac{(b-c)(A-B)+(c-a)(A-C)}{D}$$
$$=\frac{4b(b-c)(a-c)+4a(c-a)(b-c)}{D}=\frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{D}=4,$$

41. Броевите a,b,c,m,n,p ги задоволуваат условите

$$\frac{\frac{m}{(a+b)^2}+\frac{n}{(a+c)^2}}{a}=\frac{\frac{n}{(b+c)^2}-\frac{p}{(b+a)^2}}{b}=\frac{\frac{p}{(a+c)^2}+\frac{m}{(b+c)^2}}{c}. \qquad (1)$$

Докажи дека

а) $ap+bm=cn$, б) $\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}$.

Решение. Од равенствата (1), добиваме дека $a,b,c\neq 0$ и постои реален број k, таков што

$$\frac{m}{(a+b)^2}+\frac{n}{(a+c)^2}=ka,\ \frac{n}{(b+c)^2}-\frac{p}{(b+a)^2}=kb,\ \frac{p}{(a+c)^2}+\frac{m}{(b+c)^2}=kc. \qquad (2)$$

а) Ако првото равенство во (2) го помножиме со p, второто равенство го помножиме со m, а третото со $-n$, добиваме

$$\frac{pm}{(a+b)^2}+\frac{pn}{(a+c)^2}=kpa,\ \frac{nm}{(b+c)^2}-\frac{pm}{(b+a)^2}=kmb,\ \frac{-np}{(a+c)^2}+\frac{-nm}{(b+c)^2}=knc.$$

Ги собираме последните три равенства и доиваме $0=kap+kbm-kcn$. Бидејќи $k\neq 0$ и $k(ap+bm-cn)=0$, добиваме $ap+bm-cn=0$, т.е. $ap+bm=cn$.

б) Првото равенство во (2) го множиме со $-\frac{1}{(b+c)^2}$, второто со $\frac{1}{(a+c)^2}$ и третото со $\frac{1}{(a+b)^2}$ и добиваме

$$-\frac{m}{(a+b)^2(b+c)^2}-\frac{n}{(a+c)^2(b+c)^2}=-k\frac{a}{(b+c)^2},$$
$$\frac{n}{(b+c)^2(a+c)^2}-\frac{p}{(b+a)^2(a+c)^2}=k\frac{b}{(a+c)^2},$$
$$\frac{p}{(a+c)^2(a+b)^2}+\frac{m}{(b+c)^2(a+b)^2}=k\frac{c}{(a+b)^2}$$

Ако ги собереме последните три равенства, добиваме

$$-k\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right)=0$$

и бидејќи $k\neq 0$, добиваме

$$\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}.$$

42. Нека за рационалните броеви a, b, c се исполнети условите

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},\ abc\neq 0 \text{ и } a+b+c\neq 0.$$

Докажи дека

а) $a+b=0$ или $a+c=0$ или $b+c=0$,

б) $\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. а) Од равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, заради $abc\neq 0$ и $a+b+c\neq 0$ следува

$$(a+b+c)\cdot(bc+ac+ab)=abc$$
$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=0$$
$$(a+b)(a+c)(b+c)=0\,.$$

Значи, $a+b=0$ или $a+c=0$ или $b+c=0$, што и требаше да се докаже.

б) Без губење од општоста може да земеме дека $a+b=0$, тогаш $b=-a$, па и за секој природен број n важи $b^{2n-1}=(-a)^{2n-1}=-a^{2n-1}$, од каде со замена во равенството

$$\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}} \qquad (1)$$

ги добиваме еквивалентите равенства

$$\frac{1}{a^{2n-1}}-\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}-a^{2n-1}+c^{2n-1}}\text{, т.е. }\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{c^{2n-1}}\,.$$

Конечно, од точноста на последното равенство следува точноста и на равенството (1), што и требаше да се докаже.

43. Ако за позитивните реални броеви $a_1,a_2,\dots,a_{2004},b_1,b_2,\dots,b_{2004},p,q$ важи $a_1^2+a_1^2+\dots+a_{2004}^2=p^2$, $b_1^2+b_2^2+\dots+b_{2004}^2=q^2$, $a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_{2004}b_{2004}=pq$, тогаш $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_{2004}}{b_{2004}}=\frac{p}{q}$. Докажи!

Решение. Првото равенство го множиме со q^2, второто со p^2 и третото со $-2pq$, и ги добиваме равенствата

$$q^2a_1^2+q^2a_2^2+\dots+q^2a_{2004}^2=q^2p^2,\ \ p^2b_1^2+p^2b_2^2+\dots+p^2b_{2004}^2=q^2p^2,$$
$$-2pqa_1b_1-2pqa_2b_2-\dots-2pqa_{2004}b_{2004}=-2p^2q^2\,.$$

Последните три равенства ги собираме и добиваме

$$(qa_1-pb_1)^2+(qa_2-pb_2)^2+\dots+(qa_{2004}-pb_{2004})^2=0$$

од каде заклучуваме дека $qa_1-pb_1=qa_2-pb_2=\dots=qa_{2004}-pb_{2004}=0$, односно дека $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_{2004}}{b_{2004}}=\frac{p}{q}$, што и требаше да се докаже.

44. Ако

$$\frac{a_1}{1+b_1}+\frac{a_2}{1+b_2}+\dots+\frac{a_n}{1+b_n}=\frac{A}{1+B}\ \text{ и }\ \frac{a_1(B-b_1)}{1+b_1}+\frac{a_2(B-b_2)}{1+b_2}+\dots+\frac{a_n(B-b_n)}{1+b_n}=0\,,$$

докажи дека $a_1+a_2+\dots+a_n=A$.

Решение. Ако $k_i=\frac{a_i}{1+b_i}$, $i=1,2,\dots,n$, тогаш од второто равенство следува

$$k_1(B-b_1)+k_2(B-b_2)+\dots+k_n(B-b_n)=0$$
$$B(k_1+k_2+\dots+k_n)=k_1b_1+k_2b_2+\dots+k_nb_n,$$

па затоа важи

$$\begin{aligned}A &= (1+B)(\tfrac{a_1}{1+b_1}+\tfrac{a_2}{1+b_2}+\dots+\tfrac{a_n}{1+b_n}) = (1+B)(k_1+k_2+\dots+k_n)\\ &= k_1+k_2+\dots+k_n+B\left(k_1+k_2+\dots+k_n\right)\\ &= k_1+k_2+\dots+k_n+k_1b_1+k_2b_2+\dots+k_nb_n\\ &= k_1(1+b_1)+k_2(1+b_2)+\dots+k_n(1+b_n)\\ &= a_1+a_2+\dots+a_n\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

45. Докажи, дека за секој природен број $n \geq 2$, постојат различни природни броеви $x_1, x_2, ..., x_n$, такви што

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2013}.$$

Решение. Задачата ќе ја решиме со математичка индукција. Имаме

$$\frac{1}{2013}=\frac{1}{3\cdot 671}=\frac{1}{674}(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{671})=\frac{1}{3\cdot 674}+\frac{1}{671\cdot 674},$$

што значи дека тврдењето важи за $n=2$. Нека тврдењето важи за $n=k$, т.е. нека постојат различни природни броеви $x_1, x_2, ..., x_k$, такви што

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_k}=\frac{1}{2013}.$$

Тогаш $n=k+1$ имаме

$$\frac{1}{2013}=\frac{1}{4026}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k},$$

Но, $x_i \neq 2013$, односно $2x_i \neq 4026$, за $i=1,2..,n$ и $2x_1$, $2x_2$, ..., $2x_k$ се различни природни броеви, па затоа тврдењето важи и за $n=k+1$.

Конечно, од принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број $n \in \mathbb{N}$.

46. Дали може бројот 1 да се претстави во вид на збир:

а) $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}$,

б) $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}+\frac{1}{n_7}+\frac{1}{n_8}+\frac{1}{n_9}$,

каде $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9$ се различни непарни природни броеви?

Решение. а) Вредноста на изразот $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}$ е најголема за најмалите можни допуштени вредности на $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$. Најмали допуштени вредности на $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ се:

$$n_1=3, n_2=5, n_3=7, n_4=9, n_5=11, n_6=13.$$

При тоа имаме

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\\ &\qquad < 0,34+0,20+0,15+0,12+0,10+0,08=0,99<1.\end{aligned}$$

Ако $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ се било кои други вредности различни од 3, 5, 7, 9, 11 и 13, тогаш збирот на реципрочните вредности е помал од збирот $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$, па според тоа и е помал од 1.

Значи, не постојат вредности за n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6 за кои

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=1.$$

б) Во овој случај одговорот на прашањето е потврден. Едно такво претставување е

$$\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=1.$$

47. Докажи, дека за секој природен број $n\ge 3$ постојат n различни природни броеви такви што збирот на нивните реципрочни вредности е еднаков на 1.

Решение. За $n=3$ имаме $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, т.е. тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $n=k$, т.е. дека постојат по парови различни природни броеви $a_1,a_2,...,a_k$ такви што

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=1.$$

Тогаш

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_k}.$$

Јасно, $a_1,a_2,...,a_k>1$, па затоа броевите $2,2a_1,2a_2,...,2a_k$ се по парови различни и притоа важи

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_k},$$

т.е. тврдењето важи и за $n=k+1$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n\ge 3$.

48. Броевите $a_n=1+2+...+n$, $n\in\mathbb{N}$ ги нарекуваме триаголни. Ако за триаголните броеви a_m и a_n е исполнето $2a_m=a_n$, тогаш a_{2m-n} е точен квадрат. Докажи!

Решение. Јасно, $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, равенството $2a_m=a_n$ го добива обликот

$$2\frac{m(m+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}, \text{ т.е. } 2m(m+1)=n(n+1).$$

Сега, ако го искористиме последното равенство, добиваме

$$\begin{aligned}a_{2m-n}&=\tfrac{1}{2}(2m-n)(2m-n+1)\\&=\tfrac{1}{2}(4m^2-4mn+n^2+2m-n)\\&=\tfrac{1}{2}(2m^2+2m+2m^2-4mn+2n^2-n^2-n)\\&=\tfrac{1}{2}(2m^2-4mn+2n^2)\\&=\tfrac{1}{2}2(m^2-2mn+n^2)=(m-n)^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

49. Докажи, дека за секој природен број n важи:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}&=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n})\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n})\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

50. За бројот a е исполнето равенството $a+\frac{1}{a}=1$. Пресметај ја вредноста на изразот $a^5+\frac{1}{a^5}$.

Решение. Користејќи ја формулата

$$A^5+B^5=(A+B)(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4)\text{, за } A=a \text{ и } B=\frac{1}{a},$$

имаме

$$\begin{aligned}a^5+\frac{1}{a^5}&=(a+\frac{1}{a})(a^4-a^3\frac{1}{a}+a^2\frac{1}{a^2}-a\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4})=a^4+\frac{1}{a^4}+1-(a^2+\frac{1}{a^2})\\&=a^4+2+\frac{1}{a^4}-(a^2+\frac{1}{a^2})-1=(a^2+\frac{1}{a^2})^2-(a^2+\frac{1}{a^2})-1\\&=[(a+\frac{1}{a})^2-2a\cdot\frac{1}{a}]^2-[(a+\frac{1}{a})^2-2a\cdot\frac{1}{a}]-1\\&=(1^2-2)^2-(1^2-2)-1=1.\end{aligned}$$

51. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви. Колкава е најголемата вредност на изразот $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}$?

Решение. Ќе докажеме дека дадениот израз е неограничен. Нека x е произволен позитивен реален број. Да ставиме $b=c=d=1$. Постои реален број a така што $a>2x$. Тогаш

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}>\frac{a}{b+c}=\frac{a}{2}>\frac{2x}{2}=x.$$

Значи за секој позитивен реален број x може да се изберат a,b,c,d така што дадениот израз е поголем од x. Според тоа, тој е неограничен, па нема најголема вредност.

52. Најди ја најголемата вредност на дропката $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$, ако $x>0$ и $y>0$.

Решение. Тргнувајќи од очигледното неравенство $(x-y)^2\geq 0$, т.е.

$$x^2-xy+y^2\geq xy,$$

добиваме

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{x^2-xy+y^2+2xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-xy+y^2}+\frac{2xy}{x^2-xy+y^2}=1+\frac{2xy}{x^2-xy+y^2}\leq 1+\frac{2xy}{xy}=3.$$

Значи, максималната вредност на дропката $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ е 3 и се добива за $x=y$ (при $x>0$ и $y>0$).

53. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}},\ x>0.$$

Решение. Ја воведуваме смената $x+\frac{1}{x}=t$. Тогаш

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=t^3-3t,$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=(x^3+\frac{1}{x^3})^2-2=(t^3-3t)^2-2=t^6-6t^4+9t^2-2,$$

па затоа

$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}}=\frac{t^6-(t^6-6t^4+9t^2-2)-2}{t^3+t^3-3t}=\frac{6t^4-9t^2}{2t^3-3t}=3t=3(x+\frac{1}{x})\geq 3\cdot 2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=6.$$

Значи, најмалата вредност на изразот е $A=6$ и таа се достигнува за $x=1$.

54. Нека $a=-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $b=\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$ и $a=\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

За броителот добиваме:

$$\begin{aligned}a^4b-a^4c+b^4c-b^4a+c^4a-c^4b&=b(a^4-c^4)-ac(a^3-c^3)-b^4\left(a-c\right)=\\&=(a-c)(a^3b+a^2bc+abc^2+bc^3-a^3c-a^2c^2-ac^3-b^4)\\&=(a-c)(a^3(b-c)+a^2c(b-c)+ac^2(b-c)-b(b^3-c^3))\\&=(a-c)(b-c)(a^3+a^2c+ac^2-b^3-b^2c-bc^2)\\&=(a-c)(b-c)((a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(ac+bc)+(a-b)c^2)\\&=(a-c)(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2+ac+bc+c^2)\end{aligned}$$

и оттука

$$\begin{aligned}\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}&=\frac{(a-c)(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2+ac+bc+c^2)}{(a-c)(b-c)(a-b)}\\&=a^2+ab+b^2+ac+bc+c^2\\&=\frac{1}{2}((a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2)\\&=\frac{1}{2}((2\sqrt{7})^2+(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2)\\&=\frac{4}{2}(7+3+5)=30.\end{aligned}$$

55. Разложи ја на цели множители разликата:

$$(1+a+a^2+...+a^n)^2-a^n.$$

Решение. Имаме

$$(1+a+a^2+...+a^n)^2-a^n=(\tfrac{1-a^{n+1}}{1-a})^2-a^n=\frac{(1-a^{n+1})^2-a^n(1-a)^2}{(1-a)^2}$$

$$=\frac{(1-a^n)(1-a^{n+2})}{(1-a)^2}=\frac{1-a^n}{1-a}\frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

$$=(1+a+a^2+...+a^{n-1})(1+a+a^2+...+a^{n+1}).$$

3. ИРАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Определи го најголемиот природен број помал од бројот

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}},$$

знаејќи дека $\sqrt[3]{6}>1,6$.

Решение. Од $\sqrt{6}>2,4$ и $\sqrt[3]{6}>1,6$ следува

$$4<\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}.$$

Од друга страна

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+3}}}=3$$

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+2}}}=2,$$

односно

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<3+2=5.$$

Значи, бараниот број е 4.

2. За кои рационални броеви a,b,c вредноста на изразот

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$$

е рационален број?

Решение. Да забележиме дека $a\neq b\neq c\neq a$. Воведуваме смена $x=a-b$, $y=b-c.$ Тогаш $-x-y=c-a$. За дадениот израз добиваме:

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}}=\sqrt{\frac{x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3}{x^2y^2(x+y)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x^2+y^2+xy)^2}}{|xy(x+y)|}=\frac{|x^2+y^2+xy|}{|xy(x+y)|}.$$

Имајќи предвид дека x,y се рационални броеви последниот количник е рационален број, за секои a,b и c такви што $a\neq b\neq c\neq a$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n}+\underbrace{111...1}_{n+1}+\underbrace{666...6}_{n}+8}\,.$$

Решение. Нека $\underbrace{111...1}_{n}=a$. Тогаш

$$\underbrace{666...6}_{n}=6a,\quad \underbrace{111...1}_{n+1}=10a+1,$$

$$\underbrace{111...1}_{2n}=10^n a+a=(\underbrace{999...9}_{n}+1)a+a=9a^2+2a,$$

па, затоа

$$A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n}+\underbrace{111...1}_{n+1}+\underbrace{666...6}_{n}+8}=\sqrt{9a^2+18a+9}=\sqrt{9(a^2+2a+1)}$$

$$=3\sqrt{(a+1)^2}=3(a+1)=3(\underbrace{111...1}_{n}+3)=\underbrace{33...33}_{n}6.$$

4. Ако $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}\,.$$

Доокажи

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+...+\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{a_1+a_2+...+a_n}\sqrt{b_1+b_2+...+b_n}\,.$$

Решение. Нека $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}=k$. Тогаш $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2,\dots,a_n=kb_n$, па затоа

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+...+\sqrt{a_nb_n}&=b_1\sqrt{k}+b_2\sqrt{k}+b_3\sqrt{k}+...+b_n\sqrt{k}\\&=(b_1+b_2+...+b_n)\sqrt{k}\\&=\sqrt{b_1+b_2+...+b_n}\sqrt{b_1+b_2+...+b_n}\sqrt{k}\\&=\sqrt{a_1+a_2+...+a_n}\sqrt{b_1+b_2+...+b_n}.\end{aligned}$$

5. Пресметај $\sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}}:\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}$, $m>n$.

Решение. Имаме

$$\sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}}:\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}}=1\,.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}\,.$$

Решение. Имаме

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-2\cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3},$$

$$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{2}\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1,$$

па затоа

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=1\,.$$

7. Да се докаже дека

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\begin{cases}2, & 1\le x\le 2\\ 2\sqrt{x-1}, & x>2.\end{cases}$$

Решение. Левата страна на даденото равенство да ја означиме со $P(x)$. Да забележиме дека $P(x)\ge 0$. Имаме

$$[P(x)]^2=x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)}=2x+2\sqrt{(x-2)^2}=2x+2\,|\,x-2\,|\,.$$

Ако $1\le x\le 2$, тогаш $[P(x)]^2=2x-2x+4=4$, т.е. $P(x)=2$.

Ако $x\ge 2$, тогаш $[P(x)]^2=2x+2x-4=4x-4=4(x-1)$, т.е. $P(x)=2\sqrt{x-1}$.

8. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}\,.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}&=\sqrt[3]{3^3-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}-\sqrt[3]{26^3}}+\sqrt[3]{26}\\&=\sqrt[3]{(3-\sqrt[3]{26})^3}+\sqrt[3]{26}=3-\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26}=3.\end{aligned}$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\,.$$

Решение. Имаме

$$\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}=1+2\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1=(1+\sqrt{\sqrt{2}-1})^2,$$
$$\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}=1-2\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1=(1-\sqrt{\sqrt{2}-1})^2,$$

па затоа

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}+1-\sqrt{\sqrt{2}-1}=2\,.$$

10. Определи го множеството вредности на изразот $(x-y)(y-z)(z-x)$ ако $x,\ y$ и z се реални броеви за кои

$$\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\,.$$

Решение. Даденото равенство можеме да го запишеме во облик

$$\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{z}\,.$$

Ако квадрираме, добиваме

$$(\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{z})^2$$
$$2\sqrt{y}\sqrt{x-y+z}=2\sqrt{x}\sqrt{z}\,.$$

Ако повторно квадрираме добиваме

$$y(x-y+z)=xz$$

$$xy-y^2-(xz-yz)=0$$
$$y(x-y)-z(x-y)=0$$
$$(x-y)(y-z)=0\ .$$

Сега е јасно дека вредноста на изразот е еднаков на

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0(z-x)=0\ .$$

11. Докажи, дека ако $(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=1$, тогаш $x+y=0$.

Решение. Го множиме равенството

$$(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=1$$

со $x-\sqrt{x^2+1}$ и добиваме

$$(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=x-\sqrt{x^2+1}\ ,$$

односно

$$-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}\ . \qquad (1)$$

Слично, ако го помножиме даденото равенство со $y-\sqrt{y^2+1}$ добиваме

$$-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}\ . \qquad (2)$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме

$$-y-x-\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}+y-\sqrt{y^2+1}\ ,$$

а оттука следува дека $2(x+y)=0$, односно $x+y=0$.

12. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\ .$$

Решение. За секој природен број k важи

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\ .$$

Ако за $k=1,2,...,100$ го искористиме горниот идентитет, добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+...+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9.$$

13. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}\ .$$

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}$$
$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Според тоа,

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\ldots+\frac{\sqrt{99}}{99}-\frac{\sqrt{100}}{100}$$
$$=1-\frac{10}{100}=\frac{9}{10}.$$

Втор начин. Имаме

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Според тоа,

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$$
$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

14. Рационализирај ја дропката

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}.$$

Решение. Ја користиме формулата за разлика на кубови:

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2),$$

при што $A=\sqrt[3]{3}$, $B=\sqrt[3]{2}$, па добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}.$$

15. Рационализирај ја дропката $\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

Решение. Ако ставиме $\sqrt[3]{2}=x$, тогаш $\sqrt[3]{4}=x^2$, па дропката го добива видот

$$\frac{1}{1+3x+2x^2}=\frac{1}{(x+1)(2x+1)}.$$

Очигледно, именителот ќе биде рационализиран само ако се изрази преку x^3, $x^3=(\sqrt[3]{2})^3=2$. Затоа користејќи го идентитетот $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, ја множиме дропката со производот $(x^2-x+1)(4x^2-2x+1)$, и добиваме

$$\frac{1}{(x+1)(2x+1)}=\frac{(x^2-x+1)(4x^2-2x+1)}{(x^3+1)(8x^3+1)}.$$

Ако замениме $x=\sqrt[3]{2}$, добиваме

$$\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)(4\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+1)}{(2+1)(2\cdot8+1)}=\frac{7\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}-11}{51}.$$

16. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е определена со

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2}.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $f(1)+f(2)+\ldots+f(2018)$.

Решение. За секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{x+1-(x-1)}=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}),$$

па затоа

$$f(1)+f(2)+...+f(2018)=\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0})+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{1})+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})+...+$$
$$+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2017}-\sqrt[3]{2015})+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2018}-\sqrt[3]{2016})+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2019}-\sqrt[3]{2017})$$
$$=\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2019}+\sqrt[3]{2018}-1).$$

17. Упрости го изразот

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-2}(x^{-1}+y^{-1})+2(\sqrt{x}^{-1}+\sqrt{y}^{-1})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}.$$

Решение. Имаме

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-2}(x^{-1}+y^{-1})+2(\sqrt{x}^{-1}+\sqrt{y}^{-1})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}=\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}+\frac{2(x+y)}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}$$
$$=\frac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2(x+y)\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}$$
$$=\frac{\sqrt{x}^3+3\sqrt{x}^2\sqrt{y}+3\sqrt{x}\sqrt{y}^2+\sqrt{y}^3}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}=\frac{1}{xy}.$$

18. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}.$$

Решение. За секој природен број k важи

$$1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^4+2k^3+k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}=(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)})^2,$$

па затоа

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Ако за $k=1,2,...,2017$ го искористиме последниот идентитет, добиваме дека

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}=$$
$$=(1+\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2})+(1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+...+(1+\tfrac{1}{2017}-\tfrac{1}{2018})$$
$$=2017\cdot 1+\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{2017}-\tfrac{1}{2018}$$
$$=2017+1-\tfrac{1}{2018}=2018-\tfrac{1}{2018}.$$

19. Нека x и y се реални броеви такви што

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a.$$

Пресметај ја вредноста на $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Левата страна на даденото равенство можеме да го запишеме во вид

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=\sqrt{\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2})}$$
$$=\sqrt{\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2})$$
$$=(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2})^{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2})^1=(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}$$

Сега очигледно е дека $\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}=a^{\frac{2}{3}}$, т.е. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

20. Пресметај $(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1):3}$.

Решение.Ако $\sqrt[3]{2}=A$, тогаш $A^3=2$, па имаме

$$(A+1)\sqrt[3]{\frac{A-1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{(A+1)^3(A-1)}{3}}=\sqrt[3]{\frac{(A^2-1)(A^2+2A+1)}{3}}=\sqrt[3]{\frac{A^4+2A^3-2A-1}{3}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{A^3(A+2)-2A-1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2(A+2)-2A-1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2A+4-2A-1}{3}}=1.$$

21. Пресметај колку е $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Решение. *Прв начин.* Со алгебарски трансформации на изразот добиваме:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$$

Втор начин. Да ставиме

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x.$$

Ако двете страни на последното равенство ги кубираме, по средувањето ќе добиеме: $x^3-6x-40=0$. Оваа равенка, е еквивалентна (во $\mathbb{R}$) со равенката

$$(x-4)(x^2+4x+10)=0.$$

Но,

$$x^2+4x+10=(x+2)^2+6\geq 6,$$

па затоа последната равенка има единствено реално решение $x=4$.

22. Даден е изразот

$$S=\frac{1}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}+....+\frac{1}{(n+k)\sqrt{n+k-1}+(n+k-1)\sqrt{n+k}}.$$

За кои вредности на n дадениот израз може да биде рационален број. За најдените вредности на определи ја најмалата вредност за k за кои S е рационален број.

Решение. Имаме

$$\frac{1}{(n+p)\sqrt{n+p-1}+(n+p-1)\sqrt{n+p}}=\frac{(n+p)\sqrt{n+p-1}-(n+p-1)\sqrt{n+p}}{(n+p)^2(n+p-1)-(n+p-1)^2(n+p)}$$

$$=\frac{(n+p)\sqrt{n+p-1}-(n+p-1)\sqrt{n+p}}{(n+p)(n+p-1)[(n+p)-(n+p-1)]}$$
$$=\frac{(n+p)\sqrt{n+p-1}-(n+p-1)\sqrt{n+p}}{(n+p)(n+p-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{n+p-1}}{n+p-1}-\frac{\sqrt{n+p}}{n+p}.$$

Сега дадениот израз можеме да го запишеме во облик

$$S=(\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}-\frac{\sqrt{n}}{n})+(\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1})...+(\frac{\sqrt{n+k-1}}{n+k-1}-\frac{\sqrt{n+k}}{n+k})=\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}-\frac{\sqrt{n+k}}{n+k}.$$

Бидејќи n е природен број, изразот ќе биде рационален број ако $n=p^2+1$ каде p е природен број, а во тој случај $k=2p$. Притоа $S=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p(p+1)}$.

23. За позитивните рационални броеви a,b и c е исполнето равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ е рационален број.

Решение. Равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во видот

$$ac+bc=ab,$$

односно

$$ab-ac-bc=0.$$

Тогаш

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-ac-bc)=(a+b-c)^2.$$

Сега

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b-c)^2}=|a+b-c|,$$

Бидејќи $a,b,c\in\mathbb{Q}^+$, добиваме $|a+b-c|\in\mathbb{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\in\mathbb{Q}^+$.

24. Дадени се реалните броеви $a,b,c,d\geq 0$ за кои важи

$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}.$$

Докажи дека $ad=bc$.

Решение. Ако $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}$ го квадрираме, добиваме

$$2\sqrt{ac}\sqrt{bd}=ad+bc.$$

Со негово квадрирање добиваме

$$4acbd=(ad)^2+2adbc+(bc)^2,$$

односно

$$(ad)^2-2adbc+(bc)^2=0.$$

Тогаш, од $(ad-bc)^2=0$ следува $ad=bc$, што требаше да се докаже.

25. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc>4$. За кои вредности на a,b и c изразот $\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}-\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{abc}-2}$ е рационален број.

Решение. Од условот на задачата имаме $a,b,c>0$ и $\sqrt{abc}-2>0$. Затоа

$$\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}-\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{\sqrt{\frac{abc-4\sqrt{abc}+4}{a}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{abc}-2)^2}{a}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Според тоа, изразот е рационален број ако и само ако a е точен квадрат на рационален број , т.е. $a=\frac{m^2}{n^2}$, а b и c се произволни позитивни реални броеви.

26. Даден е изразот $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ (a,b,c и d се рационални броеви). Кој услов треба да го исполнуваат a, b, c и d за да тој е рационален број.

Решение. Изразот $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ можеме да го запишеме во обликот

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}=\frac{(a\sqrt{2}+b)(c\sqrt{2}-d)}{(c\sqrt{2}+d)(c\sqrt{2}-d)}=\frac{2ac-bd+(bc-ad)\sqrt{2}}{2c^2-d^2}.$$

Сега е јасно, бидејќи броевите a, b, c и d се рационални, дека $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ е рационален ако и само ако $bc-ad=0$, т.е. $bc=ad$. Во тој случај, ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, тогаш $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}=\frac{bk\sqrt{2}+b}{dk\sqrt{2}+d}=\frac{b}{d}$.

27. Најди потребен и доволен услов за да бројот $\frac{ax+b}{cx+d}$ биде рационален, ако $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ и $x\notin\mathbb{Q}$.

Решение. Ќе покажеме дека $ad=bc$ е потребен и доволен услов за да $\frac{ax+b}{cx+d}$ биде рационален број.

Имаме

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cx+d}.$$

Бидејќи бројот x е ирационален, тогаш и cx, $cx+d$, $\frac{1}{cx+d}$ и $\frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cx+d}$ се ирационални броеви. За да бројот $\frac{ax+b}{cx+d}$ биде рационален потребно е да $\frac{bc-ad}{c}=0$, т.е. $ad=bc$.

Овој услов е и доволен, бидејќи од $ad=bc$ следува $b=\frac{ad}{c}$, односно $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+\frac{ad}{c}x}{cx+d}=\frac{a}{c}\frac{cx+d}{cx+d}=\frac{a}{c}$, е рационален број.

28. За $x\neq 1$ и $x\geq 0$, докажи дека вредноста на изразот

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$$

не зависи од x.

Решение. Изразот е дефиниран за $x\geq 0$, $x\neq 1$. За $x\geq 0$, $x\neq 1$ важи

$$\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}=\sqrt[3]{(\sqrt{x})^3-3(\sqrt{x})^2 2+3(\sqrt{x})2^2-2^3}=\sqrt{x}-2$$

и

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}\ .$$

Користејќи и дека $3\pm 2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm 1)^2$ имаме:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=1.$$

29. Ако m,n,p,a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи

$$m:a=n:b=p:c$$

тогаш

$$\sqrt{ma}+\sqrt{nb}+\sqrt{pc}=\sqrt{(m+n+p)(a+b+c)}\ .$$

Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sqrt{ma}+\sqrt{nb}+\sqrt{pc}&=\sqrt{\tfrac{m}{a}}\cdot a+\sqrt{\tfrac{n}{b}}\cdot b+\sqrt{\tfrac{p}{c}}\cdot c=\sqrt{\tfrac{m}{a}}\cdot(a+b+c)\\&=\sqrt{\tfrac{m}{a}}\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b+c}\\&=\sqrt{m+\tfrac{m}{a}b+\tfrac{m}{a}c}\cdot\sqrt{a+b+c}=\sqrt{m+\tfrac{n}{b}b+\tfrac{p}{c}c}\cdot\sqrt{a+b+c}\\&=\sqrt{m+n+p}\cdot\sqrt{a+b+c}=\sqrt{(m+n+p)(a+b+c)}.\end{aligned}$$

30. Дадени се реалните броеви $a,b,c\geq 0$ за кои важи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$ и $a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$. Докажи дека

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ .$$

Решение. Од равенството $a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$ следува :

$$a=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-b=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})$$

и

$$b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-a=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\ .$$

Ако ги искористиме последните равенства, добиваме:

$$\begin{aligned}a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})\end{aligned}\ .$$

Од последните две равенства, бидејќи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$, имаме

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ .$$

31. Нека $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$, каде што $n\in\mathbb{N}$. Пресметај ја вредноста на изразот $f(1)+f(2)+\ldots+f(40)$.

Решение. Нека $2n-1=a$ и $2n+1=b$. Тогаш $4n=a+b$ и $4n^2-1=ab$.

$$\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{a-b}.$$

Оттука,

$$\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{a-b}=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}=\frac{(2n+1)\sqrt{2n+1}-(2n-1)\sqrt{2n-1}}{2}.$$

Тогаш:

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(40)=\tfrac{1}{2}((3\sqrt{3}-1)+(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})+\ldots+(81\sqrt{81}-79\sqrt{79}))$$
$$=\tfrac{1}{2}(81\sqrt{81}-1)=364.$$

32. Да се пресмета

$$\frac{1}{\sqrt{c}}[(a+b\sqrt{c})^5-(a-b\sqrt{c})^5].$$

Решение. Според биномна формула имаме

$$(a+b\sqrt{c})^5=a^5+5a^4b\sqrt{c}+10a^3b^2c+10a^2b^3c\sqrt{c}+5ab^4c^2+b^5c^2\sqrt{c}$$
$$\left((a-b\sqrt{c})\right)^5=a^5-5a^4b\sqrt{c}+10a^3b^2c-10a^2b^3c\sqrt{c}+5ab^4c^2-b^5c^2\sqrt{c}$$

Според тоа

$$\frac{1}{\sqrt{c}}[(a+b\sqrt{c})^5-(a-b\sqrt{c})^5]=\frac{1}{\sqrt{c}}(10a^4b\sqrt{c}+20a^2b^3c\sqrt{c}+2b^5c^2\sqrt{c})$$
$$=10a^4b+20a^2b^3c+2b^5c^2.$$

33. Нека $a\in\mathbb{N}$ е даден природен број. Да се определат сите природни броеви n за кои

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{\sqrt{a-n}+a}{\sqrt{a-n}+a+1}.$$

Решение. Равенството $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ е точно за било кој природен број k. Според тоа, левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Според тоа, равенката го добива обликот

$$\frac{n}{n+1}=\frac{\sqrt{a-n}+a}{\sqrt{a-n}+a+1},$$

која може да се трансформира во облик

$$a-n=\sqrt{a-n}.$$

Бидејќи $n\le a$, добиваме дека единствено решение на последната равенка е $n=a$.

34. Докажи дека ако

$$a_0^{a_1}=a_1^{a_2}=\ldots=a_{1995}^{a_{1996}}=a_{1996}^{a_0},\ a_i\in\mathbb{R}^+,$$

тогаш $a_0 = a_1 = ... = a_{1995} = a_{1996}$.

Решение. Нека $a_0 \ge a_1$. За да важи $a_0^{a_1} = a_1^{a_2}$, мора $a_1 \le a_2$, итн. Така се добива

$$a_0 \ge a_1 \Rightarrow a_1 \le a_2 \Rightarrow a_2 \ge a_3 \Rightarrow ... \Rightarrow a_{1995} \le a_{1996}$$
$$\Rightarrow a_{1996} \ge a_0 \Rightarrow a_0 \le a_1 \Rightarrow ... \Rightarrow a_{1996} \ge a_0,$$

т.е. $a_0 = a_1 = ... = a_{1996}$. На ист начин постапуваме и при претпоставката $a_0 \le a_1$.

35. Нека $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$. За позитивните реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ се исполнети равенствата $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = ... = \frac{x_n}{x_{n+1}}$. Докажи дека

$$\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{x_2+x_3+x_4+...+x_{n+1}} = \frac{\sqrt[n]{x_1}}{\sqrt[n]{x_{n+1}}}.$$

Решение. Ќе воведеме ознака $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = ... = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha$. Тогаш

$$x_1 = \alpha x_2,\ x_2 = \alpha x_3,\ x_3 = \alpha x_4, ...,\ x_n = \alpha x_{n+1},$$

од каде добиваме

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = (x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{n+1})\alpha,$$

односно $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{x_2+x_3+x_4+...+x_{n+1}} = \alpha$. Сега од равенствата

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{x_2+x_3+x_4+...+x_{n+1}},\ \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{x_2+x_3+x_4+...+x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{x_2+x_3+x_4+...+x_{n+1}}$$

со нивно множење добиваме

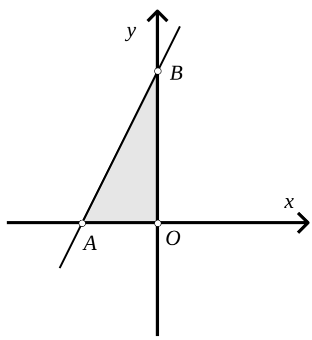
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{x_2+x_3+x_4+...+x_{n+1}}\right)^n = \frac{x_1}{x_{n+1}},$$

Значи,

$$\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{x_2+x_3+x_4+...+x_{n+1}} = \frac{\sqrt[n]{x_1}}{\sqrt[n]{x_{n+1}}}.$$

4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Нацртај го графикот на функцијата $f(x) = 2x + b$, знаејќи дека тој минува низ точката $M(-1,2)$, а потоа одреди ја плоштината на триаголникот што графикот го гради со координатните оски.



Решение. Ако графикот на функцијата $f(x) = 2x + b$, т.е. правата $y = 2x + b$ минува низ точката $M(-1,2)$, тогаш координатите на точката M ја задоволуваат равенката на правата, т.е.

$$2 = 2 \cdot (-1) + b,$$

од каде што $b = 4$. Тогаш $f(x) = 2x + 4$, а пресециите со координатните оски се точките $A(-2,0)$ и

$B(0,4)$. Плоштината на $\triangle AOB$ е

$$P=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4.$$

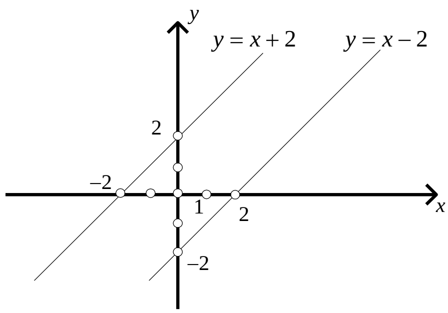
2. Нацртај го графикот на решенијата на равенката $x^2+y^2=4+2xy$.

Решение. Ја трансформираме равенката во видот:

$x^2-2xy+y^2-4=0$,

$(x-y)^2-2^2=0$

$(x-y-2)(x-y+2)=0$.



Следствено,

$x-y-2=0$ или $x-y+2=0$,

т.е.

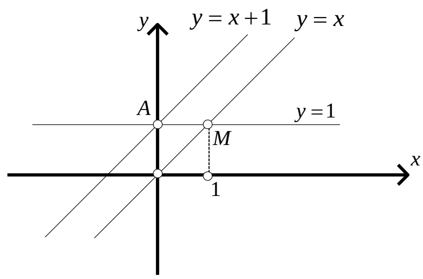
$y=x-2$ или $y=x+2$. (*)

Тоа значи дека графикот на дадената равенка е унија од графиците на равенките (*) а тоа се две прави, чии графици се дадени на црт.1. Следствено, графикот на дадената равенка е множеството точки од две паралелни прави.

3. Колку прави можат да се повлечат низ точката $M(1,1)$, кои што не го сечат графикот на функцијата $y=x+\frac{x}{x}$?

Решение. Бидејќи $x\neq 0$, дадената функција ја запишуваме во видот

$y=x+1,\ x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.



Нејзиниот график е права без точката $A(0,1)$. Следствено, низ точката $M(1,1)$ можеме да повлечеме две прави, кои што не го сечат графикот на дадената функција. Едната од нив е правата $y=x$, која што е паралелна со правата $y=x+1$, а втората е правата $y=1$, што минува низ точките $A(0,1)$ и $M(1,1)$ (види цртеж).

4. Доменот на секоја од променливите $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$ е множеството $\{-1,1\}$. Одреди го множеството вредности на функцијата

$$y=x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8 .$$

Решение. Збирот на парен број непарни собироци секогаш е парен број. При тоа, $y_{\min}=-8$ за $x_1=x_3=x_5=x_7=-1$ и $x_2=x_4=x_6=x_8=1$. При промена на знаците на било кој од собироците $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$ збирот y се менува за 2. Следствено, множеството вредности на функцијата y е

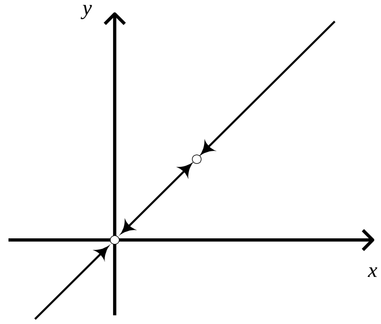
$$\{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}.$$

5. Ако $f(x)=\frac{1}{1-x}$, нацртај го графикот на функцијата $y=f(f(f(x)))$.

Решение. Дефиниционата област на функцијата f е $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Понатаму е:

$$f(f(x))=\frac{x-1}{x},$$

чија дефинциона област е $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. На крајот имаме $f(f(x))=x$, со дефинициона област $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.



Следствено, разгледуваната функција, во својата дефинициона област се совпаѓа со функцијата $y=x$, па нејзиниот график (види цртеж) е правата $y=x$ без точките $(0,0)$ и $(1,1)$.

6. Да се реши функционалната равенка

$$f(x)+f(\tfrac{1}{x})=-63x,$$

на множеството $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Решение. Ако воведеме смена $\frac{1}{x}=t$, т.е. $x=\frac{1}{t}$, при што добиваме

$$f(\tfrac{1}{t})+8f(t)=-63\tfrac{1}{t}.$$

Значи, $f(\frac{1}{x})+8f(x)=-63\frac{1}{x}$. Ако првата равенка од системот

$$\begin{cases} f(x)+8f(\frac{1}{x})=-63x \\ f(\frac{1}{x})+8f(x)=-\frac{63}{x} \end{cases},$$

ја помножиме со $-\frac{1}{8}$ и ја собереме со втората равенка, добиваме

$$-\tfrac{1}{8}f(x)+8f(x)=\tfrac{63}{8}-63\tfrac{1}{x}$$

од каде дбиваме $f(x)=x-\frac{8}{x}$. Не е тешко да се провери дека $f(x)=x-\frac{8}{x}$ е решение на почетната равенка. Значи, единствено решение на равенката е $f(x)=x-\frac{8}{x}$.

7. Да се определат сите функции f за кои

$$\tfrac{1}{x}f(-x)-f(\tfrac{1}{x})=x, \qquad (1)$$

за $x\neq 0$.

Решение. Ако во равенката (1) воведеме смена $\frac{1}{x}=-t$, т.е. $t=-\frac{1}{x}$, $x=-\frac{1}{t}$, $-x=\frac{1}{t}$, добиваме $-tf(\frac{1}{t})+f(-t)=-\frac{1}{t}$, па затоа $t^2f(\frac{1}{t})-tf(-t)=1$, т.е.

$$x^2f(\tfrac{1}{x})-xf(-x)=1. \qquad (2)$$

Равенката (1) ќе ја помножиме со x, при што добиваме

$$f(-x)+xf(\tfrac{1}{x})=x^2. \qquad (3)$$

Ако сега пак равенката (3) ја помножиме со x и од неа ја одземеме (2), добиваме $2xf(-x)=x^3-1$, т.е. $f(-x)=\frac{x^3-1}{2x}$. Сега, со смена $-x=z$, имаме $f(z)=\frac{z^3+1}{2z}$.

Не е тешко да се провери дека функцијата $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$ е решение на равенката.

8. Одреди ги функциите $f(x)$ и $g(x)$, ако

$$f(\tfrac{x+1}{x})+g(2x-3)=3x \tag{1}$$

$$f(\tfrac{x+1}{x})-g(2x-3)=2-x. \tag{2}$$

Решение. Со собирање, а потоа одземање на равенките (1) и (2) добиваме $f(\frac{x+1}{x})=x+1$ и $g(2x-3)=2x-1$. За одредување на $f(x)$ ја воведуваме смената $\frac{x+1}{x}=t$. од каде што $x+1=tx$, $x(t-1)=1$, $x=\frac{1}{t-1}$, па ќе имаме $f(t)=\frac{1}{t-1}+1=\frac{t}{t-1}$, т.е. $f(x)=\frac{x}{x-1}$. Аналогно, воведувајќи смена $2x-3=y$, добиваме $x=\frac{y+3}{2}$, па следува $g(y)=2\frac{y+3}{2}-1=y+2$, т.е. $g(x)=x+2$.

9. Ако $f(\frac{x+1}{x-1})+f(\frac{x-1}{x+1})=x$, најди $f(x)$.

Решение. *Прв начин.* Да ставиме $\frac{x+1}{x-1}=t$, тогаш $x=\frac{t+1}{t-1}$, па добиваме:

$$f(t)+2f(\tfrac{1}{t})=\tfrac{t+1}{t-1}. \tag{1}$$

Ако, пак, ставиме $\frac{x-1}{x+1}=t$, тогаш $x=\frac{1+t}{1-t}$, па добиваме:

$$f(\tfrac{1}{t})+2f(t)=\tfrac{t+1}{t-1} \tag{2}$$

Од (1) и (2) наоѓаме $f(t)=\frac{1+t}{1-t}$; следствено: $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

Втор начин. Со смената $y=\frac{x+1}{x\in 1}$ добиваме:

$$y(x-1)=x+1,\ yx-x=x+1,\ x=\tfrac{y+1}{y-1}.$$

Тогаш $f(y)+2f(\frac{1}{y})=\frac{y+1}{y-1}$. Ако сега наместо y ставиме $\frac{1}{y}$, добиваме:

$$f(\tfrac{1}{y})+2f(y)=-\tfrac{y+1}{y-1}. \tag{3}$$

Значи, $f(y)+2f(\frac{1}{y})=-f(\frac{1}{y})-2f(y)$, т.е.

$$f(\tfrac{1}{y})=-f(y). \tag{4}$$

Ако (4) замениме во (3), добиваме: $f(y)-2f(y)=\frac{y+1}{y-1}$, т.е. $f(y)=\frac{y+1}{1-y}$. Значи, $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

10. Нека $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+1990$. Најди $f(1)$ и $f(2)$.

Решение. Да ставиме $x+\frac{1}{x}=t$; тогаш:

$$(x+\tfrac{1}{x})^2 = t^2$$
$$x^2+\tfrac{1}{x^2}+2 = t^2$$
$$x^2+\tfrac{1}{x^2} = t^2-2$$

Функцијата го добива видот $f(t)=t^2-2+1990$, т.е. $f(t)=t^2+1988$. Тогаш

$$f(1)=1^2+1988=1989 \text{ и } f(2)=2^2+1988=1992$$

11. За кои вредности на a и b функцијата $y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$ е константа за секоја вредност на x?

Решение. Нека $\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}=k$, $k\neq 0$ е константа. Тогаш:

$$(a-k)x^2+(b-bk)x+1-ka=0 \qquad (*)$$

Левата страна на (*) ќе биде еднаква на нула за секоја допустлива вредност на x, само ако истовремено важат условите $a-k=0$, $b(1-k)=0$, $1-ak=0$. Решавајќи го овој систем равенки добиваме $a=k$, $1-a^2=0 \Rightarrow a_1=1$, $a_2=-1$.

За $a=1$, т.е. $k=1$ имаме: $b\cdot 0=0$, т.е. b може да биде било кој реален број.

За $a=-1$, т.е. $k=-1$ имаме: $b(-2)=0$, т.е. $b=0$.

Конечно добиваме дека функцијата е константна ако:

1) $a=1$, b е произволен реален број,

2) $a=-1, b=0$.

12. Нека S е множеството на непарните цели броеви. Во S дефинираме операција „$*$“ на следниот начин: $\forall\, a,\, b\in S$, $a*b=a+b+1$. Провери дали структурата $(S,*)$ е комутативна група.

Решение. 1) Збирот на кои било два непарни броја е парен број, па, значи, за било кои $a,b\in S$, $a+b+1\in S$, т.е. $a*b\in S$, т.е. $(S,*)$ е групоид.

2) Да провериме дека важи асоцијативниот закон. Имаме:

$$a*(b*c)=a+(b*c)+1=a+(b+c+1)+1=a+b+c+2$$
$$(a*b)*c=(a*b)+c+1=(a+b+1)+c+1=a+b+c+2$$

т.е. $a*(b*c)=(a*b)*c$, за било кои $a,b,c\in S$, што значи дека $(S,*)$ е полугрупа.

3) Да видиме дали во полугрупата $(S,*)$ има неутрален елемент, т.е. таков елемент $e\in S$, за кој важи $a*e=e*a=a$, за секој $a\in S$. Од $a*e=a+e+1=a$ добиваме $e=-1$ и, притоа, $-1*a=-1+a+1=a$. Значи, $-1\in S$ е неутрален елемент на $(S,*)$.

4) Да видиме дали секој $a\in S$ има инверзен, т.е. таков елемент $b\in S$, за кој важи $a*b=b*a=-1$. Од $a*b=a+b+1=-1$, добиваме $b=-2-a$ и, притоа,

$$(-2-a)*a=-2-a+a+1=-1.$$

Значи, за секој $a\in S$, $-2-a\in S$ и $a^{-1}=-2-a$, т.е. $(S,*)$ е група.

5) Бидејќи за било кои $a,b \in S$ важи

$$a*b = a+b+1 = b+a+1 = b*a\,,$$

следува дека групата $(S,*)$ е комутативна.

13. Нека првиот број е x, вториот y, третиот е еднаков на разликата меѓу вториот и првиот, четвртиот е еднаков на разликата меѓу третиот и вториот итн. Кој број стои на 1994-тото место?

Решение. Да ги означиме членовите на низата со $a_1, a_2, ..., a_{1994}$, тогаш:

$a_1 = x$ $\quad$ $a_2 = y$

$a_3 = y - x$ $\quad$ $a_4 = (y-x) - y = -x$

$a_5 = -x - (y-x) = -y$ $\quad$ $a_6 = -y - (-x) = -(y+x)$

$a_7 = x - y - (-y) = x$ $\quad$ $a_8 = x - (x-y) = y$

$a_9 = y - x$

Забележуваме дека $a_7 = a_1$, $a_8 = a_2$, $a_9 = a_3$, итн. Значи, секој член од низата со реден број $6k+1$, $k \in \mathbb{N}$ е еднаков на a_1; членовите со реден број $6k+2$ се еднакви на a_2, итн. Но, $1994 = 6 \cdot 332 + 2$, па значи, $a_{1994} = a_2 = y$. Следствено, на 1994-то место стои бројот y.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека бројот $1993\cdot 1995\cdot 1997\cdot 1999+16$ е точен квадрат.

Решение. Нека $A=1993\cdot 1995\cdot 1997\cdot 1999+16$. Ако $n=1996$, тогаш

$$(n-3)(n-1)(n+1)(n+3)+16=(n^2-9)(n^2-1)+16=(n^2-5)^2 .$$

Значи,

$$A=1993\cdot 1995\cdot 1997\cdot 1999+16=(1996^2-5)^2 .$$

2. Дали може збирот

$$1^2+2^2+3^2+...+2010^2$$

да се запише како

а) збир на 2009 различни квадрати на цели броеви

б) збир на 2008 различни квадрати на цели броеви

Решение. Може. Бидејќи $3^2+4^2=5^2$ имаме

$$1209^2+1612^2=(3\cdot 403)^2+(4\cdot 403)^2=403^2(3^2+4^2)=403^2\cdot 5^2=(5\cdot 403)^2=2015^2$$

$$1212^2+1616^2=(3\cdot 404)^2+(4\cdot 404)^2=404^2(3^2+4^2)=404^2\cdot 5^2=(5\cdot 404)^2=2020^2 .$$

а) Во збирот $1^2+2^2+3^2+...+2010^2$, собироците 1209^2 и 1612^2 ќе ги замениме со 2015^2 и ќе добиеме збир на 2009 квадрати на различни цели броеви.

б) Дополнително од случајот а) собироците 1212^2 и 1616^2 ќе ги замениме со 2020^2 и ќе добиеме збир на 2008 квадрати на различни цели броеви.

3. Докажи дека кубот на најголемиот од три последователни природни броеви е различен од збирот на кубовите од другите два.

Решение. Да претпоставиме дека за некој број x е точно равенството

$$(x-1)^3+x^3=(x+1)^3 .$$

Горното равенство е еквивалентно со равенството $x^2(x-6)=2$, кое не е можно во множеството на природни броеви, бидејќи за $1\le x\le 6$ левата страна на тоа равенство е помала или еднаква на нула, а за $x>6$ таа е поголема од 36.

4. Дали постојат различни цифри x,y,z,t,u,w за кои важи равенството $\overline{xy}^3=\overline{ztuvw}$?

Решение. Да забележиме дека $x\ne 0$ и $z\ne 0$. Бидејќи $21^3=9261,\ \ 22^3=10648,$ $46^3=97336$ и $47^3=103523,$ следува дека $23\le \overline{xy}\le 46$ (22 отпаѓа бидејќи има исти цифри). Ќе ги испитаме сите можноси за w во зависност од y.

- $y=0\Rightarrow w=0$, па заради $y=w$ овој случај отпаѓа;
- $y=1\Rightarrow w=1$ отпаѓа;

- $y=2\Rightarrow w=8$;
- $y=3\Rightarrow w=7$;
- $y=4\Rightarrow w=4$ отпаѓа;
- $y=5\Rightarrow w=5$ отпаѓа;
- $y=6\Rightarrow w=6$ отпаѓа;
- $y=7\Rightarrow w=3$;
- $y=8\Rightarrow w=2$;
- $y=9\Rightarrow w=9$ отпаѓа.

Значи $x\in\{2,3,4\}$, $y\in\{2,3,7,8\}$ и $23\le\overline{xy}\le 46$, па $\overline{xy}\in\{23,27,28,32,37,38,42,43\}$. Со пресметување на третите степени на овие броеви добиваме дека различни цифри има само $27^3=19683,$ па $x=2,\ y=7,\ z=1,\ t=9,\ u=6,\ v=8$ и $w=3$.

5. За кои цифри a и b ($a\neq 0$) бројот $9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$ е точен квадрат.

Решение. За било кои цифри a и b ($a\neq 0$) важи

$$\begin{aligned}9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4&=9(10\cdot\overline{ab}+5-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4\\&=9(9\cdot\overline{ab}+5)(\overline{ab}+1)+4\\&=81\cdot\overline{ab}^2+126\cdot\overline{ab}+49\\&=(9\cdot\overline{ab}+7)^2.\end{aligned}$$

Според тоа, за било кои цифри a и b ($a\neq 0$), бројот $9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$ е точен квадрат.

6. За кои цифри x, y, z важи равенството

$$\overline{xy}\sqrt{\overline{yx}}+\overline{yz}\sqrt{\overline{zy}}=\overline{(x+y)xy}\ ?$$

Решение. Бидејќи $\overline{yx}$ и $\overline{zy}$ припаѓаат на множеството $\{16,25,36,49,64,81\}$ следува дека $y\in\{1,4,6\}$, $x\in\{6,9,4\}$, $z\in\{3,6,8\}$ па поради $x+z\le 9$, следува $z=3$, $x\in\{4,6\}$; зададеното равенството го задоволува тројката броеви $(4,6,3)$, т.е.

$$46\sqrt{64}+63\sqrt{36}=746\ .$$

7. Дали може за секој природен број n да се најде таков природен број x, за кој што бројот $nx+1$ е точен квадрат?

Решение. *Прв начин.* Нека $x=n+k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогаш

$nx+1=n(n+k)+1=n^2+kn+1$.

За изразот n^2+kn+1 да биде точен квадрат треба $k=2$ или $k=-2$, па добиваме

$$nx+1=n^2\pm 2n+1=(n\pm 1)^2\ .$$

Значи, за секој $n\in\mathbb{N}$ може да се најде таков x, $x=n\pm 2$, за кој што изразот $nx+1$ е полн квадрат.

Втор начин. Од $nx+1=(a+1)^2$ следува $nx=a^2+2a$, т.е. $n=\frac{a^2+2a}{x}$. Ставајќи $a=nk$, $k\in\mathbb{N}$, добиваме $x=k^2n+2k$. Следствено, за секој $n\in\mathbb{N}$ постојат бесконечно многу цели броеви x, $x=k^2n+2k$ такви што $nx+1$ е точен квадрат.

Забелешка. За $k=\pm1$ се добива решението од првиот начин.

8. Определи ги сите петцифрени броеви $\overline{abcde}$, такви што $\overline{ab},\overline{bc},\overline{cd}$ и $\overline{de}$ се точни квадрати.

Решение. Единствени двоцифрени броеви кои што се точни квадрати се 15, 25, 36, 49, 64 и 81. Тие почнуваат со цифрите 1,2,3,4,6 и 8, а завршуваат со цифрите 1,4,5 и 6. Значи цифрите b,c,d може да бидат само цифрите 1,4 и 6. Броевите $\overline{bc}$ и $\overline{cd}$ се точни квадрати, а тоа е можно само ако $\overline{bc}=16$ и $\overline{cd}=64$. Според тоа $\overline{ab}=\overline{a1}$ од каде добиваме $a=8$, и $\overline{de}=\overline{4e}$ од каде пак добиваме $e=9$. Конечно, бараниот број е 81649, и тој е единствен со бараното својство.

9. Определи четирицифрен број $\overline{abcd}$ кој што е точен квадрат, ако и броевите $\overline{abc}$ и $\overline{cd}$ се точни квадрати.

Решение. Од $\overline{abc}=m^2$ следува $c\in\{0,1,4,5,6,9\}$, а од $\overline{cd}=k^2$ следува $c\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Оттука $c\in\{1,4,6\}$, па затоа $\overline{cd}\in\{16,49,64\}$.

а) Ако $\overline{cd}=16$, тогаш $\overline{ab1}=m^2$, $\overline{ab16}=n^2$. Од $m^2=\overline{ab1}\le 991$ следува $m<32$. Но, m завршува на 1 или 9, па затоа $m\in\{11,19,21,29,31\}$. Од овие броеви ниту еден не го задоволува условот $\overline{ab16}=n^2$, т.е. $10m^2+6=n^2$.

б) Ако $\overline{cd}=49$, тогаш $\overline{ab4}=m^2$, $\overline{ab49}=n^2$. Од $m^2=\overline{ab4}\le 994$ следува $m<32$ и m завршува на 2 или 8, па затоа $m\in\{12,18,22,28\}$. Од овие броеви само 18 го задоволува условот $\overline{ab49}=n^2$, т.е. $10m^2+9=10\cdot18^2+9=3249=57^2=n^2$. Значи, $\overline{abcd}=3249$.

в**)** Ако $\overline{cd}=64$, тогаш $\overline{ab6}=m^2$, $\overline{ab64}=n^2$, па на сличен начин заклучуваме дека $m\in\{14,16,24,26\}$ и дека ниту еден од овие броеви не го задоволува условот $10m^2+4=n^2$.

10. Колку решенија има системот $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{xyz}\ \wedge\ \{a,b\}\cup\{c,d\}=\{x,y,z\}$.

Решение. Бидејќи збирот на два двоцифрени броја е помал од 200, следува дека $x=1$. Но, тогаш и една од цифрите a,b,c и d е еднаква на 1.

а. Нека $a=1$. Тогаш од равенството $\overline{1b}+\overline{cd}=\overline{1yz}$ следува дека $c=8$ или $c=9$.

а.1. Ако $c=8$, тогаш или $y=8$ или $z=8$, т.е. $\overline{1b}+\overline{8d}=\overline{18z}$ или $\overline{1b}+\overline{8d}=\overline{1y8}$. Но првата од овие равенки е невозможна, бидејќи десната страна е очигледно поголема од левата (која е помала од 108). Од втората равенка добиваме дека: или $b=0$ или $d=0$, бидејќи $0\in\{1,b\}\cup\{1,d\}$. Но, во двата случаја равенката нема решение.

a.2. Ако $c=9$, тогаш или $y=9$ или $z=9$, т.е. $\overline{1b}+\overline{9d}=\overline{19z}$ или $\overline{1b}+\overline{9d}=\overline{1y9}$. Првата од овие две равенки нема решение, а од втората добиваме дека: $y=0$ или $y=1$. Ако $y=0$, тогаш:

$$b=0;\quad 10+\overline{9d}=109,\quad d=9;$$
$$d=0;\quad \overline{1b}+90=109,\quad b=0,$$

па добиваме две решенија: $10+99=109$ и $19+90=109$. За $y=1$, равенката нема решение.

b. Нека $a\neq 1$, $c=1$. Во овој случај ги добиваме двете симетрични решенија $99+10=109$ и $19+90=109$.

c. Нека $a\neq 1$, $c\neq 1$, $b=1$, тогаш од равенката $\overline{a1}+\overline{cd}=\overline{1yz}$ следува дека $d\neq 9$, бидејќи од $z=0$, ќе следува дека или $a=0$ или $c=0$, што не е можно, затоа $d<9$. Тогаш $\overline{a1}+\overline{cd}=\overline{1y(d+1)}$. Бидејќи $d\in\{1,y,d+1\}$ и $d\neq 1$, ќе следува дека $d=y$, т.е. последната равенка го добива видот $\overline{a1}+\overline{cd}=\overline{1d(d+1)}$. Постојат три можности:

а) $a=d$, $c=d+1$
б) $a=d+1$ $c=d$
в) $a=d+1$ $c=d+1$

Равенките $\overline{d1}+\overline{(d+1)d}=\overline{1d(d+1)}$ и $\overline{(d+1)d}+\overline{dd}=\overline{1d(d+1)}$ се задоволени за $d=9$. Но по претпоставка $d<9$. Од третата равенка $\overline{(d+1)1}+\overline{(d+1)d}=\overline{1d(d+1)}$ имаме $10d+10+1+10d+10+d=100+10d+d+1$, т.е. $d=8$. На тој начин добиваме уште едно решение: $91+98=198$ и симетрично на него $98+91=189$.

Оттаму, дадениот систем има шест решенија:

$10+99=109$; $99+10=109$; $19+90=109$;
$90+19=109$; $91+98=189$; $98+91=189$.

11. Бројот n^2+2n ($n\in\mathbb{N}$) завршува на 4. Најди ја неговата претпоследна цифра.

Решение. Ако бројот n^2+2n завршува на 4, тогаш неговиот следбеник $n^2+2n+1=(n+1)^2$ ќе завршува на 5. Но, тој број е точен квадрат, па ќе завршува на 25. Следствено неговиот претходник ќе завршува на 24, т.е. претпоследната цифра на бројот n^2+2n е 2.

12. На која цифра завршува збирот $1+2+...+n$, ако збирот $1^3+2^3+...+n^3$ завршува со цифрата 1?

Решение. Ќе ги користиме формулите

$$S_1=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

Од условот $S_1^2=S_3$ заклучуваме дека збирот S_1 завршува на 1 или 9. Но, производот $n(n+1)$ завршува на една од цифрите 0, 2 или 6. Според тоа, $\frac{n(n+1)}{2}$ може да завршува на цифрите 0, 1 или 3. Следствено, збирот S_1 не може да завршува на цифрата 9, туку само на цифрата 1.

13. Од првите 10000 природни броеви колку се такви кои што завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот 5^m+8^n?

Решение. Бидејќи 5^m завршува на 5, потребно е 8^n да завршува на 6. Имаме

$$8^1=8,\quad 8^2=64,\quad 8^3=512,\quad 8^4=4096,\quad 8^5>10000.$$

Значи, $n=4$, па добиваме $5^m+8^4\le 10000$, т.е. $5^m\le 5094$. Бидејќи

$$5^1=5,\ 5^2=25,\ 5^3=125,\ 5^4=625,\ 5^5=3125,\ 5^6=15625>5964,$$

следува дека $m\in\{1,2,3,4,5\}$. Следствено, постојат пет броеви помали од 10000, кои што завршуваат на 1 и може да се запишат во видот 5^m+8^n. Тоа се броевите

$$4101=5^1+8^4,\ 4121=5^2+8^4,\ 4221=5^3+8^4,\ 4721=5^4+8^4 \text{ и } 7221=5^4+8^4.$$

14. На местото на буквите стави соодветни цифри за да важи:

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{a}=4321.$$

Решение. Имаме

$$1000a+100b+10c+d+100a+10b+c+10a+b+a=4321$$

т.е.

$$1111a+111b+11c+d=4321. \qquad (1)$$

Равенството (1) е можно само за $a=3$, тогаш $111b+11c+d=988$, од каде што $7<b<9$, т.е. $b=8$. Конечно, од равенството $11c+d=100$, добиваме $c=9,\ d=1$.

15. Зборовите ТРИ, СТИЛ и СПОРТ, каде што различните букви претставуваат различни цифри, редоследно соодветствуваат на квадрат, куб и четврт степен на некој природен број. Кој збор соодветствува на бројот 8652156?

Решение.Нека бараниот број е x, тогаш од $10000<x^4\le 99999$ заклучуваме дека $10<x<18$. Но x^2 е број со три различни цифри, па следува дека $x\in\{13,14,16,17\}$. Понатаму со проверка наоѓаме дека само за бројот 13 броевите x^3 и x^4 почнуваат со истра цифра:

$$13^3=2197,\ 13^4=28561$$

Конечно следува дека:

$$\text{Т}=1,\ \text{Р}=6,\ \text{И}=9,\ C=2,\ \text{Л}=7,\ \text{П}=8,\ \text{О}=5$$

па на бројот 8652156 соодветствува зборот ПРОСТОР.

16. Кои цифри треба да стојат на местото на буквите, за да биде точно равенството $4\cdot\overline{TAPIR}=\overline{PIRAT}$?

Решение. Бидејќи левата страна на равенството е парен број , следува дека T е парен број, но за T постојат само две можности: или $T=1$ или $T=2$, инаку производот од левата страна не би бил петцифрен број; значи $T=2$. Сега равенството го добива обликот $4\cdot\overline{2APIR}=\overline{PIRA2}$. Бидејќи $4\cdot P$ завршува на 2, постојат две можности за P: или $P=8$ или $P=3$.

1) Да претпоставиме, прво, дека $R = 8$. Имаме $4 \cdot \overline{2API8} = \overline{PI8A2}$. За првата буква од десната страна останува само една можност: $P = 9$. Сега имаме $4 \cdot \overline{2A9I8} = \overline{9I8A2}$. Бидејќи $4A < 20$ (инаку десната страна би бил шестцифрен број) треба да е: или $A = 3$, или $A = 4$.

Ако $A = 3$, тогаш добиваме $4 \cdot \overline{239I8} = \overline{9I832}$ од каде што следува $I = 5$ и, конечно,

$$4 \cdot 23958 = 95832 \qquad (1)$$

што всушност е точното равенство.

Ако $A = 4$, добиваме $4 \cdot 24948 = 94842$, што не е можно.

2) Да претпоставиме, сега, дека $R = 3$. Ќе имаме $4 \cdot \overline{2API3} = \overline{PI3A2}$. За P сега има две можности: или $P = 8$ или $P = 9$.

Ако $P = 8$, ќе имаме $4 \cdot \overline{2A8I3} = \overline{8I3A2}$. Тогаш мора да е $A = 1$ (бидејќи $A \neq 2 = T$), па ќе имаме $4 \cdot \overline{218I3} = \overline{8I312}$, од каде што следува $I = 5$, но тогаш: $4 \cdot 21853 \neq 85312$.

Ако $P = 9$, ќе имаме $4 \cdot \overline{2A9I3} = \overline{9I3A2}$. Поради $4A < 20$, добиваме $A = 1$, па $4 \cdot \overline{219I3} = \overline{9I312}$, што при $I = 5$ дава неточно равенство, т.е. $4 \cdot 21953 \neq 95312$.

Значи, единствено решение е: $T = 2, A = 3, P = 9, I = 5, R = 8$, т.е.

$$4 \cdot 23958 = 95832 .$$

17. За кои цифри x, y, z важи равенството

$$\overline{xy}\sqrt{\overline{yx}} + \overline{yz}\sqrt{\overline{zy}} = \overline{(x+y)xy} \ ?$$

Решение. Бидејќи $\overline{yx}$ и $\overline{zy}$ припаѓаат на множеството $\{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ следува дека $y \in \{1, 4, 6\}$, $x \in \{6, 9, 4\}$, $z \in \{3, 6, 8\}$. Понатаму, од $x + z \leq 9$, следува дека $z = 3$, $x \in \{4, 6\}$. Конечно, дадено равенството го задоволува тројката броеви $(4, 6, 3)$, т.е. $46\sqrt{64} + 63\sqrt{36} = 746$.

18. Определи го најголемиот природен број којшто е помал од збирот на квадратите на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{a_n ... a_1 a_0}$ е бараниот број, односно

$$a_n \cdot 10^n + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + ... + a_1^2 + a_0^2 .$$

Тогаш $a_n(10^n - a_n) + ... + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0$. Сите собирци, освен последниот, на левата страна се позитивни, а $a_0(1 - a_0) \geq -72$. Ако барем една цифра a_k за $k \geq 2$ е различна од нула, тогаш бројот е барем трицифрен, па затоа

$$a_k(10^k - a_k) > 10^k - 9 > 90 ,$$

што значи дека збирот на левата страна е позитивна. Според тоа, тој број мора да е помал од 100. Бидејќи $99 < 9^2 + 9^2$, бараниот број е 99.

19. На табла се напишани броевите 1 и 2. Нови броеви допишуваме на следниов начин: Ако на таблата се запишани броевите a и b, тогаш може да се допише и бројот $ab + a + b$. Дали може на тој начин да се добие бројот 2005?

Решение. Ќе докажеме дека сите броеви на таблата се од облик $2^n 3^m - 1$, каде што $n, m \in \mathbb{N}$. Јасно е дека такви се $1 = 2^1 3^0 - 1$, $2 = 2^0 3^1 - 1$ и следниот добиен број $1 \cdot 2 + 1 + 2 = 5 = 2^1 \cdot 3^1 - 1$. Ако замеме два броеви од таблата, $2^{n_1} 3^{m_1} - 1$ и $2^{n_2} 3^{m_2} - 1$, тогаш новодобиениот број ќе биде

$$\begin{aligned}
&(2^{n_1} 3^{m_1} - 1)(2^{n_2} 3^{m_2} - 1) + 2^{n_1} 3^{m_1} - 1 + 2^{n_2} 3^{m_2} - 1 \\
&= 2^{n_1+n_2} 3^{m_1+m_2} - 2^{n_1} 3^{m_1} - 2^{n_2} 3^{m_2} + 1 + 2^{n_1} 3^{m_1} - 1 + 2^{n_2} 3^{m_2} - 1 \\
&= 2^{n_1+n_2} 3^{m_1+m_2} - 1 = 2^k 3^s - 1
\end{aligned}$$

Бидејќи $2005 + 1 = 2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59 \neq 2^n \cdot 3^m$, значи дека бројот 2005 не е од облик $2^n 3^m - 1$ па на таблата не може да се добие тој број.

20. Дали постојат 10 различни цели броеви такви што збирот на било кои 9 од нив е точен квадрат?

Решение. Да, постојат десет такви броеви. Нека за броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$ важи:

$$S - a_1 = 9 \cdot 1^2, S - a_2 = 9 \cdot 2^2, S - a_3 = 9 \cdot 3^2, ..., S - a_{10} = 9 \cdot 10^2, \qquad (1)$$

каде $S = a_1 + a_2 + ... + a_{10}$. Ако ги собереме равенствата (1) добиваме:

$$\begin{aligned}
&10S - (a_1 + a_2 + ... + a_{10}) = 9(1^2 + 2^2 + ... + 10^2) \\
&9S = 9(1^2 + 2^2 + ... + 10^2) \\
&S = 1^2 + 2^2 + ... + 10^2 = \tfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 55 \cdot 7 = 385
\end{aligned}$$

Конечно, $a_k = S - 9k^2 = 385 - 9k^2$, за $k = 1, 2, 3, ..., 10$.

21. Од првите 10000 природни броеви колку се такви што завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот $5^m + 8^n$?

Решение. Бидејќи 5^m завршува на 5, треба 8^n да завршува на 6. Имаме $8^1 = 8, 8^2 = 64, 8^3 = 512, 8^4 = 4096, 8^5 > 10000$. Значи $n = 4$ па од $5^m + 8^n < 10000$ следува $5^m < 5904$. Бидејќи

$$5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, \ 5^5 = 3125, 5^6 = 15625 > 5904$$

следува дека $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Значи, постојат 5 броја помали од 10000, кои завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот $5^m + 8^n$. Тоа се броевите

$$4101 = 5^1 + 8^4, 4121 = 5^2 + 8^4, 4221 = 5^3 + 8^4, 4721 = 5^4 + 8^4 \text{ и } 7211 = 5^5 + 8^4 .$$

22. Определи го најмалиот природен број n со следните својства:

а) цифрата на единиците на бројот n запишан во декаден броен систем е 6,

б) ако цифрата на единиците се премести пред останатите цифри се добива број кој е 4 пати поголем од бројот n.

Решение. *Прв начин.* Бројот n можеме да го запишеме во облик $n = 10A + 6$. Тогаш $4n = 6 \cdot 10^m + A$, каде бројот A има m цифри. Од овие две равенки добиваме $A=\frac{2(10^m-4)}{13}$. Сега бараме најмал број m за кој овој количникот е цел број. Лесно се гледа дека $m=5$, $A=15384$ и $n=153846$.

Втор начин. Од условот на задачата имаме

$$n=\overline{a_m a_{m-1}...a_1 6} \text{ и } 4\cdot n=\overline{6a_m a_{m-1}...a_1},$$

односно

$$n=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+...+a_1\cdot 10+6$$
$$4n=6\cdot 10^m+a_m 10^{m-1}+a_{m-1}10^{m-2}+...+a_1.$$

Бројот $4n$ завршува со 4, бидејќи $6\cdot 4=24$, па затоа $a_1=4$. Понатаму бројот $4n$ завршува со 84, бидејќи $4\cdot 46=184$, од што следува дека $a_2=8$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $n=153846$.

23. Природниот број n е точен квадрат. Кој е најмалиот природен број кој е поголем од n и е точен квадрат?

Решение. Ако n е точен квадрат, тогаш постои природен број k таков што $n=k^2$. Најмалиот природен број кој е точен квадрат и е поголем од k^2 е $(k+1)^2$, т.е. $(\sqrt{n}+1)^2$.

24. Определи ги паровите природни броеви (a,b), такви што

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$$

е природен број.

Решение. Дадениот израз ќе го означиме со A. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{a-b})^2}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{a+b})^2}\right):\left(\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{\sqrt{a-b}}{b}-\frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{\sqrt{a+b}}{b}\right)\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}\\&=\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}\\&=\frac{\sqrt{a-b}}{b}.\end{aligned}$$

Според тоа, $A=\frac{\sqrt{a-b}}{b}$ е природен број, ако $b\in\mathbb{N}$ и $a=b+b^2k^2$, каде $k\in\mathbb{N}$. Во овој случај вредноста на изразот е еднаков на k.

25. Докажи, дека за секој природен број $k>2$ постојат k природни броеви такви што нивниот збир е еднаков на нивниот производ.

Решение. За $k=2$ бараните броеви a и b треба да го задоволуваат равенството $ab=a+b$. Единствени броеви со ова својство се $a=b=2$.

За $k=3$ бараните броеви a,b и c го задоволуваат равенството $a+b+c=abc$. Такви броеви се $a=1,b=2,c=3$.

За $k=4$ равенството $a+b+c+d=abcd$ го задоволуваат броевите $a=1,b=1,$ $c=2,d=4$.

За $k>4$ нека земеме $a_1=a_2=...=a_{k-2}=1, a_{k-1}=x, a_k=y$. Тогаш треба да важи $(k-2)+x+y=xy$ и едно решение на оваа равенка е $x=2, y=k$ (не е единствено). Според тоа, за секој природен број $k>4$ за броевите

$$a_1=a_2=...=a_{k-2}=1, a_{k-1}=2, a_k=k$$

важи

$$a_1+a_2+...+a_{k-2}+a_{k-1}+a_k=(k-2)\cdot+2+k=2k=1^{k-2}\cdot 2\cdot k=a_1a_2...a_{k-2}a_{k-1}a_k$$

т.е. го задоволуваат условот на задачата.

26. Нека a_n е последната цифра на бројот n^n. Дали $0,a_1a_2...a_n...$ е рационален број.

Решение. Броевите $(10s+b)^m$ и b^m имаат еднакви последни цифри. Заради тоа, за да се добијат децималите на бројот $0,a_1a_2...a_n...$, доволно е да се разгледаат последните цифри на

$$1^1,2^2,3^3,4^4,5^5,6^6,7^7,8^8,9^9,0^{10},1^{11},2^{12},... .$$

Очигледно е дека цифрите 1, 5, 6 и 0 се повторуваат со периода 10.

Од друга страна паровите броеви 1^k и 1^{m+k}, 2^k и 2^{4m+k}, 3^k и 3^{4m+k}, 5^k и 5^{m+k}, 7^k и 7^{4m+k}, 8^k и 8^{4m+k}, 9^k и 9^{2m+k}, 0^k и 0^{m+k} имаат еднакви последни цифри. Значи, броевите k^k и k^{20+k} имаат еднакви последни цифри и бројот

$$0,a_1a_2...a_n...=0,(14765636901636567490)$$

има периодична децимала со периода 20 и е рационален број.

27. Ако a,b,c и $\frac{a-b\sqrt{2018}}{b-c\sqrt{2018}}$ се рационални броеви, тогаш $ac=b^2$. Докажи!

Решение. Нека $\frac{a-b\sqrt{2018}}{b-c\sqrt{2018}}=r$. Тогаш $a-b\sqrt{2018}=r(b-c\sqrt{2018})$, па затоа

$$a-rb=(b-rc)\sqrt{2018} \qquad (*)$$

Ако $\sqrt{2018}=\frac{m}{n}$, каде $\text{NZD}(m,n)=1$, тогаш $m^2=n^2\cdot 2018$, од каде добваме $2\,|\,m^2 \Rightarrow 2\,|\,m \Rightarrow 4\,|\,m^2$, па затоа $2\,|\,n^2 \Rightarrow 2\,|\,n$, што е противречи на $\text{NZD}(m,n)=1$. Следува $\sqrt{2018}$ е ирационален број**.** Равенството (*) ќе биде исполнето само кога $a-rb=b-rc=0$**,** односно $r=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. Од тука добиваме $ac=b^2$**.**

28. Ако $a,b\,,c$ и $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ се природни броеви, докажи дека и $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ е природен број.

Решение. Имаме

$$\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}=\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}\cdot\frac{b\sqrt{3}-c}{b\sqrt{3}-c}=\frac{3ab-bc+\sqrt{3}(b^2-ac)}{3b^2-c^2}$$
$$=\frac{3ab-bc}{3b^2-c^2}+\sqrt{3}\,\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}.$$

Броевите $\frac{3ab-bc}{3b^2-c^2}$ и $\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}$ се рационални, па заради ирационалноста на $\sqrt{3}$, за да $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ е цел број потребно е и доволно да $\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}=0$ и $3b^2-c^2 \mid 3ab-bc$. Според тоа, важи $b^2=ac$, па затоа

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} &= \frac{(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac}{a+b+c}\\ &= a+b+c-2\frac{ab+bc+b^2}{a+b+c}\\ &= a+b+c-2b\frac{a+c+b}{a+b+c}\\ &= a+b+c-2b=a+c-b\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

29. Докажи дека за секој природен број $n\geq 2$, постојат n различни природни броеви, такви што збирот на нивните квадрати е квадрат на природен број.

Решение. Нека $n\geq 2$ е произволен природен број, $a_1\geq 3$ е произволен непарен број, а $a_2,a_3,\dots,a_{n-1}$ се произволни парни броеви, такви што $a_1<a_2<a_3<\dots<a_{n-1}$. Тогаш,

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_{n-1}^2=2k+1,$$

за некој природен број k. Ако избереме $a_n=k$, тогаш

$$a_1^2+\dots+a_{n-1}^2+a_n^2=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Покрај тоа, од

$$(a_{n-1}-1)^2\geq(3-1)^2>2$$

се добива дека

$$\sum_{i=1}^{n-2}a_i^2+(a_{n-1}-1)^2>2,$$

што е еквивалентно со

$$a_n=k=\tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2-1)>a_{n-1},$$

па сите броеви $a_1,a_2,\dots,a_n$ се меѓусебно различни.

Забелешка. Задачата може да се реши и со примена на математичка индукција. За $n=2$, тоа се броевите 3 и 4, $3^2+4^2=5^2$. Претпоставуваме дека постојат $a_1<a_2<\dots<a_n$, така што

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=k^2.$$

Тогаш,

$$(5k)^2=(5a_1)^2+(5a_2)^2+\dots+(5a_n)^2=(3a_1)^2+(4a_1)^2+(5a_2)^2+\dots+(5a_n)^2$$

и при тоа важи $3a_1<4a_1<5a_2<\dots<5a_n$.

30. Нека a и b се цели броеви со различна парност. Докажи, дека постои цел број c таков што броевите $ab+c, a+c$ и $b+c$ се квадрати на цели броеви.

Решение. Една идеја е да најдеме број c таков што $a+c$ и $b+c$ се квадрати на два последователни цели броеви. Тогаш $a+c=n^2$ и $b+c=(n+1)^2$, за некој цел број n. Тогаш $b-a=2n+1$, т.е.

$$n=\frac{b-a-1}{2} \text{ и } c=(\frac{b-a-1}{2})^2-a=\frac{1+a^2+b^2-2a-2b-2ab}{4}.$$

Броевите a и b се со различна парност, па нека a е парен, а b е непарен. Тогаш $1-2b+b^2=(b-1)^2$ и $a^2-2a-2ab$ се деливи со 4, т.е. c е цел број и важи

$$a+c=n^2=(\frac{b-a-1}{2})^2,$$

$$b+c=(n+1)^2=(\frac{b-a-1}{2}+1)^2=(\frac{b-a+1}{2})^2,$$

$$ab+c=ab+\frac{1+a^2+b^2-2a-2b-2ab}{4}=\frac{1+a^2+b^2-2a-2b+2ab}{4}=(\frac{1-b-a}{2})^2.$$

31. Дали постојат 14 природни броеви такви што ако секој од нив се зголеми за 1, тогаш нивниот производ ќе се зголеми 2008 пати?

Решение. Постојат, на пример, тоа се броевите $\underbrace{1,...,1}_{10 \text{ пати}}, 4, 4, 4, 250$. Навистина,

$$(1+1)^{10}(4+1)^3(250+1)=2^{10}\cdot 5^3\cdot 251=2008\cdot 1^{10}\cdot 4^3\cdot 250.$$

Забелешка. Друг можен избор се броевите $\underbrace{1,...,1}_{10 \text{ пати}}, 2, 4, 24, 250$. Провери!

32. Знаејќи дека $\sqrt{2}$ е ирационален број, докажи дека и $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ е ирационален број.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ е рационален број и нека $\sqrt{2}+\sqrt{7}=r$, $r\in\mathbb{Q}$. Тогаш од:

$$\sqrt{7}=r-\sqrt{2}$$

$$7=r^2-2r\sqrt{2}+2$$

$$\sqrt{2}=\frac{r^2-5}{2r}$$

ќе следува дека бројот $\sqrt{2}$ е рационален број, што противречи на претпоставката. Следствено, бројот $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ не е рационален број, т.е. е ирационален број.

2. ДЕЛИВОСТ ВО МНОЖЕСТВОТО НА ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

1. а) **Н**ајди го количникот и остатокот при делење на бројот $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 13+1989$ со 385.

б) При делење на природниот број a со природниот број b се добива количник c и остаток d. Дали може сите броеви a,b,c,d да бидат непарни.

Решение. а) Производот $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13$ е делив со бројот $385=5\cdot 7\cdot 11$, и при тоа, количникот е

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 12\cdot 13=16174080\,.$$

Од равенството пак, $1989=385\cdot 5+64$ се добива количник 5 и остаток 64.

Следствено, бараниот количник е 16174085, а остатокот 64.

б) Од условот на задачата, според теоремата за делење со остаток имаме $a=bc+d$. Нека претпоставиме дека броевите a,b,c,d се непарни. Бидејќи производ на два непарни броја е непарен број, добиваме дека bc е непарен. Збир на два непарни броја е парен број, па според тоа $bc+d$ е парен број, што противречи на претпоставката дека a е непарен број.

Заради добиената контрадикција, добиваме дека не може сите броеви a,b,c,d да се непарни.

2. На колку нули завршува бројот $1986!$?

Решение. Нека $1986!=2^m\cdot 5^n\cdot k$, каде што k не е делив ниту со 2 ниту со 5. Бидејќи во броевите од 1 до 1986 броевите кои се деливи со степени на бројот 2 се повеќе од броевите кои се3 деливи со степени на бројот 5, следува дека $m>n$. Бидејќи $10=2\cdot 5$, следува дека 1986 завршува на n нули. Меѓу броевите 1, 2, 3, ..., 1986 постојат $[\frac{1986}{5}]=397$ броеви кои завршуваат на 5, $[\frac{1986}{25}]=79$ броеви се деливи со 5^2, $[\frac{1986}{125}]=15$ броеви се деливи со 5^3, $[\frac{1986}{625}]=3$ броеви се деливи со 5^4 и не постојат броеви делив со 5^5 ($[x]$ означува цел дел од бројот x). Според тоа, бројот на нулите е $n=397+79+15+3=494$.

3. Да се докаже дека бројот $a^2+b^2+c^2+1$, каде a,b и c се природни броеви, не е делив со 8.

Решение. Секој од броевите a,b,c има некој од облиците $8k+r,\quad r=0,1,2,3,4,5,6,7$. Понатаму, квадрат на природен број при делење со 8 дава остаток 0, 1 или 4, па затоа збирот $a^2+b^2+c^2$ при делење со 8 дава остаток 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Последното значи дека $a^2+b^2+c^2+1$ не е делив со 8.

4. При собирање на еден повеќецифрен број, со број добиен од него со разместување на неговите цифри, ученикот добил број кој се запишува само со деветки. Дали ученикот погрешил?

Решение. Нека бројот е $\overline{a_1a_2\dots a_n}$, и нека $\overline{b_1b_2\dots b_n}$ е број добиен со разместување на цифрите од $\overline{a_1a_2\dots a_n}$. Со собирање на овие два броја се добива бројот $\underbrace{999\dots 9}_{n\ \text{9–ки}}$. Тогаш, заради $a_n+b_n<19$, добиваме $a_n+b_n=9$. Слично $a_i+b_i=9$, $i=1,2,\dots,n$. Со собирање на овие n равенства добиваме

$$a_1+a_2+\dots+a_n+b_1+b_2+\dots+b_n=9n\,.$$

Имајќи предвид дека $a_1+\dots+a_n=b_1+\dots+b_n$, го добиваме равенството

$$2(a_1+\dots+a_n)=9n\,.$$

Оттука добиваме дека n е парен број. Значи ако броевите што ги собирал ученикот имаат непарен број цифри, тогаш тој сигурно погрешил. Ако тие броеви имаат парен број цифри може да се добие збир кој се состои само од деветки. Притоа збирот на цифрите на бројот е делив со 9. На пример

$$1818...18+8181...81=999...9.$$

5. Дали може збирот на 22 последователни природни броеви да биде делив со 22?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи збирот на два последователни природни броеви е секогаш непарен број, тоа збирот на 22 последователни природни броеви бидејќи може да се разбие на збир од 11 непарни броеви е пак непарен број, па не може да биде делив со 22.

Втор начин. Да го означиме тој збир со S, тогаш:

$$S=(k+1)+(k+2)+....+(k+22)=22k+\tfrac{22\cdot 23}{2}=22k+11\cdot 23.$$

Оттука заклучуваме дека S е непарен број, па не може да биде делив со 22.

6. Дали постои природен број кој е точен куб, во чиј запис има: една единица, две двојки, три тројки,..., девет деветки?

Решение. Нека е тоа бројот n. Збирот на цифрите на овој број

$$1+2\cdot 2+3\cdot 3+...+9\cdot 9=285$$

е број делив со 3, но не е делив со 9, т.е. 27, па не може да биде ниту точен квадрат, ниту точен куб.

7. а) Колку цифри има бројот 11...1, ако се знае дека тој е делив со 41.

б) На местото на x,y,z стави цифри, за бројот $A=\overline{x000...0yz}$ да биде делив со 15, 18 и 20.

Решение. а) Користејќи го алгоритмот за делење, забележуваме дека првиот остаток еднаков на нула се добива ако бројот има пет цифри, т.е. тоа е бројот 11111. Во понатамошното делење остатоците се повторуваат, па значи бројот 11...1 ќе биде делив со 41 само во случај ако бројот на неговите цифри е делив со 5, т.е. е еднаков на $5k$, $k\in\mathbb{N}$.

б) Бројот A е делив со 15, 18 и 20 ако е делив со $\mathrm{NZS}(15,18,20)=180$; од ова следува дека $z=0$. Сега, бројот $B=\overline{x000...00y}$ треба да е делив со 9 и 2, па, значи, y е парен, а $x+y=9$. Од сето тоа следува дека бараните тројки (x,y,z) се: $(9,0,0)$, $(7,2,0)$, $(5,4,0)$, $(3,6,0)$, $(1,8,0)$.

8. Ако на четирицифрен природен број му се допише цифрата 2 од лево или цифрата 4 од десно, тогаш и во двата случаја се добива точен квадрат.

Определи го овој четирицифрен број.

Решение. Нека бараниот четирицифрен број е $x=\overline{abcd}$, тогаш од условот на задачата имаме

$$\overline{2abcd}=20000+x=k^2,$$
$$\overline{abcd4}=10x+4=l^2$$

Од второто равенство следува дека $l=2n$ и $4\,|\,l^2$, а оттука следува дека и x е парен број. Тогаш од првото равенство следува дека и k^2 е парен број, т.е. $k=2m$, па значи x е делив со 4, т.е. $x=4y$, па равенствата го добиваат видот

$$5000+y=m^2,\ 10y+1=n^2.$$

Ако $n=3k\pm1$, тогаш n^2-1 е делив со 3, па и y е делив со 3. Но тогаш од првото равенство ќе следува дека m^2 при делење со 3 ќе дава остаток 2, што не е можно. Значи, n е делив со 3, па од второто равенство заклучуваме дека $y=9z-1$. Тогаш $m^2=5000+y=9\cdot555+5+9z-1=9t+4$, што значи $m=9u\pm2$, па $k=2m=18u\pm4$.

Од условот $20000<k^2<30000$ следува $142\le k\le173$. Од овие броеви ги земаме предвид само оние, кои при делење со 18 даваат остаток 4 или 14. Тоа се броевите 148, 166 и 158. Се непосредна проверка заклучуваме дека $k=148$.

Од $k^2=21904$ заклучуваме дека бараниот број е 1904.

9. Одреди ги цифрите a, b, c, d, за да биде точно равенството

$$a\cdot b+c\cdot d=\overline{ab}+c:\sqrt{d}\ .$$

Решение. Ќе сметаме $a\neq0$ (за бројот $\overline{ab}$ да биде двоцифрен). Исто така $d\neq0$. Прво да го разгледаме случајот $c=0$. Тогаш го добиваме равенството $ab=\overline{ab}$, т.е. $ab=10a+b$ или $a(b-10)=b$. Но b е цифра, па $b-10<0$. Значи во овој случај не постојат цифри кои го исполнуваат равенството. Даденото равенство е еквивалентно со равенството $\sqrt{d}=\frac{ab+cd-\overline{ab}}{c}$ па $\sqrt{d}\in\mathbb{Q}$ и d е цифра, значи $d\in\{1,4,9\}$.

1° $d=1$. Тогаш го добиваме равенството $ab+c=\overline{ab}+c$, т.е. $ab=\overline{ab}$, што не е можно.

2° $d=4$. Добиваме $ab+4c=\overline{ab}+\frac{c}{2}$, па $2\,|\,c$ односно $c\in\{2,4,6,8\}$.

- $c=2\Rightarrow ab+8=\overline{ab}+1$. Ако $a=1$ добиваме $b+8=\overline{1b}+1$ или $b=10+b-7$ што не е можно. Ако $a\neq1$ имаме $b=10+\frac{3}{a-1}>10$ и повторно не постојат цифри за кои важи равенството.

- $c=4\Rightarrow ab+16=\overline{ab}+2$. За $a=1$ слично како претходно се добива невозможно равенство. Ако $a\neq1$ добиваме $b=10-\frac{4}{a-1}$, па мора $(a-1)\,|\,4$, односно $a-1\in\{1,2,4\}$. Тогаш $a\in\{2,3,5\}$ и за b добиваме соодветно $6,8$ и 9.

- $c=6\Rightarrow ab+24=\overline{ab}+3$. Случајот $a=1$ се отфрла од причини како претходно, па за $a\neq1$ добиваме $b=10-\frac{11}{a-1}$, па $(a-1)\,|\,11$, единствена можност за a е 2. Но тогаш $b=-1$, па и таа можност се отфрла.

- $c=8\Rightarrow ab+32=\overline{ab}+4$. За $a\neq1$ имаме $b=10-\frac{18}{a-1}$. Тогаш $(a-1)\,|\,18$ и a и b се цифри па $a\in\{3,4,7\}$ и притоа соодветните вредности за b се $1,4,7$.

3° $d=9\Rightarrow ab+9c=\overline{ab}+\frac{c}{3}$. Според тоа $3\,|\,c$, т.е. $c\in\{3,6,9\}$.

- $c=3\Rightarrow ab+27=\overline{ab}+1\Rightarrow a=1-\frac{16}{b-10}$. Значи $(b-10)\,|\,16$, па $b\in\{2,6,8\}$ и содветните вредности за a се $3,5,9$.

- $c=6 \Rightarrow ab+54=\overline{ab}+2 \Rightarrow a=1-\frac{42}{b-10}$. Значи $(b-10)\,|\,42$ и a и b се цифри, па $b\in\{3,4\}$ и соодветните вредности за a се $7,8$.

- $c=9 \Rightarrow ab+81=\overline{ab}+3 \Rightarrow a=1-\dfrac{68}{b-10}$ и добиваме $b\in\{6,8,9\}$. Но тогаш соодветните вредности за a се поголеми од 10, па во овој случај не постојат цифри за кои важи равенството.

Конечно даденото равенство важи за следните подредени четворки

$$\begin{array}{c}(a,b,c,d):(2,6,4,4),(3,1,8,4),(3,2,3,9),(3,8,4,4),(4,4,8,4),(5,6,3,9),\\ (5,9,4,4),(7,3,6,9),(7,7,8,4),(8,4,6,9),(9,8,3,9).\end{array}.$$

10. Ако m е цел број, тогаш дропките $\frac{7m-1}{4}$ и $\frac{5m+3}{4}$ не можат истовремено да бидат цели броеви. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Да го претпоставиме спротивното, т.е. нека $\frac{7m-1}{4}=a$, $\frac{5m+3}{4}=b$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Тогаш $7m=4a+1$ и $5m=4b-3$. Оттука $\frac{4a+1}{7}=\frac{4b-3}{5}$, т.е. $2(7b-5a)=13$. Бидејќи последната равенка нема решение во $\mathbb{Z}$ (левата страна е делива со 2, а десната не), следува дека дадените дропки не можат истовремено да бидат цели броеви.

Втор начин. Да го претпоставиме спротивното, т.е. нека $\frac{7m-1}{4}=k$, $\frac{5m+3}{4}=n$, $k,n\in\mathbb{Z}$. Ако k и n се цели броеви, тогаш нивниот збир е цел број, т.е.

$$k+n=\frac{7m-1}{4}+\frac{5m+3}{4}=\frac{12m+2}{4}=\frac{6m\in 1}{2}.$$

Но, $6m+1$ е непарен број и не е делив со 2. Значи, ако m цел број, збирот $k+m$ не може да биде цел број, т.е. не може истовремено и k и n да бидат цели броеви.

Трет начин. Секој цел број може да се запише во вид: $4k,\ 4k+1,\ 4k+2$ или $4k+3$ (зависно од делливоста со бројот 4). Првата дропка $\frac{7m-1}{4}$ е цел број, само ако m е од видот $4k+3$, т.е.

$$\frac{7m-1}{4}=\frac{7(4k+3)-1}{4}=7k+5.$$

Но, за $m=4k+3$ втората дропка го добива видот

$$\frac{5m+3}{4}=\frac{5(4k+3)+3}{4}=5k+\frac{9}{2},$$

т.е. не е цел број. Значи, не постои цел број m за кој дадените дропки истовремено се цели броеви.

11. Колку има природни броеви помали од 1997, за кои што дропката $\frac{4n+3}{13n+2}$ може да се скрати?

Решение. Дропката ќе биде скратлива, ако постојат природни броеви a,b и k, такви што $4n+3=ka$, $13n+2=kb$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Оттука наоѓаме:

$$n=\frac{ka-3}{4}=\frac{kb-2}{13}, \qquad (1)$$

т.е.

$$(13a-4b)k=31. \tag{2}$$

Бидејќи $k>1$, а 31 е прост број, од (2) следува $k=31$, $13a-4b=1$, од каде што: $a=4m+1$, $b=13m+3$, $m\in\mathbb{N}$. Тогаш, од (1), добиваме дека $n=31m+7$.

Условот $n<1997$, т.е. $31m+7<1997$ е исполнет за $m\in\{0,1,2,...,64\}$. Тоа се броевите: $7,38,69,...,1991$, и нив ги има вкупно 65.

12. Да се најдат последните две цифри на бројот $7^{7^{7^{7}}}$.

Решение. Броевите 7^{2n} имаат облик $4k+1$, а броевите 7^{2n+1} се од облик $4k+3$, па според тоа, и бројот 7^{7^7} има облик $4k+3$. Затоа ќе имаме

$$\begin{aligned}7^{7^{7^{7}}} &= 7^{4k+3}=(7^4)^k\cdot 7^3=(2401)^k\cdot 7^3=(2400+1)^k\cdot 7^3\\ &=(100a+1)\cdot 343=343a\cdot 100+343,\end{aligned}$$

од каде што заклучуваме дека бројот $7^{7^{7^{7}}}$ завршува на 43.

13. Дали природните броеви од 1 до 1991 можат да се запишат во низа, така што секој од нив ќе биде запишан два пати, при што второто запишување на бројот $k, k\in\{1,2,...,1991\}$ ќе биде точно $k-$места по првото запишување?

Решение. Да претпоставиме дека такво запишување е можно. Бројот $k\in\{1,2,...,1991\}$ нека се појавува на m_k- то и на m_k+k- то место. Тогаш

$$1+2+...+3982=(m_1+(m_1+1))+(m_2+(m_2+2))+...+(m_{1991}+(m_{1991}+1991))$$

$$7930153=2(m_1+m_2+...+m_{1991})+1983036$$

$$5947117=2(m_1+m_2+...+m_{1991})$$

Добиваме противречност, од што следува дека таква низа не постои.

14. Најди ги сите трицифрени броеви, чии цифри се прости броеви и кои се деливи со секоја од тие три цифри.

Решение. Простите едноцифрени броеви се: 2, 3, 5 и 7.

i) Ако бараниот број започнува со цифрата 2, тогаш тој треба да е делив со 2, па мора да завршува на 2. На местото на десетките може да стои само цифрата 2, бидејќи бројот 232 не е делив со 3, бројот 252 не е делив со 5 и 272 не е делив со 7.Значи, бараниот број во овој случај е 222.

ii) Аналогно заклучуваме дека ако бројот започнува со цифрата 5, тогаш бараниот број е 555.

iii) Ако бројот започнува со 3, т.е. е од видот $\overline{3xy}$, тогаш двоцифрениот број $\overline{xy}$ треба да е деллив со 3, па тој може да е 33, 57 или 75. Со проверка се убедуваме дека условите на задачата ги исполнува само бројот 333 (бројот 357 не е делив со 5, а бројот 375 не е деллив со 7).

iv) Ако бројот започнува со 7, т.е. е од видот $\overline{7xy}$, тогаш двоцифрениот број $\overline{xy}$ треба да е деллив со 7; такви се само броевите 77 и 35. Значи, во овој случај условите на задачата ги исполнуваат броевите 777 и 735.

Следствено, бараните броеви се: 222, 333, 555, 777 и 735.

15. Дешифрирај го множењето $45\cdot\overline{a3bc}=\overline{37x15y}$.

Решение. Бројот $A=\overline{37x15y}$ е делив со 45, ако е делив со 3 и со 9. Од деливоста со 5 следува $y\in\{0,5\}$, а од деливоста со 9 добиваме $3+7+x+1+5+y=9k,\ k\in\mathbb{N}$, т.е. $x+y+7\in\{9,18\}$

1) Ако $y=0$, тогаш $x+0+7=9$, $x=2$.

2) Ако $y=0$, тогаш $x+0+7=18$, нема решение.

3) Ако $y=5$, тогаш $x+5+7=9$, нема решение.

4) Ако $y=5$, тогаш $x+5+7=18$, $x=6$.

Во првиот случај имаме: $A:45=8270$, не задоволува.

Во четвртиот случај имаме: $A:45=8359$, што задоволува. Значи, множењето е: $45\cdot 8359=376155$.

16. Најди најмал природен број кој се запишува само со единици и нули, а е делив со 225.

Решение. Од $225=9\cdot 25$ следува дека бараниот број е деллив со 9 и со 25. За да биде деллив со 25, треба да завршува на две нули, а за да биде деллив со 9, во неговиот запис треба да се содржат групи од по девет единици. Следствено, бараниот број е 11111111100.

17. Колкав е најмалиот број на собироци за збирот

$$1989+1989+1989+...+1989$$

да биде делив со 99?

Решение. Бидејќи $1989=99\cdot 20+9$ ќе имаме

$$S=1989+1989+...+1989=99\cdot 20n+(\underbrace{9+9+...+9}_{n}),$$

каде што n е бројот на бараните собироци. За збирот S да биде делив со 99 треба збирот $9+9+...+9$ да биде делив со 99, а тоа е можно ако собереме 11 деветки. Следствено бараниот најмал број собироци е единаесет.

18. Нека A и B се два природни броја кои се запишани со исти цифри. Ако $A+B=10^{10}$, докажи дека A е делив со 10.

Решение. Бидејќи 10^{10} е најмалиот природен број со 11 цифри, следува дека A и B се десетцифрени броеви. Нека $A=\overline{a_{10}a_9...a_2a_1}$ и $B=\overline{b_{10}b_9...b_2b_1}$. Од $A+B=10^{10}$, следува дека постои некој $i\in\{1,2,3,...,10\}$, така што: $a_1+b_1=0$, $a_2+b_2=0$,…, $a_{i-1}+b_{i-1}=0$, $a_i+b_i=10$, $a_{i+1}+b_{i+1}=9$,…, $a_{10}+b_{10}=9$. Бидејќи цифрите на A и B се исти, сумирајќи ги горните равенства, добиваме:

$$2(a_1+a_2+...+a_9+a_{10})=10+(10-i)9,$$

при што искористивме дека $a_1+a_2+...+a_9+a_{10}=b_1+b_2+...+b_9+b_{10}$. Од тоа што $2(a_1+a_2+...+a_9+a_{10})$ е парен број следува дека и $10-i$ е парен број, т.е. $i\neq 1$. Значи $a_1+b_1=0$, од каде што следува дека $a_1=b_1=0$. Според тоа A (а исто така и B) е делив со 10.

19. Дали постојат три различни природни броеви, такви што збирот на квадратите на било кои два од нив зголемен за еден е делив со квадратот на третиот од нив.

Решение. Нека претпоставиме дека a,b,c се природни броеви кои што го исполнуваат условите на задачата. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a > b > c$. Според тоа, постои природен број k, таков што

$$b^2 + c^2 + 1 = ka^2 . \qquad (1)$$

Бидејќи $a > b$ и $a > c$, имаме $a^2 > b^2 + 1$ и $a^2 > c^2 + 1$. Со собирање на последните две неравенства, добиваме $2a^2 > b^2 + c^2 + 2 > b^2 + c^2 + 1 = ka^2$. (1) го добива обликот

$$b^2 + c^2 + 1 = a^2 . \qquad (2)$$

Да забележиме дека квадрати на парни броеви се деливи со 4, а квадрати од непарни броеви при делење со 4 даваат остаток 1. Равенството (2) е можно само во случај кога b и c се парни, а a е непарен број. Во тој случај $a^2 + c^2 + 1$ при делење со 4 дава остаток 2 а бројот b^2 е делив со 4.

Заради добиената контрадикција, такви броеви не постојат.

20. Нека A е произволен 1996-цифрен број, кој што е делив со 9. Збирот на цифрите на A е еднаков на бројот B, збирот на цифрите на B е еднаков на C, а збирот на цифирте на C е еднаков на P. Најди го бројот P.

Решение. Ако A е 1996-цифрен број деллив со 9, тогаш и збирот на неговите цифри, бројот B е деллив со 9. Бројот B не е поголем од $1996 \cdot 9 = 17964$. Значи, $17964 \geq B$ и $9 \mid B$. Збирот на цифрите на бројот B е помал од $5 \cdot 9 = 45$, т.е. $C < 45$ и $9 \mid C$. Понатаму, збирот на цифрите на бројот P е помал од $2 \cdot 9 = 18$ и $9 \mid P$. Од $0 < P < 18$ и $9 \mid P$ следува $P = 9$.

21. Може ли збирот на цифрите на бројот n^2 ($n \in \mathbb{N}$) да биде еднаков на 1994?

Решение. Ако збирот на цифрите на бројот n^2 ($n \in \mathbb{N}$) е еднаков на 1994, тогаш тој не е делив со 3, па и бројот n не е делив со 3, т.е. при делење со 3 се добива остаток 1 или 2. Но квадратот на секој природен број при делење со 3 дава остаток 1, а остатокот при делење на бројот 1994 со 3 е еднаков на 2.

Следствено, збирот на цифрите на ниеден број n^2 не може да биде еднаков на 1994.

22. Колку има природни броеви помали од 1994, кои не се деливи ни со 3 ни со 5?

Решение. Природни броеви помали од 1994 и деливи со 3 има 664 ($=1992:3$); природни броеви помали од 1994 и деливи со 5 има 398 ($=1990:5$). Меѓутоа, броевите $15 = 3 \cdot 5, 30, 45, 60, \ldots, 1980 = 15 \cdot 132$ се деливи и со 5 и со 3, т.е. тие се броени двапат и нив ги има 132. Следствено, бараниот број е

$$1993 - 664 - 398 + 132 = 1063.$$

23. Најди ги сите природни броеви n, за кои и изразот $\frac{n^2-n+6}{n-3}$ е исто така природен број.

Решение. Имаме

$$\frac{n^2-n+6}{n-3}=\frac{n^2-n-6+12}{n-3}=n+2+\frac{12}{н-3}. \qquad (*)$$

Изразот $\frac{n^2-n+6}{n-3}$ ќе биде природен број само за оние вредности за кои што и изразот $\frac{12}{н-3}$ ќе биде природен број. Природни делители на бројот 12 се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, т.е. $n-3\in\{1,2,3,4,6,12\}$, од каде што $n\in\{4,5,6,7,9,15\}$.

24. Одреди ги сите четирицифрени броеви, деливи со 7, кои што може да се претставаат како збир на квадрат и куб на еден ист природен број.

Решение. Нека x е бараниот четирицифрен број , тогаш $x=a^2+a^3$. Прво го одредуваме множеството вредности на a, од условот x да биде четирицифрен број, имаме:

- ако $a=9$, тогаш $9^2+9^3=810$
- ако $a=10$, тогаш $10^2+10^3=1100$
- ако $a=21$, тогаш $21^2+21^3=9702$
- ако $a=22$, тогаш $22^2+22^3=11132$.

Бидејќи $x=a^2+a^3=a^2(a+1)=a\cdot a\cdot(a+1)$ е делив со 7, следува дека a е делив со 7 или $a+1$ е делив со 7. Меѓу броевите од множеството $\{10,11,12,...,21,22\}$ такви се 13, 14, 20 и 21.

Следствено бараните четирицифрени броеви се

$$x_1=13^2+13^3=2366$$
$$x_2=14^2+14^3=2940$$
$$x_3=20^2+20^3=8400$$
$$x_4=21^2+21^3=9702.$$

25. Определи го најмалиот природен број чија половина е точен квадрат, третина е точен куб, а петтината е точен петти степен на природен број.

Решение. Бараниот број мора да е делив со 2,3 и 5 (од условот), па мора да е од облик $n=2^x3^y5^z$. Ако има други множители нема да биде најмал. Од условот на задачата имаме:

$$\frac{n}{2}=2^{x-1}3^y5^z \qquad (1)$$
$$\frac{n}{3}=2^x3^{y-1}5^z \qquad (2)$$
$$\frac{n}{5}=2^x3^y5^{z-1} \qquad (3)$$

Од (1) следува дека $x-1,y,z$ мора да се парни. Од (2) следува дека $x,y-1,z$ мора да се деливи со три. Од (3) следува дека $x,y,z-1$ мора да се деливи со пет.

Значи x е непарен, делив со 3 и со 5, y е парен, делив со 5 и дава остаток 1 при делење со 3, z е парен, делив со 3 и дава остаток 1 при делење со 5. Бидејќи n е најмал, тогаш и x,y и z мора да се најмали, па имаме: $x=15$, $y=15$, $z=6$.

Конечно, $n = 2^{15}3^{10}5^{6} = 30233088000000$.

26. Да се најде природен број n, таков што $\frac{n(n+1)}{2}$ е трицифрен број запишан со исти цифри.

Решение. Од $\frac{n^2}{2} < \frac{n(n+1)}{2} \le 999$, следува дека $n < \sqrt{2\cdot 999} \approx 44,7$. Секој трицифрен број запишан со исти цифри е делив со $111 = 3\cdot 37$. Затоа, $37 \mid n$ или $37 \mid (n+1)$. Но, $n \le 44$, па затоа $n = 37$ или $n = 36$. Со непосредна проверка се добива дека само $n = 36$ го исполнува условот од задачата.

27. При делење на петцифрен број, што се запишува со исти цифри, со четирицифрен број, кој исто така се запишува со исти цифри, се добива количник 16 и некој остаток. Ако избришеме по една цифра од двата броја, тогаш при нивното делење се добива истиот количник, а остатокот е помал за 2000. Најди ги тие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се $\overline{aaaaa}$ и $\overline{bbbb}$. Според условот од задачата имаме

$$\overline{aaaaa} = 16\cdot \overline{bbbb} + 5$$
$$\overline{aaaa} = 16\cdot \overline{bbb} + 5 - 2000$$

од што добиваме

$$10^4 a = 16\cdot 10^2 b + 2000, \text{ т.е. } 5a = 8b + 1.$$

Бидејќи $8b+1$ е непарен број кој треба да е делив со 5, заклучуваме дека $8b$ завршува на цифрата 4, што е можно само ако цифрата b е 8 или 3. Во првиот случај добиваме $a = 13$ што не е можно, а во вториот случај за $b = 3$ добиваме $a = 5$.

Значи, бараните броеви се: 55555 и 3333.

28. Колку членови од низата

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111, \dots,\ \underbrace{111\dots111}_{1988}$$

се деливи со 7?

Решение. Бројот $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_\circ}$ е делив со 7 ако и само ако

$$[(a_\circ + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5)] + \dots +$$
$$+[(a_{6k} + 3a_{6k+1} + 2a_{6k+2}) - (a_{6k+3} + 3a_{6k+4} + 2a_{6k+5})] + \dots + x$$

е делив со 7, каде што x зависи од индексот n, т.е.

$x = a_n$ или $x = a_{n-1} + 3a_n$, или $x = a_{n-2} + 3a_{n-1} + 2a_n$ или

$x = a_{n-3} + 3a_{n-2} + 2a_{n-1} - a_n$ или $x = a_{n-4} + 3a_{n-3} + 2a_{n-2} - a_{n-1} - 3a_n$, или $x = 0$.

Според овој признак, се добива дека единствени членови на низата деливи со 7 се членовите од облик $\underbrace{111\dots11}_{6k}$, а такви ги има точно 331.

29. Определи ги сите цели броеви n така што $(n+1) \mid (n^2+1)$.

Решение. Нека n е цел број за кој важи $(n+1) \mid (n^2+1)$. Од равенството

$$n^2+1=(n-1)(n+1)+2,$$

следува дека $(n+1)|2$ и оттука се добива дека $n+1=\pm1,\pm2$. Значи, бараните цели броеви се $-3,-2,0$ и 1.

30. Докажи дека природен број z не може да се запише на два различни начини во видот $z=x!+y!$, каде што x и y се природни броеви кои го задоволуваат условот $x\le y$.

Решение. Нека x_1,y_1,x_2,y_2 се природни броеви за кои важи $x_1\le y_1$, $x_2\le y_2$ и $z=x_1!+y_1!=x_2!+y_2!$ и нека $x_1<x_2$. Ако $y_1<x_2$, тогаш имаме

$$z=x_1!+y_1!<x_2!+x_2!\le x_2!+y_2!=z,$$

т.е. $z<z$ што не е можно. Значи, $y_1\ge x_2$. Тогаш $x_2\le y_1$ и $x_2\le y_2$, па според тоа $x_2!+y_2!-y_1!$ е делив со $x_2!$. Бидејќи $x_2!+y_2!-y_1!=x_1!$, следува дека $x_1!$ е делив со $x_2!$, што значи дека $x_1\ge x_2$, што противречи на претпоставката $x_1<x_2$. Аналогно, претпоставката $x_2<x_1$ води до противречност.

Од претходно изнесеното следува $x_1=x_2$, а од $x_1!+y_1!=x_2!+y_2!$ добиваме дека $y_1=y_2$.

31. Дали постојат по парови различни цифри a,b и c такви што c е делител на $\overline{ab}$, a е делител на $\overline{bc}$ и b е делител на $\overline{ca}$.

Решение. Ако една од цифрите е парна, тогаш и преостанатите две цифри се парни. Навистина, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека a е парна цифра. Тогаш од $a|\overline{bc}$ следува дека c е парна цифра, па затоа од $c|\overline{ab}$ следува дека и b е парна цифра. Според тоа, во овој случај условот на задачата е исполнет и за цифрите $\frac{a}{2},\frac{b}{2}$ и $\frac{c}{2}$. Затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека цифрите a,b и c се непарни.

Аналогно како погоре добиваме дека ако една од цифрите е 5, тогаш и другите две цифри се еднакви на 5, што противречи на условот на задачата.

Значи, $a,b,c\in\{1,3,7,9\}$, па затоа барем една една од цифрите мора да е еднаква на 3 или 9. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека a е 3 или 9. Тогаш од $a|\overline{bc}$ следува $\{b,c\}=\{3,9\}$ што не е можно бидејќи a,b и c се по парови различни цифри.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека не постојат цифри a,b и c со саканите својства

32. Определи го најмалиот петцифрен број $\overline{pqrst}$ запишан со различни цифри, кој е делив со броевите 1, 2, 3, 4 и 5.

Решение. Секој природен број, па и секој петоцифрен број е делив со 1. Според тоа, треба да го определиме најмалиот петоцифрен број запишан со различни цифри, кој е делив со 2, 3, 4 и 5.

Ако бројот е делив со 2 и 5 тој е делив со 10, па тој завршува на цифрата 0. Според тоа, бараниот број е од облик $\overline{pqrs0}$.

Јасно, најмал петоцифрен број запишан со различни цифри добиваме ако избереме $p=1, q=2, r=3$, и ако за s можеме да избереме број, таков што $3\,|\,\overline{123s0}$ и $4\,|\,\overline{123s0}$. Во тој случај $3\,|\,1+2+3+s$, т.е. $3\,|\,s$ и $4\,|\,\overline{s0}$. Можности за s елементите од множеството $\{6,9\}$ за да тој е делив со 3. Понатаму, за да $4\,|\,\overline{s0}$ потребно и доволно е $s\in\{4,6,8\}$. Според тоа, $s\in\{4,6,8\}\cap\{6,9\}=\{6\}$, па затоа $s=6$ и бараниот број е $\overline{pqrst}=12360$.

33. Нека a и b се природни броеви. Бројот $\overline{\overline{a,b}}$ се добива така што после бројот a запишуваме децимална запирка и потоа го запишуваме бројот b. На пример, ако $a=25$ и $b=16$, тогаш $\overline{\overline{a,b}}=25,16$. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\overline{\overline{a,b}}\cdot\overline{\overline{b,a}}=13$.

Решение. Ако (a,b) е решение на задачата, тогаш и (b,a) е решение на задачата. Затоа нека претпоставиме дека $a\geq b$. Ако $a\geq 10$, тогаш мора $b=1$, па затоа единствени можности за a се 10, 11 и 12. Со непосредна проверка се докажува дека во овие случаи производот не е 13. Значи, броевите a и b се помали од 10. Тогаш условот на задачата е еквивалентен со $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=1300$. Според тоа, еден од броевите е делив со 5, а другиот е парен број, т.е. равенството го добива обликот $\overline{5b}\cdot\overline{b5}=1300$, па затоа единствена можност е $b=2$. Со непосредна проверка се добива дека важи $5,2\cdot 2,5=13$, што значи дека $(a,b)\in\{(2,5),(5,2)\}$.

34. Определи ги сите тројки последователни непарни природни броеви такви што збирот на нивните квадрати е четирицифрен број на кој сите цифри му се еднакви.

Решение. Трите последователни непарни природни броеви да ги означиме со $2k-1,\ 2k+1, 2k+3$ и нека $x\in\{1,2,...,9\}$. Тогаш, од условот на задачата имаме

$$(2k-1)^2+(2k+1)^2+(2k+3)^2=\overline{xxxx}$$
$$12k^2+12k+11=1111x$$
$$12(k^2+k)+11=12\cdot 92x+7x.$$

Последното значи дека $12\,|\,7x-11$, па затоа x мора да е не непарен едноцифрен број. Но, $12\nmid 7x-11$ за $x\in\{1,3,7,9\}$, а за $x=5$ важи $7\cdot 5-11=2\cdot 12$. Уште повеќе

$$12k^2+12k+11=5555$$
$$k^2+k=k(k+1)=462=21\cdot 22.$$

Значи, $k=21$, а бараните броеви се 41, 43 и 45.

35. На кружница се запишани 99 соседни броеви. Познато е дека секои два соседни броја се разликуваат за 1 или 2, или пак едниот е двапати поголем од другиот. Докажи дека, барем еден од броевите е делив со 3.

Решение. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите не е делив со 3, т.е. дека секој од запишаните броеви при делење со 3 дава остаток 1 или 2. Броеви со еднакви ненулти остатоци при делење со 3 не може да се разликуваат за 1 или 2, а не е можно и едниот да е двапати поголем од другиот. Тоа значи дека соседните броеви даваат различни остатоци при делење со 3, т.е. остатоците 1 и 2 наизменично се менуваат, што противречи на условот, дека имаме непарен број запишани броеви, т.е. 99 запишани броеви.

36. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се подели на две дисјунктни подмножества, такви да производот на сите елементи од едното подмножество е еднаков на производот на сите елементи од другото подмножество.

Решение. Ќе докажеме дека меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој е заемно прост со останатите.

Имено, меѓу шест последователни природни броеви се наоѓаат три последователни непарни броеви. Едниот од нив е делив со 3 и најмногу еден од нив е делив со 5. Според тоа, меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој не е делив ниту со 2, ниту со 3, ниту со 5. Тој број е заемно прост со останатите, бидејќи најголемиот заеднички делител на два броја чија разлика не е поголема од 5 може да биде еден од броевите 1, 2, 3, 4, 5.

Нека сега претпоставиме дека множеството $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ може да се подели на две дисјунктни подмножества кои го исполнуваат условот на задачата. Меѓу елементите на $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ постои еден кој е заемно прост со останатите и истиот припаѓа на едното подмножество. Затоа тој го дели и другиот производ, а тоа е можно само ако тој број е 1. Но, почетното множество го содржи бројот 1 ако и само ако $n=1$. Во множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ само еден елемент е делив со 5, па затоа само еден од производите ќе биде делив со 5, што противречи на условот на задачата.

Значи во множеството природни броеви не постои број n со бараното својство.

37. Нека a и b се два различни седумцифрени броеви такви што секој од нив ги содржи сите цифри од 1 до 7. Докажи, дека b не е делител на a.

Решение. Нека претпоставиме дека постои $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ таков што $a = bn$. Бидејќи броевите a и b се запишани со исти цифри, заклучуваме дека тие при делење со бројот 9 даваат ист остаток како и збирот на нивните цифри $1+2+3+4+5+6+7=28=9\cdot 3+1$, т.е. даваат остаток 1. Но, ако при делење со 9 на b се добива остаток 1, тогаш при делење на $a = nb$ со 9 се добива ист остаток како и при делење на n со 9. Тоа значи дека при делење на n со 9 треба да се добие остаток 1. Сега, бидејќи мора да важи $1 < n < 10$, заклучуваме дека тоа не е можно. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ таков што $a = bn$, т.е. дека b не е делител на a.

38. Од една книга се откинати 25 листови. Дали може збирот на броевите со кои се нумерирани откинатите листови да биде еднаков на 1001.

Решение. На секој откинат лист се запишани два броја, од кои едниот е парен а другиот непарен. Според тоа ако откинатите листови го означиме со A_1, A_2, $..., A_{25}$, тогаш на i-тиот лист се запишани броевите $2k_i - 1$ и $2k_i$. Збирот на овие броеви е $(2k_i - 1) + 2k_i = 4k_i - 1$. Значи, збирот на броевите на откинатите листови е

$$\sum_{i=1}^{25}(4k_i - 1) = 4(k_1 + k_2 + ... + k_{25} - 7) + 3.$$

Бројот $4(k_1 + k_2 + ... + k_{25} - 7) + 3$ при делење со 4 дава остаток 3. Бројот 1001 при делење со 4 дава остаток 1. Затоа, бројот $4(k_1 + k_2 + ... + k_{25} - 7) + 3$ не може да е еднаков на 1001.

39. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ така што

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \text{ и } a + b + c = 23.$$

Решение. Равенката $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ можеме да ја запишеме во облик

$$99(c - a) + 10(d - b) = 3 \cdot 99.$$

Од последната равенка следува $99 \mid 10(d - b)$. Бидејќи $d - b$ или $b - d$ е цифра, тоа е можно ако и само ако $10(d - b) = 0$, т.е. $d = b$. Но, тогаш $99(c - a) = 3 \cdot 99$, од каде добиваме $c - a = 3$, т.е. $c = a + 3$. Ако пак сега замениме во $a + b + c = 23$ добиваме $a + b + a + 3 = 23$, т.е. $b = 2(10 - a)$. Бидејќи b е цифра, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, па според тоа $10 - a \le 4$, т.е. $a \ge 6$. Бидејќи и c е цифра од равенството $c = a + 3$, добиваме дека $a = 6$. Сега е јасно дека $c = 9$ и $b = 8$.

Значи, единствениот број кој го задоволува условот од задачата е бројот $\overline{abcd} = 6898$.

40. а) Докажи, дека не постојат два природни броја чија разлика на квадрати е еднаква на 987654!

б) Докажи, дека не постојат два природни броја чија разлика на кубови е еднаква на 987654!

Решение. а) Да претпоставиме дека постојат природни броеви a и b такви што $a^2 - b^2 = 987654$, т.е. $(a - b)(a + b) = 987654$. Бројот 987654 е парен, па затоа барем еден од множителите треба да биде делив со 2. Но, од $a + b = (a - b) + 2b$ следува дека двата множитела се со иста парност, што значи дека и двата се деливи со 2. Според тоа, нивниот производ е делив со 4. Сега од равенството $(a - b)(a + b) = 987654$ следува дека бројот 987654 е делив со 4, што е противречност бидејќи неговиот двоцифрен завршеток 54 не е делив со 4.

б) Да претпоставиме дека постојат природни броеви a и b такви што $a^3 - b^3 = 987654$, т.е. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 987654$. Бројот 987654 е делив со 3, па затоа барем еден од множителите $a - b$ и $a^2 + ab + b^2$ мора да биде делив со 3. Но, $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$ и како барем еден од броевите $a^2 + ab + b^2$ и $a - b$ е делив со 3 следува дека и другиот број е делив со 3. Според тоа, производот $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ е делив со 9, што не е можно бидејќи бројот 987654 не е делив со 9.

41. Дали постои природен број n, за кој бројот $\underbrace{111...1}_{n\text{ пати}}$ е точен квадрат.

Решение. Бројот $\underbrace{111...1}_{n\text{ пати}}$ ќе го запишеме во облик

$$\underbrace{111...1}_{n\text{ пати}} = \underbrace{111...1}_{n-2\text{ пати}}00+11=10^2\cdot\underbrace{111...1}_{n-2\text{ пати}}+8+3=4(25\cdot\underbrace{111...1}_{n-2\text{ пати}}+2)+3=4m+3.$$

Секој природен број е од облик $2k$ или $2k+1$, па затоа квадратот на секој природен број е од облик

$$(2k)^2=4k^2=4m \text{ или } (2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1=4m+1.$$

Бидејќи $\underbrace{111...1}_{n\text{ пати}}$ е од облик $4m+3$, тој не е квадрат на ниту еден природен број.

42. Ако збирот на броевите $\overline{xyz}$ и $\overline{abc}$ е делив со 37 докажи дека и бројот $\overline{xyzabc}$ е делив со 37.

Решение. Според условот

$$\overline{xyz}+\overline{abc}=37k \qquad (*)$$

Понатаму, $\overline{xyzabc}=1000\cdot\overline{xyz}+\overline{abc}$, па ако замениме од (*) ќе добиеме

$$\overline{xyzabc}=1000\cdot\overline{xyz}+(37k-\overline{xyz})=999\overline{xyz}+37k.$$

Со разложување на $999=37\cdot 27$ конечно добиваме

$$\overline{xyzabc}=999\overline{xyz}+37k=37\cdot 27\overline{xyz}+37k=37(27\overline{xyz}+k).$$

43. Докажи дека производот од три последователни непарни природни броеви е делив со 3.

Решение. Треба да се докаже дека бројот $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ е делив со 3. Природниот број n е или од облик $3k$, или од облик $3k+1$ или од облик $3k+2$.

Ако $n=3k$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=3(6k-1)(6k+1)(2k+1)$.

Ако $n=3k+1$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=6k(6k+3)(6k+5)$.

Ако $n=3k+2$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=3(6k-3)(2k+1)(6k+7)$.

Значи, во секој случај $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ е делив со 3.

44. Докажи дека:
1) производот на два последователни природни броеви е делив со 12 ако поголемиот од овие броеви е точен квадрат, и
2) производот на три последователни природни броеви е делив со 60 ако средниот број е точен квадрат.

Решение. 1) Двата последователни природни броеви да ги означиме со x и $x+1$. Од $x+1=m^2$ следува $x=m^2-1$ па затоа

$$x(x+1)=m^2(m^2-1)=m(m-1)m(m+1). \qquad (1)$$

Во производот на десната страна на (1) има три последователни природни броеви, па затоа $3\,|\,x(x+1)$. Сега доволно е да докажеме дека $4\,|\,x(x+1)$.

Можни се два случаи.

- $m=2k$ и тогаш $m^2=4k^2$, што значи $4\,|\,m^2(m^2-1)=x(x+1)$.
- $m=2k+1$ и тогаш $m^2-1=4k(k+1)$, што значи $4\,|\,m^2(m^2-1)=x(x+1)$.

2) Нека трите последователни броеви се $x-1, x$ и $x+1$ и нека $x=m^2$. Тогаш

$$(x-1)x(x+1)=m^2(m^2-1)(m^2+1). \tag{2}$$

Од а) следува дека $12\,|\,x(x-1)(x+1)$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $5\,|\,x(x-1)(x+1)$. Можни се следните случаи:

- $5\,|\,m$ и тогаш јасно $5\,|\,x(x-1)(x+1)$,
- $m=5k\pm1$ и тогаш $m^2-1=5k(5k\pm2)$, па затоа $5\,|\,x(x-1)(x+1)$, и
- $m=5k\pm2$ и тогаш $m^2+1=5(5k^2\pm4k+1)$, па затоа $5\,|\,x(x-1)(x+1)$.

45. Докажи дека бројот $3^k, k\in\mathbb{N}$ не може да се претстави како збир на квадратите од два природни броја.

Решение. Да го разгледаме изразот a^2+b^2, каде што a и b се природни броеви. Секој од броевите a и b може да се претстави во еден од облиците $3s, 3s+1, 3s+2$.

Ако a и b се од облик $3s$, на пример $a=3a_1$, $b=3b_1$ тогаш

$$a^2+b^2=3^2(a_1^2+b_1^2),$$

па, ако $a^2+b^2=3^k$, тогаш $a_1^2+b_1^2=3^{k-2}$. Значи, можеме да претпоставиме дека a и b не се од облик $3s$. Во тој случај имаме:

- ако $a=3a_1$ и $b=3b_1+1$, тогаш $a^2+b^2=3A+1$,
- ако $a=3a_1$ и $b=3b_1+2$, ѕогаш $a^2+b^2=3A+1$,
- ако $a=3a_1+1$ и $b=3b_1+1$, тогаш $a^2+b^2=3A+2$
- ако $a=3a_1+1$ и $b=3b_1+2$, тогаш $a^2+b^2=3A+2$,
- ако $a=3a_1+2$ $b=3b_1+2$, тогаш $a^2+b^2=3A+2$,

што значи дека $a^2+b^2\neq3^k$.

46. Ако $a,b,c\in\mathbb{Z}$ и $9\,|\,(a^3+b^3+c^3)$, тогаш барем еден од броевите a,b и c е делив со 3. Докажи!

Решение. Нека $a,b,c\in\mathbb{Z}$ и $9\,|\,(a^3+b^3+c^3)$. Лесно се проверува дека за $m=3k+1$ важи $m^3=9q+1$, а за $m=3k+2$ важи $m^3=9q-1$. Според тоа, ако ниту еден од броевите a,b и c не се дели со 3, тогаш при делење на бројот $a^3+b^3+c^3$ со 3 се добива остаток од облик $\pm1\pm1\pm1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека барем еден од броевите a,b и c е делив со 3.

47. Даден е бројот 2^k, $k>3$. Докажи дека со прераспоредување на цифрите на овој број не може да се добие број од видот 2^n, $n>k$.

Решение. Да претпоставиме дека со прераспоредување на цифрите на бројот $K=2^k$ добиен е бројот $N=2^n$, $n>k$. Тогаш, $N>K$, па бидејќи N има најмногу онолку цифри колку што има и K, затоа N и K имаат ист број на цифри, па $N<10K$. Понатаму, $N-K$ е делив со 9, бидејќи и двата броја даваат ист остаток при делење со 9 како и збирот на нивните цифри. Следи дека $9\,|\,N-K=2^k(2^{n-k}-1)$, односно $9\,|\,2^{n-k}-1<2^{n-k}=\frac{N}{K}<10$. Тоа значи дека $2^{n-k}-1=9$, што не е можно.

48. Докажи, дека збирот на квадратите на 5 последователни природни броеви не може да биде точен квадрат.

Решение. Нека се тоа броевите $n-2, n-1, n, n+1, n+2.$ Тогаш нивниот збир е

$$S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2),$$

што значи дека $5\,|\,S$. Ако бројот S е точен квадрат, тогаш треба $5\,|\,(n^2+2)$. Ова не е можно за ниту еден број $n\in\mathbb{Z}.$ Имено, ако $n=5k$, тогаш $n^2+2=5A+2$, ако $n=5k\pm1$, тогаш $n^2+2=5B+3$, ако $n=5k\pm2$, тогаш $n^2+2=5C+1.$ Оттука следува дека бројот C не може да биде точен квадрат.

49. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека бројот a^2+ab+b^2 е делител на бројот $(a+b)^6-a^6$.

Решение. Ќе ги користиме идентитетите

$$A^6-B^6=(A^3-B^3)(A^3+B^3) \text{ и } A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

Имаме,

$$\begin{aligned}(a+b)^6-a^6&=[(a+b)^3-a^3][(a+b)^3+a^3]\\&=[(a+b)-a][(a+b)^2+a(a+b)+a^2][(a+b)+a][(a+b)^2-(a+b)a+a^2]\\&=b(2a+b)(a^2+ab+b^2)(3a^2+3ab+b^2).\end{aligned}$$

Од последното равенство следува дека $(a^2+ab+b^2)\,|\,(a+b)^6-a^6$.

50. Докажи, дека ако природниот број a не е делив со 5, тогаш бројот a^4-1 е делив со 5.

Решение. *Прв начин.* Имаме $a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)$. Множителите a^2-1 и a^2+1 се двата соседни броја на a^2. Цифрата на единиците на бројот a^2 е различна од 0 и 5. Понатаму, квадрат на природен број завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа во нашиот случај бројот a^2 завршува на една од цифрите 1, 4, 6 или 9. Значи, еден од броевите a^2-1 и a^2+1 завршува на една од цифрите 0 или 5, па затоа $a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)$ е делив со 5.

Втор начин. Имаме:

$$a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)=(a^2-1)((a^2-4)+5)=(a^2-1)(a^2-4)+5(a^2-1)$$
$$=(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)+5(a^2-1).$$

Бидејќи $a\neq 5k$, следува дека еден од броевите: $a-2,\ a-1,\ a+1,\ a+2$ е делив со 5, т.е. $5\mid (a-2)(a-1)(a+1)(a+2)$. Следствено, ако a не е делив со 5, тогаш $5\mid a^4-1$.

Трет начин. Имаме $A=a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)$. Бидејќи a не е делив со 5, тогаш тој е од видот $5k\pm 1$ или $5k\pm 2$. Ако $a=5k\pm 1$, тогаш

$$a^2-1=(5k\pm 1)^2-1=5(5k^2\pm 2k)$$

т.е. $5\mid a^2-1$, а оттука и $5\mid A$. Слично, за $a=5k\pm 2$ добиваме

$$a^2+1=(5k\pm 2)^2+1=5(2k^2\pm 2k+1)$$

т.е. дека $5\mid a^2+1$, и затоа $5\mid A$.

Следствено, за секој $a\neq 5k$ следува дека $5\mid a^4-1$.

51. Нека a,b,c се цели броеви такви што $a^2+b^2=c^2$.

а) докажи дека барем еден од броевите a и b е делив со 3.

б) докажи дека abc е делив со 60.

Решение. а) Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите a и b не е делив со 3. Тогаш a и b имаат облици $a=3m\pm 1$ и $b=3n\pm 1$. Збирот на нивните квадрати е еднаков на

$$a^2+b^2=(3m\pm 1)^2+(3n\pm 1)^2=9m^2\pm 6m+1+9n^2\pm 6n+1$$
$$=3(3m^2+3n^2\pm 2m\pm 2n)+2$$

Значи, a^2+b^2 не е делив со 3, и остатокот при делење со 3 е еднаков на 2.

Бројот c има еден од облиците $c=3p$, $c=3p\pm 1$. Според тоа, квадратот на c има облик

$$c^2=(3p)^2=3(3p^2)\ \text{ или }\ c^2=(3p\pm 1)^2=9p^2\pm 6p+1=3(3p^2\pm 2p)+1.$$

Значи, при делење на c^2 со 3 се добива остаток 0 или 1. Според тоа, ако $3\nmid a$ и $3\nmid b$, равенството $a^2+b^2=c^2$ не е точно, што противречи на условот на задачата. Значи $3\mid a$ или $3\mid b$.

б) Имаме $60=3\cdot 4\cdot 5$. Од делот под а) $3\mid a$ или $3\mid b$. Според тоа, доволно е да се докаже дека барем еден од броевите a,b,c е делив со 5 и дека барем еден од нив е парен.

Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите a,b и c не е делив со 5. Тогаш тие се од облик $5k\pm 1$ или $5k\pm 2$. Нивните квадрати се од облик $5m+1$ или $5m+4$. Збир на два броја од последните облици не дава број што е еден од тие облици, што противречи на равенството $a^2+b^2=c^2$ не е точно. Од добиената противречност со условот на задачата $5\mid a$ или $5\mid b$ или $5\mid c$.

Ќе докажеме дека a и b не може да се непарни. Навистина, ако претпоставиме дека a и b се непарни, тогаш $a = 2k+1$, $b = 2p+1$ и

$$a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2p+1)^2 = 4(k^2 + k + p^2 + p) + 2 = 4m + 2.$$

Значи, $a^2 + b^2$ е парен број и не е делив со 4. Од $a^2 + b^2 = c^2$, следува дека c^2 е парен број, па според тоа c е парен број, од каде што добиваме дека $4 | c^2$. Последното противречи на претпоставките од задачата. Бројот од левата страна во $a^2 + b^2 = c^2$ не е делив со 4, а бројот од десната страна е делив со 4.

Значи, барем еден од броевите a и b е парен. Нека на пример a е парен, а b и c се непарни. Случајот два од нив да се парни, е доволен услов за деливост со 4 и задачата би била решена. Затоа, нека $a = 2k$, $b = 2m+1$ и $c = 2n+1$. Тогаш од $a^2 + b^2 = c^2$ добиваме $a^2 = c^2 - b^2$, па затоа

$$4k^2 = (2m+1)^2 - (2n+1)^2 = 4m(m+1) - 4n(n+1), \text{ т.е. } k^2 = m(m+1) - n(n+1).$$

Разлика на два парни броја е парен број. Според тоа $m(m+1) - n(n+1)$ е парен број, односно k^2 е парен број. Ако k^2 е парен број, тогаш k е парен број, и тој е од облик $k = 2q$. Тогаш $a = 2k = 4q$, и $4 | abc$, што требаше да се докаже.

52. Меѓу броевите од облик $36^k - 5^l, k, l \in \mathbb{N}$ определи го најмалиот број по апсолутна вредност.

Решение. Цифрата на единиците на бројот $36^k = 6^{2k}$ е еднаква на 6, а цифрата на единиците на бројот 5^l е еднаква на 5. Според тоа бројот $|6^{2k} - 5^l|$ завршува на цифрата 1, кога $6^{2k} > 5^l$ или на цифрата 9, кога $6^{2k} < 5^l$.

Равенството $6^{2k} - 5^l = 1$ не е можно, бидејќи од $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$ следува $5 | (6^k + 1)$, што не е можно. За $k = 1$ и $l = 2$ имаме $36^k - 5^l = 11$.

Равенството $5^l - 36^k = 9$ не е можно, бидејќи $3 \nmid 5^l$.

Конечно, бараниот број е 11.

53. Докажи дека за секој цел број x, бројот $p(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$p(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Значи, треба да докажеме дека бројот $f(x) = x(x+1)(2x+1)$ е делив со 6, а за тоа е доволно да се докаже дека $f(x)$ е делив со 2 и со 3.

Производ од два последователни цели броја е делив со 2, па затоа $x(x+1)$ е делив со 2, т.е. $f(x)$ е делив со 2.

Секој цел број е од облик $3k, 3k+1$ или $3k+2$. Ако $x = 3k$, тогаш x е делив со 3. Ако $x = 3k+1$, тогаш $2x+1 = 3(2k+1)$, па $2x+1$ е делив со 3. Ако $x = 3k+2$, тогаш $x+1 = 3(k+1)$, па $x+1$ е делив со 3. Значи, за кој било цел број x, $f(x) = x(x+1)(2x+1)$ е делив со 3.

54. Докажи, дека за ниту еден природен број m бројот $1978^m - 1$ не е делив со $1000^m - 1$

Решение. Ако $1978^m - 1$ е делив со $1000^m - 1 = d$, тогаш и бројот

$$1978^m - 1000^m = 2^m (989^m - 500^m)$$

ее делив со d. Но, ова не е можно, бидејќи $989^m - 500^m < d$ и d е непарен број.

55. Докажи, дека за секој природен број n бројот $n^{19} - n^7$ е делив со 30.

Решение. Нека $A = n^{19} - n^7$. Имаме

$$\begin{aligned} A &= n^{19} - n^7 = n^7 (n^{12} - 1) = n^7 (n^6 - 1)(n^6 + 1) \\ &= n^7 (n-1)(n+1)(n^4 + n^2 + 1)(n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1) \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)B, \end{aligned}$$

каде $B \in \mathbb{N}$. При тоа имаме:

а) Бидејќи n и $n+1$ се последователни природни броеви, еден од нив е парен, па $n^{19} - n^7$ е делив со 2 за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) Еден од трите последователни броја $n-1, n$ и $n+1$ е делив со 3, па затоа бројот $n^{19} - n^7$ е делив со 3 за секој $n \in \mathbb{N}$.

в) Ако $n = 5k, k \in \mathbb{N},$ тогаш n е делив со 5. Ако $n = 5k \pm 1, k \in \mathbb{N},$ тогаш $n^2 - 1$ е делив со 5. Ако $n = 5k \pm 2, k \in \mathbb{N},$ тогаш $n^2 + 1$ е делив со 5. Според тоа $n^{19} - n^7$ е делив со 5 за секој $n \in \mathbb{N}$.

Конечно, бидејќи 2,3 и 5 се по парови заемно прости броеви, добиваме дека $30 \mid n^{19} - n^7$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

56. Докажи дека, за секој цел број n бројот $a_n = n^5 - 5n^3 + 4n$ е делив со 120.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a_n &= n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Бидејќи $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, доволно е да докажеме дека $2^3 \mid a_n, 3 \mid a_n$ и $5 \mid a_n$.

Бројот a_n е производ на пет последователни цели броеви, па како еден од нив е делив со 5, добиваме дека $5 \mid a_n$. Јасно, меѓу пет последователни природни броеи барем еден е делив со 3, па затоа $3 \mid a_n$. Понатаму, меѓу пет последователни природни броеви има најмалку два парни, од кои едниот е делив со 2, а другиот е делив со 4, па затоа $2^3 = 2 \cdot 4 \mid a_n$.

57. Докажи, дека за секој непарен природен број n бројот $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ е делив со 2^9 .

Решение. Имаме

$$n^{12}-n^8-n^4+1=n^8(n^4-1)-(n^4-1)=(n^4-1)(n^8-1)=(n^4-1)[(n^4)^2-1]$$
$$=(n^4-1)[(n^4-1)(n^4+1)]=(n^4-1)^2(n^4+1)=[(n^2)^2-1]^2(n^4+1)$$
$$=[(n^2-1)(n^2+1)]^2(n^4+1)=(n^2-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$$
$$=[(n-1)(n+1)]^2(n^2+1)^2(n^4+1)=(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$$

Ако $n=2k-1, k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)=(2k-2)^2(2k)^2[(2k-1)^2+1]^2[(2k-1)^4+1]$$
$$=2^7[(k-1)k]^2(2k^2-2k+1)(8k^4-16k^3+12k^2-4k+1)$$

Од друга страна $k(k-1)$ е парен број, т.е. $k(k-1)=2s$.

Според тоа, ако $n=2k-1, k\in\mathbb{N}$, тогаш $2^9\mid n^{12}-n^8-n^4+1$.

58. Ако n е непарен број, тогаш бројот n^3+3n^2-n-3 е делив со 48. Докажи!

Решение. Го трансформираме дадениот израз и добиваме

$$n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n+3)(n^2-1)=(n+3)(n-1)(n+1).$$

Бидејќи n е непарен број, n може да се запише како $n=2k-1$ за некој природен број k. Тогаш

$$(n+3)(n-1)(n+1)=(2k+2)(2k-2)2k=8(k-1)k(k+1).$$

Производ од три последователни броеви е секогаш делив со 6. Следува дека 48 е делител на бројот n^3+3n^2-n-3.

59. Нека a, b и c се природни броеви од кои ниту еден не е делив со 5. Докажи дека барем еден од броевите a^2-b^2, b^2-c^2 и c^2-a^2 е делив со 5.

Решение. Ако бројот x не е делив со 5, тогаш тој е од облик $5k\pm1$ или $5k\pm2$, а неговиот квадрат е од облик $5m+1$ или $5m+4$.

Од броевите a^2, b^2, c^2 барем два се од ист облик, па нивната разлика ќе биде делива со 5.

60. Ако $a,b\in\mathbb{N}$, тогаш барем еден од броевите $a+b,\ a-b,\ ab$ е делив со 3. Докажи!

Решение. Според тоа, какви остатоци може да даваат броевите $a,b\in\mathbb{N}$ при делење со 3 ќе ги разгледаме следниве случаи:

1) Ако барем едниот од a,b е делив со 3, тогаш нивниот производ ab е делив со 3.

2) Ако и двата броја a,b при делење со 3 даваат ист ненулти остаток, тогаш нивната разлика $a-b$ е делива со 3.

3) Ако двата броја a,b при делење со 3 даваат различни ненулти остатоци, тогаш нивниот збир $a+b$ е делив со 3.

Конечно, во секој случај барем еден од броевите $a+b,\ a-b,\ ab$ е делив со 3

61. За кои вредности на $n \in \mathbb{N}$, бројот $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$ е делив со 18.

Решение. Ако ги искористиме идентитетите

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3,$$

добиваме

$$\begin{aligned} S &= (n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 \\ &= n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3n^3 + 24n = 3n(n^2+8). \end{aligned}$$

Значи, $3 \mid 3n(n^2+8) = S$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Според тоа доволно е да се определат природните броеви n такви што $6 \mid n(n^2+8)$.

Ако n е непарен, тогаш тој е од облик $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Но, тогаш

$$n(n^2+8) = (2k+1)(4k^2+4k+9) = (2k+1)[2(2k^2+2k+4)+1],$$

односно $n(n^2+8)$ е непарен. Според тоа, тој не е делив со 2 па затоа не е делив ниту со 6.

Значи, за да $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$ е делив со 18 потребно е n да е парен број. Ако $3 \mid n$, тогаш $3 \mid n(n^2+8)$. Ако n не е делив со 3, тогаш тој е од облик $n = 3m \pm 1$, па затоа

$$n^2 + 8 = 9m^2 \pm 6m + 9 = 3(3m^2 \pm 2m + 3),$$

односно $3 \mid n(n^2+8)$.

Од претходната дискусија следува дека за да $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$ е делив со 18 доволно е n да е парен број.

62. Определи ги природните броеви n за кои $n+2$ е делител на n^5+2.

Решение. Ако n е природен број за кој што $n+2 \mid n^5+2$, тогаш

$$n+2 \mid n^5 + 2^5 - 30.$$

Значи, $n+2 \mid 30$, па затоа $n+2 \mid n^5+2$ ако и само ако $n+2 \in \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Бидејќи n е природен број $n \in \{1,3,4,8,13,28\}$.

Не е тешко да се провери дека за секој број од множеството $\{1,3,4,8,13,28\}$ исполнет е условот од задачата.

63. Одреди го најмалиот природен број од видот $n^3 - 3n^2 + 4$, $n \in \mathbb{N}$, кој е делив со 173.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} n^3 - 3n^2 + 4 &= n^3 + n^2 - 4n^2 + 4 = n^2(n+1) - 4(n^2-1) \\ &= (n+1)(n^2 - 4n + 4) = (n+1)(n-2)^2. \end{aligned}$$

Бројот 173 е прост број, па затоа бројот $(n+1)(n-2)^2$ е делив со 173, ако $n+1$ или $n-2$ е делив со 173.

Според тоа, најмалиот природен број, при $n=172$, е бројот $173\cdot 170^2$.

64. Определи го најголемиот природен број n, за кој бројот $\underbrace{999\dots99}_{999\text{ цифри}}$ е делив со 9^n.

Решение. Имаме $\underbrace{999\dots99}_{999\text{ цифри}}=10^{999}-1$, па затоа

$$\begin{aligned}10^{999}-1&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{333}-1)\\&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{222}+10^{111}+1)(10^{111}-1)\\&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{222}+10^{111}+1)(10^{74}+10^{37}+1)(10^{37}-1)\\&=(10^{666}+10^{333}+1)(10^{222}+10^{111}+1)(10^{74}+10^{37}+1)\cdot 9\cdot\underbrace{111\dots11}_{37-\text{единици}}\end{aligned}$$

Секој од првите три множители е делив со 3, бидејќи збирот на нивните цифри е 3. Четвртиот множител е 3^2, значи е делив со 3^2. Петтиот множител не е делив со 3, затоа што збирот на неговите цифри е 37. Значи, дадениот број е делив со $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3^2=3^5$, односно со $3\cdot 9^2$. Значи, најголемиот природен број n, за кој бројот $\underbrace{999\dots99}_{999\text{ цифри}}$ е делив со 9^n е 2.

65. Докажи дека збирот $3+3^2+3^3+...+3^{1983}$ е делив со 13.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $1983=3\cdot 661$, имаме

$$\begin{aligned}(3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6)+...+(3^{1981}+3^{1982}+3^{1983})&=\\=3(1+3+3^2)+3^4(1+3+3^2)+...+3^{1981}(1+3+3^2)&\\=13(3+3^4+...+3^{1981}),&\end{aligned}$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}3+3^2+3^3+...+3^{1983}&=3(1+3+3^2+3^3+...+3^{1982})\\&=3\tfrac{(1+3+3^2+3^3+...+3^{1982})(3-1)}{3-1}\\&=\tfrac{3}{2}(3^{1983}-1)=\tfrac{3}{2}(27^{661}-1)\\&=\tfrac{3}{2}(27-1)(27^{660}+27^{559}+...+27+1)\\&=3\cdot 13\cdot(27^{660}+27^{559}+...+27+1),\end{aligned}$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

66. Докажи дека бројот $A=5\underbrace{00...0}_{1995}3^{103}+1\underbrace{00...0}_{1996}3$ е делив со бројот $15\underbrace{00...0}_{1995}6$.

Решение. Да го разгледаме општиот случај, кога наместо 1995 нули имаме n нули, тогаш:

$$\begin{aligned}
B &= 5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{103}+1\underbrace{00\ldots0}_{n+1}3^{53}+5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{53}-5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{53}\\
&= 5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{53}(5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{50}-1)+1\underbrace{00\ldots0}_{n+1}3^{53}+5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{53}\\
&= 5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{53}(5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{25}-1)(5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{25}+1)+(1\underbrace{00\ldots0}_{n+1}3+5\underbrace{00\ldots0}_{n}3)Q\\
&= 5\underbrace{00\ldots0}_{n}3^{53}(5\underbrace{00\ldots0}_{n}3-1)M_1(5\underbrace{00\ldots03+1}_{n})M_2+15\underbrace{00\ldots06\cdot Q}_{n}\\
&= 5\underbrace{00\ldots03^{53}}_{n}\cdot 5\underbrace{00\ldots02}_{n}\cdot 5\underbrace{00\ldots04\cdot}_{n}M_1M_2+15\underbrace{00\ldots06\cdot Q}_{n}\\
&= 5\underbrace{00\ldots03^{53}}_{n}5\underbrace{00\ldots02}_{n}\cdot 3kM_1M_2+15\underbrace{00\ldots06\cdot Q}_{n}\\
&= 5\underbrace{00\ldots03^{53}}_{n}\cdot 15\underbrace{00\ldots06\cdot}_{n}kM_1M_2+15\underbrace{00\ldots06\cdot Q}_{n}\\
&= 15\underbrace{00\ldots06\cdot}_{n}(5\underbrace{00\ldots03^{53}\cdot}_{n}kM_1M_2+Q)
\end{aligned}$$

Значи, збирот B, односно A е делив со $15\underbrace{00\ldots0}_{n}6$.

67. За природниот број n со $P(n)$ да го означиме производот на сите позитивни делители на n. На пример, $P(20)=8000$, бидејќи позитивни делители на 20 се: 1, 2, 4, 5, 10 и 20.

а) Определи ги сите природни броеви n такви што $P(n)=15n$.

б) Докажи, дека не постои природен број n, таков што $P(n)=15n^2$.

Решение. а) Од $P(n)=15n$ следува дека 3 и 5 се делители на n, т.е. n е делив со 15. Ако $n>15$, тогаш 3, 5, 15 и n се делители на n, па затоа

$$15n=P(n)\geq 3\cdot 5\cdot 15\cdot n=225n,$$

што е противречност. Според тоа, единствена можност е $n=15$ и тогаш

$$P(15)=1\cdot 3\cdot 5\cdot 15=15\cdot 15,$$

што значи дека $n=15$ е решение на задачата.

б) Како во решението под а) наоѓаме дека 15 е делител на n. Но, за $n=15$ од а) следува дека $P(15)=15\cdot 15\neq 15\cdot 15^2$, т.е. $n\geq 30$. Тогаш $\frac{n}{3}>\frac{n}{5}>5$, па значи $1<3<5<\frac{n}{3}<\frac{n}{5}<n$ се различни делители на n. Според тоа,

$$P(n)\geq 1\cdot 3\cdot 5\cdot \tfrac{n}{5}\cdot \tfrac{n}{3}\cdot n=n^3,$$

па затоа $15n^2\geq n^3$, т.е. $15\geq n$, што противречи на $n\geq 30$.

68. Дали постои природен број n, таков што збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $n(4n+1)$ е еднаков на 2017.

Решение. Ако $n=3k+2$ или $n=3k$, тогаш $n(4n+1)$ е делив со 3. Но, број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3, па како 2017 не е делив со 3 овие два случаја отпаѓаат.

Нека $n=3k+1$. Тогаш бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 2. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот n. Да го разгледаме бројот $n(4n+1)-2$. Ако последната цифра на бројот $n(4n+1)$ е поголема од 2, тогаш

$$S(n(4n+1)-2)=S(n(4n+1))-2$$

па затоа

$$S(n(4n+1))=S(n(4n+1)-2)+2\,.$$

Сега, бројот $n(4n+1)-2$ е делив со 3, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3. Значи, збирот на цифрите на бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 2 па затоа не може да биде еднаков на 2017 (бројот 2017 при делење со 3 дава остаток 1).

Ако последната цифра на бројот $n(4n+1)$ е помала од 3, тогаш

$$S(n(4n+1)-2)=S(n(4n+1))-2+9$$

па затоа

$$S(n(4n+1))=S(n(4n+1)-2)-7\,.$$

Но, бројот $n(4n+1)-2$ е делив со 3, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3. Значи, збирот на цифрите на бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 2, па не може да биде еднаков на 2017 (бројот 2017 при делење со 3 дава остаток 1).

69. Нека d е природен број различен од 2, 5, 13. Докажи дека од множеството $\{2,5,13,d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така што $ab-1$ не е квадрат на цел број.

Решение. Доволно е да докажеме дека барем еден од броевите $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ не е квадрат на цел број. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат цели броеви x,y,z такви што $2d=x^2+1$, $5d=y^2+1$, $13d=z^2+1$. Од овде следува дека x е непарен број, т.е. $x=2x'+1$, од што следува дека $d=2x'(x'+1)+1$, што значи дека d е непарен. Понатаму, бидејќи d е непарен добиваме дека y и z се парни броеви, т.е. постојат цели броеви u и v такви што $y=2u$, $z=2v$. Тогаш

$$8d=z^2-y^2=(z-y)(z+y)=4(v+u)(v-u)\text{, т.е. }2d=(v-u)(v+u)\,.$$

Ако u и v се со различна парност, тогаш $(v-u)(v+u)$ е непарен број, што е противречност, а ако u и v се со иста парност, тогаш десната страна на последното равенство е делива со 4, а левата со 2, што повторно е противречност.

70. Колку има петцифрени броеви од облик $\overline{37abc}$, такви што секој од броевите $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ и $\overline{37cab}$ е делив со 37?

Решение. Петцифрениот број $\overline{37abc}$ е делив со 37 ако и само ако бројот $\overline{abc}$ е делив со 37. Нека означиме $x=\overline{abc}, y=\overline{bca}$ и $z=\overline{cab}$. Тогаш,

$$x=100a+10b+c,\quad y=100b+10c+a,\quad z=100c+10a+b$$

или $10x-y=999a,\ 10y-z=999b,\ 10z-x=999c$.

Бидејќи 999 е содржател на 37, т.е. $999 = 37 \cdot 27$, од претходните разгледувања следува дека ако некој од броевите x, y или z е делив со 37, тогаш такви се и другите. Според тоа, барани броеви се броевите чии последни три цифри формираат број кој е содржател на 37, т.е. 37000, 37037, 37074, 37111, ... , 37999.

Конечно, од $999 = 37 \cdot 27$ следува дека има 28 броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

71. Колку делители на бројот 30^{2008} не се делители на бројот 20^{2007}?

Решение. Бидејќи $30^{2008} = 2^{2008} \cdot 3^{2008} \cdot 5^{2008}$ и $20^{2007} = 2^{4014} \cdot 5^{2007}$, тогаш сите делители на 30^{2008} кои не се делители на 20^{2007} се од еден од облиците:

1) $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, $l = 1, 2, ..., 2008$, $k, m = 0, 1, ..., 2008$ и тие вкупно се $2008 \cdot 2009^2$,

2) $2^k \cdot 5^m$, $m = 2008$, $k = 0, 1, ..., 2008$ и тие купно се $1 \cdot 2009 = 2009$.

Значи, има $2008 \cdot 2009^2 + 2009$ делители на бројот 30^{2008} кои не се делители на бројот 20^{2007}.

72. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $11^n + 2^n + 1$ е делител на $11^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Решение. Нека n е таков што $11^n + 2^n + 1$ е делител на $11^{n+1} + 2^{n+1} + 1$. Тогаш бројот $a = 11^n + 2^n + 1$ е делител на бројот $11a - 11^{n+1} - 2^{n+1} - 1 = 9 \cdot 2^n + 10$. За $n = 1$ добиваме $a = 14$ и овој број е делител на $11^{1+1} + 2^{1+1} + 1 = 126$.

Ќе докажеме дека за $n > 1$ важи $9 \cdot 2^n + 10 < 11^n + 2^n + 1$. Навистина, последното неравенство е еквивалентно со неравенството $8 \cdot 2^n + 9 < 11^n$, кое очигледно важи бидејќи

$$11^n = (8+3) \cdot 11^{n-1} = 8 \cdot 11^{n-1} + 3 \cdot 11^{n-1} > 8 \cdot 8^{n-1} + 3 \cdot 11 > 8 \cdot 2^n + 9 .$$

Конечно, од претходните разгледувања следува дека единствено решение на задачата е $n = 1$.

73. Определи го најмалиот природен број m за кој 2^{2000} е делител на $2003^m - 1$

Решение. Нека $m = 2^k p$, каде $p > 1$ е непарен број. Тогаш

$$2003^m - 1 = 2003^{2^k p} - 1 = (2003^{2^k} - 1)K$$

каде K е збир на p парни собирци и 1, т.е. K е непарен број. Според тоа, најмалиот баран број m треба да е од видот $m = 2^k$. Имаме

$$\begin{aligned} 2003^{2^k} - 1 &= (2003^{2^{k-1}} - 1)(2003^{2^{k-1}} + 1) \\ &= (2003^{2^{k-1}} + 1)(2003^{2^{k-2}} + 1)...(2003^2 + 1)(2003 + 1)(2003 - 1). \end{aligned}$$

Бидејќи при делење со 4 бројот $2003^{2^i} + 1$, $i \geq 1$ дава остаток 2, т.е. сите броеви од овој вид се парни, но не се деливи со 4, добиваме дека $2003^{2^k} - 1$ е делив со 2^{k+2}, бидејќи $2003+1$ е делив со 4, но не е делив со 8, а $2003-1$ е делив со 2, но не е делив со 4. Значи, $k+2=2000$, т.е. $k=1998$. Конечно, бараниот број е $m=2^{1998}$.

74. Определи го најголемиот природен број p таков што бројот 5^7 може да се запише како збир на p последователни природни броеви.

Решение. Со n да го означиме првиот од $p-$те последователни природни броеви. Тогаш

$$5^7=n+(n+1)+,,,+(n+p-1)=np+(1+2+...+(p-1))=np+\frac{p(p-1)}{2},$$

т.е.

$$2\cdot 5^7=p(2n-1+p). \qquad (1)$$

Бидејќи $p<2n-1+p$, од последното равенство следува дека $p^2<2\cdot 5^7$, т.е. $p<5^3\sqrt{10}$. Но, $p\,|\,2\cdot 5^7$, па затоа најголемиот можен број е $p=2\cdot 5^3=250$. Сега од (1) наоѓаме дека $n=\frac{5^4-2\cdot 5^3+1}{2}=188$.

75. Ако природниот број n има непарен број различни природни делители, сметајќи ги 1 и самиот број, тогаш n е квадрат на природен број. Докажи!

Решение. Ако d е делител на бројот n, тогаш и $\frac{n}{d}$ е делител на бројот n. Од различните делители d и $\frac{n}{d}$ формираме пар комплементарни делители на бројот n и на овој начин можеме да одделиме парен број различни делители на n. Но, бројот на различните делители на n е непарен, па затоа ќе остане еден делител d' без свој пар. Не е можно $d'\neq\frac{n}{d'}$, бидејќи во таков случај и $\frac{n}{d'}$ ќе биде делител на n, па ќе имаме парен број делители на n, што противречи на условот на задачата.Во случајов имаме $d'=\frac{n}{d'}$, т.е. $n=d'^2$, што и требаше да се докаже.

76. Нека c и d се позитивни делители на природниот број n. Ако $c>d$, докажи дека $c>d+\frac{d^2}{n}$.

Решение. Да ги разгледаме броевите $\frac{n}{d}$ и $\frac{n}{c}$. Овие броеви се исто така природни делители на n и важи $\frac{n}{d}>\frac{n}{c}$. Според тоа, $\frac{n}{d}-\frac{n}{c}\geq 1$, па затоа $\frac{n(c-d)}{cd}\geq 1$, т.е. $c-d\geq\frac{cd}{n}>\frac{d^2}{n}$, што и требаше да се докаже.

77. Нека $1=d_1<d_2<...<d_k=n$ се сите делители на природниот број $n>1$. Докажи, дека $d_1+d_2+...+d_k>k\sqrt{n}$.

Решение. Ако d е делител на природниот број n, тогаш и $\frac{n}{d}$ е исто така делител на n. Воведуваме ознака $S=d_1+d_2+...+d_k$. Бидејќи $n>1$, постои делител d_i, таков што $d_i\neq\frac{n}{d_i}$. Од друга страна

$$d_i + \frac{n}{d_i} \geq 2\sqrt{d_i \cdot \frac{n}{d_i}} = 2\sqrt{n} \ .$$

Сега,

$$2S = 2(d_1 + d_2 + ... + d_k) = \sum_{i=1}^{k} (d_i + \frac{n}{d_i}) > \sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{n} = 2k\sqrt{n} \ .$$

Според тоа, $S > k\sqrt{n}$ односно $d_1 + d_2 + ... + d_k > k\sqrt{n}$ што и требаше да се докаже.

78. Нека $n > 1$ е природен број и нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите позитивни делители на бројот n, при што

$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n \ .$$

Нека $D = \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1}$.

а) Докажи, дека $D < n^2$.

б) Определи ги сите броеви n за кои D е делител на n^2.

Решение. а) Јасно, $n = d_i d_{k+1-i}$, т.е. $\frac{d_i}{n} = \frac{1}{d_{k+1-i}}$, па затоа

$$\frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_i d_{i+1}}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{k+1-i} - d_{k-i}}{d_{k+1-i} d_{k-i}}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{1}{d_{k-i}} - \frac{1}{d_{k+1-i}}) = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

што значи дека $D < n^2$.

б) Од решението под а) имаме

$$\frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \geq \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_2} \ ,$$

па затоа $d_1 = 1 < \frac{n^2}{D} \leq d_2$. Според тоа, ако D е делител на n^2, тогаш мора да важи $\frac{n^2}{D} = d_2$, па затоа $k = 2$. Значи, природниот број $n > 1$ има точно два позитивни делител, односно n е прост број.

79. Нека природните броеви m и n имаат по точно 101 делител. Докажи дека не е можно mn да има 1000 делители.

Решение. Прво ќе докажеме дека еден природен број k има непарен број на делители ако и само ако е точен квадрат. Навистина, за секој делител d на k кој е помал од $\sqrt{k}$, постои соодветен делител $\frac{k}{d}$ на k кој е поголем од $\sqrt{k}$. Значи, ако k не е точен квадрат, тогаш тој има парен број на делители, а ако е точен квадрат, тогаш и $\sqrt{k}$ е делител на k и k има вкупно непарен број на делители.

Користејќи го споменатото својство, добиваме дека m и n се точни квадрати, бидејќи имаат непарен број на делители. Но тогаш и mn е точен квадрат и има непарен број на делители, односно не е можно mn да има 1000 делители.

80. Докажи, дека производот $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2008})\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008$ е природен број делив со 2009.

Решение. Нека $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2008}$. Имаме

$$A=(1+\frac{1}{2008})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2007})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2006})+\dots+(\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005})$$
$$=\frac{2009}{1\cdot 2008}+\frac{2009}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{2009}{1004\cdot 1005}=2009\cdot(\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{1}{1004\cdot 1005})$$

Но, производот $2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008$ е делив со секој од именителите во изразот

$$\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{1}{1004\cdot 1005}$$

па затоа

$$(\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{1}{1004\cdot 1005})\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008=M$$

е природен број. Конечно,

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2008})\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008=2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008A$$
$$=2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008\cdot 2009(\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{1}{1004\cdot 1005})$$
$$=2009\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008(\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{1}{1004\cdot 1005})=2009M$$

што значи дека $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2008})\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2008$ е природен број делив со 2009.

81. На таблата се напишани броевите $1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\dots\frac{1}{10}\ \ \frac{1}{11}\ \ \frac{1}{12}$.

а) Докажи, дека при произволен распоред на знаците “+” и “$-$” меѓу овие броеви не може да се добие резултат нула.

b) Колку најмалку од броевите треба да се избришат, за да потоа со некој распоред на знаците “+” и “$-$” меѓу овие броеви се добие резултат нула.

Решение. Ќе го користиме тврдењето: *Збирот на две нескратливи дропки* $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{c}{d}$ *со различни именители не може да биде еднаков на нула*. Навистина, ако $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=0$, тогаш $ad=-bc$ и ова не е можно бидејќи a и b се заемно прости, а d не е делител на b.

а) Разгледуваниот збир да го напишеме во обликот

$$(1\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm\dots\pm\frac{1}{10}\pm\frac{1}{12})\pm\frac{1}{11}.$$

Од горното тврдење следува дека овој збир е различен од нула, бидејќи најмалиот заеднички именител на дропките во заградите не е еднаков на 11.

б) *Одговор*: 6. Од доказот на тврдењето под а) следува дека $\frac{1}{11}$ мора да се избрише. Аналогно се докажува дека мора да се избришат $\frac{1}{9},\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{7}$. Ако една од дропките $\frac{1}{5}$ или $\frac{1}{10}$ не е избришана, тогаш при произволен избор на знаците сигурно се појавува една од дропките $\pm\frac{1}{5}$ или $\pm\frac{1}{10}$ или $\pm\frac{3}{10}$. Бидејќи именителите на останатте дропки не се делат со 5, заклучуваме дека и овие две дропки мора да се избришат. Од опстанатите броеви може да се добие збир нула на следниот начин: $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=0$.

82. Докажи дека, ако за природниот број n е важи $n\,|\,(2^n+2)$ и $(n-1)\,|\,(2^n+1)$ тогаш и за бројот $n_1=2^n+2$ важи $n_1\,|\,(2^{n_1}+2)$ и $(n_1-1)\,|\,(2^{n_1}+1)$.

Решение. Од условот во задачата следува дека бројот $n-1$ е непарен, а n е парен број. Од $2^n+2=2(2^{n-1}+1)$ следува дека n_1 не е делив со 4, па од $n_1=2^n+2=nk$ и n е парен следува дека k е непарен број. Тогаш

$$2^{n_1}+1=2^{nk}+1=(2^n+1)(2^{n(k-1)}-2^{n(k-2)}+...+1),$$

а оттука $(2^n+1)\,|\,(2^{n_1}+1)$, односно $(n_1-1)\,|\,(2^{n_1}+1)$.

Од $(n-1)\,|\,(2^n+1)$ следува дека $2^n+1=(n-1)m$, каде што m е непарен број. Тогаш $(2^{n-1}+1)\,|\,(2^{(n-1)m}+1)$ и бидејќи

$$2(2^{(n-1)m}+1)=2^{(n-1)m+1}+2=2^{2^n+2}+2=2^{n_1}+2 \text{ и } 2(2^{n-1}+1)=2^n+2=n_1,$$

добиваме $n_1\,|\,(2^{n_1}+2)$.

83. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои важи $n\,|\,(2^n+2)$.

Решение. Јасно, $2\,|\,(2^2+2)$. Тогаш од решението на претходната задача следува дека за секој член на низата $a_1=2,\ a_{k+1}=2^{a_k}+2,\ k=1,2,...$ важи $a_k\,|\,(2^{a_k}+2)$. Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека броевите a_k, за $k=1,2,3,...$ се природни и дека $a_{k+1}>a_k$, за $k=1,2,3,...$.

84. Докажи, дека бројот чиј декаден запис се состои од 2187 цифри 1 е делив со 2187.

Решение. Имаме $2187=3^7$. Со математичка индукција ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

Бројот чиј декаден запис се состои од 3^n *цифри* 1 *е делив со* 3^n.

За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $111=3\cdot 37$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $n=k$, т.е. дека бројот $\underbrace{111...111}_{3^k \text{ цифри}}$ е делив со 3^k, т.е. важи $\underbrace{111...111}_{3^k \text{ цифри}}=3^k M$. За $n=k+1$ од индуктивната претпоставка следува:

$$\underbrace{111...111}_{3^{k+1} \text{ цифри}}=\underbrace{111...111}_{3^k \text{ цифри}}\cdot\underbrace{100...001}_{3^k \text{ цифри}}\underbrace{000...001}_{3^k \text{ цифри}}=3^k M\cdot 3=3^{k+1}M,$$

бидејќи вториот множител на десната страна е делив со 3 (збирот на неговите цифри е 3). Конечно, тврдењето важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

85. Со бришење на првите две цифри од лево во декадниот запис на природниот број n се добива 73 пати помал број од n.

Определи ги двата најмали такви броја n.

Решение. Нека $\overline{ab}$ е двоцифрениот почеток, а x е бројот кој се добива со бришење на првите две цифри и k е бројот на цифрите на бројот x. Тогаш $n=10^k\cdot\overline{ab}+x=73x$, т.е.

$$10^k\cdot\overline{ab}=72x. \qquad (1)$$

Ако $k=1$, а x е едноцифрен број, тогаш равенката (1) го добива обликот $10\cdot\overline{ab}=72x$, па мора да биде $x=5$. Затоа $10\cdot\overline{ab}=360$, т.е. $\overline{ab}=36$, па бараниот број е $n=365$. Ако x е двоцифрен број и $k=2$, тогаш равенката (1) го добива обликот $100\cdot\overline{ab}=72x$, т.е. $25\cdot\overline{ab}=18x$. Значи, $25\,|\,x$ и $18\,|\,\overline{ab}$. Најмало решение се добива за $\overline{ab}=18$ и $x=25$, а бројот со саканото својство е $x=1825$.

86. Природните броеви $a_1<a_2<...<a_n$ се такви што a_j-a_i е делител на a_j за $i<j$. Докажи, дека $ia_j<ja_i$.

Решение. Бидејќи секој од броевите $a_j>a_j-a_1>a_j-a_2>...>a_j-a_{j-1}$ е делител на a_j, следува дека $a_j-a_i\le\frac{a_j}{i+1}$, за $i<j$. Оттука добиваме дека $(i+1)(a_j-a_i)\le a_j$, па затоа $ia_j\le(i+1)a_i\le ja_j$.

87. Дадени се 2011 природни броеви, а потоа се запишани сите $\frac{2011\cdot2010}{2}$ збирови на паровите од овие броеви. Дали може точно три од овие збирови да се деливи со 3 и точно 3 од нив да даваат остаток 1 при делење со 3?

Решение. Нека a,b и c се бројот на броевите кои даваат остаток 0, 1 и 2 при делење со 3. Тогаш условот на задачата можеме да го запишеме со равенствата

$$\frac{a(a-1)}{2}+bc=\frac{b(b-1)}{2}ca=\frac{c(c-1)}{2}+ab,\ \ a+b+c=2011.$$

Лесно се проверува, дека на пример броевите $a=b=670$ и $c=671$ ги задоволуваат горните равенства.

Забелешка. Пример на 2011 броеви со саканото својство се броевите од 1 до 2011. Од горниот систем добиваме $(a-b)(a+b-1-2c)=0$ и $a+b+c=2011$ наоѓаме $a=b$ или $c=670$. Ако го земеме предвид второто равенство добиваме дека решенија на системот се

$$(670,670,671), (670,671,670) \text{ и } (671,670,670).$$

88. Најди ги сите шестцифрени броеви, кои што се деливи со производот на броевите запишани со првите три и последните три цифри.

Решение. Нека $\overline{xyzuvw}$ е шестцифен број, кој ги исполнува условите на задачата и нека $a=\overline{xyz}$, $b=\overline{uvw}$ се соодветните трицифрени броеви, тогаш $1000a+b$ е делив со ab, т.е. $1000a+b=(ab)k$. Оттука

$$1000a=(ak-1)b \qquad (1)$$

па следува дека b е делив со a (бидејќи $ak-1$ не е делив со a). Значи,

$$b = am \quad (m < 10\text{, зошто?}). \qquad (2)$$

Заменувајќи (2) во (1) добиваме $1000a = (ak-1)am$, т.е.

$$1000 = (ak-1)m. \qquad (3)$$

Од (3) следува дека m е делител на 1000, па поради $m < 10$, следува $m \in \{1,2,4,5,8\}$.

1) За $m = 1$ добиваме $1000 = ak - 1$, $ak = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Бидејќи a е трицифрен број, следува дека $a = 11 \cdot 13 = 143$; но тогаш и $b = 143$, па бараниот број е 143143 (навистина $143143 = 7 \cdot 143 \cdot 143$).

2) За $m = 2$ добиваме $1000 = 2(ak-1)$, т.е. $ak = 501 = 1 \cdot 501 = 3 \cdot 167$. Ако $a = 501$, тогаш $b = 2 \cdot 501 = 1002$ е четирицифрен број. Ако $a = 167$, тогаш $b = 2 \cdot 167 = 334$, па бараниот шестцифрен број е 167334 (навистина $167334 = 3 \cdot 167 \cdot 334$).

3) За $m = 4$ добиваме $1000 = 4(ak-1)$, т.е. $ak = 251 = 1 \cdot 251$. Ако $a = 251$, тогаш $b = 4 \cdot 251 = 1004$ е четирицифрен број, па во овој случај задачата нема решение.

Со слични разгледувања се покажува дека за $m = 5$ и $m = 8$ задачата нема решение.

Следствено, условот на задачата го задоволуваат само броевите 143143 и 167334.

89. Четирицифрен број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед се деливи со 78. Најди ги тие броеви!

Решение. Нека $\overline{xyzu}$ е четирицифрен број, тогаш бројот запишан со истите цифри во обратен редослед е $\overline{uzyx}$ и нека $x \geq u$. Збирот на овие броеви

$$S = \overline{xyzu} + \overline{uzyx} = 1001(x+u) + 110(y+z)$$

е делив со $78 = 6 \cdot 13$, т.е. $1001(x+u) + 110(y+z) = 78k$, односно

$$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (x+u) + 11 \cdot 10 \cdot (y+z) = 6 \cdot 13 \cdot k. \qquad (1)$$

Од (1) заклучуваме дека $y+z$ е делив со 13, т.е. $y+z=0$ или $y+z=13$.

1) Ако $y+z=0$, тогаш од (1) добиваме $77(x+u) = 6k$, т.е. $x+u$ е делив со 6. Имајќи предвид дека $x \geq u$ и $6 \mid \overline{xyzu}$, можни се следниве случаи: 4002, 6006 и 8004. Од нив задоволува само бројот 6006.

2) Ако $y+z=13$, тогаш од (1) добиваме $7 \cdot 11 \cdot 13(x+u) + 10 \cdot 11 \cdot 13 = 6 \cdot 13 \cdot k$ т.е. $7 \cdot 11 \cdot (x+u) + 11 \cdot 10 = 6k$. Оттука следува дека $11 \mid k$, т.е. $k = 11m$, па имаме

$$7 \cdot 11(x+u) + 11 \cdot 10 = 6 \cdot 11 \cdot m$$

$$7 \cdot (x+u) + 10 = 6 \cdot m$$

$$6(x+u+1) + (x+u+4) = 6 \cdot m,$$

т.е. $x+u+4$ е деллив со 6. Тоа е можно само ако $x+u \in \{2,8,14\}$. Но од $x \geq u$ следува дека $x+u=8$ или $x+u=14$, па имаме $(x,u) \in \{(6,2),(4,4),(8,6)\}$.

i) За $x=6, u=2$ го добиваме бројот $\overline{6yz2}$, кој треба да е деллив со 78. Имајќи го предвид условот $y+z=13$ добиваме:

$$\begin{aligned}\overline{6yz2} &= 6000+100y+10z+2\\ &= 6002+10(y+z)+90y\\ &= 6002+10\cdot 13+90y\\ &= 6132+90y\\ &= 78\cdot 78+48+78y+12y\\ &= 78(78+y)+12(4+y)\\ &= 6\cdot 13(78+y)+6\cdot 2(y+4)\end{aligned}$$

Оттука заклучуваме дека $y+4$ е деллив со 13, а тоа е можно само за $y=9$. Во тој случај $z=13-y=4$, па го добиваме бројот 6942. Со проверка се убедуваме дека броевите 6942 и 2496 се делливи со 78.

ii) За $x=u=4$ го добиваме бројот $\overline{4yz4}$, кој што треба да е деллив со 78. Имајќи го предвид условот $y+z=13$ добиваме

$$\begin{aligned}\overline{4yz4} &= 4000+10(y+z)+90y+4\\ &= 4134+90y\\ &= 78\cdot 53+78y+12y\end{aligned}$$

Оттука заклучуваме дека $12y$ треба да е деллив со 78, т.е. y да е деллив со 13. Тоа не е можно, па во овој случај задачата нема решение.

iii) За $x=8$, $u=6$ имаме

$$\begin{aligned}\overline{8yz6} &= 8006+10(y+z)+90y\\ &= 8136+90y\\ &= 78\cdot 104+24+78y+12y\\ &= 6\cdot 13(104+y)+6\cdot 2(y+2)\end{aligned}$$

Значи, треба $y+2$ да е деллив со 13, а тоа не е можно, па во овој случај задачата нема решение.

Конечно, бараните четирицифрени броеви се 6006, 6942, 2496.

3. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. Кои природни броеви можат да се претстават како збир на два заемно прости броеви, различни од 1?

Решение. Очигледно дека броевите 1, 2, 3, 4, 6 не можат да се претстават како збир на два заемно прости броеви различни од 1, но 5 може, бидејќи $5=3+2$. Ќе покажеме дека секој природен број $n>6$ може да се претстави како збир на два заемно прости броја различни од 1. Ќе разгледаме два случаја, во зависност од парноста на бројот n.

Ако n е непарен број, тогаш $n=2k+1=k+(k+1)$, при што k и $k+1$ се очигледно заемно прости броеви.

Ако n е парен број, тогаш $n=4k$ или $n=4k+2$. Во првиот случај имаме $n=(2k-1)+(2k+1)$, и притоа и двата собирока се заемно прости, бидејќи секој нивни делител би бил делител и на нивната разлика, на бројот 2, а 2 не е нивен делител, бидејќи тие се непарни броеви. Во вториот случај важи $n=(2k-1)+(2k+3)$, при што двата собирока се заемно прости, бидејќи

$$\text{NZD}(2k-1,2k+3)=\text{NZD}(2,2k+3)=1.$$

2. Определи ги сите четирицифрени броеви, кои се запишуваат со четири последователни цифри, во произволен редослед, такви што нивниот производ со $\frac{2}{3}$ е број запишан со истите цифри.

Решение. Нека бараниот број е x и нека $y=\frac{2}{3}x$. Од последното равенство имаме $3y=2x$, па затоа $3\,|\,x$ и $2\,|\,y$. Од критериумот за деливост со бројот 3 следува дека збирот на цифрите на бројот x е делив со 3. Но, бројот y е запишан со истите цифри како и бројот x, па затоа $3\,|\,y$.

Од досега изнесеното имаме $2\,|\,y, 3\,|\,y$ и $\text{NZD}(2,3)=1$, па затоа $y=6k$, што значи $x=\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}\cdot 6k=9k$. Според тоа, $9\,|\,x$ и од критериумот за деливост со 9 добиваме дека збирот на цифрите на бројот x се дели со 9. Јасно, и збирот на цифрите на бројот y се дели со 9. Но, броевите x и y се запишани со четири последователни цифри $n, n+1, n+2, n+3$, па затоа нивниот збир е $4n+6$, $n\in\mathbb{N}$ и $n\le 6$. Значи,

$$9\,|\,4n+6,\ n\in\mathbb{N} \text{ и } \quad n\le 6. \qquad (1)$$

Условот (1) е исполнет само за $n=3$, од што следува дека цифрите со кои се запишани броевите x и y се 3,4,5 и 6.

Од досега изнесеното имаме $3456\le x\le 6543$ и како $y=\frac{2}{3}x$ добиваме $2304\le y\le 4362$. Но, бројот y е запишан со цифрите 3,4,5 и 6 е делив со 2 па затоа можни решенија за y се броевите

$$3456, 3546, 3564, 3654, 4356 \text{ и } 4536,$$

на кои им соодветствуваат следните решенија за бројот x:

$$5184, 5319, 5346, 5481, 6534 \text{ и } 6804.$$

Конечно, бидејќи x е запишан со цифрите 3, 4, 5 и 6 па затоа единствени решенија се 5346 и 6534.

3. Определи ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивниот најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител е 15.

Решение. Нека x и y е парот природни броеви за кои разликата меѓу нивниот NZS и NZD е 15. Нека $d=\text{NZD}(x,y)$ и $s=\text{NZS}(x,y)$. Тогаш, постојат природни броеви a и b така што $x=da$, $y=db$, $\text{NZD}(a,b)=1$ и $s=dab$. Од условот на задачата имаме дека $s-d=15$, каде ако замениме $s=dab$ се добива $dab-d=15$, т.е. $d(ab-1)=15$, па затоа $d\in\{1,3,5,15\}$.

1) За $d=1$, имаме

$$ab-1=15 \Rightarrow ab=16 \Rightarrow a=1, b=16 \Rightarrow x=1, y=16,$$

2) За $d=3$, имаме

$$ab-1=5 \Rightarrow ab=6 \Rightarrow a=1, b=6 \text{ или } a=2, b=3 \Rightarrow x=3, y=18 \text{ или } x=6, y=9$$

3) За $d=5$, имаме

$$ab-1=3 \Rightarrow ab=4 \Rightarrow a=1, b=4 \Rightarrow x=5, y=20,$$

4) За $d=15$, имаме

$$ab-1=1 \Rightarrow ab=2 \Rightarrow a=1, b=2 \Rightarrow x=15, y=30.$$

Значи, бараните парови природни броеви се: 1 и 16, 3 и 18, 6 и 9, 5 и 20, 15 и 30.

4. Нека a е парен природен број и $A=a^n+a^{n-1}+...+a^2+a+1$, $n\in\mathbb{N}$ е точен квадрат. Докажи дека a е делив со 8.

Решение. Ако a е парен природен број, тогаш A е непарен. Бидејќи A е точен квадрат, тој е точен квадрат на непарен број. Значи,

$$A=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1,$$

каде k е природен број. Но $k(k+1)$ е парен број па според тоа

$$A=4k(k+1)+1=8s+1,$$

каде $s\in\mathbb{N}$. Но сега

$$A-1=a(a^{n-1}+a^{-2}+...+a+1),$$

$$8s=a(a^{n-1}+a^{-2}+...+a+1).$$

Значи, $8\,|\,a(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1)$ и бидејќи $\text{NZD}(8, a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1)=1$, добиваме $8\,|\,a$.

5. Докажи дека секој природен број $n>6$ може да се претстави како збир на два заемно прости броеви, поголеми од 1.

Решение. Ако $n=2k+1$ тогаш $n=k+(k+1)$ и $\text{NZD}(k,k+1)=1$. Нека n е парен број. Ако $n=4k$, тогаш $n=(2k-1)+(2k+1)$ и $\text{NZD}(2k-1,2k+1)=1$. Ако $n=4k+2$ тогаш $n=(2k-1)+(2k+3)$ и $\text{NZD}(2k-1,2k+3)=1$.

5. Дадени се броевите $a=123456789$ и $b=987654321$. Определи го:

а) најголемиот заеднички делител на a и b, и

б) остатокот што се добива кога најмалиот заеднички содржател се подели со 11.

Решение. а) Нека $(a,b)=\text{NZD}(a,b)$ и $[a,b]=\text{NZS}(a,b)$. Збирот на цифрите на бројот a и на бројот b е делив со 9, па, значи, (a,b) е делив со 9. Понатаму:

$$9a+9b=9999999990 \text{ и } a+10b=9999999999,$$

па $b-8a=9$. Значи, секој делител на a и b е делител и на 9, т.е. $(a,b)=9$.

б) Имаме $[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}=\frac{ab}{9}$, $\frac{a}{9}=13717421=11k_1+3$, $b=11k_2+5$, па затоа $[a,b]=(11k_1+3)(11k_2+5)=11s+4$, т.е. бараниот остаток е 4.

7. Нека a и b се природни броеви такви што бројот 24 е делител на бројот $ab+1$. Докажи, дека 24 е делител на $a+b$.

Решение. Броевите 3 и 8 се заемно прости. Доволно е да се докаже дека $a+b$ е делив со 3 и 8. Од условот на задачата следува дека бројот ab при делење со 3 дава остаток 2. Тоа е можно ако бројот a при делење со 3 дава остаток 2, а бројот b при делење со 3 дава остаток 1 или обратно. Во секој случај добиваме дека $3\,|\,a+b$.

Исто така, од условот на задачата бројот ab при делење со 8 дава остаток 7. Тоа е можно во два случаи.

Случај 1. Бројот a при делење со 8 дава остаток 1, а бројот b при делење со 8 има остаток 7 или обратно. Во двете можности $8\,|\,a+b$.

Случај 2. Бројот a при делење со 8 дава остаток 3, а бројот b при делење со 8 дава остаток 5 или обратно. Во двете можности $8\,|\,a+b$.

Конечно, од $3\,|\,a+b$, $8\,|\,a+b$ и $\mathrm{NZD}(3,8)=1$ следува $24\,|\,a+b$.

8. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $(ab+1)\,|\,(a^2-1)$.

Решение. Имаме $a(a+b)=a^2-1+ab+1$ и бидејќи $(ab+1)\,|\,(a^2-1)$ добиваме дека $(ab+1)\,|\,a(a+b)$. Но, $\mathrm{NZD}(ab+1,a)=1$, па затоа $(ab+1)\,|\,(a+b)$. Според тоа, $a+b\geq ab+1$, па затоа важи $(a-1)(b-1)\leq 0$, од каде добиваме $a=1$ или $b=1$. Според тоа, $(a,b)\in\{(1,n),(n,1)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

9. Колку парови природни броеви има, такви што нивниот најмал заеднички содржател е 792, а нивниот најголем заеднички делител е 12?

Решение. Ако x и y се бараните природни броеви, тогаш од $\mathrm{NZD}(x,y)=12$ следува

$$x=12m, y=12n\,,\ \mathrm{NZD}(m,n)=1$$

Имајќи го предвид равенството

$$x\cdot y=\mathrm{NZD}(x,y)\cdot\mathrm{NZS}(x,y)$$

добиваме:

$$12m\cdot 12n=12\cdot 792$$
$$mn=66=1\cdot 2\cdot 3\cdot 11$$

Оттука

$$(m,n)\in\{(1,66),(2,33),(3,22),(6,11),(11,6),(22,3),(33,2),(66,1)\}$$

па следствено има 8 парови природни броеви кои што ги исполнуваат условите на задачата и тие се :

12 и 792; 24 и 396; 36 и 264; 72 и 132; 132 и 72; 264 и 36; 396 и 24; 792 и 12.

10. Определи ги сите трицифрени броеви n такви што бројот n^2 завршува со истите цифри како и бројот n.

Решение. Треба да ги определиме трицифрените броеви n такви што $1000\,|\,n^2-n$. Бидејќи $1000=8\cdot 125$, а $\mathrm{NZD}(8,125)=1$, заклучуваме дека n^2-n е содржател на 1000 ако и само ако е содржател на 8 и е содржател на 125. Понатаму, $n^2-n=n(n-1)$, а броевите n и $n-1$ се заемно прости, па затоа $125\,|\,n^2-n$ ако и само ако $125\,|\,n-1$ или $125\,|\,n$. Аналогно заклучуваме дека $8\,|\,n$ или $8\,|\,n-1$.

Понатаму, не постои трицифрен природен број n таков што $8\,|\,n$ и $125\,|\,n$ и не постои трицифрен природен број n таков што $8\,|\,n-1$ и $125\,|\,n-1$. Единствен трицифрен природен број n за кој важи $8\,|\,n-1$ и $125\,|\,n$ е 625. Единствен трицифрен природен број n за кој важи $8\,|\,n$ и $125\,|\,n-1$ е 376.

Конечно, бараните броеви се 376 и 625.

11. Нека a, b, c, d се природни броеви. Докажи дека ако $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, $\mathrm{NZD}(c,d)=1$ и $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$, тогаш $b=d$.

Решение. Од условот во задачата следува $ad=b(d-c)$ и $\mathrm{NZD}(d,d-c)=1$. Затоа, $d\,|\,b$. Исто така, од $ad=b(d-c)$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ следува $b\,|\,d$. Значи, $b=d$.

12. Нека a,b и p се произволни цели броеви. Докажи, дека постојат $k,l\in\mathbb{Z}$, такви што $\mathrm{NZD}(k,l)=1$ и $p\,|\,ak+bl$.

Решение. Нека $\mathrm{NZD}(b,p-a)=d$, т.е. $b=kd$ и $p-a=ld$. Тогаш броевите k и l се заемно прости и важи $ak+bl=\frac{ab}{d}+\frac{b(p-a)}{d}=\frac{pb}{d}=pk$.

13. Природните броеви p и q се заемно прости. За природните броеви a и b е исполнето равенството

$$\frac{p}{q}+\frac{a}{b}=1. \tag{1}$$

Докажи дека a и b се заемно прости.

Решение. Равенството (1) ќе го запишеме во облик $\frac{a}{b}=1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{q}$. Сега доволно е да се докаже дека $q-p$ и p се заемно прости. Нека претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(q-p,q)=d>1$. Значи постојат $m,n\in\mathbb{N}$ такви што $q-p=dm$ и $q=dn$. Ако $q=dn$ замениме во $q-p=dm$, добиваме $dn-p=dm$, т.е. $p=d(n-m)$, што значи $d\,|\,p$. Според тоа $\mathrm{NZD}(p,q)\geq d>1$, што не е спротивно на претпоставката од задачата.

14. Нека a,b,c се непарни природни броеви. Докажи, дека

$$\mathrm{NZD}(a,b,c)=\mathrm{NZD}(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{b+c}{2},\tfrac{c+a}{2}).$$

Решение. Нека $\mathrm{NZD}(a,b,c)=d$ и $\mathrm{NZD}(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2})=d'$. Тогаш $d\,|\,a$, $d\,|\,b$ и $d\,|\,c$, па затоа $d\,|\,(a+b)$, $d\,|\,(b+c)$ и $d\,|\,(c+a)$. Но, $a+b, b+c$ и $c+a$ се парни броеви, а d е непарен, па затоа $d\,|\,\frac{a+b}{2}, d\,|\,\frac{b+c}{2}$ и $d\,|\,\frac{c+a}{2}$, т.е. $d\,|\,d'$. Обратно, од $d'\,|\,\frac{a+b}{2}, d'\,|\,\frac{b+c}{2}$ следува $d'\,|\,\frac{a-c}{2}$ и како $d'\,|\,\frac{c+a}{2}$, добиваме $d'\,|\,a$. Аналогно наоѓаме $d'\,|\,b$ и $d'\,|\,c$, па затоа $d'\,|\,d$.

Конечно, од $d\,|\,d'$ и $d'\,|\,d$ следува $d=d'$, што и требаше да се докаже.

15. Нека $a,b\in\mathbb{N}$, $a>b$ и $a-b=5b^2-4a^2$. Докажи, дека $a-b$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Даденото равенство го запишуваме на следниве два начини

$$(a-b)(1+4(a+b))=b^2 \text{ и } (a-b)(1+5(a+b))=a^2.$$

Последните две равенства ги множиме и добиваме

$$(a-b)^2(1+4(a+b))(1+5(a+b))=a^2b^2,$$

од каде следува дека $(1+4(a+b))(1+5(a+b))$ е квадра на природен број. Но,

$$\mathrm{NZD}(1+4(a+b),1+5(a+b))=NZD(1+4(a+b),a+b)=NZD(1,a+b)=1,$$

па затоа $1+4(a+b)$ и $1+5(a+b)$ се точни квадрати на природни броеви. Сега од $(a-b)(1+4(a+b))=b^2$ следува дека $a-b$ е точен квадрат на природен број.

16. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите 11111111 и $\underbrace{111\ldots11}_{100}$.

Решение. Нека $b=11111111$ и $a=\underbrace{111\ldots11}_{100}$. Кога ќе ги поделиме овие броеви, се добива $1111=a-qb$, каде целиот број q е количникот. Значи дека секој заеднички делител на a и b го дели и бројот 1111, па бараниот број е најголемиот заеднички делител на b и 1111, а бидејќи b е делив со 1111, следува дека $\mathrm{NZD}(a,b)=1111$.

17. За најголемиот заеднички делител d и најмалиот заеднички содржател v на природните броеви m и n е исполнето равенството $3m+n=3v+d$. Докажи дека m е делител на n.

Решение. Постојат единствени m' и n', такви што $\mathrm{NZD}(m',n')=1$, $m=m'd$ и $n=n'd$, каде $d=\mathrm{NZD}(m,n)$. Тогаш $v=m'n'd$, при што равенството

$$3m+n=3v+d$$

го добива обликот

$$3m'd+n'd=3m'n'd+d, \text{ т.е. } (3m'+n')d=(3m'n'+1)d.$$

Но, $d\geq 1$, па според тоа $3m'+n'=3m'n'+1$, а последното равенство можеме да го запишеме во облик $(3m'-1)(n'-1)=0$. Бидејќи $3m'-1\neq 0$, последното равенство е исполнето ако и само ако $n'-1=0$, т.е. $n'=1$. Тогаш $n=n'd=1\cdot d=d\,|\,m'd=m$, што и требаше да се докаже.

18. Нека a и b се природни броеви такви што $ab\,|\,(a^2+b^2)$. Докажи, дека $a=b$.

Решение. Од $ab\,|\,(a^2+b^2)$ следува дека $\frac{a}{\mathrm{NZD}(a,b)}\,|\,(a^2+b^2)$, т.е. $\frac{a}{\mathrm{NZD}(a,b)}\,|\,b^2$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(\frac{a}{\mathrm{NZD}(a,b)},b^2)=1$, заклучуваме дека $a=\mathrm{NZD}(a,b)$. Аналогно се докажува дека $b=\mathrm{NZD}(a,b)$, па затоа $a=b$.

19. Нека a и b се природни броеви такви што важи $\mathrm{NZD}(a,4)=2$ и $\mathrm{NZD}(b,4)=2$. Докажи, дека $\mathrm{NZD}(a+b,4)=4$.

Решение. Бидејќи $\mathrm{NZD}(a,4)=2$, добиваме дека $4\nmid a$ и $2\,|\,a$. Од $\mathrm{NZD}(b,4)=2$ следува $2\,|\,b$ и $4\nmid b$. Бидејќи $a=2(2s+1)$ и $b=2(2k+1)$, добиваме

$$a+b=4s+2+4k+2=4(k+s+1),$$

т.е. $4\,|\,(a+b)$, па затоа $\mathrm{NZD}(a+b,4)=4$.

20. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$, дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ е нескратлива.

Решение. *Прв начин.* Да претпоставиме обратно, дека дадената дропка може да се скрати, т.е. дека постои цел број $d>0$, таков што $21n+4=ad$ и $14n+3=bd$, каде што a и b се цели броеви. Ако првото равенство го помножиме со 2, а второто со 3 и потоа од второто го одземеме првото ќе добиеме $1=(3a-2b)\cdot d$, што е можно, само ако $d=1$.

Значи, не постои ниеден цел број $d>1$ со кој може да се скрати дропката.

Втор начин. Од својствата на најголемиот заеднички делител следува:

$$\mathrm{NZD}(21n+4,14n+3)=\mathrm{NZD}(14n+3,7n+1)=\mathrm{NZD}(7n+2,7n+1)=\mathrm{NZD}(7n+1,1)=1$$

па според тоа дропката не може да се скрати.

21. Определи ги сите природни броеви n за кои дропката $\frac{5n+6}{8n+7}$ може да се скрати.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(5n+6,8n+7)&=\mathrm{NZD}(5n+6,3n+1)=\mathrm{NZD}(3n+1,2n+5)\\&=\mathrm{NZD}(2n+5,n-4)=\mathrm{NZD}(n-4,13).\end{aligned}$$

Според тоа, дропката $\frac{5n+6}{8n+7}$ може да се скрати само ако $n=13d+4$, $d=1,2,3,...$ и тоа со бројот 13.

22. Броевите m и n се заемно прости. Дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој природен број. Определи го бројот со кој оваа дропка може да се скрати.

Решение. Нека претпоставиме дека k, $k>1$ е бројот со кој може да се скрати дропката. Според тоа, постојат природни броеви p и s, такви што

$$\mathrm{NZD}(p,s)=1 \text{ и } 3n-m=kp,\ 5n+2m=ks.$$

Ако го решиме системот

$$\begin{cases}3n-m=kp\\5n+2m=ks\end{cases},$$

по n и m ќе добиеме $n=\frac{k(2p+s)}{11}$ и $m=\frac{k(3s-5p)}{11}$. Броевите m и n се заемно прости, па затоа $k=11$. Навистина, ако претпоставиме дека $k\neq 11$, тогаш за било кој делител d на k поголем од 1 и различен од 11 имаме $\mathrm{NZD}(m,n)\geq d>1$. Но, тоа противречи на претпоставката дека $\mathrm{NZD}(m,n)=1$. Значи, $k=11$.

23. Ако $n\in\mathbb{Z}$, тогаш $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+n}}}\notin\mathbb{Z}$. Докажи!

Решение. Дадениот израз можеме да го запишеме во облик

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+n}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{n+2}{n+1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{n+1}{n+2}}=1+\frac{1}{\frac{2n+3}{n+2}}=1+\frac{n+2}{2n+3}$$

и истиот е определен за секој $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1\}$. Да забележиме дека $|2n+3|\neq 1$ за $n=-2$ и $n=-1$.

Нека $d=\text{NZD}(2n+3,n+2)$. Тогаш $d\mid(n+2)$ имаме $d\mid(2n+4)$. Бидејќи $d\mid 2n+3$, добиваме дека $d\mid(2n+4)-(2n+3)=1$, т.е. $d=1$. Според тоа $\frac{n+2}{2n+3}\notin\mathbb{Z}$ за $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1\}$. Значи, $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+n}}}\notin\mathbb{Z}$.

24. Дали може бројот $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+k(k+1)$, за $k=6p-1$, $p\in\mathbb{N}$ да биде точен квадрат на природен број.

Решение. Бројот $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+k(k+1)$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+k(k+1)&=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+...+k(k+1)\\&=(1+2+3+...+k)+(1^2+2^2+...+k^2)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(k+1)}{2}(1+\frac{2k+1}{3})\\&=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.\end{aligned}$$

За $k=6p-1$, добиваме

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+k(k+1)=\frac{(6p-1)6p(6p+1)}{3}=2p(36p^2-1)\ .$$

Броевите $2p$ и $36p^2-1$ севзаемно прости. Навистина

$$\text{NZD}(2p,36p^2-1)=\text{NZD}(2p,36p^2-1-(18p)(2p))=\text{NZD}(2p,-1)=1\,.$$

Бројот $2p(36p^2-1)$ е точен квадрат, само ако $2p$ и $36p^2-1$ се точни квадрати. Но $(6p-1)^2<36p^2-1<36p^2$, па според тоа $36p^2-1$ не е точен квадрат. Затоа и $2p(36p^2-1)$ не е точен квадрат.

25. Определи ги сите парови заемно прости природни броеви a и b такви што $a+b$ е делител на a^4+b^4.

Решение Од $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ следува дека $a+b$ е делител на a^4-b^4. Според тоа, $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)+(a^4-b^4)=2a^4$ и $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)-(a^4-b^4)=2b^4$, па затоа $(a+b)\mid\text{NZD}(2a^4,2b^4)$. Понатаму, од $\text{NZD}(a,b)=1$ следува $\text{NZD}(a^4,b^4)=1$, односно $(a+b)\mid\text{NZD}(2a^4,2b^4)=2$.

Конечно $a=1, b=1$.

26. Нека $a, b, c \in \mathbb{Z}$ се такви што $abc \neq 0$, $\text{NZD}(a,b,c) = 1$ и $a^2 + b^2 = c^2$. Докажи дека броевите a и b се со различна парност.

Решение. Нека претпоставиме дека a и b се со иста парност. Можни се два случаја.

Случај 1. a и b се парни броеви. Тогаш постојат природни броеви k и l такви што $a = 2k$ и $b = 2l$. Но тогаш

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2k)^2 + (2l)^2 = 4(k^2 + l^2),$$

т.е. $2^2 \mid c^2$. Од тоа што $2 \mid c$ добиваме дека $\text{NZD}(a,b,c) \geq 2$ што противречи на претпоставките од задачата.

Случај 2. a и b се непарни броеви. Тогаш постојат природни броеви m и n такви што $a = 2m+1$ и $b = 2n+1$. Но тогаш

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2,$$

што противречи на фактот дека квадрат на цел број е од облик $4t$ или $4t+1$, каде $t \in \mathbb{N}$.

Конечно, од добиените противречности следува дека броевите a и b се со различна парност.

27. На бројот 579 допишете му оддесно три цифри, за да биде делив со 5, со 7 и со 9.

Решение. За бројот $\overline{579xyz}$ да биде делив со 5, 7 и 9, треба да биде делив со нивниот NZS, т.е. со $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ (бидејќи 5, 7 и 9 се заемно прости броеви). За да го најдеме најмалиот шестцифрен број кој што започнува со цифрите 5, 7 и 9 и е делив со 315, го делиме бројот 5790 со 315 и го наоѓаме остатокот, тоа е бројот 30. Тогаш на бројот 579000 му го додаваме бројот $285 = 315 - 30$ и го добиваме бројот 579285 кој е делив со 315. Другите такви броеви се $579600 = 579285 + 315$ и $579915 = 579600 + 315$.

28. Најди најмал природен број, кој што при делење со $4,5,6,8,9,10$ дава остаток 3.

Решение. Нека бараниот број го означиме со n, тогаш:

$$\begin{array}{lll} n = 4k_1 + 3 & \text{или} & n - 3 = 4k_1 \\ n = 5k_2 + 3 & \text{или} & n - 3 = 5k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n = 10k_6 + 3 & \text{или} & n - 3 = 10k_6 \end{array}$$

Оттука заклучуваме дека бројот $n-3$ е делив со $4,5,6,8,9,10$, т.е.

$$n - 3 = \text{NZS}(4,5,6,8,9,10) = 2520,$$

или $n = 2523$.

29. Определи го најмалиот четирицифрен природен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.

Решение. Најмалиот природен број кој е делив со 3, 4, 5, 6 и 7 е

$$m = \text{NZS}(3,4,5,6,7) = 420,$$

а најмалиот четирицифрен број кој е делив со истите броеви е $3\cdot 420=1260$. Значи, најмалиот четирицифрен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2 е $1260+2=1262$.

30. Најди најмал број, кој што при делење со $2,3,4,5,6,7,8,9,10$ дава по ред остатоци $1,2,3,4,5,6,7,8,9$, а е делив со 13.

Решение. Нека бараниот број го означиме со n, тогаш

$$n=2k_1+1=3k_2+2=...=10k_9+9=13m .$$

Оттука

$$n+1=2(k_1+1)=3(k_2+1)=...=10(k_9+1) ,$$

а тоа значи дека $n+1$ е делив со броевите $2,3,4,5,6,7,8,9,10$, т.е. со нивниот најмал заеднички содржател. Значи,

$$n+1=2520k \qquad \text{или} \qquad n=2520k-1 .$$

Бидејќи се бара најмал природен број n, кој треба да е делив со 13, за k ги избираме вредностите: $1,2,3,4,...$ и со проба утврдуваме дека за $k=6$ бројот $n=2520\cdot 6-1$ е делив со 13.

Следствено, бараниот број е 15119.

31. Нека n е природен број таков што $24\,|\,n+1$. Докажи, дека збирот на сите позитивни делители на бројот n е делив со 24.

Решение. Ако $24\,|\,n+1$, тогаш $n=24k-1$, за некој природен број k. Нека a и b се комплементарни делители на бројот n, т.е. $ab=n=24k-1$. Тогаш броевите a и b не се деливи со 2 и со 3, бидејќи десната страна не последното равенство не е делива со 2 и со 3.

Да го разгледаме производот

$$a(a+b)=a^2+ab=a^2-1+24k=(a-1)(a+1)+24k .$$

Бројот a не е делив со 2, па затоа броевите $a-1$ и $a+1$ се последователни парни броеви и нивниот производ е делив со 8. Од друга страна, еден од броевите $a-1,a,a+1$ е делив со 3, а како бројот a не е делив со 3, заклучуваме дека производот $(a-1)(a+1)$ е делив и со 3. Според тоа, $24\,|\,a(a+b)$. Од $\mathrm{NZD}(24,a)=1$ следува $24\,|\,a+b$, што значи дека збирот на комплементарните делители е делив со 24.

Ако n не е точен квадрат, тогаш ги комбинираме позитивните делители на бројот n кои се помали од $\sqrt{n}$ со нивните комплементарни делители кои се поголеми од $\sqrt{n}$ и добиваме дека во овој случај збирот на сите позитивни делители на бројот n е делив со 24.

Ако n е точен квадрат, т.е. $a^2=24k-1$, тогаш од претходните разгледувања следува дека $8\,|\,(a-1)(a+1)=24k-2$, што е противречност.

33. Збирот на 20 природни броеви е 2002. Определи ја најголемата вредност што може да ја прими нивниот NZD.

Решение. Нека $a_1,a_2,...,a_{20}$ се природни броеви за кои

$$a_1+a_2+...+a_{20}=2002 .$$

Ако $d = \text{NZD}(a_1, a_2, ..., a_{20})$, тогаш $a_i = dk_i$, $k_i \in \mathbb{N}$ за $i = 1, 2, ..., 20$. Значи,

$$d(k_1 + k_2 + ... + k_{20}) = 2002.$$

Бидејќи $s = k_1 + k_2 + ... + k_{20}$ и d се природни броеви за кои $ds = 2002$ и $s \geq 20$, добиваме дека најмалата вредност кој може да ја прими бројот s е всушност најмалиот делител на 2002 поголем од 20. Со непосредна проверка добиваме дека тоа е бројот 22, т.е. $s = 22$. Според тоа најголема вредност на d е 91. Навистина, збирот на броевите $a_i = 91, i = 1, 2, ..., 19$ и $a_{20} = 273$ е 2002 и нивниот најголем заеднички делител е 91.

34. Збирот на 10 природни броеви е 1001. Која е најголемата можна вредност на нивниот заеднички делител?

Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_{10}$ се десет природни броеви чиј збир е 1001 и нека $d = \text{NZD}(a_1, a_2, ..., a_{10})$; тогаш:

$$a_1 = d \cdot b_1,\ a_2 = d \cdot b_2,\ \dots,\ a_n = d \cdot b_{10}$$

каде што $b_1, b_2, ..., b_{10}$ се природни броеви, такви што $\text{NZD}(b_1, b_2, ..., b_{10}) = 1$. Од условот на задачата имаме:

$$1001 = d(b_1 + b_2 + ... + b_{10}) \geq 10d,$$

од каде што следува дека $d \leq 100$. Но, d е делител на $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, па заклучуваме дека најголемата можна вредност е $d = 7 \cdot 13 = 91$.

Значи, бројот 91 е најголемиот можен заеднички делител на десет природни броеви чиј збир е 1001. Навистина, бидејќи $1001 = 91 \cdot 11 = 91(10+1)$, тогаш броевите можеме да ги избереме вака: $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_9 = 91$ и $a_{10} = 2 \cdot 91 = 182$.

Забелешка. Ако, пак, броевите се различни, тогаш

$$1001 = d(b_1 + b_2 + ... + b_{10}) \geq 45d,$$

од каде што следува дека $d \leq 22$, т.е. $d = 13$.

Следствено, ако броевите се различни, тогаш најмалата вредност на нивниот најголем заеднички делител е 13, а ако меѓу нив има и еднакви, тогаш $d = 91$.

35. Нека a и b се природни броеви за кои е точно равенството

$$a^2 - a \cdot \text{NZD}(a,b) - \text{NZS}(a,b) = 0.$$

Докажи дека $[\text{NZD}(a,b)]^2 \mid b$.

Решение.За било кои два природни броеви е исполнето равенството

$$\text{NZD}(a,b) \cdot \text{NZS}(a,b) = ab.$$

Ако равенството $a^2 - a \cdot \text{NZD}(a,b) - \text{NZS}(a,b) = 0$ го помножиме со $\text{NZD}(a,b)$, добиваме

$$a^2\,\text{NZD}(a,b) - a \cdot [\text{NZD}(a,b)]^2 - \text{NZS}(a,b)\,\text{NZD}(a,b) = 0,$$

$$a^2\,\text{NZD}(a,b) - a \cdot [\text{NZD}(a,b)]^2 - ab = 0,$$

$$a\,\text{NZD}(a,b) - [\text{NZD}(a,b)]^2 - b = 0.$$

За природниот број a постои единствен природен број k така што $a = k\,\text{NZD}(a,b)$. Според тоа

$$b = k[\mathrm{NZD}(a,b)]^2 - [\mathrm{NZD}(a,b)]^2 = [\mathrm{NZD}(a,b)]^2 (k-1) ,$$

па затоа $[\mathrm{NZD}(a,b)]^2 \mid b$.

36. Определи ги сите парови од природни броеви a и b, ($a \le b$) такви што
$$ab = 300 + 7\,\mathrm{NZS}(a,b) + 5\,\mathrm{NZD}(a,b) .$$

Решение. Ако $x = \mathrm{NZS}(a, b)$ и $y = \mathrm{NZD}(a, b)$ тогаш $ab = xy$. Според тоа равенката го добива обликот $xy = 300 + 7x + 5y$ односно $xy - 7x - 5y + 35 = 335$ па затоа
$$(x-5)\ (y-7) = 335 = 5 \cdot 67 .$$
Јасно, $x-5,\ y-7 > 0$ и како од својствата на НЗС и НЗД следува $x-5 > y-7$ ги добиваме следниве два случаја:

Случај 1. $x-5 = 67,\ y-7 = 5$, т.е. $x = 72,\ y = 12$ па затоа $a = 12n,\ b = 12m$ каде $\mathrm{NZD}(m, n) = 1$. Но, тогаш $12^2 mn = ab = xy = 12 \cdot 72 = 12^2 \cdot 6$, т.е. $mn = 6$ од каде следува

1) $n = 1,\ m = 6$ и $a = 12,\ b = 72$

2) $n = 2,\ m = 3$ и $a = 12 \cdot 2,\ b = 12 \cdot 3$, т.е. $a = 24,\ b = 36.$

Случај 2. $x-5 = 335,\ y-7 = 1$, т.е. $x = 340,\ y = 8$. Последното не е можно бидејќи $y = \mathrm{NZD}(a, b)$ треба да е делител на $x = \mathrm{NZS}(a, b)$, а $8 \nmid 340$.

Конечно, равенката има две решенија $a = 24,\ b = 36$ или $a = 12,\ b = 72$.

37. Определи ги сите заемно прости природни броеви a и b такви што $\overline{b,a} = \frac{a}{b}$.

Решение. Ако k е бројот на цифрите на бројот a, тогаш важи $10^{k-1} \le a < 10^k$. Затоа $\frac{a}{b} = \overline{b,a} = b + \frac{a}{10^k}$, од каде следува $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$ и $\mathrm{NZD}(a-b^2, b) = 1$, добиваме дека $\frac{a-b^2}{b}$ е нескратлива дропка. Тоа значи, дека за некој природен број s важи $sb = 10^k$ и $s(a-b^2) = a$.

Од последното равенство следува, дека $a-b^2$ е делив со a и бидејќи $\mathrm{NZD}(a-b^2, b) = 1$ добиваме дека $a-b^2 = \pm 1$. Но, $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k} > 0$, па затоа $a - b^2 = 1$. Тогаш $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k}$ и бидејќи $a \ge 10^{k-1}$, добиваме дека $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k} \ge \frac{1}{10}$, т.е. $b \le 10$. Со непосредна проверка за $b = 1, 2, ..., 10$ и $a = b^2 + 1$ се покажува, дека единствено решение е $b = 2$ и $a = 5$, при што $\frac{5}{2} = 2,5$.

38. Определи го бројот на подредени тројки од природни броеви (a,b,c) такви што $\mathrm{NZS}(a,b) = 1000$, $\mathrm{NZS}(b,c) = 2000$ и $\mathrm{NZS}(c,a) = 2000$.

Решение. Бидејќи броевите 1000 и 2000 се од облик $2^m 5^n$ за m, n природни броеви, добиваме дека и броевите a, b, c се исто така од облик $2^m 5^n$. Нека

$a=2^{m_1}5^{n_1}$, $b=2^{m_2}5^{n_2}$ и $c=2^{m_3}5^{n_3}$, каде m_i,n_i, $i=1,2,3$ ненегативни цели броеви. Од условот на задачата следува:

$$\max\{m_1,m_2\}=3,\ \max\{m_2,m_3\}=4,\ \max\{m_3,m_1\}=4 \qquad (1)$$

$$\max\{n_1,n_2\}=3,\ \max\{n_2,n_3\}=3,\ \max\{n_3,n_1\}=3. \qquad (2)$$

Од (1) добиваме дека $m_3=4$, $m_1=3$ или $m_2=3$, ако еден е 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Постојат 7 такви подредени тројки

$$(0,3,4),(1,3,4),(2,3,4),(3,0,4),(3,1,4),(3,2,4),(3,3,4)\ .$$

Од (2) добиваме дека два од n_1, n_2, n_3 се 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Бројот на такви подредени тројки е 10. Тоа се

$$(3,3,0),(3,3,1),(3,3,2),(3,0,3),(3,1,3),(3,2,3),(0,3,3),(1,3,3),(2,3,3),(3,3,3)\ .$$

Конечно, бидејќи изборот на тројките (m_1,m_2,m_3), (n_1,n_2,n_3) е независен, добиваме дека бројот на тројки (a,b,c) се $7\cdot 10=70$.

39. Определи го најмалиот природен број k за кој постои природен број $n\geq 100$ таков, што бројот $n(n+k)$ е точен квадрат.

Решение. Од $100(100+21)=110^2$ следува дека $k\leq 21$. Нека претпоставиме дека $k\leq 20$ и да ставиме $d=\text{NZD}(n,k)$, $n=n_1d, k=k_1d$, каде $\text{NZD}(n_1,k_1)=1$. Сега од $n(n+k)=\ n_1(n_1+k_1)d^2$ следува дека $n_1(n_1+k_1)$ е точен квадрат. Но, $\text{NZD}(n_1,k_1+n_1)=1$, па затоа и броевите n_1 и n_1+k_1 се точни квадрати.

Од $k\leq 20$ следува дека $d\leq 20$, па затоа $n_1=\frac{n}{d}\geq\frac{100}{20}=5$. Но, n_1 е точен квадрат, па затоа $n_1\geq 9$. Бидејќи k_1 е разликата од n_1 до следниот точен квадрат имаме $k_1\geq 7$. Сега, од $k=k_1d\leq 20$ следува дека $d\leq 2$ и на ист начин како и претходно добиваме $n_1\geq 50$, т.е. $n_1\geq 64$, од каде следува $k_1\geq 17, d=1, n_1\geq 100$ и конечно $k_1\geq 21$, што е противречност, бидејќи $k_1\leq k\leq 20$.

40. Нека a и b се различни природни броеви поголеми од 10^6 и такви што $ab\,|\,(a+b)^3$. Докажи, дека $|a-b|>10^4$.

Решение. Без ограничување на општоста може да претпоставиме дека $a>b$. Ако $k=\text{NZD}(a,b)$, тогаш $a=km, b=nl$, при што $\text{NZD}(m,n)=1$ и $m>n$. Јасно,

$$|a-b|=a-b=k(m-n)\geq k\ .$$

Ќе докажеме дека $k>10000$. Нека претпоставиме дека $k\leq 10000$. Тогаш $m>n>100$. Бидејќи

$$ab\,|\,(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$

добиваме дека $ab\,|\,a^3+b^3$, односно дека $k^2mn\,|\,k^3(m^3+n^3)$. Од $\text{NZD}(m,n)=1$, следува

$$\text{NZD}(n,m^3+n^3)=\text{NZD}(m,m^3+n^3)=1,$$

па затоа од $k^2mn\,|\,k^3(m^3+n^3)$ следува $mn\,|\,k$. Од друга страна, важи

$$mn > 100 \cdot 100 = 10000 \geq k ,$$

што е противречност. Според тоа, $k > 10000$, што значи дека $|a-b| \geq k > 10^4$.

41. Нека $a,b \in \mathbb{N}, a > b$ и $a-b = 5b^2 - 4a^2$. Докажи, дека $a-b$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Даденото равенство го запишуваме на следниве два начини

$$(a-b)(1+4(a+b)) = b^2 \text{ и } (a-b)(1+5(a+b)) = a^2 .$$

Последните две равенства ги множиме и добиваме

$$(a-b)^2(1+4(a+b))(1+5(a+b)) = a^2b^2 ,$$

од каде следува дека $(1+4(a+b))(1+5(a+b))$ е квадра на природен број. Но,

$$\text{NZD}(1+4(a+b),1+5(a+b)) = \text{NZD}(1+4(a+b),a+b) = \text{NZD}(1,a+b) = 1 ,$$

па затоа $1+4(a+b)$ и $1+5(a+b)$ се точни квадрати на природни броеви. Сега од $(a-b)(1+4(a+b)) = b^2$ следува дека $a-b$ е точен квадрат на природен број.

42. Во множеството природни броеви решени ја равенката

$$1 + x^z + y^z = \text{NZS}(x^z, y^z) .$$

Решение. Нека $d = \text{NZS}(x, y)$. Тогаш $d \mid \text{NZS}(x^z, y^z)$, $d \mid x^z$ и $d \mid y^z$, од каде следува $d = 1$. Равенката преминува во облик $1 + x^z + y^z = x^z y^z$, односно $(x^z - 1)(y^z - 1) = 2$. Добиваме $x^z - 1 = 1, y^z - 1 = 2$ или $x^z - 1 = 2, y^z - 1 = 1$, од што следи $x = 2, y = 3, z = 1$ или $x = 3, y = 2, z = 1$.

43. Да се определат пет природни броеви a,b,c,d,e такви што

$$a+b+c+d+e = 100, \qquad \text{NZS}(a,b,c,d,e) = 1992 .$$

Решение. Имаме $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, па значи мора барем еден од броевите a,b,c,d да е делив со 83. Ако два од броевите се деливи со 83, тогаш тие даваат збир поголем за 100 што не е можно. Значи, точно еден од броевите a,b,c,d,e е делив со 83. Нека $a = 83k$. Јасно, $k = 1$, бидејќи во спротивно $a > 100$ што не е можно. Значи, $a = 83$. Од $b+c+d+e = 17$ и $\text{NZS}(83,b,c,d,e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ следува дека барем еден од броевите b,c,d,e е делив со $2^3 = 8$ бидејќи во спротивно 2 ќе се јави во $\text{NZS}(83,a,b,c,d,e)$ на понизок степен. Ако два од броевите b,c,d,e се деливи со 8, тогаш нивниот збир со a е поголем или еднаков на 99, па збирот на преостанатите два броја треба да е 1, што не е можно. Значи, точно еден од броевите b,c,d,e е делив со 8. Да ставиме $b = 8m$. Но m мора да е единица, затоа што во спротивно $a+b \geq 99$, т.е. $c+d+e \leq 1$ што не е можно. Значи, $b = 8$. Од $c+d+e = 9$ и $\text{NZS}(83,8,c,d,e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, следува дека барем еден од броевите c,d и e мора да е делив со 3, бидејќи во спротивно 3 нема да е множител во $\text{NZS}(83,8,c,d,e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$. Да ставиме $c = 3n$. Ако $c = 3$, тогаш $d+e = 6$ и d,e имаат како можни делители само 1,2,3 и 4; оттука се добиваат две решенија

$d=e=3$ и $d=4,e=2$. Ако $c=6$, тогаш $d+e=3$ и d,e имаат како можни делители 1, 2 и 3 од коде го добиваме решението $d=2,e=1$. Ако $c\geq 9$, тогаш $d+e\leq 0$ што не е можно. Значи, има три решенија и тоа

$$a=83,\ b=8,\ c=3,\ d=3,\ e=3;$$
$$a=83,\ b=8,\ c=3,\ d=4,\ e=2;$$
$$a=83,\ b=8,\ c=6,\ d=2,\ e=1.$$

44. Докажи дека најмалиот заеднички содржател на броевите $1,2,...,2n-1,2n$ е еднаков со најмалиот заеднички содржател на броевите $n+1,n+2,...,2n$ за било кој природен број n.

Решение. Јасно е дека тврдењето е точно за $n=1$, бидејќи $\mathrm{NZS}(1,2)=2=\mathrm{NZS}(2)$. Ако $n=2$ јасно е дека $\mathrm{NZS}(1,2,3,4)=12=\mathrm{NZS}(3,4)$. Воведуваме ознаки $\mathrm{NZS}(1,2,...,2n)=s_n$ и $\mathrm{NZS}(n+1,n+2,...,2n)=t_n$. Бидејќи $n+1,...,2n\,|\,s_n$ и $\mathrm{NZS}(n+1,n+2,...,2n)=t_n$, добиваме дека $t_n\,|\,s_n$.

Со помош на математичка индукција ќе покажеме дека $s_n\,|\,t_n$ за секој природен број $n\in\mathbb{N}$. Од првиот дел на задачата јасно е дека тврдењето е точно за $n=1$ и $n=2$, т.е. $s_1\,|\,t_1$ и $s_2\,|\,t_2$. Нека тврдењето е точно за природниот број n, т.е. $s_n\,|\,t_n$. Ако m е содржател на броевите $(n+1)+1,(n+1)+2,...,2(n+1)$, тогаш $2(n+1)\,|\,m$ од каде добиваме дека $(n+1)\,|\,m$. Според тоа $n+1,n+2,...,2n$ се делители на m, т.е. $t_n\,|\,m$. Според индуктивната претпоставка имаме дека $s_n\,|\,t_n$, па според тоа $1,2,3,...,n\,|\,m$. Значи,

$$1,2,3,...,n,n+1,n+2,....,2n,2n+1,2n+2\,|\,m.$$

Бидејќи m е содржател на $n+1,n+2,...,2(n+1)$, добиваме дека

$$1,2,3,...,n,n+1,n+2,....,2n,2n+1,2n+2\,|\,t_{n+1}.$$

Конечно $s_{n+1}\,|\,t_{n+1}$.

Според принципот на математичка индукција $s_n\,|\,t_n$ за секој природен број n.

Бидејќи $s_n\,|\,t_n$ и $t_n\,|\,s_n$ добиваме $s_n=t_n$, т.е.

$$\mathrm{NZS}(1,2,...,n,n+1,...,2n)=\mathrm{NZS}(n+1,n+2,...,2n).$$

4. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

1. Дали постои природен број чиј производ на цифрите е 1995?

Решение. За да постои природен број чиј производ на цифрите е 1995, треба бројот 1995 да се разложи на производ само од едноцифрени броеви. Бидејќи $1995=3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$ следува дека не постои природен број чиј производ на цифрите е 1995.

2. Дали од производот $1!,2!,...,99!,100!$ може да се изостави еден множител, така што производот на преостанатите 99 множители да е квадрат на природен број.

Решение. Ако ја употребиме дефинцијата за факториел, $k! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot (k-1)\cdot k$, за производот $1!\cdot 2!\cdot ...\cdot 99!\cdot 100!$ добиваме

$$1!\cdot 2!\cdot ...\cdot 99!\cdot 100! = 1\cdot (1\cdot 2)\cdot (1\cdot 2\cdot 3)\cdot ...\cdot (1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 98\cdot 99)\cdot (1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 99\cdot 100)$$
$$= 1^{100}\cdot 2^{99}\cdot 3^{98}\cdot .....\cdot 98^{3}\cdot 99^{2}\cdot 100^{1}$$
$$= (1^{100}\cdot 2^{98}\cdot 3^{98}\cdot 4^{96}\cdot 5^{96}\cdot ...\cdot 98^{2}\cdot 99^{2})\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot 98\cdot 100$$
$$= (1^{50}\cdot 2^{49}\cdot 3^{49}\cdot 4^{48}\cdot 5^{48}\cdot ...\cdot 98\cdot 99)^{2}\cdot 2^{50}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 49\cdot 50$$
$$= (1^{50}\cdot 2^{49}\cdot 3^{49}\cdot 4^{48}\cdot 5^{48}\cdot ...\cdot 98\cdot 99\cdot 2^{25})^{2}\cdot 50!.$$

Бидејќи $50!$ не може да се претстави како квадрат на цел број (Зошто?), добиваме дека од производот од $1!\cdot 2!\cdot ...\cdot 99!\cdot 100!$ доволно е да се изостави само множителот $50!$, па производот $1!\cdot 2!\cdot ...49!\cdot 51!\cdot ...\cdot 99!\cdot 100!$ е квадрат на цел број.

3. Најди ги последните три цифри на збирот

$$s = 1! = 2! + 3! + ... + 2000!$$

Решение. Бидејќи 15! и сите собироци по него завршуваат на три нули (во разложувањето на прости множители содржат не помалку од три петки и повеќе двојки), доволно е да ги одредиме последните три цифри на првите четиринаесет собироци.

Во следната табела во вториот ред се дадени последните три цифри на собироците, а во третиот ред последните три цифри на последователните збирови.

1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!	10!	11!	12!	13!	14!
1	2	6	24	120	720	040	320	880	800	800	600	800	200
1	3	9	33	153	873	913	233	113	913	713	313	113	313

Следствено, дадениот збир завршува на 313.

4. Определи го најмалиот природен број кој може да се претстави како збир на два, три, четири и пет прости броеви.

Решение. Најмалиот збир на пет прости броеви е 10, т.е. $2+2+2+2+2=10$, па бараниот број не е помал од 11. Очигледно, $11=9+2=8+3=7+4=6+5$ не може да се претстави како збир на два прости броја, па значи $p \neq 11$. Од друга страна:

$$13 = 2+11 = 3+3+7 = 2+2+2+7 = 2+2+2+2+5,$$

т.е. бројот 13 го задоволува условот од задачата. Значи, $p = 13$.

Ако се бара сите собироци да бидат различни, тогаш p не може да биде помал од $3+5+7+11+13=39$. Да забележиме дека бројот 2 не може да биде собирок, бидејќи во тој случај збирот би бил парен број. Значи, во овој случај $p \geq 41$. Но 41 не може да се претстави како збир на два прости броја. (Провери!).

Понатаму проверуваме за $p = 43$, т.е.

$$43 = 2+41 = 7+17+19 = 2+5+17+19 = 3+5+7+11+17.$$

Значи, $p = 43$.

Следствено, најмалиот прост број, кој може да се претстави како збир на два, три, четири и пет прости броеви е 13, ако собироците не мора да се различни, а 43 кога собироците се различни.

5. Ако $p, (p>3)$ и $10p+1$ се прости броеви, тогаш $5p+1$ е делив со 6. Докажи!

Решение. Прост број поголем од 3 е од облик $6k+1$ или $6k+5$. Во вториот случај

$$10p+1=10(6k+5)+1=3(20k+7)$$

е делив со 3, т.е. не е прост број. Значи, $p=6k+1$ и тогаш

$$5p+1=5(6k+1)+1=30k+6=6(5k+1),$$

т.е. $5p+1$ е делив со 6.

6. Нека n, $n>6$ е природен број за кој $n-1$ и $n+1$ се прости броеви. Докажи дека $n^2(n^2+16)$ е делив со 720.

Решение. Бидејќи $n-1$ и $n+1$ се два последователни прости броеви, и бидејќи $n>6$, добиваме дека $2|n$. Но, тогаш $4|n^2$ и $4|n^2+16$. Според тоа, $2^4 | n^2(n^2+16)$.

Барем еден од броевите $n-1, n, n+1$ (три последователни природни броеви) е делив со 3. Бидејќи $n-1>5$ и $n+1>7$ се прости броеви, добиваме дека $3|n$. Значи, $3^2 | n^2$, односно $3^2 | n^2(n^2+16)$.

Барем еден од броевите $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ е делив со 5 (пет последователни проодни броеви, па според тоа еден од нив е делив со 5). Бидејќи $n+1>7$ и $n-1>5$ и тие се прости, добиваме дека $5|n-2$ или $5|n$ или $5|n+2$. Со други зборови $5|(n-2)n(n+2)=n^3-4n$ или $5|n(n^3-4n)=n^4-4n^2$. Од $5|20n^2$ и претходната дискусија добиваме $5|(n^4-4n^2)+20n^2=n^4+16n^2=n^2(n^2+16)$. Значи, $5, 3^2, 2^4 | n^2(n^2+16)$ односно $720 | n^2(n^2+16)$.

7. Определи ја последната цифра од збирот на четвртите степени на првите 2000 прости броеви.

Решение. Сите прости броеви, освен 2 и 5 завршуваат на цифрите 1, 3, 7 или 9, а нивните четврти степени завршуваат на цифрата 1. Бидејќи 2^4 завршува на 6, а 5^4 завршува на 5, имаме $(2000-2)+6+5=...9$. Значи, последната цифра од збирот на четвртите степени на првите 2000 прости броеви е 9.

8. Помножи го бројот 12600 со најмалиот природен број за да добиеш точен квадрат.

Решение. Го разложуваме бројот 12600 на прости множители, т.е. го запишуваме во канонични вид:

$$12600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7.$$

Еден број е точен квадрат, само ако неговите прости множители се со парен показател. Според тоа, бројот 12600 треба да го помножиме со $2\cdot 7=14$. Навистина,

$$12600\cdot 14=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2\cdot 7=2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2=(4\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^2=420^2.$$

9. Квадратот на природниот број n е шестцифрен број, а ако се земат посебно по две цифри, тој квадрат се состои од три двоцифрени броеви. Првиот и третиот од нив се еднакви, а средниот е двапати помал од нив. Определи го бројот n.

Решение. Нека $n=\overline{(2x)x(2x)}$, каде што $x=\overline{ab}$, тогаш:

$$n^2=2x\cdot 10^4+x\cdot 10^2+2x=20102x=2\cdot 9\cdot 23^2\cdot x.$$

За да биде овој број полн квадрат, треба: $x=2\cdot 19\cdot k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Но, $10<x<50$ (бидејќи $2x<100$), па следува $k=1$, т.е. $x=2\cdot 19=38$. Тогаш

$$n^2=23^2\cdot 38^2=763876=874^2,\ n=874.$$

10. Во записот на бројот

$$25!=15511x10043330y85984z00000$$

недостасуваат цифрите x, y и z. Определи ги овие цифри.

Решение. Бројот $25!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot ...\cdot 25$ го разложуваме на прости множители и добиваме

$$25!=2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23=10^6\cdot 2^{16}\cdot 3^{10}\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23.$$

Значи, $25!$ завршува на шест нули, следствено $z=0$.

Бројот $25!$ е делив со 9, а збирот на цифрите му е $61+x+y$. Оттука $x+y=2$ или $x+y=11$.

Бројот $25!$ е делив со 11, па според признакот за деливост со 11 (бројот $\overline{a_na_{n-1}...a_3a_2a_1a_\circ}$ е делив со 11 ако разликата $(a_\circ+a_2+a_4+...)-(a_1+a_3+a_5+...)$ е делива со 11) добиваме дека изразот $(34+x)-(27+y)=7+x-y$ е делив со 11. Тоа е можно ако $-x+y=7$ или $x-y=4$.

Ги формираме системите равенки

$$\begin{cases}x+y=2\\-x+y=7\end{cases},\quad \begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases},\quad \begin{cases}x+y=11\\-x+y=7\end{cases},\quad \begin{cases}x+y=11\\x-y=4\end{cases}.$$

Од нив целобројни решенија имаат само вториот и третиот, а имајќи предвид дека x и y се цифри, задоволува само решението на третиот систем: $x=2, y=9$.

Следствено: $x=2,\ y=9,\ z=0$.

11. Познато е дека производот $(10x+192y)(11x+191y)\cdots(19x+183y),\ \ x, y\in\mathbb{Z}$ е делив со 101 Дали овој производ е делив со 101^{10}?

Решение. Првиот множител на дадениот производ го претставуваме во видот $202y+10(x-y)$, вториот во $202y+11(x-y),\ldots,$ и последниот $202y+19(x-y)$. Тогаш производот можеме да го запишеме во видот

$$2\cdot 101y\cdot A+10\cdot 11\cdots 19(x-y)^{10}.$$

Овој производ по услов е делив со 101, па затоа производот $10\cdot 11\cdots 19(x-y)^{10}$ е делив со 101. Но, тоа е можно само ако $(x-y)$ е делив со 101 (бидејќи 101 е прост број). Оттука следува дека и секој множител на дадениот производ е делив со 101, а нивниот производ е делив со 101^{10}.

12. Збирот на 5 природни броеви е 1982. Која најголема вредност може да ја прими нивниот најголем заеднички делител?

Решение. Нека a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 се дадените броеви и нека d е нивниот најголем заеднички делител. Тогаш $a_i = k_i d$, $i = 1,2,3,4,5$, па затоа

$$d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) = 1982 = 2 \cdot 991.$$

Бидејќи $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 \geq 5$, заклучуваме дека најголемата можна вредност на најголемиот заеднички делител на броевите a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 е $d = 2$.

13. Која најмала вредност може да ја има најмалиот заеднички содржател на четири природни броја чиј производ е 1984.

Решение. Нека $abcd = 2^6 \cdot 31$ и нека $M = \mathrm{NZS}(a,b,c,d)$. Бидејќи 31 е прост број, еден од броевите е делив со 31, па значи, и M е делив со 31. Бидејќи $abcd$ е делив со 2^6, следува дека барем еден од броевите е делив со $2^2 = 4$. Според тоа, M е делив со $2^2 \cdot 31 = 124$. За $a = b = c = 4$ и $d = 31$ имаме $M = 124$; следствено, најмалата вредност што може да ја има M е 124.

14. Определи ги сите прости броеви од облик $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, каде n е природен број.

Решение. Имаме $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$. Ако $n \geq 4$, тогаш $n-1$ и $n+2$ се и двата поголеми од 2, при што едниот од нив е парен, што значи дека $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ е сложен број. За $n = 2$ имаме $\frac{2(2+1)}{2} - 1 = 2$, а за $n = 3$ имаме $\frac{3(3+1)}{2} - 1 = 5$, што значи дека бараните броеви се 2 и 3.

15. Дарко и Марко добиле задача да запишат даден број како производ на прости множители. Дарко треба да го запише бројот $200^2 \cdot 201^2 \cdot 202^2 \cdot \ldots \cdot 900^2$, а Марко бројот $(200^2 - 1) \cdot (201^2 - 1) \cdot (202^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (900^2 - 1)$.

Кој од нив ќе употреби повеќе различни меѓу себе прости броеви?

Решение. Марко треба да го разложи на прости множители бројот

$$199 \cdot 200 \cdot 201^2 \cdot 202^2 \cdot \ldots \cdot 899^2 \cdot 900 \cdot 901.$$

Сега е јасно дека секој прост број кој ќе го употреби Дарко ќе го употреби и Марко. Марко ќе го запише бројот 199 кој е прост број. Но $398 = 2 \cdot 199$, па според тоа, него ќе го запише и Дарко. Бројот $901 = 17 \cdot 53$ ќе го запише Марко. Заради $212 = 4 \cdot 53$ и $238 = 17 \cdot 14$, броевите 17 и 53 ќе ги запише и Дарко.

Значи, Дарко и Марко во каноничните факторизации ќе ги употребат истите прости броеви.

16. Определи ги сите трицифрени броеви, чиј производ се запишува со пет исти цифри.

Решение. Сите петцифрени броеви, што се запишуваат со пет еднакви цифри се од видот $k \cdot 11111$, при што $k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Го разложуваме бројот 11111 на прости множители, па имаме $11111=41\cdot 271$, од каде што заклучуваме дека овој број не е производ од два трицифрени броеви. Понатаму лесно наоѓаме:

$$\begin{aligned}
&22222=2\cdot 41\cdot 271=82\cdot 271\\
&33333=3\cdot 41\cdot 271=123\cdot 271\\
&44444=2^2\cdot 41\cdot 271=164\cdot 271\\
&55555=5\cdot 41\cdot 271=205\cdot 271\\
&66666=2\cdot 3\cdot 41\cdot 271=123\cdot 542=246\cdot 271\\
&77777=7\cdot 41\cdot 271=287\cdot 271\\
&88888=2^3\cdot 41\cdot 271=328\cdot 271=164\cdot 542\\
&99999=3^2\cdot 41\cdot 271=369\cdot 271=123\cdot 713\,.
\end{aligned}$$

Според тоа, бараните броеви се 123 и 271, 164 и 271, 205 и 271, 264 и 271, 123 и 542, 287 и 271, 328 и 271, 164 и 542, 369 и 271, 123 и 713, т.е. вкупно десет парови.

17. Докажи дека во низата природни броеви можат да се најдат n последователни сложени броеви.

Решение. За секој $n\in\mathbb{N}$, секој член на низата

$$(n+1)!+2\,,\,(n+1)!+3\,,\,(n+1)!+4\,,\dots,\,(n+1)!+(n+1)$$

е сложен број, бидејќи првиот број е делив со 2, вториот број е делив со 3, третиот број е делив со 4, итн.

18. Дадени се природните броеви n и k ,($n>k$) при што бројот $p=2k-1$ е прост. Ако бројот $n(n-1)-k(k-1)$ е делив со p, тогаш тој е делив и со p^2. Докажи!

Решение. Бројот $n(n-1)-k(k-1)$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}
n(n-1)-k(k-1)&=n^2-k^2-(n-k)=(n-k)(n+k)-(n-k)\\
&=(n-k)(n+k-1)=(n-k)[(n-k)+2k-1]\\
&=(n-k)^2-(n-k)(2k-1)=(n-k)^2-(n-k)p.
\end{aligned}$$

Од $p\,|\,[n(n-1)-k(k-1)]$ и последното равенство следува $p\,|\,[(n-k)^2-(n-k)p]$. Но, $p\,|\,(n-k)p$, па затоа $p\,|\,(n-k)^2$. Бројот $p=2k-1$ е прост број, па според тоа $p\,|\,(n-k)$. Значи, $p^2\,|\,(n-k)^2$ и $p^2\,|\,(n-k)p$, па затоа $p^2\,|\,[(n-k)^2-(n-k)p]$, односно $p^2\,|\,[n(n-1)-k(k-1)]$.

19. Докажи дека за секој $n>1$, бројот $\frac{1}{5}(2^{4n+2}+1)$ е сложен број.

Решение. Изразот во заградата го трансформираме вака:

$$\begin{aligned}
A(n)=2^{4n+2}+1&=2^{2(2n+1)}+2\cdot 2^{2n+1}+1-2\cdot 2^{2n+1}\\
&=(2^{2n+1}+1)^2-2^{2n+2}\\
&=(2^{2n+1}+1)^2-(2^{n+1})^2\\
&=(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)(2^{2n+1}+2^{n+1}+1).
\end{aligned}$$

За $n>1$, $2^{2n+1}-2^{n+1}+1>5$, па следува дека $A(n)$ е сложен број. Треба да докажеме уште дека $5\,|\,A(n)$. Имаме:

$$A(1)=2^6+1=65=5\cdot 13$$
$$A(2)=2^{10}+1=1025=5\cdot 5\cdot 41.$$

Да претпоставиме дека $A(n)=5M$ за некој $n>1$, тогаш:

$$\begin{aligned}A(n+1)&=2^{4(n+1)+2}+1\\&=2^4\cdot 2^{4n+2}+2^4-2^4+1\\&=2^4(2^{4n+2}+1)-15=5\cdot(16M-3).\end{aligned}$$

Значи, $5\,|\,A(n+1)$, па според принципот на математичката индукција следува дека $5\,|\,A(n)$ за секој $n>1$.

20. Целите броеви a и b се такви што производот $(16a+17b)(17a+16b)$ е делив со 11. Докажи дека $(16a+17b)(17a+16b)$ е делив со 121.

Решение. Нека $m=16a+17b$ и $n=17a+16b$. Според условот на задачата $11\,|\,mn$. Бидејќи 11 е прост број $11\,|\,m$ или $11\,|\,n$. Од друга страна $m+n=33(a+b)$, т.е. $11\,|\,(m+n)$. Според тоа можни се следните два случаја:

а) $11\,|\,m$ и $11\,|\,(m+n)$, па затоа $11\,|\,(m+n)-m$, т.е. $11\,|\,n$

б) $11\,|\,n$ и $11\,|\,(m+n)$, па затоа $11\,|\,(m+n)-n$, т.е. $11\,|\,m$.

Конечно, од $11\,|\,n$ и $11\,|\,m$ следува $11^2\,|\,mn$.

21. Нека $n=\overline{abcabc}$ и $a\neq 0$. Докажи дека n не е точен квадрат на природен број.

Решение. Јасно, $n=1001\cdot\overline{abc}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{abc}$. Ако n е точен квадрат на природен број, тогаш $7\,|\,\overline{abc}$, $11\,|\,\overline{abc}$ и $13\,|\,\overline{abc}$. Бидејќи 7,11,13 се прости броеви, добиваме дека $1001\,|\,\overline{abc}$, што не е можно.

22. Нека x е природен број, а y се добива од x кога првата цифра на x ќе се премести на последно место. Определи го најмалиот број x за кој важи $3x=y$.

Решение. Нека x е n-цифрен број и првата цифра на x е a ($1\le a\le 9$). Тогаш

$$y=(x-10^{n-1}a)\cdot 10+a=10x-a(10^{n-1}-1).$$

Но, $3x=y$, па затоа $3x=10x-a(10^{n-1}-1)$, од каде што добиваме

$$x=\frac{a(10^n-1)}{7},\qquad (1)$$

Бидејќи 7 е прост број, 7 е делител на a или 10^n-1. Ако 7 е делител на a, тогаш $a=7$, бројот $3x$ ќе има повеќе од n цифри и не може да биде еднаков на y. Значи, 7 е делител на 10^n-1. Најмалата вредност на x се добива за најмалиот можен n. Најмала вредност на n за која 10^n-1 е делив со 7 е $n=6$ и во овој случај од (1) добиваме $x=\overline{a142857}$. Ставајќи $a=1$ за да добиеме најмала вредност за x, добиваме $x=142857$. Со непосредна проверка утврдуваме дека за ова вредност на x важи $3x=3\cdot 142857=428571=y$.

23. Природните броеви A и B се од облик $A=\overline{abcabc}$ и $B=\overline{d00d}$, каде a,b,c,d се цифри такви што $a,d\neq 0$. Определи ги a,b,c и d така што $A+B$ е точен квадрат.

Решение. Имаме

$$\overline{abcabc}=\overline{abc000}+\overline{abc}=\overline{abc}\cdot 1000+\overline{abc}=1001\overline{abc}$$
$$\overline{d00d}=1001d,$$

па затоа

$$A+B=1001(\overline{abc}+d)\leq 1001\cdot 1008.$$

Понатаму, 1001 е сложен број и важи $1001=91\cdot 11$, па затоа $A+B$ е точен квадрат ако и само ако $\overline{abc}+d=1001$. Од последната равенка добиваме $a=9, b=9$ и $c+d=11$.

Значи, решенија на задачата се $a=b=9$ и $c=11-d$ каде $d\in\{2,3,...,9\}$.

24. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ кои се деливи со производот на двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$.

Решение. Бидејќи $\overline{abcd}$ е четирицифрен број, добиваме дека $a\neq 0$. Бројот $\overline{abcd}$ можеме да го запишеме во облик $\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$, па од $\overline{ab}\,|\,\overline{abcd}$ добиваме дека $\overline{ab}\,|\,\overline{cd}$. Значи, постои природен број n таков што $\overline{cd}=n\cdot\overline{ab}$. Бидејќи $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ се двоцифрени броеви, заклучуваме дека n е едноцифрен број.

Доволен услов за $\overline{ab}\cdot\overline{cd}\,|\,\overline{abcd}=(100+n)\cdot\overline{ab}$ е $100+n$ да е делив со $\overline{cd}$. Според тоа, $100+n=k\cdot\overline{cd}=k\cdot n\cdot\overline{ab}$, при што $k>1$ бидејќи $100+n$ е трицифрен број, а $\overline{cd}$ е двоцифрен број. Но $n\,|\,100+n$, па затоа $n\,|\,100$. Едноцифрени броеви кои се делители на 100 се $1,2,4$ или 5, што значи дека се можни четири случаи.

Случај 1. $n=1$. Значи $101=k\cdot\overline{cd}$ и како 101 е прост број, заклучуваме дека последната равенка нема решение.

Случај 2. $n=2$. Значи, $102=2k\cdot\overline{ab}$, т.е. $51=k\cdot\overline{ab}$. Бидејќи единственото претставување на 51 како производ на прости множители е $51=3\cdot 17$, добиваме $k=3$ и $\overline{ab}=17$. Тогаш $\overline{cd}=2\cdot\overline{ab}=34$ и бараниот четирицифрен број е 1734.

Случај 3. $n=4$. Тогаш $104=k\cdot 4\cdot\overline{ab}$, т.е. $26=k\cdot\overline{ab}$. Бројот 26 на единствен начин можеме да го запишеме во облик $26=2\cdot 13$. Според тоа, $k=2$ и $\overline{ab}=13$, па затоа $\overline{cd}=n\cdot\overline{ab}=4\cdot 13=52$ и бараниот број е 1352.

Случај 4. $n=5$. Тогаш $105=k\cdot 5\cdot\overline{ab}$, т.е. $21=k\cdot\overline{ab}$. Бројот 21 на единствен начин може да се претстави во облик $21=3\cdot 7$. Но, $k>1$ и $\overline{ab}$ е двоцифрен број, па затоа последната равенка нема решение.

Значи единствени решенија на задачата се броевите 1734 и 1352.

25. Определи ги сите четирицифрени броеви, чии први две цифри се еднакви, последни две цифри се еднакви и се точни квадрати на природни броеви.

Решение. Нека бараниот број е квадрат на природниот број n, т.е. $n^2=\overline{aabb}$. Имаме $n^2=\overline{aabb}=1100a+11b=11(10a+b)$, па затоа $11\,|\,n^2$, што значи $11\,|\,n$. Според тоа, $n=11k$, за некој $k\in\mathbb{N}$, па затоа бараниот број е од видот $n^2=121k^2$. Но, бројот е четирицифре, т.е. $1000\le 121k^2\le 9999$, од каде следува дека $3\le k\le 9$ Последователно пресметуваме

k	3	4	5	6	7	8	9
$121k^2$	1089	1936	3025	4356	5929	7744	9801

Според тоа, единствено решение е бројот 7744 и тој е квадрат на бројот 88.

26. Определи ги сите прости броеви чиј запис во декаде броен систем почнува и завршува со цифрата 1, и во него последователно се менуваат цифрите 1 и 0.

Решение. Јасно, бараниот број има непарен број цифри. Бројот 101 е прост. Нека $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ и 101010...01 има $2k+1$ цифри. Тогаш

$$1010...01=10^{2k}+10^{2k-2}+...+10^2+1=\frac{10^{2k+2}-1}{10^2-1}=\frac{\frac{10^{k+1}-1}{9}(10^{k+1}+1)}{11},$$

а ова е сложен број за $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ (зошто?). Значи единствениот број од бараниот облик е 101.

Забелешка. Непосредна последица на претходната задача е дека бројот 1010101...101, напишан со 100 нули и 101-на единица, не е прост број. Овде уште да забележиме дека со истата идеја како во решението на задачата бројот $N=10101...01$ може да се запише во видот

$$N=11111\cdot(10^{20}+10^{15}+10^{10}+10^5+1)(1+10^{50})(1+10^{100})(1-10+10^2-...+10^{24})$$

Очигледно е дека бројот $N=10101...01$ не е прост број.

27. Нека p е прост број поголем од 2. Докажи дека

$$1^{p-2}+2^{p-2}+...+(p-1)^{p-2}$$

е делив со p.

Решение. Имаме:

$$1^{p-2}+2^{p-2}+...+(p-1)^{p-2}=$$

$$=[1^{p-2}+(p-1)^{p-2}]+[2^{p-2}+(p-2)^{p-2}]+...+[(\tfrac{p-1}{2})^2+(\tfrac{p+1}{2})^2]$$

За секој прост број $p>2$ важи неравенството

$$a^p+b^p=(a+b)(a^{p-1}+a^{p-2}b+a^{p-3}b^2+...+ab^{p-2}+b^{p-1}).$$

Така, $(a+b)\,|\,(a^p+b^p)$ за секој прост број $p>2$.

Според тоа, секој од изразите во средните загради е деллив со

$$1+(p-1)=2+(p-2)=...=\tfrac{p-1}{2}+\tfrac{p+1}{2}=p.$$

28. Нека p е прост број. Определи ги сите парови цели броеви (a,b) такви што

$$p(a-2)=a(b-1).$$

Решение. Ако $a=0$, тогаш $p=0$, што не е можно. Ако $a\neq 0$, тогаш a е делител на $p(a-2)=ap-2p$, па затоа $a\,|\,2p$. Според тоа, $a\in\{\pm 1,\pm 2,\pm p,\pm 2p\}$. Бараните парови (a,b) се

$$(1,1-p),(2,1),(p,p-1),(2p,p),(-1,1+3p),(-2,1+2p),(-p,p+3),(-2p,p+2).$$

29. Во равенството $25!=15511x10043330y85984z00000$ определи ги цифрите x, y и z за да тоа е точно.

Решение. По дефиниција $25!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 25$. Ако овој број го разложиме на прости множители, добиваме:

$$\begin{aligned}25!&=2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}\cdot 7^{3}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 23\\&=10^{6}\cdot 2^{16}\cdot 3^{10}\cdot 7^{3}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 23,\end{aligned}$$

што значи дека 25! завршува на 6 нули, па следува дека $z=0$.

Бројот 25! е делив со 9, следува дека неговиот збир на цифри $61+x+y$ е делив со 9. Значи

$$x+y=2 \text{ или } x+y=11. \qquad (1)$$

Бројот 25! е делив со 11. Од критериумот за деливост со 11, кој гласи: Бројот $a_n\ldots a_4a_3a_2a_1a_0$ е делив со 11 ако и само ако $(a_0+a_2+a_4+\ldots)-(a_1+a_3+a_5+\ldots)$ е делив со 11, добиваме дека $(34+x)-(27+y)=7+x-y$ е делив со 11. Значи

$$-x+y=7 \text{ или } x-y=4. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) ги формираме следниве системи равенки:

$$\begin{cases}x+y=2\\-x+y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=11\\-x+y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=11\\x-y=4\end{cases}.$$

Целобројни решенија се добиваат само кај вториот и третиот систем, $x=4$, $y=-2$ и $x=2,y=9$, соодветно. Но, x и y се цифри, па затоа единствено решение е $x=2,y=9$.

30. Определи ги сите природни броеви n со следното својство: за секој позитивен делител d на n, бројот $d+1$ е делител на $n+1$.

Решение. Ако n е непарен прост број, делители на n се еден и n, а два и $n+1$ се делители на $n+1$. Ако n е парен $n+1$ не е делив со два, а еден е делител на n.

Ако n е непарен сложен број, тогаш

$$\begin{aligned}&n=kl\\&n+1=kl+1=(k+1)(l-s)=(l+1)(k-t)\\&kl+1=kl+l-ks-s=kl+k-lt-t\\&1=l-s(k+1)=k-t(l+1)\\&l>k+1,k>l+1\\&l>k+1>l+2\end{aligned}$$

што не е можно. Бараните броеви се еден и сите непарни прости броеви.

31. Ако p е прост број, докажи дека вредноста на изразот

$$A=\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6},$$

е исто така прост број.

Решение. Заради равенствата

$$p^3+4p^2+10p+12=(p^2+2p+6)(p+2)$$

$$p^3-p^2+2p+16=(p^2-3p+8)(p+2)$$

изразот го добива видот

$$A=\frac{(p^2+2p+6)(p+2)}{(p^2-3p+8)(p+2)}\cdot\frac{p(p^2-3p+8)}{p^2+2p+6}=p.$$

Значи, вредноста на A е прост број, бидејќи p е прост број.

32. Нека p е непарен прост број. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои $2p^n+3$ е сложен број.

Решение. Било кој непарен прост број завршува на една од цифрите 1,3,7 или 9. Квадратите на непарните прости броеви завршуваат на една од цифрите 1 или 9. Според тоа, четвртите степени завршуваат на цифрата 1. Затоа, бројот $2p^4$ кога p е непарен прост број завршува на цифрата 2, а бројот $2p^4+3$ завршува на цифрата 5. Според тоа $5\,|\,2p^4+3$, односно $2p^4+3$ е сложен број. Значи една вредност на n е 4.

Ако $4\,|\,n$ тогаш p^n завршува на цифрата 1, $2p^n$ завршува на цифрата 2, а $2p^n+3$ завршува на цифрата 5. Според тоа, ако $4\,|\,n$, тогаш $5\,|\,2p^n+3$, односно $2p^n+3$ е сложен број.

Множеството $\{n\,|\,n=4k,k\in\mathbb{N}\}$ е бесконечно множество природни броеви за кои $2p^n+3$ е сложен број, за било кој непарен прост број.

33. За природните броеви a,b,c и d е исполнето равенството $ab=cd$. Дали може бројот $a+b+c+d$ да биде прост?

Решение. Од условот на задачата имаме дека $\frac{ab}{c}$ е природен број. Постојат природни броеви $m,n,x,y\in\mathbb{N}$ такви што $c=mn,a=mx,b=ny$. Но, тогаш

$$d=\frac{ab}{c}=\frac{mx\cdot ny}{mn}=xy,$$

од каде што добиваме

$$a+b+c+d=mx+ny+mn+xy=m(n+x)+y(n+x)=(n+x)(m+y).$$

Бидејќи $m,n,x,y\in\mathbb{N}$ добиваме дека $m+y,n+x\geq 2$ па според тоа $(n+x)(m+y)$ е сложен број.

34. Нека a,b,c се ненулти цели броеви, $a\neq c$, такви што

$$\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}. \qquad (1)$$

Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не е прост број.

Решение. Равенството (1) последователно е еквивалентно со

$$ac^2+ab^2=ca^2+cb^2$$
$$ac^2-ca^2+ab^2-cb^2=0$$
$$ac(a-c)+b^2(a-c)=0$$
$$(b^2-ac)(a-c)=0.$$

Бидејќи $a\neq c$, т.е. $a-c\neq 0$ добиваме $b^2-ac=0$, т.е. $ac=b^2$. Сега

$$a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-ac=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)(a+c-b).$$

Но a,b,c се ненулти цели броеви за кои $a\neq c$, па според тоа $a^2+b^2+c^2>3$. Ако $a^2+b^2+c^2$ е прост број, можни се следните четири случаи

а) $a+c-b=1$, $a^2+b^2+c^2=a+c+b$

б) $a+c+b=1$, $a^2+b^2+c^2=a+c-b$

в) $a+c-b=-1$, $a+c+b=-(a^2+b^2+c^2)$

г) $a+c+b=-1$, $a+c-b=-(a^2+b^2+c^2)$

Во првите два случаи $b=a+c-1$ или $b=1-(a+c)$. Од тука добиваме

$$a^2+b^2+c^2-(a+c)-b=0, \text{ т.е. } (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1$$

во првиот, односно

$$a^2+b^2+c^2+b-(a+c)=0, \text{ т.е. } (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1$$

во вториот случај. Во двата случаи $a=c=1$ што е во спротивност со претпоставката од задачата. Во третиот случаи

$$a^2+b^2+c^2+2(a+c)+1=0, \text{ т.е. } (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1$$

а во четвртиот случај

$$a^2+b^2+c^2+a+c-b=0, \text{ т.е. } (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1.$$

Во третиот и четвртиот случај $a=c=-1$ што е во спротивност на претпоставката од задачата.

Заради добиените контрадикции добиваме дека $a^2+b^2+c^2$ не е прост број.

35. Нека p и q се два последователни непарни прости броеви. Докажи дека $p+q$ е производ на најмалку 3 природни броеви поголеми од 1.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $p<q$. Значи, постои природен број k таков што $q-p=2k$, од каде што следува дека

$$p+q=p+p+2k=2p+2k=2(p+k)$$

и важи $p<p+k<p+2k=q$. Но p и q се два последователни непарни прости броеви, па според тоа $p+k$ е сложен број. Со други зборови, постојат природни броеви $u,v>1$ такви што $p+k=uv$. Тогаш

$$p+q=2(p+k)=2uv,$$

што требаше да се докаже.

36. За кои природни броеви n, бројот $f(n)=3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$ е прост број?

Решение. Имаме

$$f(n)=3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=3^{2n}+2\cdot 3^{2n}-2\cdot 2^{2n}-2^n\cdot 3^n$$
$$=2(3^{2n}-2^{2n})+3^n(3^n-2^n)=(3^n-2^n)(2\cdot 3^n+2\cdot 2^n+3^n)$$
$$=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1}).$$

Очигледно, само за $n=1$ бројот $f(n)$ е прост број; тогаш $f(1)=13$, а за секој $n>1$, $f(n)$ е секогаш сложен број, бидејќи е производ на два природни броја поголеми од 1.

37. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $8n^3-12n^2+6n+63$ е сложен.

Решение. Со средување на изразот добиваме

$$8n^3-12n^2+6n+63=(8n^3-12n^2+6n-1)+(63+1)=$$
$$=(2n-1)^3+4^3=(2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+16)=$$
$$=(2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+4+12)=(2n+3)((2n-3)^2+12)$$

па дадениот број е производ на два природни броја поголеми од 1, односно тој е сложен број.

38. Докажи дека за секој природен број n ($n>1$) изразот n^5+n^4+1 е сложен број.

Решение. *Прв начин.* Ако изразот

$$n^5+n^4+1 \tag{1}$$

можеме да го претставиме во облик $(n+a_1)(n^4+...)$, тогаш $a_1\,|\,1$. Оттука $a_1=1$ или $a_1=-1$. Бидејќи $n+a_1=0$, следува дека и $n=-1$ или $n=1$, што не е можно поради $n>1$. Значи, (1) нема линеарен множител.

Според тоа, ако изразот n^5+n^4+1 може да се претстави како производ на (вистински) множители, тогаш тој производ ќе го има следниот облик

$$(n^2+an+d)(n^3+bn^2+cn+d) \tag{2}$$

каде што $d=1$ или $d=-1$. Ако го средиме (2) ќе добиеме

$$n^5+(a+b)n^4+(ab+c+d)n^2+(ad+cd)n+1. \tag{3}$$

Ако ги споредиме (1) и (3), ќе го добиеме следниот систем равенки

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab+c+d=0 \\ ac+d(b+1)=0 \\ (a+c)d=0 \end{cases} \tag{4}$$

Ако од првата и последната равенка ги замениме $b=1-a$ и $c=-a$ во втората, ќе добиеме $a(1-a)-a+d=0$, т.е. $a^2=d$, од каде што $d>0$, па $d=1$ и $a=1$ или $a=-1$. Имајќи ги предвид овие резултати, од третата равенка добиваме

$-a^2+b+1=0$, од каде што, поради $a^2=1$, следува дека $b=0$, а поради $b=1-a$, добиваме $a=1$. На крајот, од $c=-a$, добиваме $c=-1$.

Значи, системот (4) има целобројно решение $(a,b,c,d)=(1,0,-1,1)$. Следствено, изразот (1) може да се разложи на множители:

$$n^5+n^4+1=(n^2+n+1)(n^3-n+1)$$

од каде што следува дека вредноста на изразот (1) ќе биде сложен број за секој природен број n ($n>1$) изразите n^2+n+1 и n^3-n+1 се природни броеви поголеми од 1.

Втор начин. Изаразот n^5+n^4+1 ќе биде сложен број, ако може да се претстави како производ на барем два природни броја, од кои ниеден не е еднаков на 1. Имаме по ред:

$$\begin{aligned} n^5+n^4+1 &= n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1 \\ &= n^3(n^2+n+1)-n(n^2+n+1)+(n^2+n+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^3-n+1). \end{aligned}$$

За секој природен број n ($n>1$), секој од изразите n^2+n+1 и n^3-n+1 претставува број поголем од 1, па следува дека изразот n^5+n^4+1 е сложен број.

39. Ако x,y,z и u се природни броеви поголеми од 1, за кои важи $xy=zu$, докажи дека бројот $\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$ е сложен природен број.

Решение. По средувањето на изразот добиваме

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}=\frac{(xy+xz+zy+z^2)(xy+xu+yu+u^2)}{(x+y+z+u)^2}=\frac{(zu+xz+zy+z^2)(zu+xu+yu+u^2)}{(x+y+z+u)^2}$$

$$=\frac{z(u+x+y+z)\cdot u(z+x+y+u)}{(x+y+z+u)^2}=zu$$

и бидејќи $z,u>1$, следува тврдењето на задачата.

40. Природните броеви a и b се такви што $a>b$, $a\neq 1$, $b\neq 1$ и b^2+a-1 е делител на a^2+b-1. Докажи дека b^2+a-1 е сложен број.

Решение. Нека претпоставиме дека a и b се броеви кои го исполнуваат условот на задачата. Од равенството

$$(b^2-1)^2-a^2=[(b^2-1)-a][(b^2-1)+a]=(b^2-a-1)(b^2+a-1),$$

добиваме дека

$$(b^2+a-1)\,|\,[(b^2-1)^2-a^2]. \tag{1}$$

Заради равенството

$$(b^2-1)^2+(b-1)=[(b^2-1)^2-a^2]+[a^2+(b-1)],$$

од (1) и условот на задачата $(b^2+a-1)\,|\,(a^2+b-1)$, добиваме дека

$$(b^2+a-1)\,|\,[(b^2-1)^2+(b-1)]=b(b-1)(b^2+b-1). \tag{2}$$

За секој природен број b се точни равенствата

$$\text{NZD}(b,b-1)=1,\ \text{NZD}(b,b^2+b-1)=1,\ \text{NZD}(b-1,b^2+b-1)=1. \quad (3)$$

Јасно, точни се и неравенствата

$$\begin{aligned} &b<b^2+a-1,\\ &b-1<b^2+a-1, \quad (4)\\ &b^2+b-1<b^2+a-1. \end{aligned}$$

Нека претпоставиме дека $p=b^2+a-1$ е прост број. Од (3) следува $p\,|\,b$ или $p\,|\,(b-1)$ или $p\,|\,(b^2+b-1)$, што не е можно заради (4). Според тоа, b^2+a-1 не е прост број.

41. Нека a,b и c се природни броеви такви што $b-a$ е прост број и $3c^2=c(a+b)+ab$. Докажи дека $8c+1$ е точен квадрат.

Решение. Ќе воведеме ознаки $b-a=p$ и $b+a=q$. Од равенството

$$ab=\tfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\tfrac{q^2-p^2}{4},$$

ако замениме во $3c^2=c(a+b)+ab$ последователно добиваме

$$3c^2=cq+\tfrac{q^2-p^2}{4},\ 12c^2=4cq+q^2-p^2,$$

$$p^2=q^2+4cq-12c^2,\ p^2=(q-2c)(q+6c).$$

Од неравенството $q-2c<q+6c$, бидејќи p е прост број, добиваме $q-2c=1$ и $q+6c=p^2$. Ако од второто го одземеме првото равенство, добиваме $8c=p^2-1$. Значи, $8c+1=p^2$, што и требаше да се докаже.

42. Нека $M_1=2+1, M_2=2\cdot3+1, M_3=2\cdot3\cdot5+1,\dots, M_k=2\cdot3\cdot\ldots\cdot p_k+1,\dots$ односно $M_n=p_1p_2...p_n+1$, каде $2,3,...,p_n$ се првите n прости броеви.

Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот M_n не е точен квадрат.

Решение. Нека $n\in\mathbb{N}$ е природен број за кој постои $m\in\mathbb{N}$ таков што $M_n=m^2$. Бидејќи $p_2,p_3,...,p_n$ се непарни прости броеви важи

$$M_n=2\cdot(3\cdot\ldots\cdot p_n)+1=2(2s+1)+1=4s+3.$$

Ќе разгледаме два случаи.

а) m е парен број. Тогаш $m=2l$, за некој $l\in\mathbb{N}$ и $m^2=4l^2=4r$.

б) m е непарен број. Тогаш $n=2q+1$, за некој $q\in\mathbb{N}$ и

$$m^2=(2q+1)^2=4(q^2+q)+1=4r+1.$$

Од а) и б) следува дека m^2 не е од облик $4s+3$, $M_n\neq m^2$ за секои $n,m\in\mathbb{N}$.

43. Нека p,q и r се различни прости броеви такви што $p+q+r$ е делител на бројот pqr. Докажи дека $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ е точен квадрат.

Решение. Од условот на задачата имаме $pqr=k(p+q+r)$, $k\in\mathbb{N}$. Бидејќи

$$p+q+r > p, p+q+r > q, p+q+r > r,$$

следува дека или $p+q+r = pq$ или $p+q+r = qr$ или $p+q+r = rp$.

Ако $p+q+r = pq$, тогаш $(p-1)(q-1) = r+1$, па затоа

$$(p-1)(q-1)(r-1)+1 = (r+1)(r-1)+1 = r^2.$$

Ако $p+q+r = qr$, тогаш $(q-1)(r-1) = p+1$, па затоа

$$(p-1)(q-1)(r-1)+1 = (p+1)(p-1)+1 = p^2.$$

Ако $p+q+r = rp$, тогаш $(p-1)(r-1) = q+1$, па затоа

$$(p-1)(q-1)(r-1)+1 = (q+1)(q-1)+1 = q^2.$$

Конечно, во секој случај бројот $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ е точен квадрат.

44. Нека n е природен број поголем од 1 и p е прост број таков што n е делител на $p-1$ и p е делител на n^3-1. Докажи, дека $4p-3$ е точен квадрат.

Решение. Бидејќи n е делител на $p-1$ добиваме дека $n < p$. Од p делител на $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ следува дека p е делител на n^2+n+1. Нека $p-1=nl$ Јасно, $l>0$. Бидејќи $n^2+n+1=n^2+n+p-nl=n(n+1-l)+p$ следува дека p е делител на $n(n+1-l)$, а од $n<p$ следува дека p е делител на $n+1-l$. Но $l>0$ па затоа $n+1-l \le n$. Сега, бидејќи p е делител на $n+1-l$ и $n<p$ следува дека $l \ge n+1$. Ако $l > n+1$, тогаш $p=1+nl>1+n+n^2$, што не е можно бидејќи p е делител на n^2+n+1. Значи, $l=n+1$, а оттука следува $p=n^2+n+1$.

Затоа $4p-3=4(n^2+n+1)-3=(2n+1)^2$.

45. Дали постои четирицифрен броеви кај кој првите две цифри се еднакви меѓу себе и вторите две цифри се еднакви меѓу себе, а бројот е квадрат на природен број.

Решение. Бараниот број n има облик $n=\overline{aabb}$, каде a и b се цифри, $a \ge 1$, при што не е исклучена можноста $a=b$. Според тоа

$$n=1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b).$$

Бидејќи n е квадрат на природен број и $11|n$, добиваме дека $11|(100a+b)$. Природниот број $100a+b$ можеме да го запишеме во облик

$$99a+(a+b)=11\cdot 9a+(a+b),$$

па затоа тој е делив со 11 ако и само ако $11|(a+b)$. Броевите a и b се цифри, $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, па затоа $1 \le a+b \le 18$. Единствен природен број од 1 до 18 кој е делив со 11 е 11, од каде што добиваме дека $a+b=11$.

Сега, точно е равенството $n=11\cdot 11\cdot(9a+1)$. Бројот $9a+1$, каде $1 \le a \le 9$ е точен квадрат единствено за $a=7$. Според тоа, $a=7, b=4$ и бараниот број е $n=7744=88^2$.

46. Природниот број N е собран со неговиот најголем делител, помал од N, и е добиен степен на бројот 10. Определи ги сите такви природни броеви N.

Решение. Нека m е најголемиот делител на N, помал од N. Тогаш $N = mp$, каде p е најмалиот прост делител на N. Имаме $N + m = 10^k$, за некој k, па затоа $m(p+1) = 10^k$. Десната страна на последното равенство не е делива со 3, па затоа $p > 2$. Оттука следува дека бројот N е непарен, па затоа и бројот m е непарен. Од друга страна m е делител на 10^k, па затоа $m = 5^s$, за некој ненегативен цел број s. Ако $m = 1$, тогаш $N = p = 10^k - 1$ е прост број, што не е можно, бидејќи $10^k - 1$ е делив со 9.

Значи, $s \geq 1$, бројот N е делив со 5 и $p \leq 5$. Ако $p = 3$, добиваме $4 \cdot 5^s = 10^k$, од каде следува $k = 2, m = 25$ и $n = 75$. Ако $p = 5$, тогаш $p+1 = 6$ и бројот 10^k е делив со 3, што е противречност.

47. Нека $a, b \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажи, дека $(x, x+1)$ е решение на равенката $a^k x - b^k y = a - b$, тогаш $|a-b|$ е точен $k-$ти степен.

Решение. Нека $(x, x+1)$ е решение на дадена равенка . Тогаш

$$a - b = a^k x - b^k (x+1)$$

$$b^k = (a-b)[-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})]. \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека броевите $a - b$ и $-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$ имаат заеднички прост делител p. Тогаш $p \,|\, b^k$, па затоа $p \,|\, b$. Но, $p \,|\, a-b$, што значи дека $p \,|\, a$. Сега, од $p \,|\, a,\ p \,|\, b$ и $p \,|\, -1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$ следува $p \,|\, 1$, што е противречност. Значи,

$$a - b \text{ и } -1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

се заемно прости, па од (1) следува дека секој од овие два броја е $k-$ти степен со точност до знак.

48. Да се најдат сите тројки прости броеви (p, q, r) такви што $p \leq q \leq r$ и $pqr < pq + qr + rp$.

Решение. Бидејќи p, q, r се природни броеви, неравенството

$$pqr < pq + qr + rp$$

е еквивалентно со неравенството

$$1 \leq \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{r}.$$

Ако $p \geq 3$, бидејќи p, q, r се прости броеви и $p \leq q \leq r$ имаме

$$1 \leq \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{q} \leq \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = 1,$$

па $p \leq 2$. Но p е прост број, па затоа $p = 2$. Тогаш, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Ако $q > 4$, тогаш

$$\tfrac{1}{2} \le \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{r} \le \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2},$$

па затоа $q \le 4$. Сега имаме два случаи.

Ако $q = 2$, тогаш $4r \le 4 + 4r$, па даденото неравенство е точно за секој прост број r.

Ако $q = 3$ имаме $\tfrac{1}{6} < \tfrac{1}{r}$, па затоа $r < 6$. Според тоа, во овој случај вредности за r се $r = 3$ и $r = 5$.

Конечно, решение на неравенката се $(2,3,3)$, $(2,3,5)$ и $(2,2,r)$, r е прост број.

49. Определи ги сите прости броеви p за кои што и бројот $p^3 + p^2 + 11p + 2$ е прост број.

Решение. Очигледно $p \ne 2$. Во зависност од остатоците при делење со 3, можни се следниве три случаи:

1) Ако $p = 3$, тогаш $p^3 + p^2 + 11p + 2 = 71$ е прост број.

2) Ако $p = 3k + 1$, тогаш

$$p^3 + p^2 + 11p + 2 = (3k+1)^3 + (3k+1)^2 + 11(3k+1) + 2 = 3(9k^3 + 12k^2 + 16k + 5)$$

е сложен број.

3) Ако $p = 3k + 2$, тогаш

$$p^3 + p^2 + 11p + 2 = (3k+2)^3 + (3k+2)^2 + 11(3k+2) + 2 = 3(9k^3 + 21k^2 + 37k + 12)$$

е сложен број.

Значи, задачата има единствено решение $p = 3$.

50. Определи ги сите прости броеви p такви што бројот $p(p+1)(p+3)$ е производ на два последователни природни броја.

Решение. Нека $p(p+1)(p+3) = n(n+1)$. Бидејќи p е прост број добиваме дека p е делител на n или на $n+1$.

Нека $p \mid n$, т.е. $n = pq$, каде $q \ge 2$. Тогаш $(p+1)(p+3) = q(pq+1)$, од каде што следува $p^2 + (4 - q^2)p + 3 - q = 0$. Од последното равенство следува $p \mid q - 3$, т.е. $q = pk + 3$, $k \ge 0$ е цел број. Ако замениме во претходното равенство и скратиме со p го добиваме равенството $p = p^2k^2 + 6pk + 5 + k$, кое е можно само за $k = 0$ и соодветно $p = 5$. Сега $q = 3$ и $n = 15$.

Нека $p \mid n+1$, т.е. $n + 1 = pq$, каде $q \ge 2$. Тогаш $(p+1)(p+3) = q(pq-1)$, од што каде следува $p^2 + (4 - q^2)p + 3 + q = 0$. Сега имаме $p \mid q + 3$, т.е. $q = pk - 3$, $k \ge 1$ е цел број. Ако замениме во претходното равенство и скратиме со p го добиваме равенството $p = p^2k^2 - 6pk + 5 - k = k(p^2k - 6p - 1) + 5$. Бидејќи $p^2k - 6p - 1 > p$, кога $k \ge 4$ добиваме $1 \le k \le 3$. Со непосредна проверка се добиваат решенијата $p = 2, n = 5$ и $p = 3, n = 8$.

51. Определи ги сите тројки прости броеви $p<q<r$ за кои $p+q=r$ и

$$(r-p)(q-p)-27p,$$

е точен квадрат.

Решение. Бидејќи p,q и r се три различни прости броеви за кои $p<q<r$ тогаш r и q се непарни. Од равенството $p+q=r$ добиваме дека p е парен број, т.е. $p=2$. Сега $r=q+2$ и постои $u\in\mathbb{N}$ така што

$$q(q-2)-54=u^2$$
$$(q-1)^2-u^2=55$$
$$(q-u-1)(q+u-1)=55.$$

Од последната равенка, заради равенствата $55=1\cdot 55=5\cdot 11$ ги добиваме системите

$$\begin{cases} q-u=2 \\ q+u=56 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} q-u=6 \\ q+u=12 \end{cases}.$$

Решение на првиот систем е $q=29, u=27$ при што $r=31, p=2$, а решение на вториот систем е $q=9, u=3$ и $r=11, p=2$.

Јасно, решение на задачата е $p=2, q=29, r=31$.

52. Во множеството прости броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2p_1-p_2+7p_3=1826, \\ 3p_1+5p_2+7p_3=2007. \end{cases}$$

Решение. Равенките од системот ќе ги запишеме во облик

$$\begin{cases} 2p_1-p_2-1826=-7p_3 \\ 3p_1+5p_2-2007=-7p_3 \end{cases}$$

Од првата равенка следува $7\,|\,(2p_1-p_2-1826)$, т.е. $7\,|\,(2p_1-p_2-6)$, а од втората равенка следува $7\,|\,(3p_1+5p_2-2007)$, т.е. $7\,|\,(3p_1+5p_2-5)$. Според тоа,

$$7\,|\,[2(2p_1-p_2-6)-(3p_1+5p_2-5)]=p_1-7p_2-7.$$

Бројот $7\,|\,(-7p_2-7)$, па според тоа $7\,|\,p_1$. Бидејќи p_1 е прост број, добиваме дека $p_1=7$. Системот го добива обликот:

$$\begin{cases} -p_2+7p_3=1812 \\ 5p_2+7p_3=1986 \end{cases}$$

Решение на последниот систем е $p_2=29$, $p_3=263$, и овие броеви се прости.

Значи, решение на системот е $p_1=7$, $p_2=29$, $p_3=263$.

53. Природниот број n е производ на различните прости броеви p_1,p_2,p_3,p_4 кои се помали од 250. Ако $p_1p_2p_3=3(p_1+p_2+p_3)$ и $p_1+p_2+p_3+p_4$ е број запишан со исти цифри, определи го бројот n.

Решение. Од равенството $p_1p_2p_3=3(p_1+p_2+p_3)$ следува еден од броевите p_1,p_2,p_3 е еднаков на 3. Според тоа, $p_2p_3=3+p_2+p_3$. Последната равенка ја запишуваме во видот $(p_2-1)(p_3-1)=4$. Единствен начин бројот 4 да го запишеме како производ на два различни броеви е $4=1\cdot 4$, па затоа $p_2=2,\ p_3=5$. Од условот дека бројот $p_1+p_2+p_3+p_4$ е број запишан со исти цифри и $p_4<250$ следува дека овој број припаѓа на множеството:

$$\{11,22,33,44,55,66,77,88,99,111,222\}.$$

Првиот следен број е 333, па бидејќи $p_1+p_2+p_3=10$ и $p_4<250$, овој број не ги исполнува условите на задачата. Бидејќи p_4 е непарен прост број, од ова множество ги отстрануваме парните броеви, па затоа $p_4+10\in\{11,33,55,77,99,111\}$. Со непосредна проверка добиваме $p_4\in\{23,67,89,101\}$. Конечно, бараните броеви се

$$n=p_1p_2p_3p_4=30p_4\in\{690,2010,2670,3030\}.$$

54. Нека m и n се природни броеви такви што

$$\frac{m^2+n^2}{mn}\in\mathbb{N}.$$

Докажи дека $m=n$.

Решение. Нека $m,n\in\mathbb{N}$ се такви што $\frac{m^2+n^2}{mn}=k$, за некој $k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$m^2+n^2=kmn. \tag{1}$$

За секој прост делител p на n имаме $p\,|\,n^2$ и $p\,|\,kmn$, па затоа $p\,|\,kmn-n^2=m^2$. Ако p е прост број делител на m^2, тој е делител и на m. Значи, секој прост делител на n е прост делител и на m.

Од причини на симетрија на m и n, секој прост делител q на m е прост делител и на n.

Значи, m и n имаат еднакво множество на прости делители. Нека

$$m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k} \quad \text{и} \quad n=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_k^{b_k}$$

се каноничните разложувања на m и n. Со замена во (1) добиваме

$$p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}\dots p_k^{2a_k}+p_1^{2b_1}p_2^{2b_2}\dots p_k^{2b_k}=kp_1^{a_1+b_1}p_2^{a_2+b_2}\dots p_k^{a_k+b_k}.$$

Ако $a_1>b_1$, тогаш од последното равенство следува

$$p_1^{2(a_1-b_1)}p_2^{2a_2}\dots p_k^{2a_k}+p_2^{2b_2}\dots p_k^{2b_k}=kp_1^{a_1-b_1}p_2^{a_2+b_2}\dots p_k^{a_k+b_k},$$

па затоа $p_1\,|\,p_2^{2b_2}\dots p_k^{2b_k}$, што е противречност. Според тоа, $a_1=b_1$. На потполно ист начин заклучуваме дека $a_i=b_i$, за $i=2,3,\dots,k$, па затоа $m=n$.

55. Определи ги сите природни броеви p,q и r такви што p и q се прости и

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}$$

$$r(p+q+1)=(p+1)(q+1)$$

$$(r-1)(p+q+1)=pq.$$

Бидејќи p и q се прости броеви, од последната равенка ги добиваме следните системи равенки:

$$\begin{cases} r-1=p \\ p+q+1=q \end{cases} \quad \begin{cases} r-1=q \\ p+q+1=p \end{cases} \quad \begin{cases} r-1=1 \\ p+q+1=pq \end{cases} \quad \begin{cases} r-1=pq \\ p+q+1=1 \end{cases}$$

Очигледно е дека првиот, вториот и четвртиот систем немаат решение во множеството природни броеви. Од третиот систем имаме $r=2$ и $(p-1)(q-1)=2$. Бидејќи $p-1$ и $q-1$ се природни броеви, од последната равенка се добиваат следните два системи:

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} p-1=2 \\ q-1=1 \end{cases}.$$

Нивни решенија се $p=2,q=3$ и $p=3,q=2$. Конечно, решенија на почетната равенка се $r=2,p=2,q=3$ и $r=2,p=3,q=2$.

56. Докажи, дека за секој прост број $p>2$, броителот m на дропката

$$\tfrac{m}{n}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{p-1},\ m,n\in\mathbb{N}$$

е делив со p.

Решение. Бројот p е прост број поголем од 2, што значи дека $p-1$ е парен број, па имаме

$$\begin{aligned}\tfrac{m}{n}&=(1+\tfrac{1}{p-1})+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{p-2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{p-3}+...+(\tfrac{1}{\frac{p-1}{2}}+\tfrac{1}{\frac{p+1}{2}})\\ &=\tfrac{p}{p-1}+\tfrac{p}{2(p-1)}+...+\tfrac{p}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}=\tfrac{pQ}{(p-1)!},\end{aligned}$$

т.е. $m(p-1)!=pnQ$, за некој $Q\in\mathbb{Z}$. Значи, $p\,|\,m(p-1)!$ и како p е прост број имаме $\mathrm{NZD}(p,(p-1)!)=1$, т.е. $p\,|\,m$.

57. Определи ги сите цели броеви a, b и c такви што $1\le a<b<c$ и бројот abc е делител на бројот $ab+bc+ca+a+b+c$.

Решение. Нека a, b, c се природни броеви такви што $1\le a<b<c$ и abc е делител на $ab+bc+ca+a+b+c$. Ставаме $d=\frac{ab+bc+ca+a+b+c}{abc}$, т.е.

$$d=\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{ab}+\tfrac{1}{bc}+\tfrac{1}{ca}.$$

Од условот $1\le a<b<c$, добиваме дека $b\ge 2$ и $c\ge 3$, па затоа

$$d\le\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=2\tfrac{5}{6}<3.$$

Бидејќи d е цел број добиваме $d=1$ или $d=2$. Нека a е природен број таков што $a\ge 3$. Од условот $1\le a<b<c$ добиваме $b\ge 4$ и $c\ge 5$, па затоа

$$d\le\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{15}=\tfrac{59}{60}<1,$$

што не е можно. Значи, $a=1$ или $a=2$ и $d=1$ или $d=2$.

Можни се четири случаи.

Случај 1. $a=1$ и $d=2$. Равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот

$$bc-2b-2c=1$$
$$b(c-2)-2(c-2)=5$$
$$(b-2)(c-2)=5$$

Бројот 5 е прост и $b<c$, па за последната равенка постои единствена можност $b-2=1$ и $c-2=5$, т.е. $b=3$ и $c=7$. Значи, $a=1, b=3, c=7$ и $d=2$ е едно решение.

Случај 2. $a=1$ и $d=1$. Равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот

$$bc=bc+1+b+c+b+c$$
$$2b+2c+1=0.$$

Не постојат природни броеви за кои е исполнето последното равенство.

Случај 3. $a=2$ и $d=2$. Равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот

$$4bc=2+b+c+2b+2c+bc$$
$$3(bc-b-c)=2.$$

Бидејќи $3\nmid 2$ во овој случај немаме решение.

Случај 4. $a=2$ и $d=1$. Тогаш равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот

$$2bc=2+b+c+2b+bc+2c$$
$$bc-3b-3c+9=11$$
$$(b-3)(c-3)=11.$$

Бидејќи 11 е прост број и $b<c$ добиваме $b-3=1$ и $c-3=11$, т.е. $b=4$ и $c=14$. Во овој случај решение е $a=2, b=4, c=14$ и $d=1$.

Значи, решенија се $a=1, b=3, c=7$ и $d=2$ и $a=2, b=4, c=14$ и $d=1$.

58. Докажи, дека постојат бесконечно многу непарни броеви $k>0$, за кои сите броеви од облик $2^{2^n}+k,\ n=1,2,...$ се сложени.

Решение. Такви се, на пример, сите броеви $k=6t-1$, $t=1,2,...$. Навистина, за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот 2^{2^n} при делење со 3 дава остаток 1, па затоа бројот $2^{2^n}+6t-1=2^{2^n}+k$ ќе биде делив со 3 и бидејќи е поголем од 3, тој е сложен број.

59. Докажи, дека за секој $k\geq 3$ важи неравенството $p_{k+1}+p_{k+2}\leq p_1p_2...p_k$, каде p_k е $k-$тиот по ред прост број.

Решение. Од $k\geq 3$ следува $p_1p_2...p_k>p_1p_2p_3=2\cdot 3\cdot 5>6$, па затоа од задача 3.2 следува дека $p_1p_2\ldots\ldots p_k=a+b$, каде $a,b>1$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, што значи дека a и b се заемно прости со нивниот збир $p_1p_2\ldots\ldots p_k$. Броевите a и b имаат различни прости делители. Нека $p\,|\,a, q\,|\,b$ и $p<q$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(p_1,p_2,...,p_k)=1$, важи $p\geq p_{k+1}$ и како $q>p$ имаме $q>p_{k+2}$. Сега од $p+q\leq a+b$ следува $p_{k+1}+p_{k+2}\leq p_1p_2...p_k$.

60. Докажи дека за секој прост број p постојат цели броеви x и y такви што x^2+y^2+1 е делив со p.

Решение. Ако $p=2$, тогаш $p=1^2+0^2+1$. Нека сега простиот број p е непарен. Да ги разгледаме следните $\frac{p+1}{2}$ броеви $0,1,2,...,\frac{p-1}{2}$. Квадратите на секои два од овие броеви при делење со p даваат различни остатоци. Имено, ако важи $x_1^2=k_1p+r$ и $x_2^2=k_2p+r$, тогаш $x_1^2-x_2^2=(k_1-k_2)p$, т.е. $(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ е делив со p, што не е можно бидејќи $|x_1-x_2|<p$ и $x_1+x_2<p$. Според тоа, различните $\frac{p+1}{2}$ броеви $0^2,1^2,\ 2^2,...,(\frac{p-1}{2})^2$ при делење со p исто така даваат различни $\frac{p+1}{2}$ остатоци. Од друга страна, при делење со p можат да се добијат само p различни остатоци, па затоа меѓу $p+1$ броеви

$$0^2,1^2,2^2,...,(\tfrac{p-1}{2})^2,-1-0^2,-1-1^2,-1-2^2,...,-1-(\tfrac{p-1}{2})^2$$

постојат барем два кои при делење со p даваат ист остаток. Притоа овие два броја се од облик x^2 и $-y^2-1$. Но, тоа значи дека

$$x^2=kp+r \text{ и } -y^2-1=tp+r\text{, т.е. } x^2+y^2+1=(k-t)p,$$

што значи $p\,|\,x^2+y^2+1$.

61. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k+3$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Решение. Броевите 3, 7 и 11 се прости и се од видот $4k+3$. Нека претпоставиме дека постојата конечно многу прости броеви од видот $4k+3$ и нека $p_1,p_2,...,p_m$ се сите такви броеви. Бројот $n=4p_1p_2...p_m-1$ не се дели со ниту еден од броевите $p_1,p_2,...,p_m$. Според тоа, ако го разложиме n на прости множители, сите тие треба да бидат од видот $4k+1$. Но, производ на броеви кои даваат остаток 1 при делење со 4 повторно е број кој дава остаток 1 при делење со 4, а додека при делење на n со 4 се добива остаток 3. Од добиената противречност следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k+3$.

62. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ е квадрат на прост број.

Решение. Нека $\frac{a^2(b-a)}{b+a}=p^2$, $a,b\in\mathbb{N}$ и p е прост број. Имаме $b=\frac{a(a^2+p^2)}{a^2-p^2}\in\mathbb{N}$.

Ќе разгледаме два случаи:

1) Ако $\text{NZD}(a,p)=1$, тогаш $\text{NZD}(a^2+p^2,a^2-p^2)\,|\,2$ и $\text{NZD}(a^2-p^2,a)=1$ од каде следува дека задачата нема решение бидејќи $a^2-p^2>2$, па b не е природен број.

2) Ако $\text{NZD}(a, p) \neq 1$, тогаш $a = kp, k \in \mathbb{N}$, па затоа
$$b = \frac{kp \cdot p^2(k^2+1)}{p^2(k^2-1)} = \frac{kp(k^2+1)}{k^2-1}.$$
Од $b \in \mathbb{N}$ следува $\text{NZD}(k^2+1, k^2-1) \mid 2$ и $\text{NZD}(k^2-1, k) = 1$, што значи дека $(k^2-1) \mid 2p$, односно $k^2 - 1 \in \{1, 2, p, 2p\}$.

- Ако $k^2 - 1 = 1$, тогаш $k^2 = 2$, што не е можно.
- Ако $k^2 - 1 = 2$, тогаш $k^2 = 3$, што не е можно.
- Ако $k^2 - 1 = p$, тогаш $(k-1)(k+1) = p$, од каде добиваме $k = 2, p = 3$, па затоа $a = kp = 6, b = 10$.
- Ако $k^2 - 1 = 2p$, тогаш $(k-1)(k+1) = 2p$. Бидејќи $k-1$ и $k+1$ се со иста парност и бидејќи десната страна е делива со 2, заклучуваме дека $k-1$ и $k+1$ се последователни парни броеви, па затоа еден од нив е делив со 4, а другиот со 2. Според тоа, левата страна е делива со 8, а десната не се дели со 8, што значи дека во овој случај задачата нема решение.

Конечно, единствено решение е $(a, b) = (6, 10)$.

63. Нека a, b, c, d се природни броеви, такви што $a > b > c > d$ и
$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c). \qquad (1)$$
Докажи, дека $ab + cd$ не е прост број.

Решение. Равенството (1) е еквивалентно на равенството
$$a^2 - ac + b^2 = b^2 + bd + d^2.$$
Според тоа,
$$\begin{aligned}(ab+cd)(ad+bc) &= ac(b^2+bd+d^2) + bd(a^2-ac+c^2) \\ &= (ac+bd)(a^2-ac+c^2).\end{aligned} \qquad (2)$$
Нека претпоставиме дека $ab + cd$ е прост број. Од $a > b > c > d$ следува
$$ab + cd > ac + bd > ad + bc$$
и како $ab + cd$ е прост број следува $\text{NZD}(ab + cd, ac + bd) = 1$. Сега, од (2) следува $ac + bd \mid ad + bc$, што противречи на $ac + bd > ad + bc$. Конечно, од добиената противречност следува дека $ab + cd$ не е прост број.

64. Определи ги сите природни броеви кои имаат точно шест делители, чиј збир е 3500.

Решение. Ако природниот број n има точно шест делители, тогаш $n = p^5$ или $n = q^2 r$ каде што p, q и r се прости броеви.

(i) Нека $n = p^5$. Тогаш $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$, односно
$$p(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 3499.$$
Бидејќи 3499 е прост број, следува дека овој случај не е можен.

(ii) Нека $n=q^2r$. Тогаш $1+q+q^2+r+rq+r^2q=3500$, односно

$$(1+q+q^2)(1+r)=3500=2^2\cdot 5^3\cdot 7.$$

Бројот $1+q+q^2=1+q(1+q)$ е непарен и не е делив со 5 ($1+q+q^2$ може да дава остатоци 1, 2 или 3 при делење со 5). Значи $1+q+q^2=7$. Оттука добиваме $q(q+1)=6=2\cdot 3$, односно $q=2$. Понатаму, добиваме $r=499$ и, конечно, $n=1996$.

65. Да се определат сите парови од прости броеви (p,q), каде што $p<q$, за кои важи неравенството $2^{p^2}+2^{q^2}<2^{100}$.

Решение. Бидејќи $2^{99}+2^{99}=2^{100}$, ќе треба да е $p^2<99$ и $q^2<99$, т.е. $p<10$ и $q<10$. Бидејќи p и q се прости броеви, постојат само следниве можности: $p\in\{2,3,5,7\}$ и $q\in\{2,3,5,7\}$.

Бараните парови броеви (p,q), при што $p<q$, се следниве:

$$(2,3),(2,7),(3,5),(3,7) \text{ и } (5,7).$$

5. КОНГРУЕНЦИИ. МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. За кои природни броеви n вредноста на изразот $2^n+3^n+4^n$ е точен квадрат?

Решение. Најпрво ќе ги докажеме следниве тврдења:

Лема 1. Ако природниот број m е точен квадрат, тогаш $m\equiv 0(\text{mod}\,3)$ или $m\equiv 1(\text{mod}\,3)$.

Доказ. Нека $m=n^2$. Ако $n=3k$ за некој $k\in\mathbb{N}$, тогаш $n^2=9k^2$ па $m\equiv 0(\text{mod}\,3)$. За $n=3k+1$ имаме $n^2=(3k+1)^2=3k^2+6k+1$ па $m\equiv 1(\text{mod}\,3)$, и за $n=3k+2$ имаме $n^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$ па и во овој случај имаме $m\equiv 1(\text{mod}\,3)$. ■

Лема 2. Ако природниот број m е точен квадрат, тогаш $m\equiv 0(\text{mod}\,8)$ или $m\equiv 1(\text{mod}\,8)$ или $m\equiv 4(\text{mod}\,8)$.

Доказ. Нека $m=n^2$. Ако:

- $n=4k$, тогаш $n^2=16k^2$, па $m\equiv 0(\text{mod}\,8)$;
- $n=4k+1$, $n^2=16k^2+8k+1 \Rightarrow m\equiv 1(\text{mod}\,8)$;
- $n=4k+2$, $n^2=16k^2+16k+4 \Rightarrow m\equiv 4(\text{mod}\,8)$;
- $n=4k+3$, $n^2=16k^2+24k+9=8(2k^2+3k+1)+1 \Rightarrow m\equiv 1(\text{mod}\,8)$. ■

Сега да се вратиме на нашата задача. За $n=1$ имаме $2^1+3^1+4^1=9=3^2$. Нека $n>1$. Прво да претпоставиме дека $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$2^n+3^n+4^n\equiv 2^{2k}+3^{2k}+4^{2k}\equiv (2^2)^k+3^{2k}+4^{2k}\equiv 1+0+1\equiv 2(\bmod 3).$$

Значи ако n е парен број, од лема 1 добиваме дека $2^n+3^n+4^n$ не е точен квадрат. Нека n е непарен број. Тогаш n може да биде само во еден од облиците $n=4k+1$, $n=4k+3$. Во првиот случај, $k>0$ заради $n>1$, па добиваме

$$2^{4k+1}+3^{4k+1}+4^{4k+1}\equiv 0+(3^4)^k 3+0\equiv 1^k\cdot 3\equiv 3(\bmod 8),$$

па од ема 2 следува дека n не е точен квадрат. Во вториот случај

$$2^{4k+3}+3^{4k+3}+4^{4k+3}\equiv 0+(3^4)^k\cdot 3^3+0\equiv 3^3\equiv 3(\bmod 8).$$

и во овој случај од лема 2 следува дека n не е точен квадрат.

2. Докажи дека за секои прости броеви p и q, $p,q>3$, важи или $p\equiv q\ (\bmod 6)$ или $p+q\equiv 0\ (\bmod 6)$.

Решение. Како што знаеме, секој прост број поголем од 3 е во облик $6k+1$ или $6t-1$. Ќе разгледаме три случаи:

а) ако $p=6k+1$ и $q=6t+1$, тогаш $p\equiv q\ (\bmod 6)$;

б) ако $p=6k-1$ и $q=6t-1$, тогаш $p\equiv q\ (\bmod 6)$; и

в) ако $p=6k+1$и $q=6t-1$, тогаш $p\equiv 1\ (\bmod 6)$ и $q\equiv -1\ (\bmod 6)$, па затоа $p+q\equiv 1+(-1)\ (\bmod 6)$, т.е. $p+q\equiv 0\ (\bmod 6)$.

3. а) Докажи дека $10\,|\,3^{1988}-1$.

б) Најди го остатокот од делењето на бројот 4^{56} со 9.

Решение. а) Од $3^4=81$ следува $3^4\equiv 1\ (\bmod 10)$. Сега, $(3^4)^{497}\equiv 1^{497}\ (\bmod 10)$, т.е. $3^{1998}\equiv 1\ (\bmod 10)$, што значи $10\,|\,3^{1988}-1$.

б) Ќе го побараме оној степен на бројот 4 кој е конгруентен со 1 по модул 9. Последователно имаме $4\equiv 4\ (\bmod 9)$, $4^2\equiv 7\ (\bmod 9)$, $4^3\equiv 1\ (\bmod 9)$. Бидејќи $56=18\cdot 3+2$, последната конгруенција ја степенуваме на 18 и добиваме $4^{54}\equiv 1\ (\bmod 9)$. Понатаму, ако ги помножиме конгруенциите $4^2\equiv 7\ (\bmod 9)$ и $4^{54}\equiv 1\ (\bmod 9)$ добиваме $4^{54}\cdot 4^2\equiv 1\cdot 7\ (\bmod 9)$, т.е. $4^{56}\equiv 1\ (\bmod 9)$.

Значи, остатокот од делењето на бројот 4^{56} со 9 е 7.

4. Определи ги последните три цифри на бројот 19^{8^7}.

Решение. Со конгруенции по модул 1000 добиваме:

$$19\equiv 19\ (\bmod 1000)$$

$$19^2\equiv 361\ (\bmod 1000)$$

$$19^4\equiv 321\ (\bmod 1000)$$

$$19^5\equiv 99\ (\bmod 1000)$$

$$19^{10}\equiv 801\ (\bmod 1000)$$

$$19^{20} \equiv 601 \,(\bmod 1000)$$
$$19^{40} \equiv 201 \,(\bmod 1000)$$
$$19^{50} \equiv 1 \,(\bmod 1000)$$

Бидејќи $8^7 = 2097152 = 50 \cdot 41943 + 2$, понатаму имаме:

$$19^{50 \cdot 41943} \equiv 1 \,(\bmod 1000)$$
$$19^{50 \cdot 41943+2} \equiv 361 \,(\bmod 1000)$$
$$19^{8^7} \equiv 361 \,(\bmod 1000)$$

Значи, 19^{8^7} завршува на 361.

5. Докажи дека $6^{1986} + 7^{1987}$ е делив со 11.

Решение. Имаме:

$$6^1 \equiv 6 \text{ (mod 11)} \qquad 7^1 \equiv 7 \text{ (mod 11)}$$
$$6^2 \equiv 3 \text{ (mod 11)} \qquad 7^2 \equiv 5 \text{ (mod 11)}$$
$$6^4 \equiv 9 \text{ (mod 11)} \qquad 7^4 \equiv 3 \text{ (mod 11)}$$
$$6^8 \equiv 4 \text{ (mod 11)} \qquad 7^8 \equiv 9 \text{ (mod 11)}$$
$$6^{10} \equiv 1 \text{ (mod 11)} \qquad 7^{10} \equiv 1 \text{ (mod 11)}$$

па затоа

$$6^{10k} \equiv 1 \text{ (mod 11)} \qquad 7^{10k} \equiv 1 \text{ (mod 11)}$$

Бидејќи $1986 = 198 \cdot 10 + 6$, односно $1986 = 198 \cdot 10 + 7$, ќе имаме

$$6^{1980} \equiv 1 \text{ (mod 11)} \qquad 7^{1980} \equiv 1 \text{ (mod 11)}$$
$$6^6 \equiv 5 \text{ (mod 11)} \qquad 7^6 \equiv 6 \text{ (mod 11)}$$

па затоа

$$6^{1986} \equiv 5 \text{ (mod 11)} \qquad 7^{1987} \equiv 6 \text{ (mod 11)}$$

Според тоа,

$$6^{1986} + 7^{1987} \equiv 0 \text{ (mod 11)}.$$

6. Докажи дека бројот $5^{1990} + 3^{1991}$ е делив со 7.

Решение. Задачата ќе ја решиме со конгруенции.

$$5 \equiv 5 \text{ (mod 7)} \qquad 3 \equiv 3 \text{ (mod 7)}$$
$$5^2 \equiv 5 \text{ (mod 7)} \qquad 3^2 \equiv 2 \text{ (mod 7)}$$
$$5^3 \equiv 6 \text{ (mod 7)} \qquad 3^2 \equiv 6 \text{ (mod 7)}$$
$$5^4 \equiv 2 \text{ (mod 7)} \qquad 3^4 \equiv 4 \text{ (mod 7)}$$
$$5^5 \equiv 3 \text{ (mod 7)} \qquad 3^5 \equiv 5 \text{ (mod 7)}$$
$$5^6 \equiv 1 \text{ (mod 7)} \qquad 3^6 \equiv 1 \text{ (mod 7)}$$

и како $1990 = 6\cdot 331 + 4$ и $1991 = 6\cdot 331 + 5$, а

$$(5^6)^{331} \equiv 1 \text{ (mod 7)},\ (3^6)^{331} \equiv 1 \text{ (mod 7)},\ 5^4 \equiv 2 \text{ (mod 7)},\ 3^5 \equiv 5 \text{ (mod 7)}$$

добиваме $5^{6\cdot 331+4} \equiv 1\cdot 2 \text{ (mod 7)}$, $3^{6\cdot 331+5} \equiv 1\cdot 5 \text{ (mod 7)}$, т.е.

$$5^{1990} \equiv 2 \text{ (mod 7)} \text{ и } 3^{1991} \equiv 5 \text{ (mod 7)}$$

и затоа $5^{1990} + 3^{1991} \equiv 2 + 5 \equiv 0 \text{ (mod 7)}$, од каде што следува дека $5^{1990} + 3^{1991}$ е делив со 7.

7. Докажи дека $3^{1995} + 4^{1995}$ е делив со 13.

Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме со конгруенции:

$$3^1 \equiv 3 \pmod{13} \qquad 4^1 \equiv 4 \pmod{13}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{13} \qquad 4^2 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \qquad 4^3 \equiv -1 \pmod{13}$$

Бидејќи $1995 = 3\cdot 665$, следува:

$$3^{1995} + 4^{1995} \equiv (3^3)^{665} + (4^3)^{665} \equiv 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{13}.$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned} 3^{1995} + 4^{1995} &= (3^3)^{665} + (4^3)^{665} = 27^{665} + 64^{665} \\ &= (27+64)(27^{664} - 27^{663}\cdot 64 + \ldots + 27\cdot 64^{663} - 64^{664}) \\ &= 91\cdot A = 13\cdot 7A \end{aligned}$$

од каде што следува дека $13 \mid (3^{1995} + 4^{1995})$.

8. Најди го остатокот при делењето на бројот $11^{100} + 13^{200} + 17^{300}$ со бројот 7.

Решение. Од:

$$11 \equiv 4 \text{(mod 7)}, \qquad 11^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \text{ (mod 7)},$$

$$11^{10} \equiv (11^2)^5 \equiv 2^5 \equiv 4 \text{ (mod 7)} \text{ и } \qquad 11^{20} \equiv (11^{10})^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \text{ (mod 7)},$$

следува

$$11^{100} \equiv (11^{20})^5 \equiv 2^5 \equiv 4 \text{ (mod 7)} \tag{1}$$

Аналогно $13 \equiv -1 \text{(mod 7)}$, $13^2 \equiv 1 \text{ (mod 7)}$, па затоа

$$13^{200} \equiv (13^2)^{100} \equiv 1 \text{ (mod 7)}. \tag{2}$$

Исто така

$$17 \equiv 3 \text{ (mod 7)},\ 17^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \text{ (mod 7)}.$$

Значи $17^2 \equiv 11^2 \text{ (mod 7)}$, па и $17^{100} \equiv 11^{100} \equiv 4 \text{ (mod 7)}$. Според тоа

$$17^{300} \equiv (17^{100})^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \text{ (mod 7)}. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) добиваме дека

$$11^{100} + 13^{200} + 17^{300} \equiv 4 + 1 + 1 \equiv 6 \text{ (mod 7)}$$

па бараниот остаток е 6.

9. Еден деветцифрен број е делив со 37 Записот на овој број го разделуваме на два дела и им ги заменуваме местата. Дали вака добиениот деветцифрен број е делив со 37?

Решение. Нека $\overline{xy}$ е деветцифрениот број и притоа x и y се два дела на кои е поделен бројот. Нека y е $n-$цифрен број. Тогаш x е $(9-n)-$цифрен број. Имаме

$$\overline{xy} = 10^n x + y = 37k\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Оттука $y = 37k - 10^n x$. За $\overline{yx}$ имаме

$$\overline{yx} = 10^{9-n} y + x = 10^{9-n}(37k - 10^n x) + x = 37 \cdot 10^{9-n} k - x(10^9 - 1)\,.$$

Заради $27 \cdot 37 = 999$ следува $10^3 \equiv 1(\text{mod}\,37)$, а оттука $10^9 \equiv 1(\text{mod}\,37)$. Значи $10^9 - 1$ е делив со 37. Според тоа постои $p \in \mathbb{N}$ така што $10^9 - 1 = 37p$. Конечно $\overline{yx} = 37(10^{9-n}k - xp)$, па $\overline{yx}$ е делив со 37.

Забележете дека нема разлика ако првата цифра на x е 0.

10. Докажи, дека за секој природен број n, еден од броевите $3^{3n} + 2^{3n}$ и $3^{3n} - 2^{3n}$ е делив со 35.

Решение. Ако $n = 2k + 1$, каде $k \in \mathbb{N}$, тогаш од конгруенциите

$$3^{3n} \equiv (-8)^{2k+1}(\text{mod}\,35) \text{ и } 2^{3n} \equiv 8^{2k+1}(\text{mod}\,35)$$

добиваме

$$3^{3n} + 2^{3n} \equiv (-8)^{2k+1} + 8^{2k+1} \equiv 0(\text{mod}\,35)\,.$$

Ако е $n = 2k$, каде $k \in \mathbb{N}$, тогаш од конгруенциите

$$3^{3n} \equiv 729^k \equiv 29^k(\text{mod}\,35) \text{ и } 2^{3n} \equiv 64^k \equiv 29^k(\text{mod}\,35)$$

добиваме

$$3^{3n} - 2^{3n} \equiv 29^k - 29^k \equiv 0(\text{mod}\,35)\,.$$

11. Докажи, дека $5 \,|\, (7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}})$.

Решение. Бидејќи $7^4 \equiv 1(\text{mod}\,10)$ имаме $7^{4k} \equiv 1(\text{mod}\,10)$. Но, $4 \,|\, 1980^{1990}$, па затоа $7^{1980^{1990}} \equiv 1(\text{mod}\,10)$. Слично, важи $3^4 \equiv 1(\text{mod}\,10)$ и $4 \,|\, 80^{90}$, па затоа $3^{80^{90}} \equiv 1(\text{mod}\,10)$. Според тоа, $7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}} \equiv 0(\text{mod}\,10)$.

Според тоа, $10 \,|\, (7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}})$, па затоа $5 \,|\, (7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}})$.

12. Определи го остатокот од делењето на бројот $(12371^{56} + 34)^{28}$ со 111.

Решение. Имаме

$12371 \equiv 50(\text{mod}\,111)$;	$12371^2 \equiv 58(\text{mod}\,111)$	$12371^2 \equiv 58(\text{mod}\,111)$
$12371^3 \equiv 14(\text{mod}\,111)$;	$12371^4 \equiv 34(\text{mod}\,111)$	$12371^5 \equiv 35(\text{mod}\,111)$;
$12371^{10} \equiv 4(\text{mod}\,111)$;	$12371^{40} \equiv 34(\text{mod}\,111)$;	$12371^{50} \equiv 25(\text{mod}\,111)$;

$12371^{55} \equiv 98 \pmod{111}$; $\quad 12371^{56} \equiv 16 \pmod{111}$.

Тогаш

$12371^{56} + 34 \equiv 50 \pmod{111}$; $\quad (12371^{56} + 34)^5 \equiv 35 \pmod{111}$;

$(12371^{56} + 34)^{10} \equiv 4 \pmod{111}$; $\quad (12371^{56} + 34)^{20} \equiv 16 \pmod{111}$;

$(12371^{56} + 34)^{25} \equiv 5 \pmod{111}$; $\quad (12371^{56} + 34)^{28} \equiv 70 \pmod{111}$.

Значи, бараниот остаток е 70.

13. Докажи дека бројот $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1986 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985$ е делив со 1987.

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1986 &\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 + (-1985)(-1983)\ldots(-3)(-1) \\ &\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 + (-1)^{993} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 \\ &\equiv (1 + (-1)) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 \equiv 0 \pmod{1987} \end{aligned}$$

па следува дека бројот $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1986 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985$ е делив со 1987.

Втор начин. Имаме

$2 = 1987 - 1985$, $4 = 1987 - 1983$, $6 = 1987 - 1981, \ldots, 1984 = 1987 - 3, 1986 = 1987 - 1$.

Оттука добиваме

$$2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1986 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 = (1987 - 1985)(1987 - 1983)\ldots(1987 - 1) + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985$$

Ако го извршиме множењето на броевите од заградите во сите собироци ќе има множител 1987 освен во $(-1)^{993} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1985 = -1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1985$. Значи дадениот број е од обликот $1987k - 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1985 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1985 = 1987k$, за k природен број, па е делив со 1987.

Трет начин. Од една страна имаме

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1986 &\equiv 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 994 \cdot (-991) \cdot (-989) \cdot \ldots \cdot (-3) \cdot (-1) \\ &\equiv (-1)^{496} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 992 \cdot 994 \equiv 992! \cdot 994 \pmod{1987} \end{aligned}$$

а од друга

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 &\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 993 \cdot (-992) \cdot (-990) \cdot \ldots \cdot (-4) \cdot (-2) \\ &\equiv (-1)^{496} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 992 \cdot 993 \equiv 992! \cdot 993 \pmod{1987} \end{aligned}$$

Оттука

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1986 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1985 \equiv 994 \cdot 992! + 993 \cdot 992! \equiv 1987 \cdot 992! \equiv 0 \pmod{1987}$$

па дадениот број е делив со 1987.

14. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ако $m \mid (ab^n + cn + d)$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш $m \mid c^2$. Докажи!

Решение. Имаме

$$ab + c + d \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab^2 + 2c + d \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab^3 + 3c + d \equiv 0 \pmod{m}$$

па затоа

$$ab(b-1) + c \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab^2(b-1)+c\equiv 0(\bmod m)$$

од каде следува

$$ab(b-1)^2\equiv 0(\bmod m)\,.$$

Според тоа,

$$(b-1)c\equiv 0(\bmod m)$$

$$abc(b-1)+c^2\equiv 0(\bmod m)$$

и затоа $m\,|\,c^2$. Да забележиме дека во општ случај не важи $m\,|\,c$. На пример, за секој n бројот 3^n+2n+3 е делив со 4, но 2 не е делив со 4.

15. Докажи, дека $41|(1+3+3^2+...+3^{1991})$.

Решение. Да забележиме дека

$$1+3+3^2+...+3^{1991}=(1+3+3^2+...+3^7)(1-3^8+3^{12}-3^{16}+...+3^{1984})\,. \quad (1)$$

Од друга страна имаме

$$1\equiv 1(\bmod 41)\,,\; 3\equiv 3(\bmod 41)\,,\; 3^2\equiv 9(\bmod 41)\,,\; 3^3\equiv 27(\bmod 41)\,,$$

$$3^4\equiv -1(\bmod 41)\,,\; 3^5\equiv -3(\bmod 41)\,,\; 3^6\equiv -9(\bmod 41) \text{ и } 3^7\equiv -27(\bmod 41)\,.$$

Значи,

$$1+3+3^2+...+3^7\equiv 0(\bmod 41)\,. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $41|(1+3+3^2+...+3^{1991})$.

16. Докажи дека бројот $a^2+b^2+c^2+1$, каде a,b и c се природни броеви, не е делив со 8.

Решение. Ако $x\in\mathbb{N}$, тогаш $x=4k,\,4k+1,\,4k+2$ или $4k+3$. Затоа

$$x^2\equiv 0{,}1 \text{ или } 4(\bmod 8)\,.$$

Сега лесно се проверува дека за $i,j,k\in\{0,1,4\}$ важи $i+j+k\not\equiv 7(\bmod 8)$, па затоа за секои $a,b,c\in\mathbb{N}$ бројот $a^2+b^2+c^2+1$ не е делив со 8.

17. Нека $a,b\in\mathbb{N}$, $b>2$. Докажи, дека 2^a+1 не е делив со 2^b-1.

Решение. Ставаме $2^b-1=m$. Јасно, $2^b\equiv 1(\bmod m)$. Нека претпоставиме дека $m\,|\,(2^a+1)$, т.е. дека $2^a+1\equiv 0(\bmod m)$. Од теоремата за делење со остаток имаме $a=kb+c$, $0\le c<b$, па затоа $2^a=2^{kb}2^c\equiv 2^c(\bmod m)$, од што следува дека $2^c+1\equiv 0(\bmod m)$, т.е. $m\,|\,(2^c+1)$, што не е можно бидејќи од $b>2$ и $0\le c<b$ следува $0<2^c+1<2^b-1$.

18. Нека $a_i,\, i=1,2,...,1990$ се природни броеви за кои важи

$$a_1^2+a_2^2+...+a_{1989}^2=a_{1990}^2\,. \quad (1)$$

Докажи, дека барем два од овие броеви се парни.

Решение. Нека претпоставиме дека сите броеви $a_i, i=1,2,...,1990$ се непарни. За секој непарен природен број n важи $n^2 \equiv 1(\mod 8)$, па затоа

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1989}^2 \equiv 1989 \equiv 5(\mod 8) \text{ и } a_{1990}^2 \equiv 1(\mod 8),$$

што е противречи на (1).

Нека претпоставиме дека точно еден од броевите $a_i, i=1,2,...,1990$ е парен. Ако тоа е бројот a_{1990}, тогаш броевите $a_i, i=1,2,...,1989$ се непарни и повторно добиваме противречност. Ако тоа е еден од броевите a_i, $i=1,2,...,1989$, тогаш левата страна на (1) е парен број, а десната страна е непарен број, што не е можно.

19. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A. Најди го збирот на цифрите на бројот B. (Сите броеви се запишани во декаден запис).

Решение. Нека C е збир на цифрите на бројот B. Од $4444^{4444} < 10000^{4444}$, следува дека збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} не е поголем од $4 \cdot 4444 < 20000$. Затоа $A < 9 \cdot 20000 = 180000$. Оттука непосредно следува дека $B \leq 9 \cdot 6 = 54$ и $C \leq 13$.

Од $4444 \equiv -2(\mod 9)$ и

$$(-2)^{4444} = 2^{3 \cdot 1481+1} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7(\mod 9)$$

следува $4444 \equiv 7(\mod 9)$. При делење со 9 остатоците на секој природен број и на збирот на неговите цифри се еднакви, па затоа $4444 \equiv A \equiv B \equiv C(\mod 9)$, т.е. $C \equiv 7(\mod 9)$.

Природен број C ги задоволува условите $C \leq 13$ и $C \equiv 7(\mod 9)$, па затоа $C = 7$.

20. Определи ги сите природни броеви k кои се помали од 50 и се такви што $2 \cdot 3^{6n} + k \cdot 2^{3n+1} - 1$ е делив со 7 за секој природен број n.

Решение. Нека за произволен $k \in \mathbb{N}$, бројот $A = 2 \cdot 3^{6n} + k \cdot 2^{3n+1} - 1$ е деллив со 7 за секој природен број $n \in \mathbb{N}$, т.е. нека

$$2 \cdot 3^{6n} + k \cdot 2^{3n+1} - 1 \equiv 0(\mod 7). \tag{*}$$

Од $3^6 \equiv 1(\mod 7)$ следува $3^{6n} \equiv 1(\mod 7)$, т.е. $2 \cdot 3^{6n} \equiv 2(\mod 7)$, а од $2^3 \equiv 1(\mod 7)$ следува $2^{3n} \equiv 1(\mod 7)$, $2^{3n+1} \equiv 2(\mod 7)$, $k2^{3n+1} \equiv 2k(\mod 7)$, па имајќи ја предвид релацијата (*) добиваме:

$$2 + 2k - 1 \equiv 2 \cdot 3^{6n} + k \cdot 2^{3n+1} - 1 \equiv 0(\mod 7)$$

Оттука следува дека $2k+1$ е деллив со 7, т.е. $2k+1 = 7p$, $k = \frac{7p-1}{2}$. Заради ограничувањето $k < 50$, добиваме $k \in \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$.

21. Определи ги сите цели броеви n за кои $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ е делив со 199.

Решение. Да забележиме дека 199 е прост број. Од друга страна

$$(n-1)(n^5+n^4+n^3+n^2+n+1)=n^6-1=(n^3-1)(n^3+1)$$
$$=(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1).$$

Бидејќи 199 е прост број $199\,|\,n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ ако и само ако 199 е делител на еден од множителите $n+1, n^2-n+1, n^2+n+1$.

Случај 1. 199 е делител на $n+1$ ако и само ако $n\equiv 198 (\bmod 199)$.

Случај 2. Ќе ги определиме сите природни броеви n такви што

$$n^2-n+1\equiv 0 (\bmod 199).$$

Да забележиме дека

$$n^2-n+1\equiv n^2-200n+1\equiv (n-100)^2-100^2+1 (\bmod 199)$$

Од друга страна

$$100^2-1=200\cdot 50-1=199\cdot 50+49\equiv 49 (\bmod 199),$$

Па $n^2-n+1\equiv 0 (\bmod 199)$ е еквивалентна со $(n-100)^2\equiv 49 (\bmod 199)$. Но, 199 е прост број, па $(n-100)^2\equiv 49 (\bmod 199)$ има точно две решенија

$$n-100\equiv \pm 7 (\bmod 199), \text{ т.е. } n\equiv 107 (\bmod 199) \text{ и } n\equiv 93 (\bmod 199).$$

Случај 3. Ќе ги определиме целите броеви такви што

$$n^2+n+1\equiv 0 (\bmod 199). \tag{1}$$

Да забележиме дека

$$n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1,$$

па според тоа (1) е еквивалентно со

$$(n+1)^2-(n+1)+1\equiv 0 (\bmod 199).$$

Според случајот 2 имаме

$$n+1\equiv 107 (\bmod 199), \text{ т.е. } n\equiv 108 (\bmod 199)$$
$$n+1\equiv 93 (\bmod 199), \text{ т.е. } n\equiv 92 (\bmod 199).$$

Конечно $n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ е делив со 199 ако и само ако n е конгруентен со 92, 93, 106, 107 или 198 по модул 199.

22. Нека p и q се непарни прости броеви за кои $p+q+7pq$ е точен квадрат.

а) Докажи дека барем еден од броевите p и q е од облик $4k+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$.

б) Дали е можно и p и q да имаат ист остаток при делење со 4?

Решение. а) Нека $p=4k-1$ и $q=4l-1$. Тогаш

$$p+q+7pq\equiv p+q-pq\equiv 8(k+l)-16kl-3\equiv 5 (\bmod 8).$$

Но, квадрат на цел број е конгруентен само со некој од броевите 0, 1 и 4 по модул 8, па затоа барем еден од броевите p и q е од облик $4k+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$.

б) Имаме, $13\equiv 61\equiv 1 (\bmod 4)$, 13 и 61 се прости и $13+61+7\cdot 13\cdot 61=75^2$.

23. Нека $p>2$ е прост број. Докажи, дека секој делител на бројот 2^p-1 е од облик $2kp+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека q е прост делител на бројот 2^p-1, т.е. $2^p\equiv 1(\bmod q)$ и нека d е најмалиот природен број, таков да $2^d\equiv 1(\bmod q)$. Тогаш, $d\mid p$, па $d=1$ или $d=p$. Бидејќи $2^d\equiv 1(\bmod q)$, важи $d=p$. Од $2^{q-1}\equiv 1(\bmod q)$ следи дека $p=d\mid q-1$. Бидејќи q е непарен, $q-1$ е делив со 2. Следи дека $q=2kp+1$, за некој природен број k. Бидејќи производ на броеви од облик $2kp+1$, $k\in\mathbb{N}$ е број од истиот облик, а секој делител на еден природен број е производ од неговите прости делители, се добива тврдењето на задачата.

24. Докажи дека ниту еден број од облик $8k+3$ или $8k+5$, $k\in\mathbb{Z}$ не може да се претстави во облик x^2-2y^2, каде $x,y\in\mathbb{Z}$.

Решение. Ако за целите броеви x и y бројот x^2-2y^2 е непарен, тогаш x мора да е непарен и затоа $x^2\equiv 1(\bmod 8)$. Ако бројот y е парен, тогаш $2y^2\equiv 0(\bmod 8)$, а ако бројот y е непарен, тогаш $2y^2\equiv 2(\bmod 8)$. Значи, $x^2-2y^2\equiv \pm 1(\bmod 8)$, од што следува тврдењето на задачата.

25. Определи ги сите прости броеви p за кои 2^p+p^2 исто така е прост број.

Решение. За $p=2$ имаме $2^p+p^2=8$ и тоа не е прост број. За $p=3$ добиваме $2^p+p^2=17$ и тоа е прост број. Нека $p>3$ е прост број. Тогаш $p=2k+1=3m\pm 1$ па затоа $2^p=2^{2k+1}=2\cdot 4^k\equiv 2\cdot 1^k=2(\bmod 3)$ и $p^2=(3m\pm 1)^2\equiv 1(\bmod 3)$, што значи дека $2^p+p^2\equiv 2+1\equiv 0(\bmod 3)$, па не е прост број. Значи, единствено решение на задачата е $p=3$.

26. Докажи, дека за секој природен број n барем еден од броевите $A=2n-1,$ $B=5n-1,$ $C=13n-1$ не е точен квадрат на природен број.

Решение. Ќе користиме дека точен квадрат на природен број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.

Ако $n\equiv 0(\bmod 4)$ или $n\equiv 2(\bmod 4)$, тогаш $A\equiv 3(\bmod 4)$, па затоа A не е точен квадрат.

Ако $n\equiv 3(\bmod 4)$, тогаш $B\equiv 2(\bmod 4)$, па затоа B не е точен квадрат.

Нека $n\equiv 1(\bmod 4)$. Тогаш $A=8t+1, B=4(5t+1), C=4(13t+3)$. Нека претпоставиме дека A,B,C се точни квадрати. Ако B е точен квадрат, тогаш бројот $5t+1$ е точен квадрат. Слично, ако C е точен квадрат, тогаш и бројот $13t+3$ е точен квадрат. Според тоа, важи $8t+1=x^2,$ $5t+1=y^2,$ $13t+1=z^2$. Оттука следува дека $x^2+y^2=z^2-1$. Но, $z^2\equiv 0(\bmod 4)$ или $z^2\equiv 1(\bmod 4)$, па затоа $x^2+y^2\equiv 3(\bmod 4)$ или $x^2+y^2\equiv 0(\bmod 4)$. Понатаму, ако земеме предвид дека точен квадрат на природен број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4, од последните конгруенции следува дека $x^2 \equiv 0(\mod 4)$ и $y^2 \equiv 0(\mod 4)$, што противречи на $x^2 = 8t+1 \equiv 1(\mod 4)$

27. Докажи дека бројот $A = n^4 - 12n^2 + 4$ е сложен број за секој природен број $n \geq 5$. Во случај кога A е производ на два прости броеви, докажи дека ниту еден од нив не е од облик $2^{2^k} + 1$, каде k е природен број.

Решение. Бројот A можеме да го претставиме во облик

$$A = n^4 - 12n^2 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 16n^2$$
$$= (n^2+2)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 4n + 2)(n^2 + 4n + 2).$$

Но, од $n \geq 4$ добиваме

$$n^2 + 4n + 2 \geq 16 + 16 + 2 = 34$$
$$n^2 - 4n + 2 = n(n-4) + 2 \geq 5 + 2 = 7 > 1$$

па според тоа A е сложен број.

Нека A е производ на простате броеви p и q, т.е. без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $p = n^2 - 4n + 2$ и $q = n^2 + 4n + 2$. Бидејќи, $p, q > 2$, се прости броеви, добиваме дека n е непарен број. Но тогаш

$$n^2 - 4n + 2 \equiv 7 \ (\mod 8)$$
$$n^2 + 4n + 2 \equiv 7 \ (\mod 8).$$

Од друга страна остатокот од делењето на $2^{2^k} + 1$ со 8 е 1 или 5, па според тоа

$$n^2 - 4n + 2 \neq 2^{2^k} + 1, \ n^2 + 4n + 2 \neq 2^{2^k} + 1, \ k \in \mathbb{N}.$$

28. Нека n и p се природни броеви такви што $n > 1$ и p е прост број поголем од n. Ако $n \mid p-1$ и $p \mid n^3 - 1$, докажи дека $4p-3$ е точен квадрат.

Решение. Бидејќи $n \mid p-1$ добиваме $p-1 \geq n$, т.е. $p \geq n+1 > n$. Условот $p \mid n^3 - 1$, можеме да го запишеме во облик

$$p \mid (n-1)(n^2+n+1),$$

и бидејќи p е прост број и $p > n$, добиваме $p \mid n^2 + n + 1$, т.е. постои природен број k таков што $n^2 + n + 1 = pk$.

Условот $n \mid p-1$ можеме да го запишеме $p \equiv 1 \ (\mod n)$. Од својствата на конгруенции добиваме $pk \equiv k \ (\mod n)$, па затоа

$$n^2 + n + 1 \equiv k \ (\mod n).$$

Јасно, $n^2 + n + 1 \equiv 1 \ (\mod n)$, па повторно од својствата на конгруенции следува дека $k \equiv 1 \ (\mod n)$. Сега $p = an + 1$ и $k = bn + 1$ за некои природни броеви $a > 0$ и $b \geq 1$. Тогаш

$$(an+1)(bn+1) = n^2 + n + 1$$

$$abn^2+(a+b)n+1=n^2+n+1$$
$$abn+(a+b)=n+1.$$

Ако $b\geq 1$, тогаш $abn+(a+b)\geq n+2>n+1$, што е противречи на последното равенство. Значи, $b=0,k=1$ и $p=n^2+n+1$, од каде добиваме

$$4p-3=4(n^2+n+1)-3=4n^2+4n+1=(2n+1)^2,$$

што требаше да се докаже.

29. Докажи дека секој цел број може да се претстави како збир од пет кубови на цели броеви.

Решение. Нека $n\in\mathbb{Z}$. Можен е точно еден од следниве случаи: $n\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 6)$, $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$, $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$, $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$, $n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$ или $n\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$.

Ако $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$, тогаш $n=(-\frac{n}{6})^3+(-\frac{n}{6})^3+0^3+(\frac{n}{6}-1)^3+(\frac{n}{6}+1)^3$.

Ако $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$, $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$, $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$, $n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$ или $n\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$, тогаш $n=6\frac{n-1}{6}+1^3$, $n=6(\frac{n-2}{6}-1)+2^3$, $n=6(\frac{n-3}{6}-4)+3^3$, $n=6(\frac{n-4}{6}+2)+(-2)^3$ или $n=6(\frac{n-5}{6}+1)+(-1)^3$, соодветно. Сега, $n-1\equiv 0(\mathrm{mod} 6)$, па може да се претстави како збир на четири кубови, т.е. бројот n може да се претстави како збир на пет кубови итн.

30. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви p од видот $4k-1, k\in\mathbb{N}$ такви што p е делител на 2^q-1 за некој прост број.

Решение. Нека $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата прости броеви. Да означиме $Q_n=2^{q_n}-1$. Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(Q_m,Q_n)=1$, за $m\neq n$. Навистина, ако $d\in\mathbb{N}$ е делител на Q_m и Q_n, тогаш d е делител на $2^{\mathrm{NZD}(q_m,q_n)}-1=2^1-1=1$, па затоа $d=1$.

Не е можно сите прости делители на Q_n да се конгруентни со 1 по модул 4, бидејќи во тој случај ќе имаме $Q_n\equiv 1(\mathrm{mod} 4)$, што противречи на $Q_n=2^{q_n}-1\equiv 3(\mathrm{mod} 4)$. Според тоа, Q_n има барем еден прост делител p_n од видот $p_n=4k_n-1, k_n\in\mathbb{N}$. Освен тоа, кога $m\neq n$, од $\mathrm{NZD}(Q_m,Q_n)=1$ следува $p_n\neq p_m$. Така добивме бесконечна низа $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ од различни прости броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

31. Определи го бројот на природните броеви a кои се помали од 2003 и за кои постои природен број n таков што $3^{2003}\mid n^3+a$.

Решение. Ќе докажеме дека бараните броеви имаат еден од следниве облици $9k\pm 1$, $3^3(9k\pm 1)$ или $3^6(9k\pm 1)$.

Нека претпоставиме дека 3 не е делител на a. Бидејќи $n^3\equiv 0,\pm 1(\mathrm{mod} 9)$, заклучуваме дека $a\equiv\pm 1(\mathrm{mod} 9)$.

Обратно, нека $a \equiv \pm 1 (\bmod 9)$. Бидејќи $1^3 - 1$ и $2^3 + 1$ се деливи со 9, следува дека постои n таков што $3^s, s \ge 2$ е делител на $n^3 + a$ и 3^{s+1} не е делител на $n^3 + a$, т.е. $n^3 + a = 3^s t$, каде $3 \nmid t$. Ќе докажеме дека бројот $n_1 = n + 2 \cdot 3^{s-1} t$ е таков што $n_1^3 + a$ е делив со 3^{s+1}. Имаме

$$(n + 2 \cdot 3^{s-1} t)^3 + a = 3^s t (2n^2 + 1) + 4 \cdot 3^{2s-1} n t^2 + 8 \cdot 3^{3s-3} t^3.$$

Бидејќи 3 не е делител на n, заклучуваме дека $2n^2 + 1$ е делив со 3. Освен тоа $2s - 1 \ge s + 1$ и $3s - 3 \ge s + 1$, па затоа $n_1^3 + a$ е делив со 3^{s+1}.. Продолжувајќи на истиот начин ќе добиеме дека постои природен број n_p таков што $3^{2003} \mid n_p^3 + a$.

Ако $a < 2003$ е делив со 3, тогаш $a = 3^s b$, каде $s \le 6$. Тогаш 3 е делител на n, т.е. $n = 3^p n_0$, каде $p \ge 1$ и $3 \nmid n_0$. Ако $p \ge 3$, тогаш $3^9 \mid n^3$ и $3^9 \nmid a$, па затоа $3^{2003} \nmid n^3 + a$. Според тоа, $p = 1$ или $p = 2$, од каде следува дека $s = 3$ или $s = 6$, соодветно.

Во првиот случај добиваме дека $3^{2000} \mid n_0^3 + b$, каде $3 \nmid b$ и $27b < 2003$. Сега, како и претгходно заклучуваме дека $b \equiv \pm 1 (\bmod 9)$.

Во вториот случај добиваме дека $3^{1997} \mid n_0^3 + b$, каде $3 \nmid b$ и $729b < 2003$. Сега како и претходно закчучуваме дека $b \equiv \pm 1 (\bmod 9)$.

Бројот на природните броеви $b \equiv \pm 1 (\bmod 9)$ такви што $b < 2003, 27b < 2003$ или $729b < 2003$ е еднаков на $2 \cdot 222 + 1 = 445, 2 \cdot 8 + 1 = 17$ или 1, соодветно. Според тоа, постојат $445 + 17 + 1 = 463$ броеви со саканото својство.

32. Нека a е природен број и p е прост број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $a^{p^n} + p^n$ има барем два различни прости делители.

Решение. Ако $p \mid a$, тогаш $a^{p^n} + p^n = p^n (pA + 1)$, каде A е природен број и тврдењето очигледно важи. Затоа нека претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a, p) = 1$.

Нека p е непарен, $n = pk$ и $a^{p^{n-1}} = x, \ p^k = y$. Тогаш

$$a^{p^n} + p^n = x^p + y^p = (x + y)(x^{p-1} - x^{p-2} y + \ldots - x y^{p-2} + y^{p-1})$$

и да претпоставиме дека овој број има не повеќе од еден прост делител, т.е. дека е еднаков на q^t за некој прост број q и некој природен број t. Очигледно $q \ne p$. Од $q \mid x + y$ следува дека $x \equiv -y (\bmod q)$ и тогаш

$$x^{p-1} - x^{p-2} y + \ldots - x y^{p-2} + y^{p-1} \equiv p y^{p-1} (\bmod q)$$

не е делив со q, што е противречност.

Нека $p = 2$ и $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}, a^{2^{n-2}} = u, 2^k = v$. Тогаш

$$a^{2^n} + 2^n = u^4 + 4v^4 = (u^2 + 2uv + v^2)(u^2 - 2uv + v^2).$$

Двата множители на десната страна се заемно прости и поголеми од 1, па значи имаат различни прости делители.

33. Нека n и нека $a_1, a_2, ..., a_k$, $(k \geq 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1, 2, ..., n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1} - 1)$ се деливи со n за секој $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1 - 1)$ не е делив со n.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека $a_i a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n}$ за $i = 1, 2, ..., k$ (индексите се сметаат по модул k). Тогаш за секој j важи

$$a_j \equiv a_j a_{j+1} \equiv a_j a_{j+1} a_{j+2} \equiv ... \equiv a_j a_{j+1} ... a_{j+k-1} = a_1 a_2 ... a_k \pmod{n},$$

па затоа $a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_k \pmod{n}$, што е противречност.

34. Нека k е природен број. Докажи дека бројот $2^{2k-1} + 2^k - 1$ не е делив со 7.

Решение. Бидејќи $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ имаме:

- ако $k \equiv 0 \pmod 3$, тогаш $2k - 1 \equiv 2 \pmod 3$, па

$$2^{2k-1} + 2^k - 1 \equiv 2^2 + 2^0 - 1 \equiv 4 \pmod 7,$$

- ако $k \equiv 1 \pmod 3$, тогаш $2k - 1 \equiv 1 \pmod 3$, па

$$2^{2k-1} + 2^k - 1 \equiv 2^1 + 2^1 - 1 \equiv 3 \pmod 7,$$

- ако $k \equiv 2 \pmod 3$, тогаш $2k - 1 \equiv 0 \pmod 3$, па

$$2^{2k-1} + 2^k - 1 \equiv 2^0 + 2^2 - 1 \equiv 4 \pmod 7.$$

Од тука следува тврдењето на задачата.

35. Ванчо на таблата ги запишал броевите 1 и 2, а потоа продолжил да запишува броеви така што секој нов број е еднаков на збирот на квадратите на последните два запишани броја. Докажи, дека продолжувајќи ја оваа постапка Ванчо никогаш нема да запише број кој е делив со 3 или кој е делив со 7.

Решение. Ванчо последователно ги запишува членовите на низата $\{a_k\}$ зададена со

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \ a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-2}^2, \text{ за } k \geq 3.$$

Првите неколку членови на низата се $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 29, ...$. Забележуваме дека $a_2 \equiv a_3 \equiv 2 \pmod 3$. Нека претпоставиме дека $a_k \equiv a_{k+1} \equiv 2 \pmod 3$, за некој $k \geq 2$. Тогаш $a_{k+2} = a_k^2 + a_{k+1}^2 \equiv 2^2 + 2^2 \equiv 2 \pmod 3$, па од принципот на математичка индукција следува дека $a_n \equiv 2 \pmod 3$, за секој $n \geq 2$, т.е. ниту еден член на низата не е еделив со 3.

Да ги разгледаме остатоците при делење со 7. Имаме

$a_1 \equiv 1 \pmod 7$	$a_5 \equiv 5^2 + 1^2 \equiv 5 \pmod 7$
$a_2 \equiv 2 \pmod 7$	$a_6 \equiv 1^2 + 5^2 \equiv 5 \pmod 7$
$a_3 \equiv 1^2 + 2^2 \equiv 5 \pmod 7$	$a_7 \equiv 5^2 + 5^2 \equiv 1 \pmod 7$
$a_4 \equiv 2^2 + 5^2 \equiv 1 \pmod 7$	$a_8 \equiv 5^2 + 1^2 \equiv 5 \pmod 7$

Сега, со математичка индукција лесно се докажува дека

$$a_{3k} \equiv 5 \pmod 7$$

$$a_{3k+1} \equiv 1 \pmod 7$$

$$a_{3k+2} \equiv 5 \pmod 7$$

за секој $k \geq 1$, што значи дека ниту еден член на низата не е делив со 7.

36. Бројот $11...1*33...3$ содржи 2001 единица и исто толку тројки. Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката, за овој број да биде делив со 7?

Решение. *Прв начин.* Прво ќе изведеме критериум за деливост со 7. Нека n е природен број и нека:

1° n има $3k$ цифри, т.е. $n = \overline{a_{3k-1}a_{3k-2}...a_2a_1a_0}$. Тогаш

$$n = \overline{a_2a_1a_0} + 10^3\overline{a_5a_4a_3} + ... + 10^{3k-3}\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}a_{3k-3}}.$$

Имајќи предвид дека $10^3 \equiv -1 \pmod 7$ добиваме $10^{3s} \equiv (-1)^s \pmod 7$ за секој $s \in \mathbb{N}$ Значи

$$n \equiv \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + ... + (-1)^{k-1}\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}a_{3k-3}} \pmod 7.$$

2° n има $3k+1$ цифри. Слично како претходно

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_2a_1a_0} + 10^3\overline{a_5a_4a_3} + ... + 10^{3k-3}\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}a_{3k-3}} + 10^{3k}a_{3k} \\ &\equiv \overline{a_2a_0a_1} - \overline{a_5a_4a_3} + ... + (-1)^{k-1}\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}a_{3k-3}} + (-1)^k a_{3k} \pmod 7. \end{aligned}$$

3° n има $3k+2$ цифри. Добиваме

$$n \equiv \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + ... + (-1)^{k-1}\overline{a_{3k-1}a_{3k-2}a_{3k-3}} + (-1)^k\overline{a_{3k+1}a_{3k}} \pmod 7.$$

Нашиот број има $2 \cdot 2001 + 1 = 4003$ цифри и важи $4003 = 3 \cdot 1334 + 1$, па тој е од облик 2°. Значи за да е делив со 7 треба да важи:

$$\begin{aligned} \underbrace{111\ldots1}_{2001}*\underbrace{333\ldots3}_{2001} &\equiv \underbrace{(-1)^0 333 + (-1)^1 333 + \cdots + (-1)^{665} 333}_{=0} + (-1)^{666} 333 - 11* + \\ &\quad + \underbrace{(-1)^0 111 + (-1)^1 111 + \cdots + (-1)^{665} 111}_{=0} + 1 \\ &\equiv 333 - 11* + 1 \equiv 334 - (100 + 10 + *) \\ &\equiv 224 - * \equiv -* \equiv * \pmod 7. \end{aligned}$$

Значи $* = 0$ или $* = 7$.

Втор начин. Нека n е природен број чиј декаден запис е

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0,$$

и притоа $a_k \neq 0$. Имаме

$$10^{6t} \equiv (10^6)^t \equiv 1 \pmod 7, \qquad 10^{6t+1} \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$$

$$10^{6t+2} \equiv 10^{6t+1}10 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \pmod 7, \qquad 10^{6t+3} \equiv -1 \pmod 7,$$

$$10^{6t+4} \equiv -3 \pmod 7, \qquad 10^{6t+5} \equiv -2 \pmod 7.$$

Според тоа,

$$n \equiv (a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + ... \pmod 7.$$

Во нашиот случај

$$\begin{aligned}111\ldots1{*}333\ldots3 &\equiv [333\big((3+3\cdot3+2\cdot3)-(3+3\cdot3+2\cdot3)\big)+(3+3\cdot3+2\cdot3)-\\ &-(*+3\cdot1+2\cdot1)+333\big((1+3\cdot1+2\cdot1)-(1+3\cdot1+2\cdot1)\big)+1]\\ &\equiv(18-*-5+1)\equiv(14-*)\equiv -*\,(\mathrm{mod}\,7).\end{aligned}$$

Значи $*=0$ или $*=7$.

37. Ако p и q се различни прости броеви, тогаш

$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,pq).$$

Докажи!

Решение. Од малата теорема на Ферма имаме $q\,|\,(p^{q-1}-1)$ и $p\,|\,(q^{p-1}-1)$. Според тоа,

$$pq\,|\,(p^{q-1}-1)(q^{p-1}-1),$$

т.е.

$$pq\,|\,(p^{q-1}q^{p-1}-p^{q-1}-q^{p-1}+1). \qquad (1)$$

Бидејќи p и q се прости броеви имаме

$$pq\,|\,p^{q-1}q^{p-1}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) непосредно следува дека $pq\,|\,(p^{q-1}+q^{p-1}-1)$, т.е.

$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,pq).$$

38. Докажи дека секој прост број p е делител на бесконечно многу броеви од видот 2^n-n.

Решение. Ако $p=2$, тогаш за $n=2k$ броевите од видот $2^{2k}-2k$ се деливи со $p=2$.

Нека претпоставиме дека p е непарен прост број. Бидејќи $\mathrm{NZD}(2,p)=1$ според малата теорема на Ферма, добиваме дека

$$2^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Тогаш за било кој природен број m имаме $(2^{p-1})^m\equiv 1^m\ (\mathrm{mod}\ p)$, односно

$$2^{m(p-1)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p). \qquad (1)$$

Нека m е природен број таков што $m\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)$. Тогаш

$$m(p-1)\equiv -1(p-1)=1\ (\mathrm{mod}\ p) \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека

$$2^{m(p-1)}-m(p-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Броеви m кои го исполнуваат условот $m\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ p)$ има бесконечно многу. Бидејќи $m\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ p)$ добиваме дека $p\,|\,(m+1)$, односно дека $m=pk-1$ за некој природен број k. Обратно, секој број од облик $m=pk-1$ го исполнува условот $m\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ p)$.

Множеството $\{n=(pk-1)(p-1)\mid k\in\mathbb{N}\}$ е бесконечно множество на природни броеви за кои е исполнет условот $p\,|\,(2^n-n)$.

39. Одреди го остатокот од делењето на бројот $(85^{74}+19^{99})^{16}$ со 13.

Решение. Бидејќи 13 е прост број и не е делител на 85, според малата теорема на Ферма имаме $85^{12}\equiv 1(\text{mod}\,13)$, а оттука $85^{72}\equiv 1(\text{mod}\,13)$. Од $85^2=7225=555\cdot 13+10$, добиваме $85^2\equiv 10(\text{mod}\,13)$. Значи, $85^{72}\cdot 85^2\equiv 1\cdot 10(\text{mod}\,13)$, односно $85^{74}\equiv 10(\text{mod}\,13)$.

Аналогно, важи $19^{12}\equiv 1(\text{mod}\,13)$, а оттука $19^{96}\equiv 1(\text{mod}\,13)$. Уште, $19\equiv 6$ $(\text{mod}\,13)$, $19^2\equiv 6^2\equiv 10(\text{mod}\,13)$ и $19^3\equiv 10\cdot 6\equiv 8(\text{mod}\,13)$ и затоа $19^{99}\equiv 8(\text{mod}\,13)$. Тогаш $85^{74}+19^{99}\equiv 10+8\equiv 5(\text{mod}\,13)$, а оттука имаме $(85^{74}+19^{99})^2\equiv 25\equiv -1$ $(\text{mod}\,13)$ и затоа $(85^{74}+19^{99})^{16}\equiv 1(\text{mod}\,13)$. Значи, бараниот остаток е 1.

40. Ако a е цел број таков што $\text{NZD}(a,35)=1$, тогаш бројот

$$A=(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$

е делив со 35. Докажи!

Решение. Бидејќи $5\nmid a$ и 5 е прост број од малата теорема на Ферма следува $a^4\equiv 1(\text{mod}\,5)$, т.е. $5\,|\,(a^4-1)$ и затоа $5\,|\,A$. Понатаму,

$$\begin{aligned}A&=(a^4-1)(a^4+15a^2+1)=(a^4-1)(a^4+14a^2+a^2+1)\\&=14a^2(a^4-1)+(a^2-1)(a^2+1)(a^4+a^2+1)\\&=14a^2(a^4-1)+(a^6-1)(a^2+1)\end{aligned}$$

Бидејќи $7\nmid a$, повторно од теорема 1 следува $a^6\equiv 1(\text{mod}\,7)$. Така $7\,|\,(a^6-1)$ и $7\,|\,14$, па затоа $7\,|\,A$. Конечно, од $5\,|\,A$, $7\,|\,A$ и $\text{NZD}(5,7)=1$ следува $35\,|\,A$.

41. Докажи дека ако a е цел број кој што не е делив со 3 тогаш

$$a^{13}-a\equiv 0(\text{mod}\,2^{13}-2).$$

Решение. Бидејќи множителите на $2^{13}-2=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$ се заемно прости броеви, доволно е да се докаже дека $a^{13}-a\equiv 0(\text{mod}\,m)$ за $m=2,9,5,7,13$. Нека $m=2,5,7,13$. Ако $m\,|\,a$, јасно е дека $a^{13}-a\equiv 0(\text{mod}\,m)$. Ако $\text{NZD}(m,a)=1$ тогаш според малата теоремата на Ферма добиваме $a^{m-1}\equiv 1(\text{mod}\,m)$, а оттука $(a^{m-1})^{\frac{12}{m-1}}\equiv 1$ $(\text{mod}\,m)$, односно $a^{12}\equiv 1(\text{mod}\,m)$ и тогаш $a^{13}\equiv a(\text{mod}\,m)$. Останува да се разгледа случајот $m=9$. Бидејќи a е цел број кој што не се дели со 3, важи $a^2\equiv 1(\text{mod}\,m)$, односно $a^2=3t+1$. Тогаш $a^6=27t^3+27t^2+9t+1$, односно $a^6\equiv 1(\text{mod}\,9)$ и затоа $a^{12}\equiv 1(\text{mod}\,9)$ и тогаш $a^{13}\equiv a(\text{mod}\,9)$.

37. Одреди ги сите прости броеви p за кои $p\,|\,(7^p+13)$.

Решение. Од условот во задачата следува $7^p \equiv -13(\bmod p)$, а од друга страна според малата теорема на Ферма важи и $7^p \equiv 7(\bmod p)$. Оттука следува дека $p\,|\,20$, односно $p=2$ или $p=5$. Овие два броја се и навистина решенија на задачата бидејќи: $7^2+13=62=2\cdot 31$ и $7^5+13 \equiv 2^5-2 \equiv 0(\bmod 5)$.

42. Нека p е прост број и $p=4k+1, k \geq 1$ е природен број. Докажи дека важи $k^{2k} \equiv 1(\bmod p)$.

Решение. Очигледно $\text{NZD}(k,p)=1$. Од малата теорема на Ферма следува дека $k^{4k}=k^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$. Значи, $p\,|\,(k^{2k}+1)(k^{2k}-1)$ и доволно е да докажеме дека $p \nmid (k^{2k}+1)$, од што ќе следува дека $p\,|\,(k^{2k}-1)$.

Нека претпоставиме дека $p\,|\,(k^{2k}+1)$. Тогаш

$$k^{2k} \equiv -1 \equiv 4k\,(\bmod p)$$

и од $\text{NZD}(k,p)=1$ добиваме дека

$$k^{2k-1} \equiv 2^2\,(\bmod p).$$

Ако двете страни на последната конгруенција ги степенуваме на степен $\frac{p-1}{2}=2k$ добиваме

$$k^{2k(2k-1)} \equiv 2^{p-1}(\bmod p).$$

Но, од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$, па затоа

$$k^{2k(2k-1)} \equiv 1(\bmod p).$$

Конечно, од последната конгруенција и од $k^{2k} \equiv -1(\bmod p)$ добиваме дека $p=2$, што е противречност. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

43. Докажи дека за секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}}+19$ е сложен.

Решение. Од малата теорема на Ферма следува дека $2^{10} \equiv 1(\bmod 11)$, па затоа $2^{10n} \equiv 1(\bmod 11)$, што значи дека бројот $2^{10n+1}-2$ се дели со 22, т.е. $2^{10n+1}=22k+2$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Оттука, повторно од малата теорема на Ферма следува дека:

$$2^{2^{10n+1}}=2^2(2^{22})^k \equiv 4\cdot 1^k \equiv 4\,(\bmod 23),$$

па затоа $23\,|\,(2^{2^{10n+1}}+19)$. Конечно, бидејќи $2^{2^{10n+1}}+19>23$, за $n \geq 1$ добиваме дека секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}}+19$ е сложен.

44. Ако p е прост број, тогаш $7p+3^p-4$ не е точен квадрат. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека p е прост број поголем од 3 и

$$m=7p+3^p-4$$

е точен квадрат. Нека $m=n^2$ за некој $n\in\mathbb{Z}$. Од малата теорема на Ферма следува дека

$$m=7p+3^p-4\equiv 3-4\equiv -1(\text{mod } p).$$

Ако $p=4k+3$, $k\in\mathbb{Z}$, тогаш повторно од малата теорема на Ферма добиваме дека

$$-1\equiv m^{2k+1}\equiv n^{4k+2}=n^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p),$$

што е противречност. Така $p\equiv 1(\text{mod}\, 4)$. Тогаш $m=7p+3^p-4\equiv 3-1\equiv 2(\text{mod}\, 4)$, што е противречност бидејќи точен квадрат не е конгруентен со 2 по модул 4. За $p=2$ добиваме $m=19$, и за $p=3$ добиваме дека $m=44$, што значи дека и во двата случаи $m=7p+3^p-4$ не е точен квадрат.

45. Докажи дека за секој непарен прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p\,|\,(2^n n+1)$.

Решение. Нека n е непарен прост број и $n=(p-1)(kp+1)$, за $k=0,1,2,3,...$. Имаме $n\equiv -1(\text{mod } p)$. Согласно со малата теорема на Ферма $2^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$ и ако последната конгруенција ја степенуваме на степен $kp+1$, добиваме дека $2^n\equiv 1(\text{mod } p)$ Според тоа, $2^n n+1\equiv(-1)\cdot 1+1=0(\text{mod } p)$. Но, $k=0,1,2,3,...$, па затоа постојат бесконечно многу природни броеви n со бараното својство.

46. Докажи дека меѓу броевите $(2^{2n}+1)^2+2^2$, каде $n=1,2,...$ има бесконечно многу сложени броеви.

Решение. Такви се на пример сите броеви од дадената низа за кои $n=28k+1$, $k=1,2,3,\ldots$. Од малата теорема на Ферма имаме $2^{28}\equiv 1(\text{mod}\, 29)$ па за $k=1,2,3,...$ важи $2^{2\cdot 28k}\equiv 1(\text{mod}\, 29)$. Значи, за $n=28k+1$ важи

$$(2^{2n}+1)^2+2^2\equiv 25+4\equiv 0(\text{mod}\, 29),$$

т.е $29\,|\,(2^{2n}+1)^2+2^2$ при што бидејќи за секој природен број k важи $n=28k+1\geq 29$, следува дека $(2^{2n}+1)^2+2^2>29$. Оттука следува дека броевите $(2^{2n}+1)^2+2^2$, за $n=28k+1$, каде $k=1,2,3,...$ се сложени.

47. Ако p е прост број, тогаш $p\,|\,\underbrace{11...1}_{p}\underbrace{22...2}_{p}...\underbrace{99...9}_{p}-123456789$. Докажи!

Решение. За $p=2,\ p=3,\ p=5$ тврдењето непосредно следува од признаците за деливост со броевите 2,3 и 5. Нека $p>5$. Тогаш имаме

$$\begin{aligned}N&=\underbrace{11...1}_{p}\underbrace{22...2}_{p}...\underbrace{99...9}_{p}-123456789\\&=(10^p-1)+\tfrac{8}{9}10^p(10^p-1)+\tfrac{7}{9}10^{2p}(10^p-1)+...+\tfrac{1}{9}10^{8p}(10^p-1).\end{aligned}$$

Од малата теорема на Ферма следува дека $10^p - 1 \equiv 10 - 1 = 9 (\mathrm{mod}\, p)$, односно $\frac{10^p-1}{9} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, па затоа

$N \equiv 9 + 8\cdot 10^p + 7\cdot 10^{2p} + ... + 10^{8p} \equiv 9 + 8\cdot 10 + 7\cdot 10^2 + ... + 10^8 = 123456789 (\mathrm{mod}\, p)$,
што всушност и требаше да се докаже.

48. Определи ги сите непарни прости броеви p кои се делители на збирот

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + 2004^{p-1}.$$

Решение. Имаме, ако $p \mid k$, тогаш $k^{p-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ и ако $p \nmid k$, тогаш од малата теорема на Ферма следува $k^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Според тоа,

$$0 \equiv 1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + 2004^{p-1} \equiv 0 \cdot [\tfrac{2004}{p}] + 1 \cdot (2004 - [\tfrac{2004}{p}]) (\mathrm{mod}\, p),$$

од што следува

$$2004 \equiv [\tfrac{2004}{p}] (\mathrm{mod}\, p) \qquad (1)$$

(во случајов, $po < 2004$). Нека $2004 = qp + r, 0 \le r < p$. Тогаш $[\frac{2004}{p}] = [q + \frac{r}{p}] = q$ и (1) е еквивалентна на $r \equiv q (\mathrm{mod}\, p)$.

За $q < p$, од последната конгруенција добиваме $r = q$, од каде следува

$$2004 = (p+1)q \le p^2 - 1,$$

и затоа $p \ge 47$. Бидејќи $p+1$ е делител на $2004 = 3\cdot 4\cdot 167$ добиваме дека $p = 2003$ е решение на задачата.

За $q \ge p$, добиваме $2004 \ge pq \ge p^2$, т.е. $p \le 43$. Со директна проверка на (1) се покажува дека во овој случај $p = 17$ е еднинствено решение на задачата.

49. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $pq \mid 12^{p+q} - 1$ и $p = q + 2$.

Решение. Јасно, $p, q > 3$. Бидејќи $q + 1 = p - 1$, од малата теоремата на Ферма следува дека $p \mid 12^{p-1} - 1 = 12^{q+1} - 1$. Понатаму, бидејќи

$$12^{p+q} - 1 - (12^{q-1} - 1)\cdot 12^{p+1} = 12^{p+1} - 1,$$

од условот и од малата теорема на Ферма следува $q \mid 12^{p+1} - 1$.

Од $q \mid 12^{p+1} - 1$ следува дека степенот k на 12 по модул q е делител на $p+1$ и $q \mid 12^{q-1} - 1$ добиваме дека k е делител на $q - 1 = p - 3$. Според тоа, k е делител на $p + 1 - (p-3) = 4$, па затоа $k = 1, 2$ или 4.

За $k = 1$ наоѓаме $p = 11$ и $q = 13$. За $k = 2$ наоѓаме $q = 13$ и во случајов немаме решение, бидејќи $q + 2 = 15$ не е прост број. За $k = 4$ наоѓаме $q = 5$ и $p = 7$, $q = 29$ и $p = 31$.

50. Ако $x \in \mathbb{Z}$, тогаш секој прост делител на $x^2 + 1$ е од облик $4k + 1$. Докажи!

Решение. Нека $p \mid x^2+1$. Тогаш $\mathrm{NZD}(x,p)=1$ и

$$x^2+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p), \text{ т.е. } x^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p).$$

Ако двете страни ги степенуваме на степен $\frac{p-1}{2}$, добиваме

$$(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod}\, p),$$

т.е.

$$x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod}\, p).$$

Од друга страна, од малата теорема на Ферма имаме $x^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ па значи $\frac{p-1}{2}=2k$, од каде следува дека $p=4k+1$.

51. Низата $a_1, a_2, \ldots$ е определена со

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad (n=1,2,\ldots).$$

Определи ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

Решение. Ќе докажеме дека за секој прост број p постои m таков што $p \mid a_m$. За $p \in \{2,3\}$ имаме $p \mid a_2 = 48$. Од друга страна, ако $p>3$, тогаш од малата теорема на Ферма следува дека

$$6a_{p-2} = 3\cdot 2^{p-1} + 2\cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3+2+1-6 = 0 \ (\mathrm{mod}\, p),$$

т.е. $p \mid a_{p-2}$, со што доказот е завршен.

Според тоа, единствен природен број со саканото својство е бројот 1.

6. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Најди ги сите двојки природни броеви (x,y) кои ја задоволуваат равенката

$$19x + 95y = 1995.$$

Решение. Ако ја поделиме равенката со 19 , добиваме

$$x+5y=105, \text{ т.е. } x=105-5y.$$

Со земање вредности на y ќе го добиеме x. На тој начин ги добиваме следните дваесет двојки природни броеви: $(100,1),(95,2),(90,3),(85,4),\ldots,(10,19),(5,20)$.

2. Определи ги сите трицифрени броеви кои што се еднакви со збирот на сите двоцифрени броеви, составени од нивните цифри.

Решение. Нека бараниот трицифрен број е бројот $\overline{xyz}$; збирот од сите можни двоцифрени броеви, составени од неговите цифри е:

$$s = \overline{xx}+\overline{xy}+\overline{xz}+\overline{yx}+\overline{yy}+\overline{yz}+\overline{zx}+\overline{zy}+\overline{zz}.$$

Равенството $\overline{xyz}=s$ се сведува на

$$67x = 23y + 32z,$$

од каде што добиваме

$$y = 2x - z + \frac{3(7x - 3z)}{23}.$$

Бројот $7x - 3z$ е делив со 23 само за $x = 5$ и $z = 4$, во тој случај $y = 9$.

Значи, постои само еден таков број и тој број е 594.

3. Претстави ја дропката $\frac{281}{140}$ како збир на три дропки со едноцифрени броители и едноцифрени именители.

Решение. Нека

$$\frac{281}{140} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$$

каде што x, y, z, a, b, c се едноцифрени броеви, т.е. припаѓаат на множеството $D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, и при тоа $\mathrm{NZS}(a,b,c) = 140$.

Од $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ заклучуваме дека именителите на дропките се 4, 5 и 7 па имаме $\frac{281}{140} = \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7}$, т.е.

$$35x + 28y + 20z = 281. \qquad (*)$$

Од $(*)$ заклучуваме дека x е непарен број и $x < 7$, т.е. $x \in \{1,3,5\}$.

i) За $x = 1$ од $(*)$ добиваме $35 + 28y + 20z = 281$, т.е. $2(7y + 5z) = 123$ од каде заклучуваме дека равенката нема решение во D, бидејќи левата страна е деллива со 2, а десната не е деллива.

ii) За $x = 3$ ја добиваме равенката $7y + 5z = 44$, чие единствено решение во D е подредената двојка $y = 2$, $z = 6$.

iii) За $x = 5$ ја добиваме равенката $2(7y + 5z) = 53$, која нема решение во D.

Следствено $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$, па имаме: $\frac{281}{140} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{6}{7}$.

Забелешка. Може да се користи идејата дека $35x + 28y$ треба да завршува на 1. Оттука лесно се заклучува дека $35x$ треба да завршува на 5, т.е. x е непарен број, а тогаш $28y$ ќе завршува на 6, т.е. $y \in \{2,7\}$. Понатаму, со „две проверки“ се доаѓа до решението.

4. Определи ги сите двоцифрени броеви што се еднакви на збирот од кубот на десетката и квадратот на единицата.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{xy}$, тогаш по услов е

$$\overline{xy} = x^3 + y^2$$

Лесно се воочува дека $x \in \{1,2,3\}$, бидејќи ако $x \in \{5,6,7,8,9\}$, тогаш x^3 е трицифрен број, а ако $x = 4$, би имале $\overline{4y} = 64 + y^2$, што не е можно.

1) Ако $x = 1$, тогаш $\overline{1y} = 1^3 + y^2$, или $10 + y = 1 + y^2$, т.е. $y^3 - y - 9 = 0$. Јасно, последната равенка нема целобројни решенија.

2) Ако $x = 2$, тогаш $20 + y = 8 + y^2$, т.е. $y^2 - y - 12 = 0$, чии корени се -6 и 4. Задоволува само вториот, па во овој случај бараниот двоцифрен број е 24.

3) Ако $x = 3$, тогаш $y^2 - y - 21 = 0$ и оваа равенка нема целобројни решенија.

Значи, единствено решение е бројот 24, т.е. $24 = 2^3 + 4^2$.

5. Четирицифрен број е точен квадрат, при што ако од неговите цифри се одземе ист број (цифра) се добива број кој е повторно е точен квадрат. Определи ги сите такви природни броеви.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcd} = A^2$, па од условот имаме

$$\overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)} = B^2.$$

Ако ги одземеме последните две равенства, добиваме

$$1000a + 100b + 10c + d - 1000a + 1000k - 100b + 100k - 10c + 10k - d + k = A^2 - B^2,$$

односно $1111k = A^2 - B^2$, па затоа $11 \cdot 101 \cdot k = (A-B)(A+B)$. Бидејќи, A^2 и B^2 се четирицифрени броеви, заклучуваме дека $32 \le A \le 99$ и $32 \le B \le 99$, од каде $64 \le A+B \le 198$ и $0 \le A-B \le 67$. Но, $A+B$ и $A-B$ се со иста парност, па затоа $A+B = 101$ и $A-B = 11 \cdot k$, при што $k = 1,3,5$. За $k=1$, $\overline{abcd} = 3136 = 56^2$ и за $k=3$, $\overline{abcd} = 4489 = 67^2$.

6. Определи го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ чиј што збир на цифри е 17, ако сите цифри се различни и ги задоволуваат равенствата:

$$2x = y - z \quad \text{и} \quad y = t^2.$$

Решение. Бидејќи *y* е цифра, $y \le 9$ и $y = t^2$, добиваме $t \le 3$. Ќе ги разгледаме сите случаи за *t*.

Ако $t = 0$, тогаш $t = y = 0$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.

Ако $t = 1$, тогаш $t = y = 1$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.

Ако $t = 2$, тогаш $y = 4$, $2x = 4 - z$, од каде што следува дека z е парен број помал од 4. Можни се следниве случаи:

1) за $z = 0$ имаме $x = t = 2$, што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни,
2) за $z = 2$ имаме $z = t = 2$, што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни,
3) за $z = 4$ имаме $x = 0$, што не е можно, бидејќи тогаш бројот не би бил четирицифрен.

Значи, *t* не може да биде 2.

Нека $t = 3$. Тогаш, $y = 9$, $2x = 9 - z$, од каде што следува дека z е непарен број. Можни се следниве случаи:

1) $z = 1$, $x = 4$, па затоа $\overline{xyzt} = 4913$, чиј што збир на цифри е 17, што и се бара.
2) $z = 3$, $x = 3$, што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.
3) $z = 5$, $x = 2$, па затоа $\overline{xyzt} = 2953$, но збирот на цифри е 19, па ова не е решение.

4) $z=7$, $x=1$, па затоа $\overline{xyzt}=1973$, но збирот на цифри е 20, па ова не е решение.

5) $z=9$, $x=0$, што не е можно, бидејќи тогаш бројот не би бил четирицифрен.

Конечно, единствено решение е бројот $\overline{xyzt}=4913$.

7. Ако x е природен број, тогаш барем еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека x е природен број и $m=\frac{2x-5}{9}$ и $n=\frac{x-2}{15}$ се цели броеви. Тогаш, од првата равенка имаме дека $2x=9m+5$, а од втората равенка $x=15n+2$, односно $2x=30n+4$. Значи, $9m+5=30n+4$, т.е. $1=30n-9m$ па затоа $1=3\cdot(10n-3m)$. Последната равенка нема решение во множеството цели броеви, бидејќи десната страна е делива со 3, а левата не е делива со 3.

Значи, барем еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број.

8. Реши ја во $\mathbb{N}$ равенката $xyz=x+y+z$.

Решение. Нека $x\le y\le z$, тогаш: $xyz\le 3x$. Знакот за еднаквост важи само ако $x=y=z$. Но тогаш равенката го добива видот $z^3=3z$, $z^2=3$, која нема решение во $\mathbb{N}$. Значи, имаме $xyz<3z$, $xy<3$. Оттука $x=y=1$ или $x=1$, $y=2$. Во првиот случај равенката го добива видот $z=1+1+z$, што не е можно, а во вториот добиваме $2z=1+2+z$, т.е. $z=3$.

Значи, под претпоставката $x\le y\le z$ равенката има единствено решение-подредената тројка $(1,2,3)$. Ако ја занемариме оваа претпоставка, заклучуваме дека решение на равенката се сите пермутации на броевите $1,2,3$, т.е.

$$(x,y,z)\in\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(3,1,2),(3,2,1)\}$$

9. Равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, каде $p>1$ е даден прост број, реши ја во множеството природни броеви.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$px+py=xy$$

$$xy-px-py+p^2=p^2$$

$$x(y-p)-p(y-p)=p^2$$

$$(x-p)(y-p)=p^2.$$

Бидејќи p е прост број, од последната равенка можни се следните случаи:

1) $x-p=1, y-p=p^2$,

2) $x-p=p, y-p=p$ и

3) $x-p=p^2, y-p=1$.

Од 1) $x=p+1, y=p^2+p$, од 2) $x=2p, y=2p$, и од 3) $x=p^2+p, y=p+1$. Не е тешко да се провери дека добиените решенија се решенија и на почетната равенка.

10. Определи ги сите природни броеви a,b,c,d,e такви што

(1) $a \neq 2$,

(2) $a < b < c < d < e$

(3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$.

Решение. Нека a,b,c,d,e ги задоволуваат условите од задачата. Ттогаш $a=3$, бидејќи според (1) $a \neq 2$ и како $a \neq 1$, бидејќи за $a=1$ важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}>1$, а за $a \geq 4$ важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1$. Слично, $b=4$, бидејќи според (2) важи $b>3$, а за $b \geq 5$ добиваме $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1$.

Ако $c \geq 7$, тогаш $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}<1$. Според тоа, c може да биде 5 или 6. Ако $c=6$, тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$. Ако $d \geq 8$, тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{8}+\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$, што заедно со $d>c=6$ повлекува дека $d=7$. Но $\frac{1}{e}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}$ нема решение во $\mathbb{N}$. Значи, $c=5$. Тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60}$ и $5<d<e$. Ако $d \geq 9$, тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\frac{13}{60}$, што заедно со $5<d$ повлекува дека $d=6$, $d=7$ или $d=8$. Ако $d \geq 7$, тогаш $\frac{1}{e}=\frac{13}{60}-\frac{1}{7}$ нема решение во $\mathbb{N}$. Според тоа, $d=6$. Од $\frac{1}{e}=\frac{13}{60}-\frac{1}{6}=\frac{1}{20}$ добиваме $e=20$. Значи, бараните броеви се: 3, 4, 5, 6, и 20.

11. Определи го најмалиот природен број n за кој равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{n}{4z^2+1}$ нема решение x,y,z во множеството природни броеви.

Решение. За $n=1,2,3$ соодветно ги добиваме решенијата $x=y=10, z=1$; $x=y=5, z=1$ и $x=10, y=2, z=1$, соодветно.

Ќе докажеме дека за $n=4$ равенката нема решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $(x+y)(4z^2+1)=4xy$. Нека $x=2^a x_1$, $y=2^b y_1$, каде $a,b \geq 0$ и x_1, y_1 се непарни броеви. Ако $a>b$, тогаш

$$(2^{a-b}x_1+y_1)(4z^2+1)=4\cdot 2^a x_1 y_1,$$

што не е можно, бидејќи левата страна на последната равенка е непарен број. Аналогно, случајот $b>a$ не е можен. Според тоа,

$$(x_1+y_1)(4z^2+1)=4\cdot 2^a x_1 y_1.$$

Тогаш 4 е делител на x_1+y_1, што значи дека x_1 и y_1 се непарни броеви кои даваат различни остатоци при делење со 4. Нека $x_1=4x_2+1$ и $y_1=4y_2-1$. Но, тогаш y_1 има прост делител p од видот $4k-1$, кој е делител на $4z^2+1$, што не е можно.

12. Определи ги ненултите цифри a,b и c за кои важи $\frac{1}{a+b+c}=\overline{0,abc}$.

Решение. Со множењето на даденото равенство со $1000(a+b+c)$ го добиваме равенството $1000=\overline{abc}(a+b+c)$. Но, a,b и c се цифри, па затоа $a+b+c \leq 27$.

Од друга страна, бројот 1000 како производ на два броја (од кои еден трицифрен) може да се претстави на еден од следниве начини $500\cdot 2$, $250\cdot 4$, $200\cdot 5\,125\cdot 8$, $100\cdot 10$ Проверуваме за кој од троцифрените броеви збирот на цифрите го дава вториот множител. Тоа единствено важи за $125\cdot 8$, па затоа $a=1$, $b=2$ и $c=5$.

13. Определи ги сите природни броеви (x,y,z) такви што $x>y>z$ и

$$x^{-1}+2y^{-1}+3z^{-1}=1.$$

Решение. Очигледно е дека $z\geq 4$.

1) Ако $z=4$, тогаш $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{4}$

$$8x+4y=xy$$
$$xy-4y-8x+32=32$$
$$y(x-4)-8(x-4)=32$$
$$(x-4)(y-8)=32.$$

Од последната равенка ги добиваме системите:

$$\begin{cases}x-4=32\\ y-8=1\end{cases},\quad \begin{cases}x-4=16\\ y-8=2\end{cases},\quad \begin{cases}x-4=8\\ y-8=4\end{cases},\ \dots,\ \begin{cases}x-4=1\\ y-8=32\end{cases}.$$

Условот $x>y$ го исполнуваат само решенијата на првите два система; бараните тројки во овој случај се: $(36,9,4)$ и $(20,10,4)$.

2) За $z=5$ добиваме $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{2}{5}$ или $(2x-5)(y-5)=25$. Од трите системи, задоволува само решението на еден од нив; бараната тројка во овој случај е $(15,6,5)$.

3) За $z=6$ ја добиваме равенката $(x-2)(y-4)=2$ чии решенија не го задоволуваат условот $x>y$.

4) Ако $z>6$, тогаш $x>6$ и $y>6$, па имаме $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}<\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=1$.

Следствено, бараните тројки се: $(36,9,4)$, $(20,10,4)$ и $(15,6,5)$.

14. Во множеството на целите броеви да се реши равенката

$$a^2+2ab+2b^2=13.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во обликот

$$(a+b)^2+b^2=13.$$

Бидејќи a и b се цели броеви, добиваме дека $-3\leq a+b\leq 3$. Навистина, ако $a+b\geq 4$ или $a+b\leq -4$, тогаш $(a+b)^2+b^2\geq 16+b^2\geq 16>13$. Значи, треба да ги разгледаме седумте случаи: $a+b=\pm 3$, $a+b=\pm 2$, $a+b=\pm 1$ и $a+b=0$.

Ако $a+b=\pm 1$ или $a+b=0$, тогаш равенката го добива обликот $b^2=12$ или $b^2=13$. Последните две равенки немаат решение во множеството на цели броеви.

Ќе ги разгледаме четирите преостанати случаи.

а) $a+b=-3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$.

За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=-5, b=2$.

За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=-1, b=-2$.

б) $a+b=3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$.
За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=1, b=2$.
За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=5, b=-2$.
в) $a+b=-2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$.
За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=1$, $b=-3$.
За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-5$, $b=3$.
г) $a+b=2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$.
За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=5$, $b=-3$.
За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-1$, $b=3$.
Конечно решенија на системот се

$$(a,b)\in\{(-5,2),(-1,-2),(1,2),(5,-2),(1,-3),(-5,3),(5,-3),(-1,3)\}.$$

15. Докажи дека равенката $x^3+y^3=3xy+2$ нема целобројни решенија.

Решение. Ја запишуваме равенката во видот

$$x^3+y^3-3xy=2 \tag{*}$$

i) Ако x и y се непарни броеви, тогаш левата страна на равенката (*) е непарен број, а десната парен број. Противречност.

ii) Ако x или y е непарен број, тогаш левата страна на (*) е непарен број, а десната страна парен број, пак противречност.

iii) Ако $x=2m,\ y=2n$, тогаш:

$$8m^3+8n^3-12mn=2,$$

$$2(2m^3+2n^3-3mn)=1,$$

што не е можно за $m,n\in\mathbb{Z}$.

Значи равенката (*) нема решение во $\mathbb{Z}$.

16. Равенката $2m^2+n^2=2mn+3n$ реши ја во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2m-n)^2+(n-3)^2=9,$$

од каде се добива дека

$$(2m-n,n-3)\in\{(0,-3),(0,3),(3,0),(-3,0)\},$$

па решенијата се $(m,n)\in\{(0,0),(0,3),(3,3),(3,6)\}$.

17. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a(a-b)=b$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $a^2=b(a+1)$. Од $\text{NZD}(a,a+1)=1$ и $a+1\,|\,a^2$ следува $a+1=1$ или $a+1=-1$. Во првиот случај $a=0$ и $b=0$, а во вториот случај $a=-2$ и $b=-4$.

18. На колку начини бројот 105 може да се запише како разлика на квадрати на два цели броја.

Решение. Бројот 105 како производ на два природни броја може да се запише на следните начини $105 = 1\cdot 105 = 3\cdot 35 = 21\cdot 5 = 7\cdot 15$. Нека x и y се цели броеви такви што

$$x^2 - y^2 = 105\,. \tag{1}$$

За било кое решение на равенката (1) важи $|x|>|y|$. Не е тешко да се види дека за да се реши задачата, доволно е да се определат решенијата на равенката (1) во множеството $\mathbb{N}$. Имено, ако (x, y) е решение на (1) такво што $x, y \in \mathbb{N}$, тогаш $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ се решенија на (1) во множеството цели броеви. Важи и обратното, т.е. ако x, y се решенија на (1), тогаш $|x|, |y| \in \mathbb{N}$ е решение на во множеството $\mathbb{N}$.

Значи, доволно е да се определат решенијата (x, y) на (1) во множеството $\mathbb{N}$. Бидејќи за $x, y \in \mathbb{N}$ имаме $|x| = x, |y| = y$ за решенијата на (1) се исполнети неравенствата $x > y$ и $x - y < x + y$. Заради тоа, од равенката $(x-y)(x+y) = 105$ ги добиваме следните системи:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=105 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=35 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=21 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=7 \\ x+y=15 \end{cases}$$

Решенија на последните системи се

$$(x, y) \in \{(53,52),\ (19,16),\ (13,8),\ (11,4)\},$$

соодветно, па решенија на почетната равенка се:

$$(x, y) \in \{(53,52), (19,16), (13,8), (11,4), (-53,52), (-19,16), (-13,8), (-11,4), (53,-52),$$
$$(19,-16), (13,-8), (11,-4), (-53,-52), (-19,-16), (-13,-8), (-11,-4)\},$$

Конечно, бројот 105 може да се запише како разлика на квадрати на два цели броја на 16 начини.

19. Определи ги сите цели броеви броеви x и y такви што разликата од нивните квадрати е еднаква на 203.

Решение. Ако парот (x, y) е решение на равенката

$$x^2 - y^2 = 203\,, \tag{1}$$

тогаш и паровите $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ се , исто така, решенија на равенката (1). Затоа, доволно е да ги најдеме само позитивните решенија на равенката.

Од $203 = 1\cdot 203 = 7\cdot 29$ и од $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, добиваме

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=203 \end{cases} \tag{2}$$

или

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=29 \end{cases} \tag{3}$$

Решение на системот (2) е $x = 102, y = 101$, а решение на системот (3) е $x = 18$, $y = 11$. Според тоа, решенија на равенката (1) се паровите: $(102,101)$, $(-102,101)$, $(102,-101)$, $(-102,-101)$, $(18,11)$, $(-18,11)$, $(18,-11)$ и $(-18,-11)$.

20. Реши ја во множеството на природни броеви равенката

$$x^2 = 1995 + y^2 .$$

Решение. Ја запишуваме равенката во видот

$$x^2 - y^2 = 1995 \text{, т.е. } (x-y)(x+y) = 1995 .$$

Бидејќи x и y се природни броеви, следува дека $x+y > x-y$, па имајќи предвид дека $1995 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$, т.е.

$$1995 = 1\cdot 1995 = 3\cdot 665 = 5\cdot 399 = 7\cdot 285 = 15\cdot 133 = 19\cdot 105 = 21\cdot 95 = 35\cdot 57$$

ќе треба да решиме осум едноставни системи равенки; имаме:

1) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1995 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=998 \\ y=997 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=15 \\ x+y=133 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=74 \\ y=59 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=665 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=334 \\ y=331 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-y=19 \\ x+y=105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=62 \\ y=43 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=399 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=202 \\ y=197 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x-y=21 \\ x+y=95 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=58 \\ y=37 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=285 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=146 \\ y=139 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-y=35 \\ x+y=57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=46 \\ y=11. \end{cases}$

21. Реши ја во множеството природни броеви равенката $2xy + x + y = 22$.

Решение. *Прв начин.* Прво ја множиме равенката со 2, а потоа додаваме 1 од двете страни; добиваме:

$$\begin{aligned} &4xy + 2x + 2y = 44 \\ &4xy + 2x + 2y + 1 = 45 \\ &2(2y+1) + (2y+1) = 45 \\ &(2x+1)(2y+1) = 45 . \end{aligned}$$

Бидејќи $45 = 1\cdot 45 = 3\cdot 15 = 5\cdot 9$, а $x, y \in \mathbb{N}$, т.е. $2x+1 \geq 3$ и $2y+1 \geq 3$, предвид доаѓаат следните можности:

$\begin{cases} 2x+1=3 \\ 2y+1=15 \end{cases}$, од каде што $x=1$, $y=7$,

$\begin{cases} 2x+1=15 \\ 2y+1=3 \end{cases}$, од каде што $x=7$, $y=1$,

$\begin{cases} 2x+1=5 \\ 2y+1=9 \end{cases}$, од каде што $x=2$, $y=4$,

$\begin{cases} 2x+1=9 \\ 2y+1=5 \end{cases}$, од каде што $x=4$, $y=2$.

Следствено, решенија на дадената равенка, во множеството природни броеви, се подредените двојки броеви: $(1,7), (2,4), (4,2), (7,1)$.

Втор начин. Имаме по ред:

$$\begin{aligned} &2xy + x + y = 22 , \\ &y(2x+1) = 22 - x \end{aligned}$$

$$y=\frac{-x+22}{2x+1}=-\frac{1}{2}+\frac{22{,}5}{2x+1},$$
$$2y=-1+\frac{45}{2x+1}.$$

Последната равенка има решение во $\mathbb{N}$, ако $2x+1$ е делител на 45, т.е. $2x+1\in\{1,3,5,9,15,45\}$. Следствено, наоѓаме

1) $2x+1=1 \quad\Rightarrow\quad x=0, y=22$
2) $2x+1=3 \quad\Rightarrow\quad x=1, y=7$
3) $2x+1=5 \quad\Rightarrow\quad x=2, y=4$,
4) $2x+1=9 \quad\Rightarrow\quad x=4, y=2$
5) $2x+1=15 \quad\Rightarrow\quad x=7, y=1$
6) $2x+1=45 \quad\Rightarrow\quad x=22, y=0$.

Бидејќи нулата не е природен број, заклучуваме дека решенијата се подредените двојки $(1,7),(2,4),(4,2),(7,1)$.

22. Најди цел број a, таков што полиномот $(x+a)(x-10)+1$ може да се прет-стави како производ $(x+b)(x+c)$ на два множители, каде што b и c се цели броеви.

Решение. *Прв начин*. Ставајќи $x=-b$ во равенството
$$(x+a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)$$
добиваме:
$$(-b+a)(-b-10)+1=0, \text{ т.е. } \quad (a-b)(b+10)=1.$$
Бидејќи $a,b,c\in\mathbb{Z}$, можни се следните случаи:

1) $\begin{cases} a-b=1 \\ b+10=1 \end{cases}$ од каде што $b=-9, a=-8$.

2) $\begin{cases} a-b=-1 \\ b+10=-1 \end{cases}$ од каде што $b=-11, a=-12$.

Следствено, бараните вредности за a се: -8 и -12.

Втор начин. Ставајќи $x=10$ во равенството $(x+a)(x-10)+1=(x-b)(x-c)$ добиваме: $1=(10-b)(10-c)$. Оттука, на сличен начин како во претходното решение наоѓаме: $b=c=9$ или $b=c=11$, а потоа и: $a=-8$, $a=-12$.

23. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) такви што нивниот производ е два пати поголем од нивниот збир.

Решение. Нека $x,y\in\mathbb{Z}$ се такви што
$$xy=2(x+y). \tag{1}$$
Тогаш
$$xy-2x-2y+4=4,$$
$$x(y-2)-2(y-2)=4,$$
$$(x-2)(y-2)=4. \tag{2}$$
Равенката (2) е еквивалентна на равенката (1). Бидејќи

$$4=1\cdot 4=(-1)\cdot(-4)=2\cdot 2=(-2)\cdot(-2),$$

ги добиваме системите:

$$\begin{cases}x-2=1\\y-2=4\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=2\\y-2=2\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=4\\y-2=1\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=-1\\y-2=-4\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=-2\\y-2=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=-4\\y-2=-1\end{cases}$$

Решенија на системите се $(3,6),(4,4),(6,3),(1,-2),(0,0),(-2,1)$ соодветно. Со непосредна проверка добиваме дека само подредените парови од множеството

$$\{(3,6),(4,4),(6,3)\}$$

се решение на почетната задача. .

24. Збирот на неколку последователни природни броеви е 1000. Определи ги сите такви броеви.

Решение. Нека $k+1,k+2,...,n$ се бараните броеви. Тогаш

$$(k+1)+(k+2)+...+n=(1+2+3+...+n)-(1+2+3+...+k)=\tfrac{n(n+1)}{2}-\tfrac{k(k+1)}{2}.$$

Од условот на задачата добиваме $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=1000$, т.е.

$$(n-k)(n+k+1)=2^4 5^3.$$

Броевите $n-k$ и $n+k+1$ се со различна парност. Заради неравенството $n-k<n+k+1$ ги добиваме следните системи:

$$\begin{cases}n+k+1=2000\\n-k=1\end{cases}\quad\begin{cases}n+k+1=400\\n-k=5\end{cases}\quad\begin{cases}n+k+1=80\\n-k=25\end{cases}\quad\begin{cases}n+k+1=125\\n-k=16\end{cases}.$$

Решенијата на првиот, вториот, третиот и четввтиот систем се: $n=1000,k=999$, $n=202,k=197$, $n=52,k=27$ и $n=70,k=53$, соодветно.

Според тоа, бараните броеви се 1000 или 28, 29, 30, ..., 52 или 54, 55, 56, ..., 70 или 198, 199, 200, 201, 202. .

25. Определи ги целобројните решенија на равенката $x^2-2xy+2x-y+1=0$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$y(2x+1)=x^2+2x+1$$

$$y=1+\tfrac{x^2}{2x+1},$$

Последната равенка има смисла, бидејќи $2x+1\neq 0$, за секој $x\in\mathbb{Z}$. Според тоа, доволно е да ги определиме сите целобројни вредности на $\frac{x^2}{2x+1}$, кога $x\in\mathbb{Z}$.

Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(2x+1,x)=\mathrm{NZD}(x+1,x)=0$, од каде што добиваме дека $\mathrm{NZD}(x^2,2x+1)=1$. Според тоа, $\frac{x^2}{2x+1}$ е цел број ако и само ако $2x+1=\pm1$. Од последната равенка имаме $x=0$ или $x=-1$, при што соодветните вредности за y се 1 и 0. Значи, решенија на равенката се $(x,y)\in\{(0,1),(-1,0)\}$.

26. Во множеството природни броеви реши ја равенката $5a-ab=9b^2$.

Решение. Десната страна на равенката е секогаш позитивна, а левата може да се запише во облик $a(5-b)$. Според тоа $b<5$, односно $b\in\{1,2,3,4\}$.

Случај 1. $b=1$. Равенката го добива обликот $4a=9$, која нема решение во $\mathbb{N}$.

Случај 2. $b=2$. Равенката го добива обликот $3a=36$, чие решение е $a=12$, а решението на почетната равенка е $a=12, b=2$.

Случај 3. $b=3$. Равенката го добива обликот $2a=81$, која нема решение во $\mathbb{N}$.

Случај 4. $b=4$.Равенката го добива обликот $a=144$. Решението на почетната равенка е $a=144, b=4$.

Значи, равенката има две решенија и тоа $a=12, b=2$ и $a=144, b=4$.

27. Во кои бројни системи, со основи a, b, c, $(2\le a\le 10, 2\le b\le 10, 2\le c\le 10)$ е точно равенството

$$111_a\cdot 111_b=111_c.$$

Решение. Даденото равенство го запишуваме во видот

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)=c^2+c+1.$$

Ако $a\ge 4$ или $b\ge 4$, тогаш

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)\ge 7\cdot 21=147,$$

но $c^2+c+1\le 111$, бидејќи $2\le c\le 10$. Значи, $a<4$ и $b<4$.

Ако $a=2$ и $b=2$, тогаш $111_2\cdot 111_2=7\cdot 7=49$, но равенката $c^2+c+1=49$ нема целобројни решенија.

Ако $a=2$ и $b=3$, или $a=3$ и $b=2$, тогаш $(a^2+a+1)(b^2+b+1)=91$, а равенката $c^2+c+1=91$, т.е. $c(c+1)=90$ има еден позитивен целоброен корен $c=9$.

Ако $a=3$ и $b=3$, тогаш $111_3\cdot 111_3=169>111$, а $c^2+c+1\le 111$, па оваа можност отпаѓа.

Следствено, задачата има две решенија: $a=2, b=3, c=9$ и $a=3, b=2, c=9$.

28. Нека p е прост број. Определи ги сите цели броеви x и y такви што

$$(2x+y)^3=p^2x(x+y)^2.$$

Решение. Нека $2x+y=A$ и $x+y=B$. Дадената равенка е ексвивалентна на равенката $A^3=p^2B^2(A-B)$, од каде следува дека $p\mid A$. Нека $A=pA_1$, каде A_1 е цел број. Тогаш $pA_1^3=B^2(pA_1-B)$, од каде следува дека $p\mid B$ (во спротивно левата страна не е делива со p). Нека $B=pB_1$, каде B_1 е цел број. Тогаш ја добиваме равенката $A_1^3=B_1^2(pA_1-B_1)$, која е од ист вид како равенката $A^3=p^2B^2(A-B)$, па затоа можеме да ја продолжиме постапката. Јасно, ако $A\ne 0$ постапката продолжува бесконечно, т.е. A треба да биде произволен број пати делив со p, што не е можно. Според тоа, $A=B=0$, од каде добиваме $x=y=0$.

29. Во множеството прости броеви, реши ја равенката

$$x^2+y^3=z^4. \qquad (1)$$

Решение. Од $y^3=(z^2-x)(z^2+x)$ и фактот дека y е прост број добивам

$$\begin{cases} z^2-x=1 \\ z^2+x=y^3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z^2-x=y \\ z^2+x=y^2 \end{cases}$$

Но, последните два системи немаат решение во множеството прости броеви (докажи!), па значи и равенката (1) нема решение во множеството прости броеви.

30. Докажи, дека равенката $x^2+x+1=py$ има решенија во $\mathbb{Z}$, за бесконечно многу прости броеви p.

Решение. Очигледно за $p=3$ дадената равенка има решение $x=1, y=1$. Сега да претпоставиме дека равенката има целобројни решенија (x,y) само за конечен број прости броеви $p_1,p_2,\dots,p_m$. Ставаме $P=p_1p_2...p_m$. Бројот P^2+P+1 не се дели со ниту еден од простите броеви $p_1,p_2,\dots,p_m$, па затоа има прост делител $q\neq p_i$, $i=1,2,...,m$. Според тоа равенката $x^2+x+1=qy$ има целобројни решенија $x=P$, $y=\frac{P^2+P+1}{q}$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

31. Докажи дека равенка

$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=1\,.$$

нема решение во множеството на цели броеви

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2) &= xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-y^2-x^2+y^2) \\ &= (xy-zx)(x^2-y^2)+(yz-zx)(y^2-z^2)=x(y-z)(x^2-y^2)-z(x-y)(y^2-z^2) \\ &= (x-y)(y-z)(x^2+xy-zy-z^2)=(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y)\,. \end{aligned}$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y)=1$$

и оттука $x-y, y-z, z-x\in\{-1,1\}$. Значи, $(x-y)+(y-z)+(z-x)\neq 0$, што не е можно и затоа равенката нема решение во множеството на целите броеви.

32. Докажи, дека ако p е прост број и $n\in\mathbb{N}$, тогаш равенката

$$x(x+1)=p^{2n}y(y+1) \tag{1}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека p е прост број, $n\in\mathbb{N}$ и $x,y\in\mathbb{N}$ ја задоволуваат равенката (1). Од $\text{NZD}(x,x+1)=1$ следува $p^{2n}\,|\,x$ или $p^{2n}\,|\,x+1$, па затоа $x+1\geq p^{2n}$. Но, равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$p^{2n}-1=[p^n(2y+1)+(2x+1)][p^n(2y+1)-(2x+1)]\,. \tag{1}$$

Левата страна и првиот множител на десната страна на (2) се природни броеви, па затоа и вториот множител на десната страна на (2) мора да е природен број. Според тоа, $p^{2n}-1>2x+1$, т.е. $p^{2n}>2x+2$. Значи, $p^{2n}>2(x+1)>2p^{2n}$, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека равенката (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

33. Во множеството прости броеви реши ја равенката $x^2-2y^2=1$.

Решение. Бидејќи $2y^2$ е парен број добиваме дека x е непарен број. Значи, $2y^2=(x-1)(x+1)$ е делив со 4 и како y е прост број имаме $y=2$. Според тоа, $x=3$.

34. Докажи дека равенката $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$ нема решение во множеството прости броеви.

Решение. Да забележиме дека ако p,q,r,s и t се прости броеви и

$$p^2+q^2=r^2+s^2+t^2,$$

тогаш секој од броевите p и q е различен од секој од брооевите r,s и t. Навистина, ако на пример $p=r$, тогаш ја добиваме равенката $q^2=s^2+t^2$ која нема решение во множеството прости броеви, бидејќи броевите s и t не можат и двата да се ниту парни ниту непарни (во два случаи треба $q=2$, што не е можно бидејќи десната страна е поголема од 4).

Ако пак $s=2$, тогаш бројот 4 ќе биде разлика на квадрати на два природни броја што не е можно.

Ако $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$, тогаш сите броеви p,q,r,s и t не може да бидат непарни Ако p е парен, т.е $p=2$, тогаш броевите q,r,s,t мора да се непарни, а како квадрат на непарен број при делење со 8 дава остаток 1, тогаш левата страна при делење со 8 ќе дава остаток 5, а десната остаток 3 што не е можно. Слично не е можен случајот кога p и q се двата непарни, бидејќи левата страна при делење со 8 ќе дава остаток 2, а десната ќе дава остаток 6 (еден од броевите треба да е парен).

35. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) такви што

$$2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2-x^4-y^4-z^4=576.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}4x^2y^2-(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2)&=4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2\\&=(2xy-x^2-y^2+z^2)(2xy+x^2+y^2-z^2)\\&=(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)\\&=(z-x+y)(z+x-y)(x+y-z)(x+y+z)=576.\end{aligned}$$

Понатаму, збирот на кои било два од броевите

$$z-x+y,\ z+x-y,\ x+y-z,\ x+y+z$$

е парен број, па затоа тие се со иста парност и како нивниот производ е парен број, тие се парни броеви. Нека

$$z-x+y=2a,\ z+x-y=2b,\ x+y-z=2c,\ x+y+z=2d\ .$$

Тогаш $16abcd=576$, т.е. $abcd=36$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y\geq z$, од каде следува $d>c\geq b\geq a$. Понатаму, бројот 36 како производ на четири множители од кои едниот е поголем од останатите три можеме да го преставиме на следниве начини

$$36=6\cdot 3\cdot 2\cdot 1=12\cdot 3\cdot 1\cdot 1=18\cdot 2\cdot 1\cdot 1=36\cdot 1\cdot 1\cdot 1\ .$$

Сега, од $36=6\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ добиваме $a=1, b=2, c=3, d=6$, од каде следува дека

$$x=b+c=5\ ,\ y=a+c=4 \text{ и } z=a+b=3\ .$$

Лесно се гледа дека останатите претставувања на бројот 36 доведуваат до противречност. Конечно,

$$(x,y,z)\in\{(3,4,5),\ (5,3,4),\ (4,5,3),\ (5,4,3),\ (3,5,4),\ (4,3,5)\}\ .$$

36. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^2+pq+q^2=r^2\ .$$

Решение. Очигледно е дека $r>p$ и $r>q$. Равенката ја запишуваме во облик $(p+q)^2-pq=r^2$ од каде следува

$$(p+q-r)(p+q+r)=pq\ .$$

Јасно, $p+q-r<p+q+r$, $p+q-r<p$ и $p+q-r<q$ од каде добиваме дека p,q не се делители на $p+q-r$, па затоа важи $p+q-r=1,\ p+q+r=pq$. Со собирање на последните две равенки добиваме $2p+2q=pq+1$ или $(p-2)(q-2)=3$. Од последната равенка добиваме $p=3, q=5$ или $p=5, q=3$. И во двата случаја $r=7$. Конечно, $(p,q,r)\in\{(3,5,7),(5,3,7)\}$.

37. Определи ги сите тројки (a,b,c) од природни броеви, такви што

$$a^2+b^2-33c^2=8bc$$

и a е прост број.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$a^2=33c^2+8bc-b^2=49c^2-16c^2+8bc-b^2=49c^2-[(4c)-2\cdot 4c\cdot b+b^2]$$
$$=(7c)^2-(4c-b)^2=(3c+b)(11c-b)$$

Бидејќи b и c се природни броеви, а a е прост број, од равенката

$a^2=(3c+b)(11c-b)$

следуваат следниве три системи равенки:

$$\text{а)}\begin{cases}3c+b=a\\ 11c-b=a\end{cases},\qquad \text{б)}\begin{cases}3c+b=a^2\\ 11c-b=1\end{cases},\qquad \text{в)}\begin{cases}3c+b=1\\ 11c-b=a^2\end{cases}$$

Случај а) Ако двете равенки ги собереме, добиваме $14c=2a$, т.е. $a=7c$. Бидејќи a е прост број, имаме $a=7$ и $c=1$. Од системот добиваме $b=4$. Значи, едно решение е $(a,b,c)=(7,4,1)$.

Случај б) Ако двете равенки ги собереме, добиваме $a^2=14c-1$. Последното равенство можеме да го запишеме во облик $a^2=7(2a-1)+6$. Значи, остатокот од делењето на a^2 со 7 е еднаков на 6. Но, квадрат на природен број при делење со 7 има остаток 0, 1, 2 или 4. Заради тоа, последниот систем во множеството природни броеви нема решение.

Случај в) Овој систем нема решение, бидејќи ако b и c се природни броеви, тогаш $3c+b>3+1=4>1$.

Конечно, единствено решение на равенката е $(a,b,c)=(7,4,1)$.

38. Докажи дека равенката $x^2+y^2+z^2+t^2=2^{2009}$, каде што $0\le x\le y\le z\le t$, има точно едно решение во множеството на целите броеви.

Решение. Очигледно едно решение на дадената равенка е подредената четворка $(0,0,2^{1004},2^{1004})$. Ќе докажеме дека тоа е и единственото решение на оваа равенка.

Нека (x,y,z,t) е решение на равенката. Бидејќи квадратите на непарните природни броеви даваат остаток 1 при делење со 8, следува дека x,y,z и t се парни броеви (сите останати случаи во однос на парноста на x,y,z,t може да се разгледаат поединечно, од каде ќе се добие противречност со парноста на бројот од левата и десната страна на равенката). Затоа,

$$x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1 \text{ и } t=2t_1,$$

каде што $0\le x_1\le y_1\le z_1\le t_1$. Ако замениме во почетната равенка и скратиме со 4 ја добиваме равенката

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2=2^{2007}.$$

Добиената равенка е од истиот вид како и почетната само степенот на десната страна е намален за два. Од истите причини како и претходно заклучуваме дека

$$x_1=2x_2, y_1=2y_2, z_1=2z_2 \text{ и } t_1=2t_2,$$

каде што $0\le x_2\le y_2\le z_2\le t_2$ и ако замениме во претходната равенка добиваме

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+t_2^2=2^{2005}.$$

Истата постапка ќе ја повториме 1004 пати, и добиваме дека

$$x=2^{1004}a, y=2^{1004}b, z=2^{1004}c \text{ и } t=2^{1004}d,$$

каде што $0\le a\le b\le c\le d$ се цели броеви и важи

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2.$$

Единственото решение на последната равенка при дадените услови е подредената четворка $(0,0,1,1)$. Од тука добиваме дека $(0,0,2^{1004},2^{1004})$ е единственото решение на почетната равенка.

39. Определи ги сите природни броеви n такви, што равенката

$$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2,$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за природните броеви x,y,z важи $x\ge y\ge z$. Тогаш, од неравенството

$$3x^3\ge x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$$

следува $3x \geq ny^2z^2$. Понатаму, од неравенството

$$x^2(ny^2z^2 - x) = y^3 + z^3 \geq 2$$

добиваме $ny^2z^2 - x \geq 1$. Сега од $(y^3-1)(z^3-1) \geq 0$ следува

$$1 + y^3z^3 \geq y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2 - x^3 = x^2(ny^2z^2 - x) \geq x^2 .$$

Оттука и од $3x \geq ny^2z^2$ следува

$$9(1+y^3z^3) \geq 9x^2 \geq n^2y^4z^4 . \qquad (1)$$

Ако $yz=1$, тогаш $y=z=1$ и од неравенството $1+y^3z^3 \geq x^2$ следува $x=1$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $(x,y,z)=(1,1,1)$ е решение за $n=3$.

Ако $yz>1$, тогаш $y^4z^4 > 1+y^3z^3$. Оттука и од (1) добиваме $9>n^2$. Останува да ги разгледаме случаите $n=1$ и $n=2$. За $n=1$ постои решение $(x,y,z)=(3,2,1)$. За $n=2$ од неравенството

$$9(1+y^3z^3) \geq n^2y^4z^4 = (4yz)y^3z^3$$

следува $yz \leq 2$. Тогаш, $y=2$ и $z=1$. Сега равенката го добива видот $x^3+9=8x^2$ и оваа равенка нема решение во множеството природни броеви.

40. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p(p+1)+q(q+1)=r(r+1) .$$

Решение. Равенката има само едно решеие: $p=q=2, r=3$. За да го докажеме ова ќе ги најдеме сите решенија на равенката

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1) \qquad (1)$$

каде p и q се прости броеви, а n е природен број. Од (1) добиваме

$$p\ (p+1) = n(n+1) - q(q+1) = (n-q)(n+q+1)$$

при што мора да е $n>q$. Бидејќи p е прост број имаме $p \mid n-q$ или $p \mid n+q+1$

Ако $p \mid n-q$, тогаш $p \leq n+q$, па затоа $p(p+1) \leq (n-q)(n-q+1)$, односно $n+q+1 \leq n-q+1$ што не е можно.

Според тоа, $p \mid n+q+1$ и значи за некој природен број k важи:

$$n+q+1 = kp, \quad p+1 = k(n-q) . \qquad (2)$$

Ако $k=1$, тогаш $n+q+1=p$ и $p+1=n-q$ од што следува дека $p-q=n+1$ и $p+q=n-1$, што не е можно. Значи, $k>1$. Од (2) лесно наоѓаме

$$\begin{aligned} 2q &= (n+q)-(n-q) = kp-1-(n-q) \\ &= k[k(n-q)-1]-1-(n-q) \\ &= (k+1)[(k-1)(n-q)-1]. \end{aligned}$$

Бидејќи $k \geq 2$ следува $k+1 \geq 3$. Делители на левата страна на последното равенство се $1,2,q,2q$, па затоа $k+1=q$ или $k+1=2q$. Ако $k+1=q$, тогаш $(k-1)(n-q)=3$, па затоа $(q-2)(n-q)=3$. Според тоа, $q-2=1, n-q=3$ и оттука $q=3, n=6, k=4$ и од (2) добиваме $p=3$.

Ако $k+1=2q$, тогаш $(k-1)(n-q)=2$, па затоа $2(q-1)(n-q)=2$, од каде добиваме $q-1=1, n-q=1$ или $q=2, n=3$ и од (2) следува $p=2$.

Според тоа, решенија на (1) се:

$$p=q=2,\ n=3;\ p=5, q=3,\ n=6 \text{ и } p=3, q=5,\ n=6.$$

Конечно, решение на почетната равенка е $p=q=2$, $n=r=3$.

41. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $x(y+1)^2=243y$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $x=\frac{243y}{(y+1)^2}$. Но, тогаш од $x\in\mathbb{N}$, следува $(y+1)^2 \mid 243=3^5$, т.е. $(y+1)^2=1$, $(y+1)^2=3^2$ или $(y+1)^2=3^4$. Според тоа, $y=0$, $y=2$ или $y=8$ и како $y\in\mathbb{N}$ заклучуваме $y=2$ или $y=8$. За $y=2$ имаме $x=54$, а за $y=8$, $x=24$.

42. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x(x+2)=y^2(y^2+1).$$

Решение. Равенката последователно е еквивалентна на равенките

$$x^2+2x+1=y^4+y^2+1,$$

$$(x+1)^2=y^4+y^2+1.$$

Ако (x,y) е решение на равенката, тогаш

$$(y^2)^2<y^4+y^2+1<(y^2+1)^2,$$

т.е. y^4+y^2+1 се наоѓа меѓу два последователни полни квадрати. Јасно, за $y\neq 0$, бројот y^4+y^2+1 не е полн квадрат. Единствен цел број за кој y^4+y^2+1 е полн квадрат е $y=0$. Но тогаш почетната равенка го добива обликот $x(x+2)=0$, која има решенија $x_1=0$ и $x_2=-2$.

Не е тешко да се провери дека $\{(0,0),(-2,0)\}$ се решенија на равенката.

43. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{m^3-1}{m^3+1}=\frac{n^3-1}{n^3+2}.$$

Решение. Ако го искористиме идентитетот

$$k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1,$$

тогаш левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{m^3-1}{m^3+1}=\frac{2(m^2+m+1)}{3(m^2+m)}.$$

Според тоа во множеството природни броеви треба да ја решиме равенката

$$\frac{2(m^2+m+1)}{3(m^2+m)}=\frac{n^3-1}{n^3+2},$$

која е евивалентна на равенката

$$\frac{m(m+1)}{2}=1+\frac{9}{n^3-7}.$$

Левата страна на последната равенка е природен број за секој $m \in \mathbb{N}$, па затоа, ако m и n се решенија на истата, тогаш и $\frac{9}{n^3-7} \in \mathbb{N}$, т.е. $(n^3-7)\,|\,9$. Единствена можност е $n=2$ и притоа добиваме $m=4$.

44. Определи го бројот на парови (x,y) од цели броеви такви што

$$(x+y+2012)^2 = x^2+y^2+2012^2 .$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалелнтна на равенките

$$x^2+y^2+2012^2+2xy+2x\cdot 2012+2y\cdot 2012 = x^2+y^2+2012^2$$

$$xy+2012x+2012y+2012^2 = 2012^2$$

$$(x+2012)(y+2012) = 2^4\cdot 503^2$$

каде 2 и 503 се прости броеви. Понатаму, користејќи дека ако $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е каноничното претставување на природниот број n, тогаш бројот на неговите позитивни делители е еднаков на $(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)$, добиваме дека бројот на позитивните делители е еднаков на $(4+1)(2+1)=15$, па затоа вкупниот број делители (позитивни и негативни) е еднаков на $2\cdot 15=30$. Конечно, бидејќи на секое претставување на десната страна како производ на два множители му соодветствува едно решени на дадената равенка, добиваме дека дадената равенка има 30 решенија во множеството цели броеви.

45. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x^6+3x^3+1=y^4$.

Решение. За $x>0$ имаме

$$\begin{aligned}(x^3+1)^2 &= x^6+2x^3+1 < x^6+3x^3+1 = y^4 \\ &< x^6+4x^3+4 = (x^3+2)^2\end{aligned},$$

т.е. $x^3+1<y^2<x^3+2$, што за цели броеви x и y не е можно.

За $x \le -2$ добиваме

$$\begin{aligned}(x^3+2)^2 &= x^6+4x^3+4 < x^6+3x^3+1 = y^4 \\ &< x^6+2x^3+1 = (x^3+1)^2\end{aligned},$$

т.е. $-(x^3+2)<y^2<-(x^3+1)$, што за цели броеви x и y не е можно.

За $x=-1$ имаме $y^4=-1$, што не е можно.

За $x=0$ ги добиваме решенијата $(0,-1)$ и $(0,1)$.

46. Докажи, дека равенката $x^2+y^2=z^{1990}$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Користеќи го идентитетот

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

и принципот на математичка индукција лесно можеме да докажеме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот $(a^2+b^2)^n$ е еднаков на збир на два квадрати. За секои $a,b\in\mathbb{N}$

постојат $x, y \in \mathbb{N}$ такви што $(a^2+b^2)^n = x^2+y^2$. Ако ставиме $z = a^2+b^2$, $n = 1990$, а a и b ги менуваме во множеството природни броеви добиваме бесконечно многу решенија на дадената равенка.

47. Докажи, дека равенката $5x^2 - 7y^3 = 9$ нема решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Нека претпоставиме дека $a, b \in \mathbb{Z}$ се такви што $5a^2 - 7b^3 = 9$. Тогаш $5a^2 \equiv 9 \pmod 7$, од каде следува $a^2 \equiv -1 \pmod 7$, што не е можно, бидејќи во спротивно имаме

$$1 \equiv a^6 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 7 \text{ или } 0 \equiv a^6 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 7 .$$

48. Колку решенија има равенката $x^2 + y^2 = x^3$ во множеството $\mathbb{N}$, ако x е помал од 2012.

Решение. Нека x и y се природни броеви кои се решенија на равенката. Тогаш $y^2 = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, па според тоа $x^2 \mid y^2$, од каде добиваме $x \mid y$. Значи $x - 1 = (\frac{y}{x})^2$, односно постои n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таков што $x - 1 = n^2$. Од условот $x \in \mathbb{N}$ и $x < 2012$ добиваме $-1 < n^2 < 2012$, т.е. $0 \le n \le 44$.

За $n = 0$ имаме $x = 1, y = 0$ за кои не е исполнет условот на задачата. Значи, $1 \le n \le 44$, односно равенката има 44 решенија.

49. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (x, y, z) такви што

$$xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) = 1 .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2) &= xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-y^2+y^2-x^2) \\ &= x(x^2-y^2)(y-z)+z(y^2-z^2)(y-x) \\ &= (x-y)(y-z)(x(x+y)-z(y+z)) \\ &= (x-y)(y-z)(x^2-z^2+y(x-z)) \\ &= (x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z) \end{aligned}$$

па затоа почетната равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z) = 1 .$$

Оттука заклучуваме дека $x - y, y - z, z - x \in \{-1, 1\}$, и како збир на три непарни броја е непарен број добиваме дека мора да важи

$$(x-y) + (y-z) + (z-x) \ne 0 ,$$

што не е можно.

Значи, дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

50. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3 - y^3 = 999 . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Од $x, y \in \mathbb{N}$ и $x^3 - y^3 > 0$ следува $x > y$. Нека $x = y + d$, $d \in \mathbb{N}$. Со замена во (1), добиваме

$$d^3 + 3d(d^2 + yd) = 999,$$

од каде следува дека $d \mid 999$, $3 \mid d$ и $d^3 < 999$. Според тоа, $d < 10$ и како $3 \mid d$ имаме $d = 3$ или $d = 9$.

За $d = 3$ добиваме $y^2 + 3y - 108 = 0$. Значи, $(y-9)(y+12) = 0$ и како $y \in \mathbb{N}$, наоѓаме $y = 9$, па затоа $x = y + 3 = 12$.

За $d = 9$ добиваме $y^2 + 9y - 10 = 0$. Значи, $(y-1)(y+10) = 0$ и како $y \in \mathbb{N}$, наоѓаме $y = 1$, па затоа $x = y + 9 = 10$.

Конечно, бараните решенија се $(x, y) \in \{(12,9), (10,1)\}$.

Втор начин. Равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3^3 \cdot 37.$$

Бидејќи 37 е прост број и 37 е делител на десната страна, следува дека тој е делител и на левата страна. Но, $37 > 27$ и $x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy > x - y$, па затоа 37 е делител на $x^2 + xy + y^2$. Можни се следниве случаи:

i) $x - y = 1, x^2 + xy + y^2 = 999$. Тогаш $999 = (x-y)^2 + 3xy$, па затоа $3 \mid x - y = 1$ што не е можно.

ii) $x - y = 3, x^2 + xy + y^2 = 333$, од каде следува $(2y+3)^2 = 21^2$, па затоа $y = 9$, $x = 12$.

iii) $x - y = 9, x^2 + xy + y^2 = 111$, од каде следува $(2y+9)^2 = 11^2$, па затоа $y = 1$, $x = 10$.

iv) $x - y = 27, x^2 + xy + y^2 = 37$, од каде добиваме

$$37 = x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy > 27^2,$$

што е противречност.

Конечно, бараните решенија се $(x, y) \in \{(12,9), (10,1)\}$.

51. Докажи, дека равенката

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1 \qquad (1)$$

има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека $x = a, y = b$ е едно решение на равенката (1) во множеството $\mathbb{N}$. Од равенството $(a-1)^2 + (a+1)^2 = b^2 + 1$ следува равенството

$$(2b + 3a - 1)^2 + (2b + 3a + 1)^2 = (3b + 4a)^2 + 1,$$

што значи дека $x = 2b + 3a > a, \ y = 3b + 4a > b$ е решение на 1.

Значи, ако во множеството $\mathbb{N}$ постои едно решение на (1), тогаш равенката има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$. Сега тврдењето на задачата следува од фактото дека $x = 2$, $y = 3$ е решение на (1).

52. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $(x+y)^2=xy(xy+1)$. Производ на два последователни цели броја може да биде квадрат на цел број ако и само ако тие броеви се $-1,0$ или $0,1$. Значи, $xy=-1$ или $xy=0$. И во двата случаи $x+y=0$. Решавајќи ги соодветните системи лесно добиваме дека единствени можни решенија на дадената равенка се $(0,0); (1,-1)$ и $(-1,1)$.

53. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x^2-y^2=203$.

Решение. Ако парот (x,y) е решение на равенката $x^2-y^2=203$, тогаш и паровите $(-x,y),(x,-y),(-x,-y)$ се исто така решение на реавенката. Затоа доволно е да ги определиме само позитивните решенија.

Од $203=1\cdot 203=7\cdot 29$ и $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ги добиваме системите

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=203 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-y=7 \\ x+y=29 \end{cases}$$

чии решенија се $x=102$, $y=101$ и $x=18$, $y=11$, соодветно. Според тоа решенија на дадената равенка се паровите (102,101), $(102,-101)$, $(-102,101)$, $(-10$
$(18,11),(-18,11),(-18,-11)$ и $(18,-11)$.

54. Определи го најмалиот природен број n за кој равенката

$$2x^2+2xy+5y^2=2015n$$

има решение во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+2y)^2+(x-y)^2=31\cdot 65n. \tag{1}$$

Левата страна на (1) е делива со простиот 31, за кој важи $31\equiv 3 \pmod 4$. Понатаму, од теоремата на Ферма следува дека $31 \mid x+2y$ и $31 \mid x-y$. Последното значи дека $31 \mid 3y$ и како $\mathrm{NZD}(31,3)=1$ добиваме $31 \mid y$, па затоа $31 \mid x$. Според тоа, $x=31a$, $y=31b$, па ако замениме во (1) добиваме дека и двете страни на равенката се деливи со 31. Според тоа, $n=31m$, од каде ја добиваме равенката

$$(a+2b)^2+(a-b)^2=65m. \tag{2}$$

Бидејќи $65=7^2+4^2=8^2+1^2$ и тоа се единствените претставувања на бројот 65 како збир на два квадрати на природни броеви, добиваме дека најмалиот природен број за кој равенката (2) има решение е $m=1$. Понатаму, ако ги земеме предвид знаците и фактот дека $a+2b-(a-b)=3b$ е делив со 3, ги добиваме следните решенија на равенката (2):

$a+2b$	7	–7	4	–4	8	–8	1	–1
$a-b$	4	–4	7	–7	–1	1	–8	8
a	5	–5	6	–6	2	–2	–5	5
b	1	–1	–1	1	3	–3	3	–3

Конечно, $n=31$ и решенијата се

$$(x,y)\in\{(155,31),(-155,-31),(186,-31),(-186,31),$$
$$(62,93),(-62,-93),(-155,93),(155,-93)\}.$$

55. Определи ги сите четирицифрени природни броеви m, помали од 2005, за кои постои природен број $n<m$ таков што $m-n$ има најмногу три природни делители и mn е точен квадрат.

Решение. Условот $m-n$ да има најмногу три природни делители значи дека $m-n=p^k$, каде p е прост број и $k\in\{0,1,2\}$. За $k=0$ бројот $mn=n(n+1)$ не е точен квадрат. Нека $m-n=p^k$, $k\in\{1,2\}$ и $mn=t^2$, t е природен број. Тогаш $n(n+p^k)=t^2$, т.е.

$$(2n+p^k-2t)(2n+p^k+2t)=p^{2k},$$

од што следува дека $2n+p^k-2t=p^s$ и $2n+p^k+2t=p^r$, каде r и s се цели броеви $0\le s<r\le 2k$ и $r+s=2k$.

За $k=1$ имаме единствена можност $2n+p^k-2t=1$ и $2n+p^k+2t=p^2$, од каде добиваме $n=\frac{(p-1)^2}{4}, m=n+p=\frac{(p+1)^2}{4}$. Но, $1000\le m<2005$, па затоа $p=83,79,73,71,67$ и соодветно $m=1764,1600,1369,1296,1156$.

За $k=2$ можно е $(r,s)=(4,0)$ или $(r,s)=(3,1)$. Во првиот случај добиваме $n=\frac{(p^2-1)^2}{4}$ и $m=n+p=\frac{(p^2+1)^2}{4}$. Но, од неравенството $1000\le m<2005$ следува дека $p=8$ и ова не е прост бро. Во вториот случај имаме $m=n+p=\frac{p(p+1)^2}{4}$ и сега имаме решенија $p=19,17$ и соодветно $m=1900,1377$.

56. Докажи, дека равенката $x^2+2y^2+98z^2=\underbrace{77...7}_{2005}$ нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека дадената равенка има решение (a,b,c). Тогаш 7 е делител на a^2+2b^2. Јасно, ако еден од броевите a или b е делив со 7, тогаш и другиот е делив со 7. Ако ниту еден од броевите a и b не е делив со 7, добиваме противречност, бидејќи тогаш остатоците при делење со 7 на квадратите и удвоебите квадрати се 1, 2 и 4, а збирот на било кои два од нив не е делив со 7.

Според тоа, a и b се деливи со 7. Но, тогаш левата страна е делива со 7^2, па затоа бројот $\underbrace{11...1}_{2005}$ треба да е делив со 7. Меѓутоа, последното не е точно, бидејќи бројот 111111 е делив со 7 и $2005=6\cdot 334+1$. Конечно, од претходно изнесеното следува дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

57. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{10}^4=2011.$$

Решение. Ако некој x_i е парен број, $x_i = 2k$, тогаш $x_i^4 = 16k^4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 16)$. Ако x_i е непарен број, тогаш

$$x_i^4 - 1 = (x_i - 1)(x_i + 1)(x_i^2 + 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 16)$$

(првите два множитела се последователни парни броеви, а и третиот множител е парен број), од каде $x_i^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 16)$. Тоа значи дека

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{10}^4 \equiv k (\mathrm{mod}\, 16),\ k \le 10.$$

Од друга страна, $2011 \equiv 11 (\mathrm{mod}\, 16)$, што значи дека дадената равенка нема решенија.

58. Докажи дека равенката $3x^5 + y^5 = z^5$ нема решенија во множеството природни броеви.

Решение. Можеме да претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(x, y, z) = 1$ (во спротивно равенката ќе ја поделиме со најголемиот заеднички делител на броевите x, y и z). Ако $y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ и $z \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш делејќи ја равенката со 3 добиваме $x^5 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. Ако $x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ тогаш и $x^5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, а ако $x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ следува $x^5 \equiv 2^5 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$. Според тоа мора $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. Значи x, y и z се деливи со 3, што не е можно заради претпоставката $\mathrm{NZD}(x, y, z) = 1$. Ако еден од броевите y или z е делив со 3 тогаш и другиот е делив со 3, заклучувајќи како претходно. Значи повторно дојдовме до заклучокот $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, што не е можно заради $\mathrm{NZD}(x, y, z) = 1$.

Сега ако $y \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ и $z \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш $y^5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ и $z^5 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, па левата страна од равенката има остаток 1, а десната 2 при делење со 3. Значи и овој случај не е можен. Аналогно се заклучува и ако $y \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$ и $z \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$.

59. Определи ги сите цели броеви n за кои постои цел број m таков што $n^2 + n - 1$ е делител и на $14m + 5$ и на $20m - 3$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $n^2 + n - 1$ е делител на

$$10(14m + 5) - 7(20m - 3) = 71.$$

Бидејќи $n^2 + n - 1 = (n + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} > -2$ и 71 е прост број, можни се три случаи $n^2 + n - 1 = -1,$ 1 или 71. Во првиот и вториот случај $n = -1, 0, 1$ и 2 (тврдењето важи за секој цел број m).

Во третиот случај решенија на равенката $n^2 + n - 1 = 71$ се $n = -9$ и $n = 8$. Тогаш $14m + 5 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 71)$, после множењето со 5 е еквивалентно со $m \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 71)$, а $20m - 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 71)$ после множењето со 32 е еквивалентно со $m \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 71)$. Според тоа, сите броеви кои при делење со 71 даваат остаток го задоволуваат условот на задачата.

Конечно, $n = -9, -1, 0, 1, 2, 8$ се решенија на задачата.

60. Определи ги сите вредности на природниот број n за кои системот

$$\begin{cases} x+y=n^2 \\ 10x+y=n^3 \end{cases}$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Од првата равенка имаме $y=n^2-x$. Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка добиваме $9x=n^2(n-1)$. Бидејќи бараме решенија во множеството природни броеви имаме $9\,|\,n^2(n-1)$. Според тоа, можни се два случаи.

Случај 1. $3\,|\,n$. Тогаш $n=3k$, па затоа $x=k^2(3k-1)$, $y=k^2(10-3k)$, за некој природен број k. Бидејќи $y\in\mathbb{N}$, можни вредности за k се $1,2$ и 3. Во тој случај $n=3,6,9$.

Случај 2. $3\nmid n$ и $9\,|\,n-1$. Тогаш, постои $m\in\mathbb{N}$ така што $n=9m-1$. Тогаш $x=m(9m+1)^2$, $y=(9m+1)^2(1-m)$. За било кој $m\in\mathbb{N}$ не може y да биде природен број.

Значи единствени вредности за n за кои системот има решенија во множеството природни броеви се 3, 6 и 9.

61. Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} a^3-3b=15 \\ b^2-a=13. \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка заклучуваме дека $3\,|\,a$, т.е. $a=3k$. Според тоа, првата равенка го добива видот $b=9k^3-5$. Со замена во втората равенка добиваме $(9k^3-5)^2-3k=13$, односно $27k^6-30k^3-k+4=0$. Но, k е природен број, па затоа $k\,|\,4$, т.е. $k\in\{1,2,4\}$. Понатаму, од последната равенка следува дека $3\,|\,(k-4)$, па затоа k не може да биде 2.

За $k=1$ имаме $a=3k=3$ и $b=9k^3-5=4$. Лесно се проверува дека подредениот пар $(3,4)$ е решение на дадениот систем.

За $k=4$ имаме $a=3k=12$ и $b=9k^3-5=571$, т.е парот $(4,12)$ е решение на првата равенка. Меѓутоа,

$$27k^6-30k^3-k+4=27\cdot 4^6-30\cdot 4^3-4+4=3\cdot 4^3(9\cdot 4^3-10)>0,$$

што значи дека парот $(4,12)$ не е решение на втората равенка.

62. Докажи, дека системот

$$\begin{cases} x^2+2y^2=z^2 \\ 2x^2+y^2=t^2 \end{cases}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека претпоставиме дека системот има решение во множеството $\mathbb{N}$, при што $\mathrm{NZD}(x,y)=1$, бидејќи ако $\mathrm{NZD}(x,y)=d>1$, тогаш и двете равенки можеме да ги поделиме со d^2. Според тоа, барем еден од броевите x и y е непарен. Меѓутоа, и двата броја не може да се непарни, бидејќи во тој случај левите страни на равенките при делење со 4 даваат остаток 3, што противречи на фактот дека десните страни се точни квадрати.

Нека x е парен, а y е непарен број. Тогаш левата страна на првата равенка на системот при делење со 4 дава остаток 2, што противречи на фактот дека десната страна е точен квадрат. Аналогно, ако x е непарен, а y парен број, тогаш до истата противречност доведува втората равенка на системот.

63. Докажи, дека системот

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = z^2 \\ 5x^2 + y^2 = t^2 \end{cases} \tag{1}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Ако системот (1) има решение x, y, z, t, тогаш (1) има и такво решение за кое важи $\text{NZD}(x, y) = 1$. Ако ги собереме равенките на системот добиваме

$$6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2, \tag{2}$$

од што следува дека $3 \mid z^2 + t^2$. Последното е можно ако и само ако $3 \mid z$ и $3 \mid t$, што значи дека десната страна на (2) е делива со 9. Но, тогаш $3 \mid x^2 + y^2$, па затоа $3 \mid x$ и $3 \mid y$, што противречи на $\text{NZD}(x, y) = 1$.

64. Докажи, дека системот

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases} \tag{1}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Од (1) следува $7(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$, т.е. $7 \mid z^2 + t^2$. Аналогно, како во претходната задача заклучуваме дека $7 \mid z$ и $7 \mid t$, па затоа $49 \mid 7(x^2 + y^2)$, т.е. $7 \mid x$ и $7 \mid y$. Според тоа, $x = 7a, y = 7b, z = 7c, t = 7d$ и ако замениме во (1) го добиваме системот

$$\begin{cases} a^2 + 6b^2 = c^2 \\ 6a^2 + b^2 = d^2. \end{cases}$$

Последниот систем, всушност е системот (1) и продолжувајќи ја постапката заклучуваме, дека $7^k \mid x, 7^k \mid y, 7^k \mid z, 7^k \mid t$, за секој $k \in \mathbb{N}$. Последното е можно ако и само ако $x = y = z = t = 0$, што значи дека системот (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

65. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Ќе го користиме равенството

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)\,. \tag{1}$$

Ако $x,y,z\in\mathbb{Z},\ x+y+z=3$ и $x^3+y^3+z^3=3$, тогаш од (1) добиваме

$$8=(x+y)(y+z)(z+x)=(3-x)(3-y)(3-z)\,, \tag{2}$$

а бидејќи $x+y+z=3$ добиваме

$$6=(3-x)+(3-y)+(3-z)\,. \tag{3}$$

Од (3) следува, дека меѓу броевите $3-x, 3-y, 3-z$ или сите или само еден е парен. Во првиот случај сите броеви по апсолутна вредност се еднакви на 2, а според (3) тие се еднакви на 2, па затоа $x=y=z=1$. Во вториот случај, според (2) еден од броевите $3-x, 3-y, 3-z$ по апсолутна вредност е еднаков на 8, а другите два по апсолутна вредност се еднакви на 1, па од (3) следува дека едниот е еднаков на 8, а другите два се еднакви на -1. Значи, $x=-5,\ y=z=4$ или $x=y=4,\ z=-5$ или $x=z=4,\ y=-5$.

Конечно, дадениот систем во множеството $\mathbb{Z}$ има четири решенија и тоа

$$(x,y,z)\in\{(1,1,1),(-5,4,4),(4,-5,4),(4,4,-5)\}\,.$$

66. Определи ги сите цели броеви x,y и z такви што

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^2=1. \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка го изразуваме z, го заменуваме во втората и добиваме $x^3+y^3+(1-(x+y))^2=1$, односно $(x+y)(x^2-xy+y^2+x+y-2)=0$. Ако $x+y=0$, тогаш $z=1$ и секоја подредена тројка $(n,-n,1),\ n\in\mathbb{Z}$ е решение на задачата. Ако $x+y\neq 0$, тогаш $x^2-xy+y^2+x+y-2=0$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $4x^2-4xy+4y^2+4x+4y=8$ т.е. на равенката $(2x-y+1)^2+3(y+1)^2=12$ од која следува дека $(y+1)^2\leq 4$. Ако $(y+1)^2=1$, тогаш $(2x-y+1)^2=9$, а ако $(y+1)^2=4$, тогаш $(2x-y+1)^2=0$. Разгледувајќи ги сите можни случаи за y добиваме дека решенија се и подредените тројки: $(0,1,0);(1,0,0),(-2,-3,6)$ и $(-3,-2,6)$.

67. Колку решенија во $\mathbb{Z}$ има равенката $\sqrt{x}+\sqrt{y}=100$?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} &\sqrt{x}+\sqrt{y}=100 \\ &\sqrt{y}=100-\sqrt{x} \\ &y=10000-200\sqrt{x}+x\,. \end{aligned}$$

Оттука следува дека $\sqrt{x}$ е рационален број, а тоа е можно само ако x е точен квадрат. Аналогно заклучуваме дека y е точен квадрат. Бидејќи бројот 100 може да се претстави на 101 начини како збир на ненегативни собироци, следува дека дадената равенка има 101 решение. Множеството решенија е следното:

$$M=\{(k^2,(100-k)^2)\mid k\in\mathbb{N}_0, k\le 100\}.$$

68. Најди ги сите тројки (x,y,z) природни броеви за кои важи $xy^2z^3=384$ и $x^2y^3z=1152$.

Решение. *Прв начин.* Од првата равенка ако го изразиме x добиваме $x=\frac{384}{y^2z^3}$. Со замена во втората равенка и со средување на добиениот израз имаме $yz^5=128=2^7$. Ако $z\ge 3$ тогаш $yz^5\ge y3^5=243y>128$. Значи z може да биде 1 или 2. Ако $z=1$ тогаш $y=128$, па $x=\frac{384}{128^2}$ и не е природен број. Значи $z=2$. Тогаш $y=\frac{128}{32}=4$ и $x=\frac{384}{16\cdot 8}=3$. Според тоа единствена тројка природни броеви со бараните особини е тројката $(x,y,z)=(3,4,2)$.

Втор начин. Ако ја поделиме втората со првата равенка добиваме $\frac{xy}{z^2}=3$, т.е. $xy=3z^2$. Со замена во првата равенка добиваме $yz^5=128=2^7$. Тогаш $z=2^m$, $y=2^n$ каде $m,\ n\in\mathbb{N}$. Имаме $2^{5m}\cdot 2^n=2^7$, па $5m+n=7$. Бидејќи $m,\ n\in\mathbb{N}$ добиваме дека $m=1, n=2$. Според тоа $z=2,\ y=2^2=4$ и од првата равенка во задачата добиваме дека $x=3$.

69. Определи ги сите целобројни решенија на равенката $2^x+1=y^2$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$2^x=y^2-1=(y-1)(y+1).$$

Од равенката $2^x=(y-1)(y+1)$, гледаме дека имаме две можности, и тоа

$$\begin{cases}2^a=y+1\\ 2^b=y-1\end{cases},\ (a>b) \qquad \text{и} \qquad \begin{cases}-2^a=y+1\\ -2^b=y-1\end{cases},\ (b>a).$$

Од првиот систем имаме, $2=2^a-2^b=2^b(2^{a-b}-1)$. Бидејќи $2^{a-b}-1$ е непарен број, добиваме $2^b=2$ и $2^{a-b}-1=1$. Според тоа $b=1$ и $a-b=1$, т.е. $b=1$ и $a=2$. Ако замениме во една равенка од системот, добиваме $y=3$ и од почетната равенка $x=3$.

Од вториот систем, добиваме, $2=2^b-2^a=2^a(2^{b-a}-1)$. Аналогно, бидејќи $2^{b-a}-1$ е непарен број, добиваме $2^a=2$ и $2^{b-a}-1=1$. Од последните две равенки добиваме $a=1$ и $b=2$. Конечно, $y=-3$ и од почетната равенка добиваме $x=3$.

Значи, решение на равенката се подредените парови

$$(x,y)=(3,3) \text{ и } (x,y)=(3,-3).$$

70. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$5a^b-b=2004.$$

Решение. Лесно се проверува дека за $a=1$ равенката нема решенија. Нека $a\geq 2$. Ако $b\geq 9$, тогаш $5a^b-b\geq 5\cdot 2^9-9=2551$. Проверуваме за $b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и добиваме дека $a=401$, $b=1$.

71. Реши ја во множеството прости броеви равенката $x^y+1=z$.

Решение. Од равенката $x^y+1=z$ следува дека еден од броевите x^y или z е парен, а другиот непарен. Ако z е парен, тогаш $z=2$, па равенката го добива обликот $x^y+1=2$ од каде што $x=y=1$, x и y не се прости. Значи, z е непарен, а x^y е парен. Ако x^y е парен, тогаш таа е точна само за $x=2$, па равенката го добива видот $2^y+1=z$.

Бидејќи z е прост број, имаме две можности $y=2$ или $y=2k+1$

i) Ако $y=2$, тогаш $z=2^2+1=5$, па едно решение на равенката е: $x=y=2$, $z=5$.

ii) Ако $y=2k+1$, тогаш

$$\begin{aligned}2^y+1&=2^{2k+1}+1=2\cdot 4k+1=2\cdot(4^k-1)+3\\&=2\cdot(4-1)(4^{k-1}+4^{k-2}+...+4+1)+3\\&=3[2(4^{k-1}+4^{k-2}+...+4+1)+1]=3Q\end{aligned}$$

Ова, пак, не е можно, бидејќи z е прост број.

Следствено, единствено решение е: $x=y=2$, $z=5$.

72. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката.

$$1+x+x^2+x^3=2^y.$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$(1+x)(1+x^2)=2^y,$$

па затоа $1+x=2^m$ и $1+x^2=2^{y-m}$, $m\geq 0$, т.е. $x=2^m-1$ и $x^2=2^{y-m}-1$. Ако ја квадрираме првата равенка добиваме

$$2^{y-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2.$$

Можни се два случаја:

1) за $m=0$ равенката има единствено решение $x=y=0$,
2) за $m>0$ добиваме $2^{y-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$. Броевите 2^m и 2^{2m-1} се парни, па затоа 2^{y-m-1} мора да е непарен, што е можно само ако $2^{y-m-1}=1$, т.е. $y=m-1$. Со замена добиваме $2^m=2^{2m-1}$, односно $m=1$. Конечно $x=1$ и $y=2$.

73. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$2^a3^b+3^{b+1}+2^a=13.$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот $3^b(2^a-3)=13-2^a$. Од $3^b>0$ следува дека броевите $13-2^a$ и 2^a-3 имаат ист знак, што значи дека

$3 < 2^a < 13$. Последниот услов е исполнет за $a = 2$ и $a = 3$. За $a = 2$ имаме $3^b = 9$, т.е. $b = 2$. За $a = 3$ имаме $5 \cdot 3^b = 5$, т.е. $b = 0$.

Конечно, единствени решенија на дадената равенка се $(a,b) \in \{(2,2),(3,0)\}$.

74. Во множеството цели броеви реши ја равенката $4 \cdot 3^{2m} + 5 = n^2$.

Решение. За $m < 0$ бројот $4 \cdot 3^{2m}$ не е цел број, а додека $n^2 - 5$ е цел број, па во овој случај равенката нема решение. За $m = 0$ имаме $n^2 = 9$, од каде следува $n = \pm 3$ и во овој случај имаме две решенија $(m,n) \in \{(0,3),(0,-3)\}$. Ако $m \geq 1$, тогаш $3 \mid 4 \cdot 3^{2m}$, па затоа при делење со 3 бројот $4 \cdot 3^{2m} + 5$ дава остаток 2. Но, $n^2 \equiv 0$ или $1 (\mathrm{mod}\, 3)$, па затоа за $m \geq 1$ дадената равенка нема решение.

75. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(2n)^{2n} - 1 = m^3. \tag{1}$$

Решение. Равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$m^3 = [(2n)^n - 1][(2n)^n + 1]. \tag{2}$$

Бидејќи $\mathrm{NZD}((2n)^n - 1, (2n)^n + 1) = \mathrm{NZD}((2n)^n - 1, 2) = 1$, од (2) следува дека постојат $a,b \in \mathbb{N}$ такви што $b > a > 1$ и $(2n)^n - 1 = a^3$, $(2n)^n + 1 = b^3$. Ако ги одземеме последните две равенства ја добиваме равенката

$$2 = b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2),$$

која нема решенија во множеството природни броеви бидејќи за секои $a,b \in \mathbb{N}$ важи $b^2 + ab + a^2 > 2$. Според тоа, равенката (1) нема решение во множеството природни броеви.

76. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Решение. Сведуваме по модул 11 и добиваме $x^5 + 4^y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 11)$, при што важи $x^5 \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 11)$, па мора да важи $4^y \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 11)$. Конгруенцијата $4^y \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 11)$ не важи за ниту еден y, а додека конгруенцијата $4^y \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 11)$ важи ако и само ако $5 \mid y$.

Воведуваме смена $t = 4^{\frac{y}{5}}$ и ја добиваме равенката $x^5 + t^5 = A \cdot B = 2013^z$, каде $\mathrm{NZD}(x,t) = 1$, $A = x + t$ и $B = x^4 - x^3 t + x^2 t^2 - x t^3 + t^4$. Понатаму, од

$$B = A(x^3 - 2x^2 t + 3x t^2 - 4t^3) + 5t^4$$

следува дека $\mathrm{NZD}(A,B) = \mathrm{NZD}(A, 5t^4) \mid 5$, но $5 \nmid 2013^z$, па затоа $\mathrm{NZD}(A,B) = 1$. Според тоа, $A = a^z$ и $B = b^z$, за некои природни бореви a и b такви што $ab = 2013$.

Меѓутоа, од неравенството $\frac{1}{16}A^4 \le B \le A^4$, кое се докажува со едноставна примена на неравенствата меѓу средините, добиваме $\frac{1}{16}a^4 \le b \le a^4$, т.е. $\frac{1}{16}a^5 \le ab = 2013 \le a^5$. Оттука следува $5 \le a \le 8$, што не е можно бидејќи 2013 нема делители во интервалот $[5,8]$.

77. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) такви што

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Решение. Нека $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$. Бројот y е непарен и $2^x \mid (y-1)(y+1)$, но двата множители не се деливи со 4, од каде следува дека еден од нив е делив со 2^{x-1}, т.е. $y=2^{x-1}z\pm 1$. Од друга страна, очигледно е дека

$$2^x+1<y<2^{x+1}-1,$$

за $x\ge 2$, па затоа $z=3$. Ако означиме $t=2^{x-1}$, тогаш почетната равенка го добива обликот

$$8t^2+2t+1=(3t\pm 1)^2.$$

Последната равенка во множеството природни броеви има единствено решение $t=8$. Сега, $x=4$ и $y=23$ и тоа навистина е решение, бидејќи $1+2^4+2^9=23^2$.

78. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$(2^{2015}+1)^x+2^{2015}=2^y+1.$$

Решение. Јасно, за $x\le 1$ решенија на дадената равенка се $(0,2015)$ и $(1,2016)$.

Нека $x>1$. Од $3\mid 2^{2015}+1$ следува $(2^{2015}+1)^x+2^{2015}\equiv 2^{2015}\equiv 5 \pmod 9$, па затоа $2^y\equiv 4 \pmod 9$, од каде добиваме дека $y=6k+2$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Сега, по модул 13 имаме $2^{2015}\equiv 7 \pmod{13}$ и $2^y=(2^6)^k\cdot 2^2\equiv \pm 4 \pmod{13}$, па така добиваме $8^x+6\equiv \pm 4 \pmod{13}$. Меѓутоа, 8^x дава еден од остатоците $1,5,8,12$ по модул 13, па затоа последната конгруенција не е можна.

79. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3-5x+28=2^y(2^y+1). \tag{1}$$

Решение. Да разгледаме деливост со 7. Левата страна на равенката може да дава остатоци 0, 2, 3, 4 и 5, а десната 2 и 6. Според тоа, и двете страни даваат остаток 2 при делење со 7, а тоа е можно само ако y е делив со 3. Нека $y=3k$, $k\in\mathbb{N}$ и равенката да ја запишеме во видот

$$x^3-4^{3k}=2^{3k}+5x-28, \text{ т.е. } (x-4^k)(x^2+4^k x+4^{2k})=2^{3k}+5x-28.$$

Ако $x<4^k$, левата страна на последната равенка е негативна, па затоа

$$0>2^{3k}+5x-28\ge 5x-20,$$

од каде следува $x<4$. Со непосредна проверка се покажува дека за $x=1,2,3$

равенката нема решенија.

Ако $x > 4^k$, тогаш

$$x^3 - 4^{3k} \ge x^2 + 4^k x + 4^{2k} \ge x^2 + 4x + 2^{4k} > 5x + 2^{3k} > 2^{3k} + 5x - 28,$$

што значи дека и во овој случај задачата нема решение.

Останува случајот $x = 4^k$, при што ја добиваме равенката $2^{3k} + 5\cdot 4^k = 28$, чие единствено решение е $k = 1$. Според тоа, $x = 4,\ y = 3$ е единствено решение на дадената равенка.

Забелешка. Ако се бара равенката (1) да се реши во множеството $\mathbb{Z}$, тогаш прво треба да забележиме дека за $x \le -4$ левата страна на равенката е негативна, а десната е пзоитивна. Понатаму, со непосредна проверка се докажува дека случаите $x = -3, -2, -1$ и 0 не водат до решение. Исто така, случајот $y = 0$ не води до решение, а ако $y < 0$, тогаш левата страна на равенката е цел, а десната страна не е цел број. Според тоа, x и y се природни броеви и сега постапуваме како при решавањето на дадената равенка во множеството природни броеви.

80. Определи ги сите решенија на равенката

$$3^x + 3^y + 3^z = 21897,$$

такви што $x, y, z \in \mathbb{N}$ и $x < y < z$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$3^x(1 + 3^{y-x} + 3^{z-x}) = 27\cdot 811.$$

Бидејќи $\text{NZD}(3^x, 811) = 1$ и $\text{NZD}(1 + 3^{y-x} + 3^{z-x}, 27) = 1$, од последната равенка добиваме

$$\begin{cases} 3^x = 27 \\ 1 + 3^{y-x} + 3^{z-x} = 811 \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $x = 3$, а втората равенка го добива обликот

$$3^{y-3} + 3^{z-3} = 810,\ \text{т.е.}\ 3^{y-3}(1 + 3^{z-y}) = 3^4 \cdot 10.$$

Заради $\text{NZD}(3^{y-3}, 10) = 1$ и $\text{NZD}(1 + 3^{y-z}, 3^4) = 1$, добиваме

$$\begin{cases} 3^{y-3} = 3^4 \\ 1 + = 3^{z-y} = 10 \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $y - 3 = 4$, т.е. $y = 7$, а втората равенка го добива обликот $3^{z-4} = 3^2$, па затоа $z = 6$.

Конечно, решение на почетната равенка е $x = 3, y = 7, z = 6$.

81. За природните броеви M и n е познато дека бројот M е делив со сите природни броеви од 1 до n, но не е делив со $n+1, n+2$ и $n+3$. Определи ги сите можни вредности на n.

Решение. Ќе докажеме дека дека $n+1, n+2$ и $n+3$ се степени (евентуално први) на прости броеви. Нека претпоставимедека некој од овие броеви може да се претстави во облик ab, каде $a \ge 2$, $b \ge 2$ и $\text{NZD}(a, b) = 1$. Бидејќи ab не е делител на M заклучуваме дека a или b не е делител на M . Нека a не е делител на M . Тогаш од условот следува дека $ab-a\le 2$, што не е можно.

Според тоа, $n+1, n+2$ и $n+3$ се степени на прости броеви. Понатаму, барем еден од нив е парен, па затоа е еднаков на 2^x. Еден од овие броеви е делив со 3, па затоа е еднаков на 3^y. Заради парноста важи $2^x=3^y\pm 1$.

Случај 1. Нека $2^x=3^y+1$. Имаме $2^x\equiv 1 (\text{mod} 3)$ кога x е парен број и $2^x\equiv 2(\text{mod} 3)$ кога x е непарен број. Според тоа, $x=2z$ и $(2^z-1)(2^z+1)=3^y$. Тогаш 2^z-1 и 2^z+1 се степени на бројот 3, што е можно само за $z=1, 3^y=3, 2^x=4$, од каде следува $n=1$ или $n=2$. Последното е можно за $M=1$ или $M=2$, соодветно.

Случај 2. Нека $2^x=3^y-1$. За $x=1$ го добиваме едното од претходно најдените решенија за n, Сега нека $x\ge 2$. Имаме $3^y\equiv 1(\text{mod} 4)$ ако y е парен и $3^y\equiv 3(\text{mod} 4)$ ако y е непарен. Според тоа, $y=2z$ и $2^x=(3^z-1)(3^z+1)$. Тогаш 3^z-1 и 3^z+1 се степени на 2, што е можно само за $z=1$, $3^y=9$, $2^x=8$, од каде добиваме $n=6$ или $n=7$. Одговорот $n=6$ е можен при $M=60$. За $n=7$ добиваме $n+3=10$, кој не е степен на прост број.

82. Во множеството природни броеви решија равенката $n^3-3^m=2015$.

Решение. Имаме $2015=5\cdot 13\cdot 31$. Понатаму, од $3^3\equiv 1(\text{mod} 13)$ следува $3^{3k}\equiv 1 (\text{mod} 13)$, $3^{3k+1}\equiv 3(\text{mod} 13)$ и $3^{3k+2}\equiv 9(\text{mod} 13)$. Од овие можности остаток за n^3 при делење со 13 е само 1, па затоа $m=3k$. Тогаш

$$5\cdot 13\cdot 31=n^3-(3^k)^3=(n-3^k)(n^2+3^k n+3^{2k}).$$

Од друга страна,

$$(n-3^k)^2<n^2+3^k n+3^{2k},$$

па затоа треба да ги провериме само случаите

$$n-3^k=1,\ n^2+3^k n+3^{2k}=2015 \text{ и } n-3^k=5, n^2+3^k n+3^{2k}=403.$$

Ако го изразиме n преку 3^k и замениме, добиваме квадратни равенки по n. Лесно се добива дека решение имаме само во вториот случај: $n=14, k=2$, што значи дека дадената равенка има единствено решение $n=14$, $m=6$.

83. Определи ги сите природни броеви n за кои $A=n(n+2)(n+3)(n+5)$ има точно три различни прости делители. (Некои од простите делители може да го делат A и со степен повисок од 1.)

Решение. Очигледно еден од простите делители е 2. Ако ниту еден од броевите $n, n+2$, $n+3$ и $n+5$ не е делив со 3, тогаш двата непарни броеви се степени на различни непарни прости броеви, а тогаш двата парни се степени на 2, со евентуален исклучок на случајот кога $5|n$. Добиваме $n=2$ и соодветно $A=2\cdot 4\cdot 5\cdot 7$, кој ги има саканите својства или $n=5\cdot 2^x, n+2=2^y>2$ и $n+5=5^z$

што значи дека $x=1$ и тогаш $n+2=12$ е делив со 3 (противречност) или $n=5^x, n+3=2^y>2$ и $n+5=2\cdot 5^z$, при што мора да е $x=z=1$, па добиваме $n=5$ и $A=5\cdot 7\cdot 8\cdot 10$.

Во натамошните разгледувања ги искористиме следниве две познати леми.

Лема 1. Во множеството цели ненегативни броеви сите решенија на равенката $2^x-3^y=1$ се $(x,y)=(1,0)$ и $(2,1)$.

Доказ. За $y=0$ добиваме $x=1$. Ако $y>0$, тогаш по модул 3 заклучуваме дека x е парен број, т.е. $x=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Сега, од $(2^k-1)(2^k+1)=3^y$ добиваме $2^k-1=1$, т.е. $k=1$, па затоа $x=2, y=1$. ■

Лема 2. Во множеството цели ненегативни броеви сите решенија на равенката $3^x-2^y=1$ се $(x,y)=(1,1)$ и $(2,1)$.

Доказ. За $y=0$ равенката нема решение, за $y=1$ добиваме $x=1$ и за $y=2$ равенката нема решение. Ако $y>2$, тогаш по модул 4 добиваме дека x е парен број, т.е. $x=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Сега, од $(3^k-1)(3^k+1)=2^y$ добиваме $3^k-1=2$, т.е. $k=1$ и тогаш $x=2, y=3$. ■

Нека два од броевите $n, n+2$, $n+3$ и $n+5$ се деливи со 3. Притоа, точно еден од овие два броја е парен, а другиот е степен на бројот 3 (зошто?). Имаме два случаја:

1) Ако два броја деливи со 3 се n и $n+3$, тогаш $n=3\cdot 2^u$ и $n+3=3^v$ или $n=3^u$ и $n+3=3\cdot 2^v$. Добиваме
$$3=3^v-3\cdot 2^u\text{, т.е. } 1=3^{v-1}-2^u \text{ или } 3=3\cdot 2^v-3^u\text{, т.е. } 1=2^v-3^{u-1}.$$
Сега, соодветно на лема 1 и лема 2 добиваме $n=6$ ($A=6\cdot 8\cdot 9\cdot 11$ го има саканото својство), $n=24$ ($A=24\cdot 26\cdot 27\cdot 29$ не дава решение), $n=3$ ($A=3\cdot 5\cdot 6\cdot 8$ го има саканото својство) и $n=9$ ($A=9\cdot 11\cdot 12\cdot 14$ не дава решение).
2) Ако два броја деливи со 3 се $n+2$ и $n+5$, тогаш со аналогни расудувања добиваме уште едно решение $n=4$ ($A=4\cdot 6\cdot 7\cdot 9$ го има саканото својство).

84. За секој подреден пар природни броеви (m,n) дефинираме операција $m*n=|37^m-29^n|$.

а) Дали постои подреден пар (m,n) таков што $m*n=2014$?

б) Определи ја најмалата вредност на изразот $m*n$.

Решение. а) Бидејќи секој од броевите 37^m и 29^n при делење со 4 дава остаток 1, следува дека $m*n$ се дели со 4. Но, 2014 не се дели со 4, па затоа не постои подреден пар (m,n) таков што $m*n=2014$.

б) Јасно, $m*n>0$. Од а) следува дека 4 е делител на $m*n$. За $m=n=1$ добиваме $m*n=8$. Ќе докажеме дека тоа е најмалата вредност, со тоа ќто ќе докажеме дека $m*n\neq 4$.

Ако $37^m-29^n=4$, тогаш $37^m-4=29^n$. Левата страна на последното равенство се дели со 3, а десната не се дели со 3, па затоа $m*n = 37^m - 29^n \neq 4$.

Ако $37^m - 29^n = -4$, тогаш $29^n - 37^m = 4$. Цифрата на единиците на $29^n - 37^m$ може да е 4, само ако цифрата на единиците на 29^n е 1, а на 37^m е 7, т.е. $n = 2k$. Но, тогаш $37^m = 29^n - 4 = (29^k - 2)(29^k + 2)$, бидејќи множителите на десната страна се заемно прости броеви поголеми од 1, а 37 е прост број.

85. Во множеството цели броеви да се реши равенката

$$x^{2010} - 2006 = 4y^{2009} + 4y^{2008} + 2007y.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x^{2010} + 1 = 4y^{2009} + 2007y + 4y^{2008} + 2007,$$

т.е. на равенката

$$x^{2010} + 1 = (4y^{2008} + 2007)(y + 1).$$

Понатаму, бројот $4y^{2008} + 2007 = 4y^{2008} + 2008 - 1$ е од облик $4k - 1$, па мора да има прост делител од облик $4k - 1$, бидејќи ако сите делители се од облик $4k + 1$ тогаш и тој самиот е од истиот облик.

Значи $(x^{1005})^2 + 1$ има делител од облик $4k - 1$, што противречи на задача 5.38, според која сите прости делители на овој број се од облик $4k + 1$. Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

III РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+...+\frac{1}{x}=\frac{3x-20}{4}.$$

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{1}{x}\left[1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1)\right]=\frac{3x-20}{4}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x(x-1)}{2}=\frac{3x-20}{4}.$$

Според тоа, $4x-4=6x-40$, т.е. $x=18$.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+...+\frac{1}{x}=3.$$

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{1}{x}\left[1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1)\right]=3$$

$$\frac{x(x-1)}{2}=3x$$

$$x(x-1)=6x$$

$$x(x-7)=0.$$

Според тоа, $x=0$ или $x=7$. Но, x е природен број, па затоа $x=7$.

3. Реши ја равенката

$$\frac{x+84}{1987}+\frac{x+85}{1986}+\frac{x+86}{1985}+\frac{x+87}{1984}=\frac{x+1987}{84}+\frac{x+1986}{85}+\frac{x+1985}{86}+\frac{x+1984}{87}.$$

Решение. Дадената равенка по ред е еквивалентна со равенките

$$\frac{x+84}{1987}+1+\frac{x+85}{1986}+1+\frac{x+86}{1985}+1+\frac{x+87}{1984}+1=\frac{x+1987}{84}+1+\frac{x+1986}{85}+1+\frac{x+1985}{86}+1+\frac{x+1984}{87}+1$$

$$\frac{x+2071}{1987}+\frac{x+2071}{1986}+\frac{x+2071}{1985}+\frac{x+2071}{1984}=\frac{x+2071}{84}+\frac{x+2071}{85}+\frac{x+2071}{86}+\frac{x+2071}{87}$$

$$(x+2071)(\frac{1}{1987}+\frac{1}{1986}+\frac{1}{1985}+\frac{1}{1984}-\frac{1}{84}-\frac{1}{85}-\frac{1}{86}-\frac{1}{87})=0$$

од каде што $x=-2071$.

4. Реши ја равенката

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}-\frac{4}{x-4}.$$

Решение. Равенката има смисла за $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,4\}$. Ќе извршиме одземање одделно на секоја страна на равенката:

$$\frac{x-2-2x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{3x-12-4x+12}{(x-3)(x-4)}$$

$$\frac{-x}{x^2-3x+2}=\frac{-x}{x^2-7x+12}.$$

Очигледно едно решение е $x_1=0$. За $x\neq 0$ добиваме

$$x^2-3x+2=x^2-7x+12,$$

од каде што $x=\frac{5}{2}$. Значи, равенката има два корена 0 и $\frac{5}{2}$.

5. Реши ја во $\mathbb{R}$ равенката $|x+1|+\sqrt{x^2+2x+1}=2x$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$, равенката го добива видот

$$|x+1|+|x-1|=2x.$$

Ќе ја решиме по т.н. метода на интервали. Ги одредуваме вредностите на x, за кои изразите под знак на апсолутна вредност се анулираат, т.е. добиваат вредност 0. Во нашиов пример тоа се броевите -1 и 1. Тие бројната оска (види цртеж) ја разбиваат на три дисјунктни интервали:

Ја разгледуваме равенката одделно на секој од горните интервали:

i) Ако $x\in(-\infty,-1)$, тогаш $|x+1|=-(x+1)$, $|x-1|=-(x-1)$, па равенката го добива видот

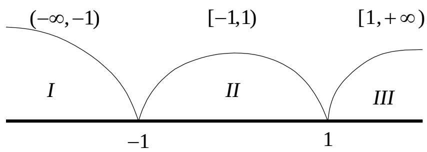
$$-(x+1)-(x-1)=2x\text{, т.е. } -2x=2x.$$

Коренот на оваа равенка, бројот 0, не припаѓа на интервалот $(-\infty,-1)$, па затоа дадената равенка нема решение во овој интервал.

ii) Ако $x\in[-1,1)$, тогаш $|x+1|=x+1$, $|x-1|=-(x-1)$, па равенката го добива видот

$$x+1-x+1=2x\text{, т.е. } 2x=2$$

чиј корен, бројот 1, не припаѓа на овој интервал; што значи не е решение на дадената равенка.



iii) Ако $x\in[1,+\infty)$, тогаш равенката го добива видот

$$x+1+x-1=2x\text{, т.е. } 0\cdot x=0,$$

која, очигледно, е задоволена за секој x од тој интервал, т.е. секој $x\in[1,+\infty)$ е решение на дадената равенка.

Следствено, решение на равенката е интервалот $[1,+\infty)$.

6. Реши ја равенката $\sqrt{(2x-1)^2}-|3x-2|+4x-3=1$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$|2x-1|-|3x-2|+4x-3=1.$$

Множеството реални броеви ќе го разделиме на три подмножества $(-\infty,\frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ и $[\frac{2}{3},+\infty)$.

Во првиот случај равенката го добива обликот

$$-(2x-1)+3x-2+4x-3=1\text{, т.е. } 5x-5=0.$$

Нејзиното решение $x=1\notin(-\infty,\frac{1}{2})$. Тоа не е решение на почетната равенка.

Во вториот случај равенката го обива обликот

$$2x-1+3x-2+4x-3=1,\text{ т.е. } 9x-7=0.$$

Нејзиното решение $x=\frac{7}{9}\notin[\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ и не е решение на почетната равенка.

Во третиот случај равенката го обива обликот

$$2x-1-(3x-2)+4x-3=1,\text{ т.е. } 3x-3=0.$$

Нејзиното решение $x=1\in[\frac{2}{3},+\infty)$ и е решение на почетната равенка.

Значи равенката има едно единствено решение $x=1$.

7. Равенката

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+....+|x-2001|=a$$

има точно едно решение. Определи ја вредноста на a.

Решение. Ако x е решение на равенката, тогаш и $2002-x$ е исто така решение на равенката. Од условот на задачата $x=2002-x$, па според тоа $2x=2002$, т.е. $x=1001$. Но, тогаш

$$\begin{aligned}a&=1000+999+998+...+3+2+1+0+1+2+3+...+998+999+1000\\&=2[(1000+1)+(999+2)+...+(501+500)]=2\cdot500\cdot1001=1001000.\end{aligned}$$

8. Реши ја равенката

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{c+a-x}{b}+\frac{4x}{a+b+c}=1.$$

Решение. Од условот на задачата имаме $a,b,c,a+b+c\neq0$. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$\begin{aligned}&\frac{a+b-x}{c}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{c+a-x}{b}=1-\frac{4x}{a+b+c}\\&\frac{a+b-x}{c}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{c+a-x}{b}+3=4-\frac{4x}{a+b+c}\\&\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{a+b+c-x}{b}=4\frac{a+b+c-x}{a+b+c}\\&(a+b+c-x)(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b+c})=0\end{aligned}$$

Според тоа:

а) Ако $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b+c}=0$, тогаш било кој реален број x е решение на равенката.

б) Ако $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b+c}\neq0$, тогаш $a+b+c-x=0$ и $x=a+b+c$. Не е тешко да се провери дека $x=a+b+c$ е решение на равенката.

9. Реши ја равенката

$$\frac{6a+1}{a}x+\frac{6a}{a+1}+\frac{a^2}{(a+1)^3}=\frac{2a+1}{a^2+2a^2+a}x,$$

каде a е реален параметар.

Решение. Јасно, $a\neq0$ и $a\neq-1$. Ако помножиме со $a(a+1)^3$, после средувањето ја добиваме равенката

$$(2a+3)(3a+2)(a(a+1)x+a^2)=0.$$

Ако $a\in\{-\frac{2}{3},-\frac{3}{2}\}$, тогаш равенката го добива обликот $0\cdot(a(a+1)x+a^2)=0$, што значи дека е неопределена, т.е. нејзино решение е секој реален број x.

Ако $a\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3},-\frac{3}{2},0,-1\}$, тогаш равенката има единствено решение $x=-\frac{a}{a+1}$
.

10. Во зависност од параметарот a, реши ја равенката

$$2|x|+|x-1|=a.$$

Решение. Бидејќи

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0,\end{cases} \qquad \text{и} \qquad |x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq 1,\\ -(x-1), & x<1,\end{cases}$$

добиваме

$$2|x|+|x-1|=\begin{cases}-2x-(x-1), & x<0\\ 2x-(x-1), & 0\leq x<1,\\ 2x+(x-1), & 1\leq x,\end{cases}=\begin{cases}1-3x, & x<0\\ x+1, & 0\leq x<1,\\ 3x-1, & 1\leq x.\end{cases}$$

Почетната равенка е еквивалентна со севкупноста на делумните равенки

$$\left[\begin{array}{ll}1-3x=a, & x<0,\\ x+1=a, & 0\leq x<1,\\ 3x-1=a, & 1\leq x,\end{array}\right..$$

Ќе разгледаме неколку случаи.

а) Ако $a<1$, тогаш ниту една од делумните равенки нема решение, па според тоа и почетната равенка нема решение (на своите дефинициони области $1-3x$, $x+1, 3x-1$ примаат вредности не помали од 1).

б) Ако $1\leq a<2$, тогаш решенија на почетната равенка се $x=\frac{1-a}{3}$ кое е решение на делумната равенка $1-3x=a$, и $x=a-1$ кое е решение на делумната равенка $x+1=a$. Во овој случај делумната равенка $3x-1=a$ определена на $(1,+\infty)$ нема решение.

в) Ако $a\geq 2$, тогаш решенија на почетната равенка се $x=\frac{1-a}{3}$ кое е решение на делумната равенка $1-3x=a$ и $x=\frac{a+1}{3}$ кое е решение на делумната равенка $3x-1=a$. Делумната равенка $x+1=a$ определена за $0\leq x<1$ нема решение.

11. Во зависност од параметарот a реши ја равенката

$$|x+3|-a|x-1|=4.$$

Решение. Од дефинцијата на апсолутна вредност имаме

$$|x+3|=\begin{cases}x+3, & x\geq -3\\ -(x+3), & x<-3\end{cases} \qquad \text{и} \qquad |x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq 1\\ -(x-1), & x<1\end{cases}$$

Според тоа,

$$|x+3|-a|x-1|=\begin{cases}x(a-1)-3-a, & x<-3,\\ x(1+a)+3-a, & -3\leq x<1,\\ x(1-a)+3+a, & 1\leq x.\end{cases}$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со севкупноста на равенките:

$$\left[\begin{array}{ll} x(a-1)=7+a, & x<-3, \\ x(a+1)=a+1, & -3\le x<1, \\ x(1-a)=1-a, & 1\le x. \end{array}\right.$$

Ќе разгледаме неколку случаи:

а) Ако $a=1$, тогаш решение на почетната равенка е $x\in[1,+\infty)$.

б) Ако $a=-1$, тогаш решение на почетната равенка е $x\in[-3,1]$.

в) Ако $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, тогаш решение на почетната равенка е $x=1$, т.е. решението на равенката $x(1-a)=1-a$. Останатите две делумни равенки немаат решенија.

г) Ако $a\in(-1,1)$, тогаш решение на почетната равенка е $x=1$, што е решение на делумната равенка $x(1-a)=1-a$ и $x=\frac{7+a}{a-1}$, што е решение на делумната равенка $x(a-1)=7+a$.

12. За кои вредности на параметарот a, решенијата на равенката

$$2|x-a|+a-4+x=0$$

се наоѓаат во интервалот $[0,4]$.

Решение. За дадено a ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $x\ge a$. Во овој случај $|x-a|=x-a$, па равенката го добива обликот $2(x-a)+a-4+x=0$, т.е. $x=\frac{a+4}{3}$. За да равенката во овој случај има решение треба да е исполнет условот $x\ge a$. Од неравенството $\frac{a+4}{3}\ge a$ добиваме $a\le 2$.

Случај 2. $x<a$. Во овој случај $|x-a|=-(x-a)$, па равенката го добива обликот $-2(x-a)+a-4+x=0$, т.е. $x=3a-4$. За да равенката во овој случај има решение треба да е исполнет условот $x<a$. Од неравенството $3a-4<a$, добиваме $a<2$.

Од случаите 1 и 2 добиваме дека равенката има решенија во случајот кога $a\le 2$. Во случаите $a>2$ се добива равенка која нема решение во множеството реални броеви.

За $a=2$ добиваме $x_1=3\in[0,4]$, односно решението на равенката припаѓа во сегментот $[0,4]$. Во случајот $a<2$ од условот решенијата да припаѓаат во сегментот $[0,4]$ го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} 0\le \frac{a+4}{3}\le 4 \\ 0\le 3a+4\le 4 \end{cases},$$

од каде што добиваме $\begin{cases} a\le 2 \\ \frac{4}{3}\le a\le \frac{8}{3} \end{cases}$, т.е. $\frac{4}{3}\le a\le 2$.

13. Одреди ги точките на координатната оска, за чии координати x е исполнет условот $\frac{3-x}{x+1}\ge 1$.

Решение. Дадениот услов го трансформираме вака:

$$\frac{3-x}{x+1}-1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3-x-x-1}{x+1}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2(1-x)}{x+1}\geq 0$$

т.е. $\frac{x-1}{x+1}\leq 0$. Оттука добиваме два система неравенки, од кои едниот нема решение, а другиот е

$$\begin{cases} x-1\leq 0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\leq 1 \\ x>-1 \end{cases}$$

и негово решение е интервалот $(-1,1]$.

Значи, бараните точки го исполнуваат условот $-1<x\leq 1$.

14. Реши ја неравенката $|x+3|+|x-1|+|x-3|>16+x$ во $\mathbb{R}$.

Решение. Ги одредуваме вредностите за кои се анулираат изразите под знакот на апсолутна вредност. Имаме $x=-3$, $x=1$ и $x=3$ и овие вредности ја делат бројната оска на интервалите $(-\infty,-3)$, $(-3,1)$, $[1,3)$ и $[3,\infty)$. Дадената неравенка ќе ја решиме на секој од интервалите.

i) Ако $x\in(-\infty,-3)$, тогаш (1) го прима обликот $-x-3-x+1-x+3>16+x$ чие решение е $x<-\frac{15}{4}$. Но $x\in(-\infty,-3)$, па затоа

$$x\in(-\infty,-3)\cap(-\infty,-\tfrac{15}{4})=(-\infty,-\tfrac{15}{4}).$$

ii) Ако $x\in[-3,1)$, тогаш (1) го прима обликот $x+3-x+1-x+3>16+x$ чие решение е $x<-\frac{9}{2}$. Но, $x\in[-3,1)$, па $x\in[-3,1)\cap(-\infty,-\frac{9}{2})=\varnothing$, т.е. во овој случај дадената неравенка нема решение.

iii) Ако $x\in[1,3)$, тогаш (1) го прима обликот $0\cdot x>11$ која нема решение во множеството реални броеви, па и во интервалот [1,3).

iv) Ако $x\in[3,\infty)$ тогаш (1) го прима обликот $x+3+x-1+x-3>16+x$ чие решение е $x>\frac{17}{2}$. Значи во овој случај решение на дадената неравенка е

$$x\in[3,\infty)\cap(\tfrac{17}{2},\infty)=(\tfrac{17}{2},\infty).$$

Конечно, решение на дадената неравенка е секој реален број од множеството

$$(-\infty,-\tfrac{15}{4})\cup(\tfrac{17}{2},\infty).$$

15. Скрати ја дропката $A=\frac{3ax-ay+3x^2-xy}{ax+2xy+x^2+2ay}$, а потоа изрази ја дропката A во функција од m, ако $m=\frac{x}{y}$ и одреди го m од условот $A<1$.

Решение. Имаме:

$$A=\frac{3x(a+x)-y(a+x)}{2y(a+x)+x(a+x)}=\frac{(a+x)(3x-y)}{(a+x)(2y+x)}=\frac{3x-y}{x+2y}=\frac{3\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+2}=\frac{3m-1}{m+2}.$$

Од условот $A<1$ имаме:

$$\frac{3m-1}{m+2}<1 \;\Leftrightarrow\; \frac{3m-1}{m+2}-1<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2m-3}{m+2}<0.$$

Оттука

$$\begin{cases} 2m-3<0 \\ m+2>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2m-3>0 \\ m+2<0 \end{cases}.$$

Решението на првиот систем е интервалот $(-2,\frac{3}{2})$, а вториот систем нема решение. Следствено, $A<1$ за $m\in(-2,\frac{3}{2})$.

16. Дадени се изразите $A=x^3+1$ и $B=x^2+x$, каде x е рационален број. За кои x важи

а) $A>B$, б) $A+B$ и в) $A<B$

Решение. Разликата $A-B$ можеме да ја запишеме во облик

$$A-B=(x^3+1)-(x^2+x)=x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1).$$

Сега очигледно е дека

а) $A>B$ за $x\in\mathbb{Q}$, $x>-1$, $x\neq 1$

б) $A=B$ за $x=1$ и $x=-1$

в) $A<B$ за $x\in\mathbb{Q}$ и $x<-1$.

17. Системот неравенки $a_1x+b_1\geq 0$, $a_1>0$; $a_2x+b_2\geq 0$, $a_2<0$, нема решение. Докажи дека постојат броеви c_1 и c_2, така што важи

$$b_1c_1+b_2c_2<0 \text{ и } a_1c_1+a_2c_2=0.$$

Решение. Од првата неравенка добиваме $x\geq -\frac{b_1}{a_1}$, а од втората $x\leq -\frac{b_2}{a_2}$. Ако важи $-\frac{b_1}{a_1}\leq -\frac{b_2}{a_2}$, тогаш секој $x\in[-\frac{b_1}{a_1},-\frac{b_2}{a_2}]$ е решение на почетниот систем неравенки, што противречи на условот на задачата. Значи,

$$-\frac{b_1}{a_1}>-\frac{b_2}{a_2}, \text{ т.е. } -b_1a_2+b_2a_1<0.$$

Сега ако земеме $c_1=-a_2$ и $c_2=a_1$ и обиваме $b_1c_1+b_2c_2<0$ и $a_1c_1+a_2c_2=0$.

18. Во декартовиот координатен систем Oxy определи го множеството точки (x,y) за кои што важи

$$\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=1. \tag{1}$$

Решение. За да постојат $\sqrt{xy},\sqrt{\frac{x}{y}},\sqrt{\frac{y}{x}}$, треба да важи $xy>0$. Според тоа, равенството можеме да го запишеме во обликот $\sqrt{xy}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{xy}\sqrt{\frac{y}{x}}=1$, т.е. во обликот $\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}=1$, од каде добиваме

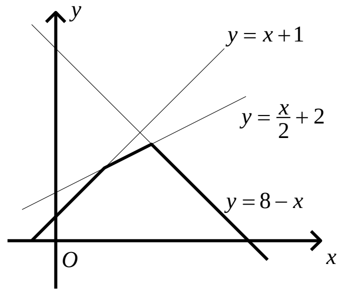
$$|x|-|y|=1. \tag{2}$$

Точките (x,y), за кои $xy>0$ се точки за кои $x,y>0$ или $x,y<0$. Значи, тоа се точки кои припаѓаат на првиот квадрант или точки кои припаѓаат на третиот квадрант. Имаме а) ако $x, y > 0$, тогаш $|x|-|y| = x-y$, и (2) го добива обликот $x-y=1$, т.е. обликот $y = x-1$. Во овој случај, точките кои го исполнуваат условот (1) се $(x, x-1)$, $x > 1$.

б) ако $x, y < 0$, тогаш $|x|-|y| = -x-(-y) = y-x$, и (2) го добива обликот $y-x=1$, т.е. обликот $y = x+1$. Во овој случај, точките кои го исполнуваат условот (1) се $(x, x+1)$, $x < -1$.

19. За секој реален број x со $m(x)$ ќе го означиме најмалиот од броевите $x+1$, $\frac{x}{2}+2$ и $8-x$. Определи ја најголемата можна вредност на $m(x)$?

Решение. Ќе ги разгледаме правите $y = x+1$, $y = \frac{x}{2}+2$ и $y = 8-x$.



За правите $y = \frac{x}{2}+2$ и $y = x+1$ имаме $\frac{x}{2}+2 = x+1$, т.е. $x = 2$. Значи, пресечна точка е $(2,2)$. За $x \in (-\infty, 2)$ имаме $x+1 < \frac{x}{2}+2$, а за $x \in (2, +\infty)$ имаме $\frac{x}{2}+2 < x+1$.

За правите $y = \frac{x}{2}+2$ и $y = 8-x$ имаме $\frac{x}{2}+2 = 8-x$, т.е. $x = 4$. Значи, пресечна точка е $(4,4)$. За $x \in (-\infty, 4)$ имаме $\frac{x}{2}+2 < 8-x$, а за $x \in (4, +\infty)$ имаме $8-x < \frac{x}{2}+2$.

За правите $y = 8-x$ и $y = x+1$ имаме $8-x = x+1$, т.е. $x = \frac{7}{2}$. Значи, пресечна точка е $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$. За $x \in (-\infty, \frac{7}{2})$ имаме $x+1 < 8-x$, а за $x \in (\frac{7}{2}, +\infty)$ е исполнето $8-x < x+1$.

Сега, за $x \in (-\infty, 2)$ е исполнето $x+1 < \frac{x}{2}+2 < 8-x$ и $m(x) = x+1$, па затоа $\max m(x) = 3$. За $x \in (2, \frac{7}{2})$ имаме $\frac{x}{2}+2 < x+1 < 8-x$ и $m(x) = \frac{x}{2}+2$, па затоа $\max m(x) = 3{,}75$. За $x \in (\frac{7}{2}, 4)$ имаме $\frac{x}{2}+2 < 8-x < x+1$ и $m(x) = \frac{x}{2}+2$, па затоа $\max m(x) = 4$. За $x \in (4, +\infty)$ имаме $8-x < \frac{x}{2}+2 < x+1$ и $m(x) = 8-x$, па затоа $\max m(x) = 4$.

Според тоа, $\max\limits_{\mathbb{R}} m(x) = 4$.

20. а) За кои вредности на m и n изразот $\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност?

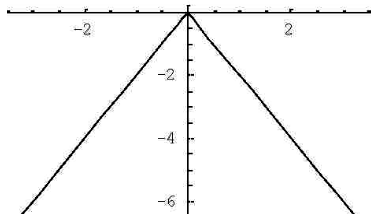
б) Нацртај график на функцијата $y = (4m+6n-2)|x| + 2m+3n$ за сите вредности на m и n за кои изразот $\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност.

Решение. а) Изразот $\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност ако изразот $4m^2+12mn+9n^2+1$ има најмала вредност. Бидејќи

$$4m^2+12mn+9n^2+1=(2m+3n)^2+1\geq 1,$$

најмалата вредност на $4m^2+12mn+9n^2+1$ се добива ако $2m+3n=0$.

б) Бидејќи $2m+3n=0$ добиваме дека функцијата е $y=-2|x|$ а нејзиниот график е прикажан на цртежот десно.



21. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x-y=10^{1994} \\ x+y=10^{1995}. \end{cases}$$

Решение. Со собирање на равенките од системот добиваме

$$2x=10^{1994}+10^{1995},\ 2x=10^{1994}(1+10),$$

$$2x=11\cdot 10^{1994},\ x=5,5\cdot 10^{1994}.$$

Со замена на оваа вредност на x во првата равенка од системот, добиваме:

$$y=x-10^{1994}=5,5\cdot 10^{1994}-10^{1994}=(5,5-1)10^{1994}=4,5\cdot 10^{1994}.$$

Значи, решение на системот е подредената двојка броеви $(5,5\cdot 10^{1994}; 4,5\cdot 10^{1994})$.

22. Најди ги сите природни броеви n за кои што системот равенки

$$\begin{cases} 11x+9y=980 \\ y-nx=4 \end{cases}$$

има целобројни решенија.

Решение. Имаме

$$11x+9(nx+4)=980,\ \text{т.е.}\ (11+9n)x=944.$$

Бидејќи $944=2^4\cdot 59$ и $11+9n\geq 20$, следува дека $11+9n\in\{59,118,236,472,944\}$, т.е. $9n\in\{48,107,225,461,933\}$ од каде што $n=225:9=25$. За $n=25$ имаме: $x=4$, $y=104$.

23. Најди ги броевите a,b,c,d, ако важи

$$\begin{cases} a=bcd \\ a+b=cd \\ a+b+c=d \\ a+b+c+d=1 \end{cases}$$

Решение. Од последната равенка добиваме $a+b+c=1-d$, па имајќи ја предвид третата равенка, наоѓаме $1-d=d$, т.е. $d=\frac{1}{2}$. Со замена на d во втората и третата равенка добиваме $a+b=\frac{1}{2}c$ и $a+b+c=\frac{1}{2}$, па затоа $\frac{1}{2}c+c=\frac{1}{2}$, т.е. $c = \frac{1}{3}$. Понатаму, од првата и втората равенка наоѓаме $a = b\frac{1}{6}$ и $a + b = \frac{1}{6}$, т.е. $c = \frac{1}{7}$. Конечно, од првата равенка добиваме дека $a = \frac{1}{42}$.

Значи бараните броеви се: $\frac{1}{42}, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.

24. Реши ја равенката $(3x - y)^2 + (y-6)^4 + |x + y - 2z| = 0$.

Решение. Бидејќи $(3x - y)^2 \geq 0$, $(y-6)^2 \geq 0$, $|x + y - 2z| \geq 0$ следува дека

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ y - 6 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

од каде што добиваме: $y = 6$, па затоа $3x - 6 = 0$, т.е. $x = 2$ и $2 + 6 - 2z = 0$, т.е. $z = 4$.

Следствено: $x = 2$, $y = 6$, $z = 4$.

25. Докажи дека системот равенки

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ y^{-1} + z^{-1} = 3 \\ z^{-1} + x^{-1} = 8 \end{cases}$$

нема решение.

Решение. Со собирање на првите две равенки добиваме

$$x^{-1} + 2y^{-1} + z^{-1} = 8$$

Ако од оваа равенка ја одземеме третата равенка од системот, ја добиваме равенката $2y^{-1} = 0$, која не е задоволена за ниту еден реален број.

26. Да се реши системот од осум равенки со осум непознати

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ b + c + d = 9 \\ c + d + e = 3 \\ d + e + f = -3 \\ e + f + g = -9 \\ f + g + h = -6 \\ g + h + a = -2 \\ h + a + b = 2. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме сите осум равенки, ја добиваме равнката

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 0. \qquad (1)$$

Ако ги собереме првата, четвртата и седмата равенка, добиваме

$$a + b + c + d + e + f + g + h + a = 1. \qquad (2)$$

Ако ги собереме втората, петтата и осмата равенка, добиваме

$$a+b+c+d+e+f+g+h+b=2\,. \qquad (3)$$

Од (1) и (2) добиваме $a=1$, а од (1) и (3) добиваме $b=2$. Понатаму, од првата равенка се добива $c=3$, од втората $d=4$, од третата $e=-4$, од четвртата $f=-3$, од петтата $g=-2$ и од шестата $h=-1$. Значи, решение на овој систем равенки е $(1,2,3,4,-4,-3,-2,-1)$.

27. Нека $a,b,c\neq 0$. Реши го системот равенки

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Решение. Од првите две равенки следува $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}$, па затоа $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$, од каде добиваме $x=\frac{az}{c}$ и $y=\frac{bz}{c}$. Според тоа, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{2c}{z}$ и како

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{\frac{a^2z^2}{c^2}+\frac{b^2z^2}{c^2}+z^2}=\frac{4c^2(a^2+b^2+c^2)}{z^2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{4c^2}{z^2}$$

добиваме $\frac{4c^2}{z^2}=\frac{2c}{z}$, т.е. $z=2c$. Конечно, $x=\frac{az}{c}=2a$ и $y=\frac{bz}{c}=2b$.

28. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases}\frac{3xy}{x+y}=5\\ \frac{2xz}{x+z}=3\\ \frac{yz}{y+z}=4\end{cases}.$$

Решение. Бидејќи $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$, дадениот систем е еквивалентен со

$$\begin{cases}\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=5\\ \frac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}=3\\ \frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=4\end{cases}, \text{ односно со } \begin{cases}\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{5}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Тогаш, ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{15}$. Од $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$ добиваме $\frac{1}{y}=\frac{11}{120}$ и $\frac{1}{z}=\frac{19}{120}$. Тогаш $\frac{1}{x}=\frac{3}{5}-\frac{11}{120}=\frac{61}{120}$. Конечно, $x=\frac{120}{61}$, $y=\frac{120}{11}$ и $z=\frac{120}{19}$.

29. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ и A се дадени реални броеви, такви што $a_i\neq 0$, $i=1,2,...,n$ и $a_1+a_2+...+a_n\neq 0$. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{x_n}{a_n}\\ x_1+x_2+...+x_n=A\end{cases}$$

Решение. Од условите во задачата следува $a_1, a_2, ..., a_n \neq 0$. Ако $x_1, x_2, ..., x_n$ е решение на системот, тогаш од $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n}{a_n} = k$, добиваме

$$x_1 = ka_1, x_2 = ka_2, ..., x_n = ka_n .$$

Заменуваме во равенката $x_1 + x_2 + ... + x_n = A$ и добиваме

$$ka_1 + ka_2 + ... + ka_n = A, \text{ т.е. } k = \frac{A}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Според тоа,

$$x_1 = \frac{Aa_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, x_2 = \frac{Aa_2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, ..., x_n = \frac{Aa_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Не е тешко да се провери дека претходните броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ се решение на системот.

30. Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 3 \\ .... \\ .... \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + \quad + x_n = n-1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} = n \end{cases}.$$

Решение. Ако ги собереме равенките на системот добиваме

$$(n-1)(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n) = 1 + 2 + ... + n,$$

т.е.

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = \frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Ако од последната равенка ја одземеме i-тата равенка на системот се добива $x_i = \frac{n(n+1)}{2(n-1)} - i;\ i = 1, 2, ..., n$.

31. Реши го системот

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ .... \\ a_{1987} + a_{1988} + a_{1989} + a_1 = 0 \\ a_{1988} + a_{1989} + a_1 + a_2 = 0 \\ a_{1989} + a_1 + a_2 + a_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Собирајќи ги сите равенки добиваме

$$a_1 + a_2 + ... + a_{1989} = 0, \qquad (1)$$

т.е.

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + ... + (a_{1985} + a_{1986} + a_{1987} + a_{1988}) + a_{1989=0}$$

од каде што следува дека $a_{1989}=0$. Равенката (1) можеме да ја запишеме во облик

$$(a_{1989}+a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+...+(a_{1984}+a_{1985}+a_{1986}+a_{1987})+a_{1988}=0$$

од каде што добиваме $a_{1988}=0$. На сличен начин добиваме дека

$$a_1=a_2=...=a_{1989}=0$$

32. Определи го x_{1007} ако

$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=...=\frac{x_{1007}}{x_{1007}+2013} \text{ и } x_1+x_2+...+x_{1007}=1007\cdot 671 .$$

Решение. Нека $a=\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=...=\frac{x_{1007}}{x_{1007}+2013}$. Тогаш

$$a=\frac{x_k}{x_k+(2k-1)} \Rightarrow x_k=\frac{a}{1-a}(2k-1), \quad a\neq 1$$

и

$$x_1+x_2+...+x_{1007}=\frac{a}{1-a}(1+2+...+2013)=\frac{a}{1-a}2013\cdot 1007 ,$$

па затоа

$$\frac{a}{1-a}3\cdot 671\cdot 1007=671\cdot 1007$$

Значи, $\frac{a}{1-a}=\frac{1}{3}$, т.е. $a=\frac{1}{4}$, па затоа $x_{1007}=\frac{a}{1-a}2013=\frac{2013}{3}=671$.

33. Реши го и дискутирај го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy}+\frac{xy}{x+y}=a+\frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy}+\frac{xy}{x-y}=b+\frac{1}{b} \end{cases}$$

Решение. Со смената $\frac{x+y}{xy}=u, \frac{x-y}{xy}=v$ системот го добива видот

$$\begin{cases} u+\frac{1}{u}=a+\frac{1}{a} \\ v+\frac{1}{v}=b+\frac{1}{b} \end{cases} \qquad (a\neq 0, b\neq 0) ,$$

од каде што $u_1=a, u_2=\frac{1}{a}, v_1=b, v_2=\frac{1}{b}$.

Дадениот систем е еквивалентен со вкупноста на четирите системи:

$$1^\circ \begin{cases} u=a \\ v=b \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} u=a \\ v=\frac{1}{b} \end{cases} \qquad 3^\circ \begin{cases} u=\frac{1}{a} \\ v=b \end{cases} \qquad 4^\circ \begin{cases} u=\frac{1}{a} \\ v=\frac{1}{b} \end{cases}$$

Имаме:

$$1^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy}=a \\ \frac{x-y}{xy}=b \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=a \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x}=a-b \\ \frac{2}{y}=a+b \end{cases} \overset{|a|\neq|b|}{\Rightarrow} \begin{cases} x=\frac{2}{a-b} \\ y=\frac{2}{a+b} \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy}=a \\ \frac{x-y}{xy}=\frac{1}{b} \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=a \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x}=\frac{ab-1}{b} \\ \frac{2}{y}=\frac{ab+1}{b} \end{cases} \overset{ab\neq\pm 1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=\frac{2b}{ab-1} \\ y=\frac{2b}{ab+1} \end{cases}$$

$$3^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} = b \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = b \end{cases} \overset{ab\neq \pm 1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{2a}{1-ab} \\ y = \frac{2a}{1+ab} \end{cases}$$

$$4^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{b} \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \end{cases} \overset{|a|\neq |b|}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{2ab}{b-a} \\ y = \frac{2ab}{b+a} \end{cases}$$

Добиваме дека:

(i) Ако $|a|\neq|b|$ и $ab\neq\pm1$, тогаш системот има четири решенија: $(\frac{2}{a-b}, \frac{2}{a+b})$, $(\frac{2b}{ab-1}, \frac{2b}{ab+1})$, $(\frac{2a}{1-ab}, \frac{2a}{1+ab})$ и $(\frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{b+a})$.

(ii) Ако $ab\neq\pm1$, тогаш системот има две решенија: $(\frac{2a}{1-ab}, \frac{2a}{1+ab})$ и $(\frac{2b}{ab-1}, \frac{2b}{ab+1})$.

(iii) Ако $|a|\neq|b|$, тогаш системот има две решенија: $(\frac{2}{a-b}, \frac{2}{a+b})$ и $(\frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{b+a})$.

(iv) Ако $|a|=|b|$ или $ab=\pm1$, системот нема решене.

34. За кои вредности на параметарот m системот равенки

$$\begin{cases} 2x-5y=10 \\ 3x-2y=m \end{cases}$$

има решение (x,y) такво што $x>0, y<0$?

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} -6x+15y=-30 \\ \ \ 6x-4y=2m \end{cases}$$

и оттука имаме $y=\frac{-30+2m}{11}$. Потоа,

$$x=\frac{10+5y}{2}=\frac{10+5\frac{-30+2m}{11}}{2}=\frac{110-150+10m}{22}=\frac{-20+5m}{11}.$$

Од условот во задачата имаме $\frac{-20+5m}{11}>0$ и $\frac{-30+2m}{11}<0$, односно $m>4$ и $m<15$. Значи, бараните вредности се $4<m<15$.

35. Во зависност од параметрите a,b и c да се реши системот равенки

$$\begin{cases} ax+by=c \\ -x+ay=c \end{cases}.$$

Решение. Детерминантата на системот е еднаква на

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ -1 & a \end{vmatrix}=a^2+b.$$

а детерминантите на променливите се

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c & a \end{vmatrix}=ca-cb=c(a-b) \quad \text{и} \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ -1 & c \end{vmatrix}=ac+c=c(a+1).$$

Ќе разгледаме неколку случаи:

1° Ако $\Delta\neq0$, т.е. $a^2+b\neq0$, тогаш системот има едно единствено решение

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{c(a-b)}{a^2+b}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{c(a+1)}{a^2+b}.$$

2° Во случајот $\Delta=0$ ќе ги разгледаме следните подслучаи:

а) $a=b$. Во овој случај добиваме $a^2+b=a^2+a=0$. Вредности за кои што во овој случај $\Delta=0$ се $a=0$ и $a=-1$.

За $a=0$ добиваме $b=0$, и системот го добива обликот

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=c \\ -x+0\cdot y=c \end{cases}.$$

Ако $c\neq 0$, тогаш $\Delta_y=c(a+1)=c\neq 0$ и системот е противречен. Ако $c=0$, тогаш системот го добива обликот

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0 \\ -x+0\cdot x=0 \end{cases},$$

и тој има бесконечно многу решенија $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$.

За $a=b=-1$ системот го добива обликот

$$\begin{cases} -x-y=c \\ -x-y=c \end{cases}.$$

Во овој случај за било кое $c\in\mathbb{R}$ системот има бесконечно многу решенија $(-y-c,y), y\in\mathbb{R}$.

б) Ако $a\neq b$, тогаш кога $c=0$, системот го добива обликот

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ -x+ay=0 \end{cases}$$

и тој има бесконечно многу решенија (x,y) кои се од обликот (ay,y), $y\in\mathbb{R}$. Ако $c\neq 0$ тогаш $\Delta=0$ и $\Delta_x\neq 0$, па затоа во овој случај системот е противречен.

36. Определи ги сите целобројни вредности на параметарот m, така што решенијата на системот

$$\begin{cases} mx-2y=3 \\ 3x+my=4 \end{cases},$$

да ги задоволуваат условите $x>0, y<0$.

Решение. Детерминантите на системот и на променливите се

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & -2 \\ 3 & m \end{vmatrix}=m^2+6,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & m \end{vmatrix}=3m+8,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4m-9.$$

Бидејќи $m^2+6\neq 0$, решенија на системот се $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3m+8}{m^2+6}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{4m-9}{m^2+6}$. Од условите $x>0, y<0$, го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} \frac{3m+8}{m^2+6}>0 \\ \frac{4m-9}{m^2+6}<0 \end{cases}.$$

Бидејќи $m^2+6>0$, последниот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} 3m+8>0 \\ 4m-9<0. \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $m>-\frac{8}{3}$, а од втората равенка добиваме $m<\frac{9}{4}$. Целобројни вредности на m кои ги задоволуваат неравенките $-\frac{8}{3}<m<\frac{9}{4}$ се $m=0,\pm1,\pm2$.

37. Определи ги вредностите на параметарот n, за кои системот

$$\begin{cases} 3x+ny=3 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$$

има решение што ги исполнува условите $x>0$ и $y<0$?

Решение. Прво го решаваме системот равенки. Од втората равенка $x=\frac{1+4y}{2}$. Заменуваме во првата равенка, и добиваме $\frac{3}{2}(1+4y)+ny=3$, т.е. $(n+6)y=\frac{3}{2}$. Ако $n=-6$, добиваме $0=\frac{3}{2}$, па системот нема решение. Ако $n\neq-6$, тогаш $y=\frac{3}{2(n+6)}$ од каде добиваме $x=\frac{1}{2}(1+4\cdot\frac{3}{2(n+6)})=\frac{n+12}{n+6}$. Значи, за $n\neq 6$ решение е парот $(\frac{n+12}{n+6},\frac{2}{2(n+6)})$. Од условот на задачата треба да важи системот неравенки $\frac{n+12}{n+6}>0$ и $\frac{3}{2(n+6)}<0$. Од втората неравенка добиваме $n+6<0$ т.е. $n<-6$. Но, тогаш $\frac{n+12}{n+6}>0$ ако и само ако $n+12<0$ т.е. $n<-12$. Оттука, решението на системот неравенки е $(-\infty,-12)$ и тоа се бараните вредности за n.

38. Даден е системот равенки

$$\begin{cases} mx+y=8 \\ 2x-my=4 \end{cases}.$$

Одреди ги целобројните вредности на параметарот m, за кои што $x>0$, $y>0$.

Решение. Имаме

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & -m \end{vmatrix}=-m^2-2\,,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -m \end{vmatrix}=-8m-4\,,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} m & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4m-16\,.$$

Бидејќи $\Delta\neq0$, системот има единствено решение: $x=\frac{8m+4}{m^2+2}$, $y=\frac{16-4m}{m^2+2}$.

За да $x>0$, доволно е $8m+4>0$, т.е. $m>-\frac{1}{2}$, а од условот $y>0$ следува $m<4$. Тогаш $x>0$ и $y>0$ истовремено се исполнети, само ако $m\in(-\frac{1}{2},4)$. Па значи, $m\in\{0,1,2,3\}$.

39. Определи ги целобројните вредности на параметарот a, за кои решенијата на системот

$$\begin{cases} a(x+y-1)=x-2y-1 \\ a(x-y-3)=x+2y-3 \end{cases}$$

се целобројни.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}(a-1)x+(a+2)=a-1\\(a-1)x-(a+2)y=3a-3\end{cases}.$$

Имаме

$$\begin{cases}2(a-1)x=4a-4\\2(a+2)y=-2a+2\end{cases}.$$

Ако $a\neq 1$, тогаш $x=2$, а ако $a=1$, тогаш $x\in\mathbb{R}$. Ако $a=-2$, тогаш нема решение за y, т.е. системот нема решение. Ако $a\neq -2$, имаме

$$y=\tfrac{-a+1}{a+2}=-1+\tfrac{3}{a+2}.$$

Бидејќи решенијата треба да бидат целобројни, следува дека $a+2$ треба да е делител на 3 и затоа $a+2\in\{\pm1,\pm3\}$. Оттука, $a\in\{-5,-3,-1,1\}$. Добиваме:

$$a=-5:\ x=2,\ y=-2;\qquad a=-3:\ x=2,\ y=-4;$$
$$a=-1:\ x=2,\ y=2;\qquad a=1:\ x\in\mathbb{R},\ y=0.$$

40. Реши го и дискутирај го по m системот равенки

$$\begin{cases}(m^2+1)x+(m+1)y=m-1\\(m^2-1)x+(m-1)y=m+1.\end{cases}$$

Решение. Дадениот систем има решенија ако

$$(m^2+1)(m-1)-(m+1)(m^2-1)\neq 0$$

односно $2m(m-1)\neq 0$, од што следува $m\neq 0$ и $m\neq 1$. Лесно се гледа дека во овој случај $x=\tfrac{2}{m-1}$, $y=\tfrac{m+1}{1-m}$.

Системот е противречен ако

$$2m(m-1)=0 \text{ и } (m-1)^2-(m+1)^2\neq 0$$

или

$$2m(m-1)=0 \text{ и } (m^2+1)(m+1)-(m-1)(m^2-1)\neq 0,$$

односно ако $m(m-1)=0$ и $m\neq 0$ или $m(m-1)=0$ и $m(m+1)\neq 0$, што значи дека ако $m=1$.

Системот има бесконечно многу решенија ако $\tfrac{m^2+1}{m^2-1}=\tfrac{m+1}{m-1}=\tfrac{m-1}{m+1}$, од што следува $m=0$.

41. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}ax=|y-z|+y\\ay=|z-x|+z\\az=|x-y|+x\end{cases},$$

каде $a\in\mathbb{R},\ a>0$ е параметар.

Решение. Ќе докажеме дека ако (x,y,z) е решение на системот, тогаш $x=y=z$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои решение (x,y,z) за кое без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $z > y$. Од првата равенка добиваме $ax = z - y + y = z$. Ако замениме во втората равенка добиваме $a(y-x) = |z-x| \geq 0$, од каде заради условот $a > 0$ добиваме $y \geq x$. Тогаш од третата равенка добиваме $az = y - x + x = y$. Ако замениме во првата равенка добиваме $x \geq z$. Според тоа, $z > y \geq x \geq z$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека решенијата на системот го задоволуваат условот $x = y = z$. Според тоа, за $a = 1$ решение на системот се сите тројките од облик $(t,t,t),\ t \in R$, а за $a \neq 1$ решение на системот е тројката $(0,0,0)$.

42. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}(a+b)(x+y)-cz=a-b\\(b+c)(y+z)-ax=b-c\\(c+a)(z+x)-by=c-a.\end{cases}$$

каде a,b,c се параметри.

Решение. Ако ги собереме трите равенки, добиваме

$$(a+b+c)(x+y+z)=0.$$

При тоа, можни се два случаи и тоа:

Слачај 1. $a+b+c \neq 0$. Тогаш решенијата на системот го задоволуваат условот $x+y+z=0$. Ако за $x+y=-z$, $y+z=-x$ и $z+x=-y$ замениме во првата, втората и третата равенка соодветно, добиваме

$$\begin{cases}-(a+b)z-cz=a-b\\-(b+c)x-ax=b-c\\-(c+a)y-by=c-a\end{cases},$$

од каде добиваме дека единствено решение на системот е

$$x=\tfrac{c-b}{a+b+c},\ \ y=\tfrac{a-c}{a+b+c},\ \ z=\tfrac{b-a}{a+b+c}.$$

Случај 2. $a+b+c=0$. Со замена на $a+b=-c$, $b+c=-a$ и $c+a=-b$ во првата втората и третата равенка, соодветно, системот го добива обликот

$$\begin{cases}cz-cz=a-b\\ax-ax=b-c\\by-by=c-a\end{cases}\qquad(1)$$

па затоа $a=b=c=0$ и системот има бесконечно многу решенија, т.е. било кои вредности за x,y,z се решенија.

43. За реалните броеви x и y е исполнето равенството

$$\tfrac{x+y}{x+2y}+\tfrac{x-y}{x-2y}=4.\qquad(1)$$

Докажи, дека $x^2-y^2 \neq 0$ и определи ја вредноста на изразот $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Решение. Ако за реалните броеви x и y е исполнето равенството (1), тогаш $x+2y \neq 0$ и $x-2y \neq 0$. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека $x^2-y^2=0$. Тогаш $(x-y)(x+y)=0$ од каде добиваме дека $x-y=0$ или $x+y=0$.

Случај 1. $x-y=0$. Равенството (1) го добива обликот $\frac{x+y}{x+2y}=4$, од каде следува дека $3x+7y=0$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+7y=0 \end{cases}$$

чија детерминанта е $\Delta=10\neq 0$. Хомогениот систем има едно единствено решение $x=y=0$. Но, тогаш $x+2y=0+2\cdot 0=0$ што не е можно.

Случај 2. $x+y=0$. Во Равенството (1) го добива обликот $\frac{x-y}{x-2y}=4$ од каде следува дека $3x-7y=0$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 3x-7y=0 \end{cases}$$

чија детерминанта е $\Delta=-10\neq 0$. Хомогениот систем има едно единствено решение $x=y=0$. Но, тогаш $x-2y=0-2\cdot 0=0$, што не е можно.

Од добиените противречности следува дека $x-y, x+y\neq 0$, т.е. $x^2-y^2\neq 0$. Сега, изразот (1) можеме да го запишеме во облик

$$\frac{(x+y)(x-2y)+(x-y)(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)}=4$$

$$2x^2-4y^2=4x^2-16y^2\ .$$

Конечно, $x^2=6y^2$ од каде што добиваме

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{6x^2+x^2}{6x^2-x^2}=\frac{7}{5}\ .$$

44. Определи ги сите тројки реални броеви (x,y,z) такви што

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{28} \\ xy-2z^2=7. \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка имаме $y=2\sqrt{7}-x$ и ако замениме во втората равенка последователно добиваме

$$(2\sqrt{7}-x)x-2z^2=7$$

$$(x-\sqrt{7})^2+2z^2=0$$

од каде добиваме $x=\sqrt{7},\ z=0$, па затоа $y=\sqrt{7}$. Непосредно се проверува дека тројката $(x,y,z)=(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$ е решение на дадениот систем.

45. Најди ги сите вредности на параметарот a, за кои што системот

$$\begin{cases} x+4|y|=|x| \\ |y|+|a-x|=1 \end{cases}$$

има точно две решенија.

Решение. Нека (x,y) е решение на системот за кое $x\geq 0$. Тогаш $y=0$ (од првата равенка) и $|x-a|=1$, т.е. $x=a\pm 1$. Јасно, ако $a\geq 1$, тогаш системот има две решенија за кои $x\geq 0$. Тоа се $(a-1,0)$ и $(a+1,0)$. Ако $-1\leq a<1$ тогаш системот има едно решение за кое $x \geq 0$ и тоа $(a+1, 0)$. Ако $a < -1$, тогаш системот нема решение за секое $x \geq 0$.

Нека $x < 0$. Тогаш $|y| = -\frac{x}{2}$ и затоа $|x-a| = 1+\frac{x}{2}$. Од $|x-a| \geq 0$ следува $1+\frac{x}{2} \geq 0$, т.е. $x \geq -2$. Значи за $x \geq a$, $x-a = 1+\frac{x}{2}$ од што добиваме $x = 2(a+1)$ и за $x < a$, $x-a = -1-\frac{x}{2}$ од што добиваме $x = \frac{2}{3}(a-1)$. Од $-2 \leq \frac{2}{3}(a+1) < 0$ добиваме $-2 \leq a < -1$, а од $-2 \leq \frac{2}{3}(a-1) < 0$, соодветно $-2 \leq a < 1$. Очигледно ако (x, y) е едно решение на системот за кое $x < 0$, тогаш $y \neq 0$ и затоа $(x, -y)$ исто така е решение на системот. Од претходно изнесеното следува дека дека за $a < -2$ системот нема решение. Ако $a = -2$, тогаш системот има точно две решенија и тоа $(-2, \pm 1)$. Ако $-2 < a < -1$, тогаш $2(a+1) \neq \frac{2}{3}(a-1)$, а бидејќи и двете вредности за x даваат решенија ќе имаме четири решенија на системот за кои $x < 0$.

Според тоа, системот има две решенија само ако $a \geq 1$ и тие се $(a-1, 0)$ и $(a+1, 0)$ и ако $a = -2$ и тие се $(-2, \pm 1)$.

2. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Дактилограф ги отчукува по ред природните броеви од 1 до 1000. Која цифра стои на 1990-тото место?

Решение. Очигледно е дека дактилографот ги отчукал сите едноцифрени и двоцифрени броеви, т.е. вкупно $9 \cdot 1 + 9 \cdot 20 = 189$ цифри. Значи, остануваат уште $1990 - 189 = 1801$ цифри.

Бидејќи $1801 = 3 \cdot 600 + 1$, следува дека дактилографот ги отчукал првите 600 трицифрени броеви, а 1990-тата цифра е всушност првата цифра од 601-от трицифрен број, т.е. од бројот 700.

Следствено, бараната цифра е 7.

2. За обележување (нумерирање) на страниците на еден речник употребени се 6869 цифри. Колку страници има речникот?

Решение. За обележување на првите 999 страници потребни се

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889 \text{ цифри.}$$

Остануваат уште $6869 - 2829 = 3980$ цифри. Со нив можат да се обележат уште $3980 : 4 = 995$ страници. Според тоа, вкупниот број на страници на речникот е: $999 + 995 = 1994$.

3. На бројот 9, во произволен редослед, се извршуваат следните операции: множење со 3, делење со 3 и собирање со 3. Кое множество при тоа е добиено?

Решение. Да ги означиме операциите кратко со: М, Д, С. Постојат шест можности за нивниот редослед: МДС, МСД, ДМС, ДСМ, СМД, СДМ. Ако една по друга се извршуваат операциите М и Д (множење со 3 и делење со 3), без разлика на нивниот редослед, се добива само еден резултат: $9 + 3 = 12$ (првиот, третиот и последните два случаја). Во преостанатите два случаи имаме

$((9\cdot 3)+3):3=10$; $((9:3)+3)\cdot 3=18$.

Следствено, бараното множество е $\{10,12,18\}$.

4. На бројот a по некој редослед се извршени следните операции: множење со b, делење со b, собирање со b и одземање со b. Кој е најголемиот број на различни резултати што притоа се добиваат, ако се менува редоследот на операциите?

Решение. Да ги означиме операциите кратко со М, Д, С, О. Лесно утврдуваме дека постојат 24 можности за редоследот на нивното изведување (тоа се пермутациите на буквите М, Д, С, О). Но, ако множењето и делењето се изведуваат една по друга, тогаш резултатот по сите четири операции ќе биде еднаков на a. На пример:

$$(((a+b)\cdot b):b)-b=a.$$

Слично е ако една по друга се изведуваат операциите собирање и одземање:

$$(((a\cdot b)+b)-b):b=a.$$

Во преостанатите осум случаи имаме:

$$(((a\cdot b)+b):b)-b=a+1-b$$
$$(((a\cdot b)-b):b)+b=a-1+b$$
$$(((a:b)+b)\cdot b)-b=a+b^2-b$$
$$(((a:b)-b)\cdot b)+b=a-b^2+b$$
$$(((a+b)\cdot b)-b):b=a+b-1$$
$$(((a+b):b)-b)\cdot b=a+b-b^2$$
$$(((a-b)\cdot b)-b):b=a-b+1$$
$$(((a-b):b)+b)\cdot b=a-b+b^2.$$

Значи, најголемиот број на различни резултати што притоа се добиваат е 5, т.е.

$$\{a,a-b+1,a+b-1,a+b-b^2,a-b+b^2\}.$$

Овој број се достигнува за $a\neq b$ и $b\notin\{-1,0,1\}$. Така на пример, за $a=3,b=2$ добиваме: $\{3,2,5,4,1\}$.

5. Производот $\text{МЕЛЕМ}\cdot 999$ завршува на 235. Одреди го бројот МЕЛЕМ.

Решение . Производот $\text{МЕЛЕМ}\cdot 999$ можеме да го запишеме како

$$1000\cdot\text{МЕЛЕМ}-\text{МЕЛЕМ}.$$

Овој број ќе завршува на 235, ако разликата $1000-\text{ЛЕМ}$ завршува на 235, т.е. ако $\text{ЛЕМ}=765$. Оттука: $\text{М}=5$, $\text{Е}=6$, $\text{Л}=7$, т.е. $\text{МЕЛЕМ}=56765$.

6. Одреди број чиј 21% е еднаков на $5,6\%$ од вредноста на изразот

$$(3+1,2:0,1):(4\cdot 1,25-7^0).$$

Решение. Да го означиме бараниот број со x, а дадениот израз со A, тогаш: $\frac{21}{100}x=\frac{5,6}{100}A$, т.е. $x=\frac{5,6}{21}A=\frac{4}{15}A$. Но,

$$(3+1,2:0,1):(4\cdot 1,25-7^0)=(3+12):(5-1)=\frac{15}{4},$$

па конечно добиваме дека $x=1$.

7. Сите 5 томови на еден речник имаат еднаков број на страници, а нивното нумерирање е непрекинато од првиот до последниот. Колку страници има еден том, ако збирот на броевите со кои се означени првата и последната страница на секој том изнесува 5855?

Решение. Нека со n го означиме бројот на страниците на секој од петте томови, тогаш

$$5855=(1+n)+(n+1+2n)+(2n+1+3n)+(3n+1+4n)+(4n+1+5n)$$

$$5855=25n+5$$

или $n=234$.

Следствено, секој том има по 234 страници.

8. Производот на еден број и бројот читан од десно на лево е 78445. Кој е тој број?

Решение. *Прв начин.* Очигледно, бараниот број е трицифрен. Имаме

$$78445=5\cdot 29\cdot 541.$$

Бидејќи 541 е прост број, а $5\cdot 29=145$, следува дека бараниот број е 541 (или 145).

Втор начин. Лесно се проверува дека бараниот број е трицифрен. Од условот $\overline{xyz}\cdot\overline{zyx}=78445$ следува дека $x=5$ или $z=5$.

Ако $x=5$, тогаш $z=1$, бидејќи за $z\geq 2$, производот не е петцифрен број. Равенката $\overline{5y1}\cdot\overline{1y5}=78445$ има единствено решение $y=4$. Значи, тој број е 541 или 145. Очигледно, бараниот број е трицифрен.

Трет начин. Бидејќи производот е делив со 5, според условот од задачата, првата или последната цифра на бараниот број е 5, а обратната 1, бидејќи во спротивен случај производот би содржел повеќе од пет цифри.

Од $135\cdot 531<78445$ и $155\cdot 551>78445$ заклучуваме дека втората цифра на бројот е 4. Конечно од $541\cdot 145=78445$. Добиваме дека бараниот број е 541 или 145..

9. Определи го бројот n, ако тој ги исполнува следниве три услови:

а) сите негови цифри се различни

б) од неговите цифри може да се состават шест различни двоцифрени броеви

в) збирот на тие двоцифрени броеви е $2n$.

Решение. Од условот б) добиваме дека бројот n е трицифрен број. Нека $n=\overline{abc}$ каде a,b,c се цифри кои меѓу себе се различни. Тогаш збирот на броевите $\overline{ab},\overline{bc},\overline{ac},\overline{ca},\overline{cb},\overline{ba}$ е $2n=2\overline{abc}$, т.е.

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{cb}+\overline{ba}=2\cdot\overline{abc}$$

Значи, $22(a+b+c)=200a+20b+2c$, од каде добиваме $a+b=10(9a-c)$. Бидејќи $a+b\leq 18$, добиваме дека $9a-c<2$, т.е $9a-c=1$. Од равенството $9a=1+c$ добиваме $a=1$ и $c=8$. Конечно, $b=9$ и барниот број е 198.

10. Најди трицифрен број со различни цифри, кој што е пет пати помал од збирот на другите трицифрени броеви запишани со исти цифри.

Решение. Нека $\overline{xyz}$ е трицифрен број со различни цифри, тогаш според условот од задачата имаме

$$5\overline{xyz} = \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx},$$
$$6\overline{xyz} = \overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx}$$
$$6(100x + 10y + z) = 222(x + y + z),$$

или

$$7x = 3y + 4z \qquad (1)$$

Последното равенство го запишуваме во видот

$$7x - 7z = 3y + 4z - 7z$$
$$7(x - z) = 3(y - z),$$

од каде што заклучуваме дека $y - z$ е деллив со 7. Следствено, за парот (y, z) можни се четири случаи: $(8,1)$, $(1,8)$, $(9,2)$ и $(2,9)$. Ако овие вредности за y и z ги замениме во (1), тогаш за x ги добиваме следните вредности: $4, 5, 5, 6$.

Според тоа, постојат четири трицифрени броеви што го задоволуваат условот на задачата: $481, 518, 592$ и 629.

11. Најди трицифрен број, чии цифри се различни од нула, а збирот на сите можни двоцифрени броеви запишани со тие цифри е еднаков на тој трицифрен број.

Решение. Нека трицифрениот број е $\overline{xyz}$, тогаш од условот на задачата следува

$$\overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{yx} + \overline{xz} + \overline{zx} + \overline{yz} + \overline{zy}$$

или

$$100x + 10y + z = 22(x + y + z)$$
$$26x = 4y + 7z.$$

Очигледно, z е парен број, т.е. $z = 2t$. Тогаш имаме

$$26x = 4y + 14t \text{, т.е} 13x = 2y + 7t$$

Бидејќи $y \le 9$, $t \le 4$, следува $13x \le 46$, т.е. $x \le 3$.

(i) За $x = 1$, добиваме $2y + 7t = 13$, од каде следува дека t е непарен број, т.е. $t = 1$ или $t = 3$.

За $t = 1$ добиваме $2y = 13 - 7$, $y = 3$.

За $t = 3$ добиваме $2y = 13 - 21$, $y = -4$.

Значи, едно решение на задачата е: $x = 1, y = 3, z = 2$, т.е. бараниот број е 132.

(ii) За $x = 2$ од равенката $2y + 7t = 26$ следува дека t е парен број, т.е. $t = 2$ или $t = 4$.

За $t = 2$ добиваме $2y = 26 - 14$, $y = 6$.

За $t = 4$ добиваме $y = -1$.

Во овој случај бараниот број е 264.

(iii) На сличен начин како во првиот случај, за $x = 3$ и $t = 3$ добиваме $y = 9$, па бараниот број во овој случај е 396.

Следствено, бараните броеви се: 132, 264 и 396.

12. Дадени се три картончиња. На едното е запишан бројот 19, на другото бројот 97, а на третото некој двоцифрен број. Ако ги собереме сите шестцифрени броеви, кои се добиваат со подредување на кортончињата во ред, го добиваме бројот 3232320. Кој број е запишан на третото картонче?

Решение. *Прв начин.* Нека x е двоцифрениот број запишан на третото картонче. Постојат шест можности на подредување на трите картончиња во ред и при тоа се добиваат броевите:

$$\overline{1997x}, \overline{19x97}, \overline{x1997}, \overline{9719x}, \overline{97x19}, \overline{x9719}.$$

За нивниот збир добиваме:

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot 19(10000+100+1)+2\cdot 97(10000+100+1)+2x(10000+100+1) \\ &= 20202(19+97+x). \end{aligned}$$

Од условот $S = 3232320$ наоѓаме $19+97+x = 160$, т.е. $x = 44$. Значи, на третото картонче е запишан бројот 44.

Втор начин. Нека $\overline{ab}$ е двоцифрениот број запишан на третото картонче. Постојат шест можности на подредување на трите картончиња во ред и при тоа се добиваат броевите:

$$\overline{1997ab}, \overline{19ab97}, \overline{ab1997}, \overline{9719ab}, \overline{97ab19}, \overline{ab9719}.$$

За нивниот збир добиваме:

$$\begin{aligned} &S = 1\cdot 202020 + 9\cdot 222222 + 7\cdot 20202 + a\cdot 202020 + b\cdot 20202 \\ &2343432 + a\cdot 202020 + b\cdot 20202 = 3232320 \\ &(10a+b)\cdot 20202 = 888888 \\ &10a+b = 44 \\ &\overline{ab} = 44. \end{aligned}$$

Значи, на третото картонче е запишан бројот 44.

13. Определи петцифрен број, кој е 2-пати поголем од производот на броевите составени од неговите први две цифри и последните три цифри, во дадениот распоред.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcde}$. Од условот следува равенството

$$\overline{abcde} = 2\overline{ab}\cdot\overline{cde},$$

т.е.

$$1000\cdot\overline{ab} + \overline{cde} = 2\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cde}$$

$$1000\cdot\overline{ab} = (2\cdot\overline{ab}-1)\cdot\overline{cde}. \qquad (*)$$

Бидејќи $\overline{ab}$ и $2\cdot\overline{ab}-1$ се заемно прости броеви, следува дека 1000 е делив со $2\cdot\overline{ab}-1$. Тогаш непарниот број $2\cdot\overline{ab}-1$ може да биде само 25 или 125, а оттука $\overline{ab}$ е 13 или 63, соодветно. Од (*) наоѓаме соодветни вредности за $\overline{cde}$ се 520 или 504, па бараниот број е 13520 или 63504.

14. Двоцифрените броеви од 10 до 99 се запишани во некој редослед

$$\overline{a_1b_1}, \overline{a_2b_2}, \overline{a_3b_3}, ..., \overline{a_{90}b_{90}}.$$

Да се најде бројот $\overline{a_1b_1a_2b_2}$ ако

$$\overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{99}b_{99}} .$$

Решение. Збирот на сите двоцифрени броеви е

$$10+11+12+...+98+99 = (10+99)+(11+98)+...+(54+55) = 45\cdot 109 .$$

Според тоа,

$$4905 = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + (\overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{99}b_{99}}) = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_1b_1a_2b_2}$$

Бидејќи

$$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + 100\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} = 101\overline{a_1b_1} + 2\overline{a_2b_2}$$

добиваме

$$101\overline{a_1b_1} + 2\overline{a_2b_2} = 4905 .$$

Од друга страна $101\cdot 49 = 4949 > 4905$, па затоа $\overline{a_1b_1}$ е најмногу 48. Но собирокот $2\overline{a_2b_2}$ е парен и не е поголем од $2\cdot 99 = 198$. Збирот $101\overline{a_1b_1} + 2\overline{a_2b_2}$ е непарен број, па затоа $101\overline{a_1b_1}$ е непарен и не е помал од $4905 - 198 = 4707$. Значи $\overline{a_1b_1}$ е непарен и не е помал од 47. Конечно $\overline{a_1b_1} = 47$ и $\overline{a_2b_2} = 49$, т.е. бараниот број е $\overline{a_1b_1a_2b_2} = 4779$.

15. Определи правилна дропка поголема од $\frac{1}{3}$, така што при зголемување на броителот за некој број и множење на именителот со истиот број, вредноста на дропката не се менува.

Решение. Нека бараната дропка е $\frac{a}{b}$. По услов $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}$ и уште $\frac{a+x}{bx} = \frac{a}{b}$. Од условот $b \neq 0$ и $x \neq 0$, следува $a + x = ax$. Ова равенство ќе го трансформираме вака:

$$\begin{aligned} &a + x - ax = 0 \\ &a + x - ax - 1 = -1 \\ &a(1-x) - (1-x) = -1 \\ &(a-1)(1-x) = -1 . \end{aligned}$$

Последното равенство е можно ако во исто време е:

$$x - 1 = 1 \text{ и } a - 1 = 1$$

или

$$x - 1 = -1 \text{ и } a - 1 = -1$$

Во првиот случај $x = 2, a = 2$, додека вториот случај не е можен, бидејќи $x \neq 0$. Од условот $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}$ следува, $3a > b$ или $b < 6$, т.е. $b \in \{1,2,3,4,5\}$. За $b = 1$ и $b = 2$ не добиваме правилна дропка, а за $b = 3, b = 4$ и $b = 5$ ги добиваме дропките: $\frac{2}{5}, \frac{2}{4}$ и $\frac{2}{3}$.

Следствено, постојат три дропки што ги исполнуваат условите од задачата: $\frac{2}{5}, \frac{2}{4}$ и $\frac{2}{3}$.

16. Определи ги сите правилни дропки од видот $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$, ако $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}, \qquad (1)$$

при што $10a+b<10b+c$, односно $a\le b$. Од (1) добиваме $(10a+b)c=(10b+c)a$ или $10a(b-c)=c(b-a)$, а оттука следува дека производот $c(b-a)$ е делив со 10. Тоа е можно за $c=5$ или $b-a=5$.

i) Нека $c=5$, тогаш од $10a(b-5)=5(b-a)$ добиваме $2a(b-5)=b-a)$ или $(2a-1)b=9a$. Бидејќи a и $2a-1$ се заемно прости броеви, следува дека $(2a+1)|9$, т.е. $2a-1=1$ или $2a-1=3$ или $2a-1=9$, од каде што: $a=1$ или $a=2$ или $a=5$. Следствено бараните дропки се: $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$ и $\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$.

ii) Нека $b-a=5$, тогаш од $10a(b-c)=c\cdot 5$ добиваме $2a(b-c)=c$, т.е. $c=2a(a+5-c)$, а оттука $c(2a+1)=2a^2+10a$. Последното равенство го запишуваме во видот $c=a+\frac{9a}{2a+1}$ од каде што следува дека $(2a+1)|9$, т.е. $2a+1=1$ или $2a+1=3$ или $2a+1=9$, од каде што: $a=0$ или $a=1$ или $a=4$. Следствено, бараните дропки се: $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$ и $\frac{49}{98}=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$.

Значи, постојат четири дропки кои го исполнуваат условот на задачата.

17. Првата цифра на еден петцифрен број е 7. Ако таа цифра се изостави, се добива број кој е 17 пати помал од петцифрениот број. Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е $\overline{7abcd}$; тогаш:

$$\begin{aligned}\overline{7abcd}&=17\cdot\overline{abcd},\\ 7\cdot 10000+\overline{abcd}&=17\cdot\overline{abcd},\\ 70000&=16\cdot\overline{abcd},\\ \overline{abcd}&=4375.\end{aligned}$$

Според тоа, бараниот петцифрен број е 74375.

18. Четирицифрениот број a не ја содржи цифрата 9 и е квадрат на природен број. Ако секоја негова цифра ја наголемиме за 1 се добива природен број кој повторно е точен квадрат.

Определи ги сите четирицифрени броеви кои го имаат ова својство.

Решение. Нека a е четирицифрен број таков што $a=x^2$, за некој природен број $x\in\mathbb{N}$. Бројот што се добива со наголемување на неговите цифри за 1 е $a+1111$. Според условот на задачата, постои $y\in\mathbb{N}$ така што $a+1111=y^2$.

Јасно, $y>x$, и важи $y^2-x^2=1111$, т.е. $(y-x)(y+x)=1111=11\cdot 101$. Но, 11 и 101 се прости броеви броеви, па затоа имаме две можности.

Случај 1. $y-x=1$, $y+x=1111$. Ако двете равенки ги собереме добиваме $2y=1112$, т.е. $y=556$. Но тогаш со замена во една од равенките добиваме $x=555$. Квадратите на $y=556$ и $x=555$ не се четирицифрени броеви, па според тоа во овој случај немаме решение.

Случај 2. $y-x=11$, $y+x=101$. Повторно, ако двете равенки од системот ги собереме, добиваме $2y=112$, т.е. $y=56$. Исто, со замена во една од равенките на системот добиваме $x=45$. Бројот $a=45^2=2025$ го задоволува условите на задачата.

Значи, постои само еден четирицифрен број кој ги исполнува условите на задачата, и тоа е 2025.

19. Да се определи двоцифрен број кој е еднаков на производот на збирот и разликата на неговите цифри.

Решение. Нека бараниот број е $10x+y$; тогаш, според условот на задачата, ќе имаме

$$10x+y=(x+y)|x-y|. \qquad (1)$$

Ако $x\geq y$, тогаш $|x-y|=x-y$ па равенката (1) се сведува на обликот

$$x(x-10)=y(y+1) \qquad (2)$$

Бидејќи x и y се цифри, следува дека $x-10<0$, што значи дека левата страна на равенката (2) е негативна, а десната позитивна. Следствено, не може да биде $x\geq y$.

Ако $x<y$, тогаш $|x-y|=y-x$, па равенката (1) се сведува на обликот

$$x(x+10)=y(y-1). \qquad (3)$$

Производот $y(y-1)$ е секогаш парен број, што значи дека $x(x+10)$ е парен. Но, x и $x+10$ се и двата парни; во тој случај имаме

$$x(x+10)=4k(k+5),$$

т.е. $x(x+10)$ е делив со 8. Од тоа следува дека $y=9$ или $y=8$. За $y=9$ решенијата на равенката (3) не се цели броеви, а за $y=8$ од (3) добиваме $x=4$.

Значи, бараниот број е 48.

20. Цифрите на шестиот степен на некој природен број, подредени по големина се: $0,2,3,4,4,7,8,8,9$. Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е n, тогаш $10^8<n^6<10^9$. Од $10^8<n^6$ кое е еквивалентно со $10^4<n^3$, следува $\sqrt[3]{10000}<n$, а како $20^3=8000$, заклучуваме дека $20<n$. Аналогно, од $n^6<10^8$ кое е еквивалентно со $n^2<10^3$, заклучуваме дека $n<32$, бидејќи $32^2=1024$. Конечно

$$20<n<32 \qquad (1)$$

Збирот на цифрите на бројот n^6 е 45, па следува дека бројот n е делив со 3. (За деливост со 9 не сме сигурни. Зошто?). Тогаш според (1) следува дека n е некој од броевите: $21,24,27$ или 30.

Очигледно, $n\neq 30$, бидејќи 30^6 завршува на шест нули. Броевите 21^6 и 24^6 завршуваат со цифрите 1 односно 6, следователно $n\neq 21$ и $n\neq 24$.

Со директна проверка се убедуваме дека $n=27$, бидејќи $27^6=387420489$.

21. Четирицифрен број е точен квадрат, при што ако од неговите цифри се одземе ист број (цифра) се добива број кој е пак точен квадрат. Да се определат сите такви природни броеви.

Решение. Нека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е полн квадрат на природниот број A, а k е цифра ($k=1,2,3,4,5,6,7,8,9$) за која $\overline{a-k,b-k,c-k,d-k}$ е квадрат на природниот број B. Според тоа

$$\overline{abcd}-\overline{a-k,b-k,c-k,d-k}=A^2-B^2=(A-B)(A+B),$$

$$1000k+100k+10k+k=(A-B)(A+B)$$

$$k\cdot 1111=(A-B)(A+B)$$

$$(A-B)(A+B)=k\cdot 11\cdot 101. \qquad (1)$$

Бројот A^2 е четирицифрен природен број, па според тоа A е природен број таков што $32\le A\le 99$. Слично $32\le B\le 99$, од каде што добиваме $64\le A+B\le 200$ и $0\le A-B\le 67$. Броевите $A+B$ и $A-B$ се со иста парност, па од равенството (1) добиваме

$$\begin{cases} A+B=101 \\ A-B=k\cdot 11 \end{cases}$$

При што можни вредности за k се $k=1,3,5$. Со непосредна проверка може да се виде дека решенија се $k=1$ и $k=3$. Бараните броеви се

$$\overline{abcd}=3136=56^2, \text{ за } k=1$$

$$\overline{abcd}=4489=67^2, \text{ за } k=3.$$

22. Цената на една книга прво е намалена за 20%, потоа новата цена за 25% и на крајот за уште 10%. За кој процент е намалена цената на книгата?

Решение. *Прв начин.* Нека цената на книгата на почетокот била x денари. По првото намалување за 20% цената ќе изнесува $x-\frac{20}{100}x=\frac{4}{5}x$ денари. По второто намалување за 25% цената ќе биде $\frac{4}{5}x-\frac{25}{100}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{3}{5}x$ денари, а по третото намалување за 10%, таа ќе изнесува $\frac{3}{5}x-\frac{10}{100}\cdot\frac{3}{5}x=\frac{54}{100}x$ денари.

Ако p е бараниот процент, тогаш од равенката $x-\frac{p}{100}x=\frac{54}{100}x$ добиваме $p=46$. Значи, цената на книгата е намалена за 46%.

Втор начин. Ако цената на книгата е k денари, тогаш: при првото намалување за 20% цената е $0,80k$; при второто намалување за 25% таа ќе биде $0,80k\cdot 0,75$ и на крајот, за уште 10% намалување, таа ќе биде еднаква на $0,80\cdot 0,75\cdot 0,90k=0,54k$.

Значи, цената е $0,54$ од почетната, т.е. е намалена за $100\%-54\%=46\%$.

23. Учениците на една паралелка, во текот на 8 месеци, собрале 55304 денари за екскурзија. Колку ученици биле во паралелката и по колку денари внесувал секој од нив месечно, ако тие износи биле еднакви?

Решение. Нека во паралелката имало x ученици. Ако секој од нив месечно внесувал по y денари, тогаш за 8 месеци ќе внесе $8y$ денари, или $8xy=55304$, т.е. $xy=6913$. Но, $6913=1\cdot 6913=31\cdot 223$, па заклучуваме дека $x=31$, $y=223$, т.е. во паралелката имало 31 ученик и секој од нив внесувал по 223 денари.

24. Со 25 денари може да се купат онолку моливи, колку што денари се потребни да се купи еден молив. Колку моливи може да се купат за 100 денари?

Решение. Ако со 25 денари може да се купат x моливи, тогаш 1 молив чини x денари. Следствено, $\frac{25}{x}=\frac{x}{1}$, т.е. $x=5$. Значи, со 25 денари можат да се купат 5 моливи, а со 100 денари четири пати повеќе, т.е. 20 моливи.

25. Цената на еден театарски билет е 50 денари. Менаџерот на театарот одлучил да ја намали цената на билетот, после што бројот на посетителите се зголемен за 50%, а заработувачката се зголемила за 20%. Колку проценти е намалена цената на влезниот билет?

Решение. *Прв начин.* Две лица, по старата цена би платиле 100 денари, а три лица (50% повеќе), по новата цена би платиле 120 денари (20% повеќе од 100 денари). Значи, едно лице, по новата цена, би платило 40 денари, од каде што следува дека намалувањето е 20% (од 50 на 40 денари).

Втор начин. Нека бројот на посетители е p, заработувачката е z, а новата цена на еден билет x денари. Тогаш, $50p=z$ и $x\cdot\frac{150}{100}p=\frac{120}{100}z$. Ако ги поделиме последните две равенства, добиваме $\frac{50p}{x\cdot 1,5p}=\frac{z}{1,2z}$, од каде се добива дека $x=40$. Значи, намалувањето е $(1-40:50)\cdot 100=20\%$.

Трет начин. Ако бројот на посетителите е x, тогаш заработувачката е $50x$. Ако новата цена на билетот е y, тогаш бројот на посетителите е $1,5x$ (за 50% повеќе), а заработувачката $60x$ (за 20% повеќе од $50x$). Тогаш, $1,5x\cdot y=60x$, од каде што $y=40$. Следствено, намалувањето е $(1-40:50)\cdot 100=20\%$.

26. За 14 нотези и 4 пенкала е платено 5600 денари. Кога цената на нотезите се зголемила за 15%, а на пенкалата за 10%, вкупната цена изнесувала 6400 денари. Одреди ја почетната цена на нотезите и пенкалата.

Решение. Нека x е цената на нотезите, а y цената на пенкалата, тогаш според условот имаме

$$14x+4y=5600 \qquad (1)$$

Ако x се зголеми за 15% добиваме $x+\frac{15}{100}x=\frac{23}{20}x$, а ако y се зголеми за 10% добиваме $y+\frac{10}{100}y=\frac{11}{10}y$; тогаш според вториот услов добиваме

$$14\cdot\frac{23}{20}x+4\cdot\frac{11}{10}y=6400\,. \qquad (2)$$

Множејќи ја равенката (1) со 11, а равенката (2) со 10 го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}-154x-44y=-61600\\ 161x+44y=64000\end{cases}$$

од каде што $x=\frac{2400}{7}=342,86$, $y=200$.

Значи, цената на нотезите е $342,86$, а на пенкалата 200 денари.

27. За купување на автобус кој ќе ги превезува учениците од четирите населени места A, B, C, D се потребни 10500000 денари. Местата во купувањето на автобусот учествуваат пропорционално со бројот на нивните жители. Во местото D бројот на жителите е еднаков на вкупниот број жители во местата A и C, во местото A има 25% помалку жители отколку во местото B, а 20% повеќе жители отколку во местото C. Определи колку пари за купување на автобусот ќе даде секое од местата A, B, C, D.

Решение. Со a, b, c, d да го означиме бројот на жителите на местото A, B, C, D соодветно. Од условите на задачата следува $d = a + c,\ a = \frac{3}{4}b,\ a = \frac{6}{5}c$. Според тоа,

$$b = \frac{4}{3}a,\ c = \frac{5}{6}a,\ d = a + \frac{5}{6}a = \frac{11}{6}a .$$

Значи,

$$a : b : c : d = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{6} : \frac{11}{6} = 6 : 8 : 5 : 11 .$$

Ако сумите кои треба да ги плати секое од местата ги означиме со A, B, C, D, тогаш од претходно изнесеното следува дека $A = 6k,\ B = 8k,\ C = 5k,\ D = 11k$ и $A + B + C + D = 10500000$. Според тоа,

$$6k + 8k + 5k + 11k = 10500000, \text{ т.е. } k = 350000 .$$

Конечно, $A = 2100000, b = 2800000, C = 1750000, D = 3850000$.

28. Во понеделникот, три банани чинеле колку лимон и портокал заедно. Во вторникот сите овошја се намалиле за иста сума на пари, и два портокали чинеле колку три банани и еден лимон. Во средата, цената на половина лимон била 5 денари.

Колку била цената на портокалот во понеделникот?

Решение. Нека x, y и z се цените на бананите, лимоните и портокалите соодветно во понеделникот. Нека намалувањето на цената била за r денари. Тогаш од условите на задачата имаме

$$\begin{cases} 3x = y + z \\ 2(z - r) = 3(x - r) + y - r \\ \frac{1}{2}(y - r) = 5 \end{cases} .$$

Втората равенка е еквивалентна на равенката $2z = 3x - 2r + y$. Ако од првата равенка замениме за $3x$ во последната равенка добиваме $2z = y + z - 2r + y$, па затоа $z = 2y - 2r = 2(y - r)$. Но $y - r = 10$, од каде што добиваме $z = 2 \cdot 10 = 20$ денари.

Значи, цената на еден портокал во понеделникот била 20 денари.

29. Цената на едно пенкало е цел број центи од долар (цент е дел од долар; еден долар има 100 центи). Цената на девет пенкала е поголема од 11\$, а е помала од 12\$ и цената на 13 пенкала е поголема од 15\$, а е помала од 16\$. Определи ја цената на едно пенкало?

Решение. Нека x е цената на едно пенкало во центи. Според тоа,

$$1100 < 9x < 1200$$
$$1500 < 13x < 1600 .$$

Бидејќи x е цел број, добиваме

$$122 < x < 134$$
$$115 < x < 124.$$

Од последните неравенства имаме $115 < 122 < x < 124 < 134$, од каде добиваме $x = 123$. Значи, цената на едно пенкало е 123 центи или 1,23$.

30. Замислен банкарски службеник ги сменил еврата и центите кога му раситнувал чек на Марко, давајќи му центи наместо евра и евра наместо центи. Откако купил весник од 5 центи, Марко забележал дека му останала вредност точно двапати поголема отколку вредноста на неговиот чек. Колкава била вредноста на чекот?

Решение. Нека вредноста на чекот била k евра и y евроценти, каде x и y се ненегативни цели броеви и $y < 100$. Банкарскиот службеник на Марко му дал x евроценти и y евра. Условот на задачата дека по купување на весник од 5 евроценти на Марко му останала двојно поголема сума пари од вредноста на чекот може да се запише како

$$100y + (x-5) = 2(100x + y)$$
$$199x = 98y - 5$$
$$(98 \cdot 2 + 3x)x = 98y - 5$$
$$98(y - 2x) = 3x + 5.$$

Ако $y - 2x = 1$, тогаш $3x + 5 = 98$, па решение на овој систем е $x = 31$, $y = 63$.

Ако $y - 2x \geq 2$, тогаш $3x + 5 \geq 2 \cdot 98 = 196$. Од овде следува $x \geq \frac{191}{3}$,

$$y \geq 2 + 2x \geq 2 + 2 \cdot \frac{191}{3} > 100,$$

а ова не е можно бидејќи $y < 100$.

Вредноста на чекот била 31 евро и 63 евроценти.

31. Пресметај по колку минути, откако часовникот покажал 9 часот, големата и малата стрелка на часовникот ќе се поклопат.

Решение. Ако со x го означиме „патот“ на минутната стрелка, тогаш $x - 45$ е „патот“ на часовата стрелка. Имајќи го предвид нивниот однос $12:1$, добиваме:

$$x : (x - 45) = 12 : 1, \ x = 49\tfrac{1}{11}.$$

Значи, по $49\frac{1}{11}$ минути стрелките ќе се поклопат.

32. Дедото на Филип е роден во дваесеттиот век. Филип забележал дека збирот на цифрите од годината на раѓањето на дедо му е еднаков со збирот на цифрите од бројот на годините што дедо му ги имал во 1985. Во која година е роден дедото на Филип?

Решение. Нека дедото на Филип е роден во $19xy$ година, $0 \leq y \leq 9$ и $0 \leq x \leq 9$. Цифрите на бројот на годините на дедото во 1985 година се $8 - x$ и $5 - y$ или $7 - x$ и $15 - y$. Тогаш $1 + 9 + x + y = 8 - x + 5 - y$ или $1 + 9 + x + y = 7 - x + 15 - y$, т.е. $2(x + y) = 3$ или $2(x + y) = 12$. Бидејќи 3 не е делив со 2, добиваме $x + y = 6$. Ако $x \geq 1$, тогаш дедото во 1985 година има помалку од 71 година, а збирот на цифрите на секој природен број помал од 71 е помал од $16=1+9+x+y$. Значи $x=0$ и $y=6$, т.е. дедото е роден во 1906 година.

33. Автобусите поаѓаат од почетната станица во еднакви временски интервали. Познато е дека првиот автобус тргнал во 7 часот и некоја минута, 27-от во 16 часот и некоја минута, а 43-от во 23 часот и некоја минута. Во кое време тргнал 14-от автобус? (Времето на поаѓање е изразено во цел број на минути).

Решение. Нека интервалот меѓу две последователни тргнувања на автобусот е t минути. Очигледно, 27-от автобус тргнува по првиот-по $26t$ интервали (види цртеж). Бидејќи меѓу 7 и 17 часот има 600 минути, а меѓу 8 и 16 часот има 480 минути, следува:

$$480<26t<600,\ 19\le t\le 23. \qquad (1)$$

На сличен начин заклучуваме дека меѓу 27-от и 43-от автобус изминале $16t$ интервали и притоа треба да важи

$$360<16t<480,\ \ 23\le t\le 29 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $t=23$ минути. Да го одредиме сега времето на поаѓање на првиот автобус. Бидејќи $23\cdot 26=598$, следува дека првиот автобус тргнал во 7 часот и 1 минута, (а 27-от во 16 часот и 59 минути). Бидејќи $13\cdot 23=299$, следува дека 14-от автобус тргнал 299 минути по првиот, односно 300 минути по 7 часот, а тоа е точно во 12 часот.

34. Во 1991 година Игор ќе има онолку години колку што изнесува збирот од цифрите на годната на неговото раѓање. Која година е роден Игор?

Решение. Нека Игор е роден $\overline{19xy}$. Збирот на цифрите на годината на раѓањето е $1+9+x+y=10+x+y$. Следствено, во 1991 година Игор ќе има

$$1991-\overline{19xy}=10+x+y$$
$$1991-(190+10x+y)=10+x+y$$
$$81=11x+2y \qquad (*)$$

Имајќи предвид дека x и y се цифри, следува дека равенката (*) има единствено решение $x=7$, $y=2$.

Според тоа, Игор е роден 1972, а во 1991 ќе има вкупно $1+9+7+2=19$ години.

35. Марко во 2013 ќе наполни онолку години колку што е збирот на цифрите од годината во која тој е роден. Колку години има Марко?

Решение. Марко нема повеќе од $1+9+9+9=28$ години. Тоа значи дека Марко е роден во $\overline{19ab}$. Тогаш, од една страна Марко има

$$2013-\overline{19ab}=2013-1900-10a-b=113-10a-b$$

години, а од друга страна има $1+9+a+b$ години. Значи,

$$113-10a-b=1+9+a+b\text{, т.е. } 11a+2b=103.$$

Но, a и b се цифри, па затоа последната равенка има единствено решение $b=2, a=9$, т.е. Марко е роден 1992 година и има 21 година.

36. Кои години од XX век може да се запишат во вид 2^m-2^n, каде што $m,n\in\mathbb{N}$?

Решение. Треба да определиме природни броеви m и n, за кои што важи

$$1900<2^m-2^n\leq 2000.$$

Од

$2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$,

заклучуваме дека $m\geq 11$. Но, за $m\geq 12$ важи $2^m-2^n>2000$, за секој $m>n$. Значи $m=11$. Тогаш од $1900<2^{11}-2^n\leq 2000$ заклучуваме дека $48\leq 2^n<148$, т.е. $n\in\{6,7\}$.

Следствено, бараните години се: $1920=2^{11}-2^7$ и $1984=2^{11}-2^6$

37. Бојан му вели на Павел: „Јас имам двапати повеќе години отколку што имаше ти кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Кога ти ќе имаш толку години колку што имам јас сега, тогаш збирот на нашите години ќе биде 63.“ Колку години има секој од нив?

Решение. Со x да ги означиме годините на Бојан, а со y годините на Павел. Тогаш од условите на задачата го составуваме следниов систем линеарни равенки:

$$\begin{cases} x=2(y-(x-y)) \\ x+(x+(x-y))=63 \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 3x-4y=0 \\ 3x-y=63 \end{cases}.$$

Решението на последниот систем е $x=28, y=21$, што значи дека Бојан има 28, а Павел 21 година.

38. Во златарска работилница треба да се направи 9 kg смеса во која златото и среброто ќе бидат во однос 7:11. На залиха има две смеси. Во првата количествата злато и сребро се однесуваат как 4:5, а во втората како 2:5. По колку килограми треба да се земе од секоја смеса, за да се добие новата смеса?

Решение. Нека во новата смеса има a kg злато и b kg сребро. Од системот

$$\begin{cases} a:b=7:11 \\ a+b=9 \end{cases}$$

се добива дека $a=3{,}5$ и $b=5{,}5$. Нека од првата смеса се земени x kg, а до втората y kg. Тогаш во новата смеса ќе има $(\frac{4}{9}x+\frac{2}{7}y)kg$ злато и $(\frac{5}{9}x+\frac{5}{7}y)kg$ сребро, т.е.

$$\begin{cases} \frac{4}{9}x+\frac{2}{7}y=3{,}5 \\ \frac{5}{9}x+\frac{5}{7}y=5{,}5 \end{cases},$$

од каде се добива дека $x=5,85$ и $y=3,15$.

39. Во три садови има вода. Ако една половина од водата во првиот сад се прелие во вториот, потоа една третина од водата во вториот сад се прелие во третиот и најпосле една четвртина од водата во третиот сад се прелие во првиот, тогаш во секој сад ќе има по 6 литри вода. По колку литри вода имало во секој сад на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во првиот сад имало x литри вода, во вториот y литри, а во третиот z литри. По првото преливање, во првиот сад останале $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ литри, во вториот $y+\frac{x}{2}$ литри, а во третиот z литри. По второто прелевање, во првиот сад има $\frac{x}{2}$ литри, во вториот

$$y+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{3}(2y+x)$$

литри, а во третиот

$$z+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{6}(6z+2y+x)$$

литри. По третото прелевање, во првиот сад има

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{24}(6z+2y+13x)$$

литри, во вториот $\frac{1}{3}(2y+x)$ литри, а во третиот

$$\frac{1}{6}(6z+2y+x)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{8}(6z+2y+x)$$

литри. Од условот на задачата, го добиваме системот

$$\frac{1}{24}(6z+2y+13x)=6,\ \frac{1}{3}(2y+x)=6,\ \frac{1}{8}(6z+2y+x)=6.$$

Решение на овој систем е $x=8$, $y=5$, $z=5$.

40. Во три садови има вода. Ако една половина од водата во првиот сад се прелее во вториот, а потоа една третина од водата што се нашла во вториот сад се прелее во третиот сад, а најпосле една четвртина од водата во третиот сад се прелее во првиот сад, тогаш во секој сад ќе има по $6l$. (Садовите се доволно големи за да се извршат споменатите преливања). Колку вода имало во секој сад пред почетокот на ова постапка?

Решение. Ако во првиот сад има $x\,l$, во вториот $y\,l$, во третиот сад $z\,l$, тогаш по првото преливање, во првиот сад ќе има $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\,l$, во вториот сад ќе има $y+\frac{x}{2}\,l$, додека по преливањето од вториот сад во третиот, во вториот сад ќе остане

$$y+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{3}(2y+x), \tag{1}$$

а во третиот сад ќе има

$$z+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{6}(6z+2y+x)$$

литри. По преливањето од третиот во првиот сад, во третиот сад ќе остане

$$\frac{1}{6}(6z+2y+x)-\frac{1}{24}(6z+2y+x)=\frac{1}{8}(6z+2y+x) \tag{2}$$

литри вода, а во првиот ќе има

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{24}(6z+2y+x)=\frac{1}{24}(6z+2y+13x)\,. \qquad (3)$$

Имајќи го предвид условот на задачата и (1), (2) и (3) , го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases} x+2y=6\cdot 3 \\ x+2y+6z=6\cdot 8 \\ 13x+2y+6z=6\cdot 24 \end{cases}$$

чие решение е: $x=8, y=5, z=5$. Според тоа, во првиот сад имало $8\,l$ вода, во вториот и во третиот- по $5\,l$ вода.

41. Двајца работници една работа ја сработуваат за 8 часа. Започнале во исто време да работат, при што првиот работел 6 часа и престанал да работи, а вториот работел 9 часа и престанал да работи. За времето за кое работеле сработиле $\frac{51}{56}$ од работата. За колку часови секој од нив посебно може да ја сработи целата работа?

Решение. Ако првиот работник целата работа ја завршува за x часови, а вториот работник целата работа ја сработува за y часови, тогаш $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}$. Ако првиот работник работи 6 часови, а вториот работник работи 9 часови непрекинато тие заедно сработуваат $\frac{51}{56}$ делови од работата, па затоа $6\frac{1}{x}+9\frac{1}{y}=\frac{51}{56}$. Во системот

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8} \\ 6\frac{1}{x}+9\frac{1}{y}=\frac{51}{56} \end{cases},$$

воведуваме смени $\frac{1}{x}=u$ и $\frac{1}{y}=v$ и добиваме

$$\begin{cases} u+v=\frac{1}{8} \\ 6u+9v=\frac{51}{56} \end{cases}.$$

Решенија на последниот систем се $u=\frac{1}{14}$ и $v=\frac{3}{56}$, од каде добиваме $x=14h$ и $y=18\frac{2}{3}h$.

42. Една работа, работниците A и B заедно ја сработуваат за c часови, истата работа работниците B и C ја сработуваат за a часови, а A и C ја сработуваат за b часови. За колку часови секој од нив ја сработува работата сам?

Решение. Нека работникот A работата ја сработува сам за x часови, работникот B работата сам ја сработува за y часови, а работникот C за z часови. Од условот на задачата добиваме

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b} \end{cases}.$$

Трите равенки од системот ќе ги собереме, при што добиваме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \qquad (1)$$

Од првата равенка на системот и од (1) имаме

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

од каде добиваме

$$z=\frac{2abc}{ac+bc-ab}.$$

Аналогно добиваме

$$x=\frac{2abc}{ac+ab-bc} \text{ и } y=\frac{2abc}{bc+ab-ac}.$$

Според тоа, работниците A, B и C секој сам ќе ја сработат работата за

$$\frac{2abc}{ac+ab-bc},\ \frac{2abc}{bc+ab-ac} \text{ и } \frac{2abc}{ac+bc-ab} \text{ часови, соодветно.}$$

43. Куче се наоѓало во местото A кога по права линија почнало да трча по лисица на растојание $30\ m$ од A. Скокот на кучето е $2\ m$, а на лисицата е $1\ m$. Во исто време додека кучето прави два скока, лисицата прави три скока. На кое растојание од A кучето ќе ја стигне лисицата?

Решение. Нека x е растојанието од A кога кучето ќе ја стигне лисицата, тогаш од условот на задачата ќе имаме $\frac{x}{4}=\frac{x-30}{3}$, од каде што добиваме $x=120$.

Значи, кучето ќе ја стигне лисицата на растојание $120\,m$ од A.

44. Еден камион чија брзина е $60\ km/h$ тргнал од градот A кон градот B. По некое време, од градот A кон градот B тргнал и автомобил со брзина $90\ km/h$. Било предвидено автомобилот да го стигне камионот во градот B. Меѓутоа, откако поминал $\frac{2}{3}$ од патот, камионот морал да ја намали брзината на $30\ km/h$ (поради неисправност). Заради тоа, автомобилот го стигнал камионот $50\ km$ пред градот B. Определи ја должината на патот меѓу градовите A и B.

Решение. Нека должината на патот меѓу двата града е $x\,km$.

Кога камионот би се движел по целиот пат со $60\ km/h$, нему би му требало $\frac{x}{60}$ часови за да стигне во градот B. Но, тој првите $\frac{2}{3}$ од патот, $\frac{2}{3}x$, ги поминал со брзина $60\ km/h$ а остатокот (до средбата) $\frac{1}{3}x-50$ со брзина $30\ km/h$. Ако автомобилот тргнал t часа покасно од каминонот, тогашод условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x}{90}+t=\frac{x}{60} \\ \frac{\frac{2}{3}x}{60}+\frac{\frac{1}{3}x-50}{30}=t+\frac{x-50}{90} \end{cases}$$

од каде добиваме $x=100$, т.е. должината на патот од A до B е $200\ km$.

45. Растојанието меѓу местата A и B е 3 километри. Во местото A има 100 ученици, а во местото B има 50 ученици. На кое растојание од местото A треба да се изгради училиште, така да вкупниот пат кој сите ученици го поминуваат во текот на еден ден да биде најмал?

Решение. Училиштето треба да се изгради на патот меѓу местата A и B. Нека училиштето е на растојание x километри од местото A, тогаш тоа е на растојание $3-x$ километри од местото B, па вкупниот пат кој го поминуваат сите ученици до училиште (вкупниот дневен пат е два пати поголем од него) е $100x+50(3-x)=50x+150$ километри, за $x\in[0,3]$ и е најмал за $x=0$. Значи, училиштето треба да се изгради во местото A.

46. Од местото A кон местото B тргнал патнички воз, а од местото B кон местото A, во исто време, тргнал брз воз. По извесно време тие се сретнале. Ако двата воза би биле патнички би се сретнале по 5 часа, а ако двата би биле брзи би се сретнале по 3 часа. Определи ги брзините на возовите, ако тие се движат со константни брзини, а растојанието меѓу местата A и B е 2400 km.

Решение. Нека $v_p km/h$ е брзината на патничкиот воз, а $v_b km/h$ е брзината на брзиот воз. Ако двата воза се движат со сопствената брзина, тогаш тие ќе се сретнат по $\frac{2400}{v_p+v_b}$ часа. Ако двата воза се движат со брзината на патничкиот воз тие ќе се сретнат за $\frac{2400}{2v_p}$ часа, а ако се движат со брзината на брзиот воз ќе се сретнаа за $\frac{2400}{2v_b}$ часа.

Според тоа,

$$\begin{cases}\frac{2400}{v_p+v_b}-\frac{2400}{2v_b}=3\\ \frac{2400}{2v_p}-\frac{2400}{v_p+v_b}=5\end{cases}. \qquad (1)$$

Последниот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases}\frac{v_b-v_p}{(v_b+v_p)v_b}=\frac{1}{400}\\ \frac{v_b-v_p}{(v_b+v_p)v_p}=\frac{1}{240}\end{cases}.$$

Ако втората ја поделиме со првата равенка ќе добиеме $\frac{v_b}{v_p}=\frac{5}{3}$, односно $v_b=\frac{5}{3}v_p$.

Ако замениме во првата равенка на системот (1), добиваме

$$\frac{2400}{\frac{8}{3}v_p}-\frac{2400}{\frac{10}{3}v_p}=3,$$

од каде следува дека $v_p=60km/h$, па од (2) добиваме $v_b=100km/h$.

47. Растојанието од местото А до местото В автомобил го поминува со постојана брзина. Ако автомобилот се движи со брзина поголема за 8 километри на час, тогаш од А до В ќе патува 3 часа помалку, а ако се движи со брзина помала за 8 километри на час, тогаш од А до В ќе патува 5 часа повеќе. Определи го растојанието меѓу местата А и В.

Решение. Нека возилото се движи во брзина v, а поминатото време нека е t, и нека растојанието го означиме со s. Тогаш

$$(v+8)(t-3)=s\Rightarrow vt-3v+8t-24=s\Rightarrow s-3v+8t-24=s\Rightarrow -3v+8t=24$$

$$(v-8)(t+5)=s \Rightarrow vt+5v-8t-40=s \Rightarrow s+5v-8t-40=s \Rightarrow 5v-8t=40$$

На овој начин добиваме систем две равенки со две непознати

$$\begin{cases} -3v+8t=24 \\ 5v-8t=40 \end{cases}.$$

Ако ги собереме двете равенки добиваме $2v=64$, односно $v=32$ км/час. Ако замениме во првата равенка, добиваме

$$-3v+8t=24 \Rightarrow 8t=24+3v \Rightarrow t=\tfrac{24+3v}{8}=\tfrac{24+96}{8}=15 \text{ часа}.$$

Бараното растојание е $s=vt=32\cdot 15=480$ километри**.**

48. Еден човек патува со чамец по реката Дрим од Струга до Глобочица и обратно. Растојанието меѓу Струга и Глобочица е $18\ km$, а тој патувал вкупно 5 часа. Колкава е брзината на реката Дрим, ако човекот за исто време патувал $4\ km$ низводно, а $2\ km$ во обратна насока?

Решение. Нека брзината на реката е $x\,km/h$, а на чамецот во мирна вода е $y\,km/h$. Од условот на задачата следува следува дека $\frac{18}{y+x}+\frac{18}{y-x}=5$ и $\frac{4}{y+x}=\frac{2}{y-x}$. Нека $\frac{1}{y+x}=u$, $\frac{1}{y-x}=v$. Тогаш се добива системот равенки

$$\begin{cases} 18u+18v=5 \\ 4u=2v, \end{cases}.$$

чие решение е $u=\frac{5}{54}$, $v=\frac{5}{27}$. Според тоа, го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y=\frac{54}{5} \\ x-y=\frac{27}{5}, \end{cases}$$

т.е. $x=2,7\,km/h$, $y=8,1\,km/h$. Значи, брзината на реката Дрим е $2,7\,km/h$.

49. Од речното пристаниште A истовремено тргнале низводно моторен чамец и сплав (сплавот немал погон). Брзината на чамецот во мирна вода е u, а на реката е v ($u>v>0$). По t_1 часа чамецот пристигнал во B и почнал да се враќа кон A.

а) Определи го времето t_2 по кое враќајќи се кон A чамецот го сретнал сплавот.

б) Ако растојанието од A до B е $192\ km$, а чамецот на враќање го сретнал сплавот на $48\ km$ од A, определи го односот на брзините на чамецот и сплавот.

в) Ако чамецот вкупно патувал 28 часа, определи ја неговата брзина во мирна вода.

Решение. а) Растојанието од A до B го означуваме со s. Брзината на чамецот низводно е $u+v$, а во спротивна насока е $u-v$. Добиваме

$$\begin{cases} (u+v)t_1=s \\ v(t_1+t_2)+(u-v)t_2=s \end{cases}$$

од каде наоѓаме $t_1=t_2$.

б) Растојанието од B до C е $192-48=144\,km$. Бидејќи $t_1=t_2$, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}(u+v)t_1=192\\(u-v)t_1=144.\end{cases}$$

Ако го изразиме t_1 од едната равенка и го замениме во втората, добиваме $u=7v$.

в) Со t_3 да го означиме времето потребно чамецот да го мине патот од B до A. Од $u=7v$, следува дека брзината на чамецот низводно е $8v$, а во спротивна насока е $6v$. Од $8vt_1=192$ и $6vt_3=192$, $t_1=\frac{24}{v}$ и $t_3=\frac{32}{v}$. Бидејќи $t_1+t_3=28$, добиваме $\frac{24}{v}+\frac{32}{v}=28$, од каде што добиваме $v=2\,km/h$. Значи, брзината на чамецот во мирна вода е $u=7v=14\,km/h$.

50. Чамец поаѓа низводно по реката во 10 часот и во исто време од чамецот е спуштена гумена топка во реката. По 15 минути чамецот се враќа по топката. Во колку часот чамецот ќе ја сретне топката?

Решение. Нека x е брзината на чамецот, а y брзината на реката. Очигледно, чамецот низводно се движи со брзина $x+y$, а узводно со брзина $x-y$.

За 15 минути низводно, чамецот го минува патот $S=15(x+y)$, а топката $S_1=15y$. При враќањето на чамецот и топката го изминале патот $S-S_1$ за време t ($t=?$), па имаме:

$$\begin{aligned}&15(x+y)-15y=t(x-y)+ty\\&15x+15y-15y=tx-ty+ty\\&15x=tx,\ t=15.\end{aligned}$$

Значи, за назад на чамецот му се потребни 15 минути, па вкупното време е 30 минути. Следствено, чамецот ќе ја сретне топката во 10 часот и 30 минути.

51. Воз долг $110\,m$ се движи со брзина од $\frac{25}{3}\,m/s$. На патеката до пругата во $09:10h$ возот стигнал пешак што оди во истата насока и минувал крај него за $15\sec$. Во $09:16\,h$ наишол на пешак што му оди во пресрет и минувал крај него за $12\sec$. Во колку часот се сретнале пешаците?

Решение. Првиот пешак за 15 секунди нека поминал x метри. Тогаш $110+x=\frac{25}{3}\cdot15$, т.е. $x=15$. Значи, првиот пешак поминал 15 метри за 15 секунди, па, неговата брзина е 1 m/s. Вториот пешак нека поминал y метри за 12 секунди. Тогаш $110-y=\frac{25}{3}\cdot12$, т.е. $y=10$. Значи, вториот пешак поминал 10 метри за 12 секунди, па неговата брзаина е $\frac{5}{6}m/s$.

Растојанието меѓу местото на средбата на првиот пешак со вториот пешак е $360\cdot\frac{25}{3}=3000\,m$. Нека пешаците се сретнале по t секунди по средбата на возот со првиот пешак. Тогаш $t\cdot1+(t-360)\cdot\frac{5}{6}=3000$, од каде добиваме $t=1800$.

Значи, пешаците се сретнале после 30 минути, односно во $9:40$ часот.

52. Петар и Тошо дошле на гости кај Мишо во градот A. По извесно време решиле да се вратат во својот град B и за таа цел го организирале превозот на следниот начин: Тошо возел со велосипед од градот A до градот B. Мишо извесно време го возел Петар кон градот B со мотор и потоа го оставил да продолжи пеш, а самиот веднаш почнал да се враќа кон својот град A. Сите тргнале од градот A истовремено и стигнале во своите градови истовремено. Ако Петар оди пеш со $6\ km/h$, а Тошо вози велосипед со $22\ km/h$, со колкава брзина Мишо го возел моторот?

Решение. Да го означиме со s растојанието од A до B и со t времето што им било потребно да стигнат до своите одредишта. Брзините на моторот, велосипедот и пешачењето, т.е. на Мишо, Тошо и Петар да ги означиме со v_M, v_T и $v_П$ соодветно. Тошо цело време вози со велосипед од A до B, па значи,

$$v_T t = s. \tag{1}$$

Мишо за времето t извесно време возел кон B и потоа веднаш се вратил кон својот град A. Значи, тој половина од времето од времето возел кон B, а во втората половина се враќал кон A. Ова значи дека Петар половина од времето се возел на мотор со Мишо, а во втората половина од времето продолжил пеш кон B. Бидејќи Петар изминал пат s може да се запише

$$v_M \tfrac{t}{2} + v_П \tfrac{t}{2} = s \tag{2}$$

десните страни на (1) и (2) се еднакви., па, значи $v_T \cdot t = v_M \frac{t}{2} + v_П \frac{t}{2}$, од каде што добиваме $v_M = 38$.

53. Градовите A и B се оддалечени $106\ km$. На пладне, од градот A, тргнал Антонио на велосипед движејќи се кон B со постојана брзина од $30 km/h$. По половина час, од градот B тргнал Бојан пеш движејќи се кон A со постојана брзина од $5\ km/h$. Во моментот кога Антонио тргнал кон B, од неговиот нос полетала мува летајќи кон B со постојана брзина $50\ km/h$. Кога мувата го сретнала Бојан му слетала на носот, и веднаш со истата брзина почнала да се враќа кон Антонио и му слетала на носот, и веднаш полетала кон Бојан и се така додека Антонио и Бојан не се сретнале. Колку километриц прелетала мувата?

Решение. Во $12:30$ Антонио се наоѓа на $106-15=91$ километри од B. Во истиот момент Бојан поаѓа од B. Времето што им е потребно (мерено од тој момент) за да се сретнат е $\frac{91}{30+5} = \frac{13}{5}$ часа. Значи, мувата лета половина час (до $12:30$) и ушчте $\frac{13}{5}$ часа, со брзина од $50\ km/h$. Притоа, прелетува вкупно $50 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{13}{5}) = 155\ km$.

54. Првата половина од патот возот ја минал со брзина од $40\ km/h$, а втората со $60\ km/h$. Колкава е средната брзина на возот на целиот пат?

Решение. Нека со t_1 и t_2 ги означиме времињата што возот ги изминал првата половина, односно втората половина, а со s патот што возот вкупно го минува, тогаш од средната брзина v_s имаме:

$$v_s=\frac{2s}{t_1+t_2}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Значи, бараната средна брзина, во овој случај е хармониска (не аритметичка) средина од брзините v_1 и v_2. Во конкретниов случај имаме $v_s=\frac{2\cdot 40\cdot 60}{40+60}=48\ km/h$.

Значи, средната брзина на возот е $48\ km/h$.

55. Еден возач првите $180\ km$ од патот ги минал со брзина од $80\ km/h$, а преостанатиот дел од патот со брзина $110\ km/h$. Средната брзина на целиот пат била $100\ km/h$. Колкав пат изминал возачот?

Решение. Првиот дел од патот возачот го минал за $180:80$ часа, т.е. $t_1=2,25$ часа, а преостанатиот дел од $(s-180)\ km$ го минал за време $t_2=\frac{s-180}{110}$ часа.

Бидејќи $s=v_{cp}(t_1+t_2)$, добиваме:

$$s=100\cdot(2,25+\tfrac{s-180}{110})$$
$$110s=225\cdot 110+100s-18000$$
$$10s=6750,\ s=675$$

Следствено, возачот минал $675\ km$.

56. Двајца велосипедисти се движат од градот A до градот B. Првиот велосипедист, половина од времето се движи со брзина v_1, а другата половина од времето со брзина v_2. Вториот велосипедист, првата половина од патот се движи со брзина v_1, а втората половина од патот со брзина v_2. Кој од нив ќе стаса прв до градот B.

Решение. Нека T е времето за кое ќе стаса првиот велосипедист. Тогаш од условот имаме $v_1\frac{T}{2}+v_2\frac{T}{2}=\overline{AB}$, т.е.

$$T=\frac{2\overline{AB}}{v_1+v_2} \qquad (1)$$

Нека t е времето за кое ќе стаса вториот велосипедист. Тогаш од условот имаме

$$t=\frac{\overline{AB}}{2v_1}+\frac{\overline{AB}}{2v_2}=\frac{\overline{AB}}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) \qquad (2)$$

Понатаму од неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина и од (1) и (2) имаме

$$t=\frac{\overline{AB}}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)\geq\frac{2\overline{AB}}{v_1+v_2}=T.$$

Значи ако $v_1\neq v_2$, првиот велосипедист ќе стаса прв. Инаку, двајцата ќе стасаат истовремено**.**

57. Велосипедистот вози по патот од местото A до местото B, кој што се состои од водорамни делови, угорнини и удолнини, со исти наклонети агли. На водорамните делови неговата брзина е $12\ km/h$, на нагорнините $9\ km/h$, а на удолнините $15\ km/h$. Од A до B на велосипедистот му требаат 5 часови и 14 минути, а од B до A, 4 часови и 26 минути. Ако должината на водорамните делови изнесува $28\ km$, колку километри имаат вкупно сите угорнини и удолнини од A до B?

Решение. Да ги означиме со x и y нагорнините и удолниците од A кон B, тогаш

$$\begin{cases} 5\frac{14}{60}=\frac{x}{9}+\frac{28}{12}+\frac{y}{15} \\ 4\frac{26}{60}=\frac{y}{9}+\frac{28}{12}+\frac{x}{15} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10x+6y=261 \\ 6x+10y=189 \end{cases}$$

Со собирање на овие равенки добиваме $16(x+y)=450$, т.е. $x+y=28{,}125$. Следствено, сите угорници и сите удолници од A кон B (и обратно, од B кон A) изнесуваат $28{,}125\ km$.

58. Двајца патници тргнале истовремено од местото A кон местото B. Притоа, првиот патник секој километар го поминувал за 5 минути побрзо од вториот. Првиот патник, откако изминал една петтина од патот, се вратил во A, се задржал 10 минути и пак тргнал кон B. Двајцата патници во B стигнале истовремено.

Колкава е должината на патот меѓу A и B, ако вториот патник го минал овој пат за 2,5 часа?

Решение. Нека бараното растојание е $\overline{AB}=x\ km$ и нека y е времето за кое првиот патник изминува $1km$; тогаш вториот патник ќе измине $1\,km$ за $(y+\frac{1}{12})$ часа. По услов, првиот патник изминал растојание $\frac{7}{5}x$ за вкупно $(\frac{7}{5}xy+\frac{1}{6})$ часа, па оттука $\frac{7xy}{5}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$. Вториот патник изминал $(y+\frac{1}{12})x=\frac{12y+1}{12}x$ часа или $\frac{12y+1}{12}x=\frac{5}{2}$.

Првата равенка ја трансформираме во видот $xy=\frac{5}{3}$, а втората $xy=\frac{30-x}{12}$, а оттука $\frac{30-x}{12}=\frac{5}{3}$, т.е. $x=10$. Следствено, растојанието меѓу A и B е $10\,km$.

59. На кружна патека долга $1650\,m$ се движат двајца моторциклисти со постојана брзина. Ако моторциклистите се движат во спротивна насока ќе се сретнуваат секоја минута, а ако се движат во иста насока, тогаш моторциклистот кој се движи со поголема брзина ќе го престигнува другиот на секои 11 минути. Определи ги брзините на моторциклиситите.

Решение. Нека u е брзината со која се движи побрзиот моторциклист, а v е брзината со која се движи побавниот моторциклист. Од првиот услов (времето е 1 минута или $1/60$ часа) добиваме $u\frac{1}{60}+v\frac{1}{60}=\frac{1650}{1000}$, а од вториот услов (времето е 11 минути, или $11/60$ часа) добиваме $u\frac{11}{60}-v\frac{11}{60}=\frac{1650}{1000}$.

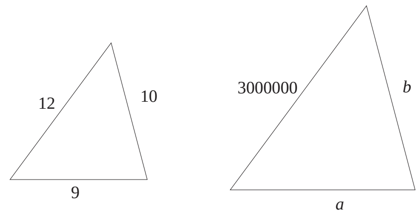
Добиваме систем од две линеарни равенки со две непознати

$$\begin{cases} u+v=99 \\ u-v=9 \end{cases},$$

Решение на системот е $u=54km/h$ и $v=45km/h$.

60. На географска карта растојанијата меѓу три точки се 9 *cm*, 10 *cm* и 12 *cm*. Најголемото од тие растојанија во природата е 30 *km*. Определи ги другите две растојанија во природата и размерот на картата.

Решение. Трите точки на картата може да ги преставиме како триаголник со страни 9 *cm*, 10 *cm* и 12 *cm*. Во природата тие ќе претставуваат триаголник кој е сличен на оној од картата. Ако земеме во предвид дека $1\,km = 100000\,cm$, имаме дека најголемото растојание е 3000000. За останатите имаме



$$\frac{a}{9}=\frac{3000000}{12} \qquad \frac{b}{10}=\frac{3000000}{12}$$

$$\frac{a}{9}=250000 \quad \text{и} \quad \frac{b}{10}=250000$$

$$a=2250000\,cm \qquad b=2500000\,cm$$

Размерот на картата е 1: 250000.

61. Тројца луѓе A, B и C се допишуваат меѓу себе, така што:

- A му пишува на B секој трет ден, а на C секој втор ден;
- B му пишува на A по четири добиени писма од A и C, а на C секој трет ден;
- C му пишува на A по три добиени писма од A и B, а на B секој четврти ден.

По колку дена A ќе добие 61 писмо, ако писмата патуваат по еден ден?

Решение. Со x да го означиме бројот на деновите за кои на A му е испратено 61 писмо. За тоа време B од A добил $\frac{x-1}{3}$ писма, а од C добил $\frac{x-1}{4}$ писма, или вкупно од A и C добил $\frac{7(x-1)}{12}$ писма. Исто така, C од A добил $\frac{x-1}{2}$ писма, а од B добил $\frac{x-1}{3}$ писма, или вкупно од A и B добил $\frac{5(x-1)}{6}$ писма.

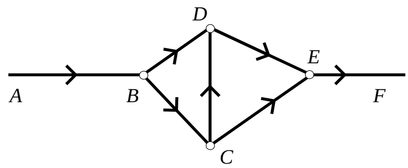
Значи, за x дена B на A ќе му испрати $\frac{7(x-1)}{12\cdot 4}$ писма, а C на A ќе му испрати $\frac{5(x-1)}{6\cdot 3}$ писма, т.е. на A ќе му бидат испратени вкупно $\frac{7(x-1)}{48}+\frac{5(x-1)}{18}=61$ писмо. Решението на ова равенка е $x=145$. Бидејќи последното испратено писмо треба да патува еден ден, A ќе добие 61 писмо за 146 дена.

62. На еден квиз натпреварувачот одговара на 24 прашања. Ако точно одговори на поставеното прашање тој освојува 4 поени, а во спротивно губи 1,4 поени. На колку прашања натпреварувачот не го знаел одговорот, ако на крајот од натпреварувањето тој освоил 69 поени?

Решение. Нека x е бројот на точно одговорени прашања, а y бројот на неточно одговорени прашања. Јасно $x+y=24$, односно $y=24-x$. Од друга страна вкупниот број на освоени поени е $4x-1{,}4y=69$. Според тоа, $4x-1{,}4(24-x)=69$ од каде наоѓаме $x=19$.

Значи, бројот на неточно одговорени прашања е $y = 24 - x = 24 - 19 = 5$.

63. На цртежот е дадена скица на систем од патишта, каде што со стрелка е означена насоката на движење на возилата. По патот AB поминала колона од 36 возила. Од нив по BC поминале 10 возила повеќе отколку по DE, а по CD поминале две возила. Колку возила поминале одделно по BC, BD, DE и CE?



Решение. Ако бројот на возилата кои поминале по патот DE го означиме со x, тогаш: по BC поминале $x+10$ возила, по CE поминале $x+10-2 = x+8$ возила, а по BD поминале $x-2$, затоа што две возила се вклучуваат од CD во DE. Оттука следува: $x+10+x-2 = 36$, т.е. $x = 14$.

Следствено, по BC поминале 24 возила, по BD поминале 12, а по CE поминале 22 возила.

64. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества заедно имале 913, 973, 873, 1011 и 1002 страници. Колку страници имала секоја од петте книги?

Решение. Ако бројот на страниците на книгите се a,b,c,d,e соодветно, тогаш треба да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} a+b+c+d = 913 \\ a+b+c+e = 973 \\ a+b+d+e = 873 \\ a+c+d+e = 1011 \\ b+c+d+e = 1002 \end{cases}$$

Ако ги собереме сите равенки и поделиме со 4, се добива $a+b+c+d+e = 1193$. Ако од оваа равенка ја одземеме секоја од петте равенки на системот, добиваме

$$a = 182, b = 191, c = 320, d = 220, e = 280 \text{ страници.}$$

65. Гаргамел фатил N Штрумфови и ги распределил во три вреќи. Кога Папа Штрумф го преместил од првата во втората вреќа, Муртенко од втората во третата, а Штрумфета од третата во првата, просечната висина на Штрумфовите во првата вреќа се намалила за 8 милиметри, а просечните висини во втората и третата вреќа се зголемиле за 5 и 8 милиметри, соодветно. Во првата вреќа имало девет Штрумфови. Колку Штрумфови фатил Гаргамел?

Решение. Нака во втората и третата вреќа имало K и L штрумфови соодветно и нека x, y и z се висините на Папа Штрумф, Муртенко и Штрумфета. Ако висините на Штрумфовите во првата вреќа се $x, x_2, x_3, ..., x_9$, тогаш

$$\frac{x+x_2+x_3+...+x_9}{9} = 8 + \frac{z+x_2+x_3+...+x_9}{9}, \text{ т.е. } \frac{x}{9} = 8 + \frac{z}{9}.$$

Аналогно, разгледувајќи ги втората и третата вреќа добиваме $5 + \frac{y}{K} = \frac{x}{K}$ и $8 + \frac{z}{L} = \frac{y}{L}$. Според тоа, $x = 72 + z,\ 5K + y = x$ и $8L + x = y$, па ако ги собереме последните три равенки добиваме $72 = 5K + 8L$. Бидејќи K и L се природни броеви, од последната равенка следува $8 | K$. Но, не е можно $K \geq 16$, бидејќи тогаш L ќе биде негативен број, ниту пак $K = 0$ (во втората вреќа на почетокот бил Муртенко), па затоа $K = 8$. Според тоа, $8L = 72 - 40$, т.е. $L = 4$, што значи дека Гаргамел фатил $N = 9 + K + L = 21$ штрумф.

66. Марија правела тест по математика, кој содржел задачи по алгебра, геометрија и логика. По проверката на резултатите, Марија точно решила 50% од задачите по алгебра, 70% од задачите по гометрија, и 80% од задачите по логика. Исто така, точно решила 62% од задачите по алгебра и логика, и 74% од задачите по геометрија и логика.

Кој е процентот на задачи кои точно ги решила Марија од целиот тест?

Решение. Нека a, g и l се броевите на задачи кои Марија точно ги решила, а A, G и L е вкупниот број на задачи по алгебра, геометрија и логика соодветно.

Од условите на задачата имаме

$$a = 0,5A,\ g = 0,7G,\ l = 0,8L,\ a + l = 0,62(A + L) \text{ и } g + l = 0,74(G + L).$$

Со замена во четвртата равенка, добиваме

$$0,5A + 0,8L = 0,62A + 0,62L,$$

односно $0,12A = 0,18L$. Значи $A = 1,5L$. Со замена во петтата равенка добиваме

$$0,7G + 0,8L = 0,74G + 0,74L,$$

односно $0,04G = 0,06L$. Значи $G = 1,5L$. Сега,

$$a + g + l = 0,5A + 0,7G + 0,8L = 0,75L + 1,05L + 0,8L = 2,6L \text{ и}$$

$$A + G + L = 1,5L + 1,5L + L = 4L.$$

Според тоа, процентот на точно решени задачи е $\frac{a+g+l}{A+G+L} = \frac{2,6L}{4L} = 0,65$, т.е. 65%.

67. Во некоја земја се наоѓаат три града A, B и C. Меѓу секои два града постојат по неколку патишта (најмалку еден) и сите патишта се двонасочни. Освен директните патни врски меѓу два града постојат и индиректни. Индиректните врски меѓу градовите X и Y се состојат од патиштата кои го поврзуваат градот X со трет град Z и патиштата кои ги поврзуваат градовите Z и Y.

Познато е дека постојат вкупно 43 патни врски меѓу градовите A и B, и вкупно 29 патни врски меѓу градовите A и C. Колку вкупно патни врски може да има меѓу градовите A и C?

Решение. Нека x е бројот на патиштата меѓу градовите B и C, y бројот на патиштата меѓу C и A, z бројот на патиштата меѓу A и B. Од уловот на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} xy + z = 43 \\ yz + x = 29. \end{cases}$$

Ако ги одземеме равенките добиваме $xy - yz + z - x = 14$, т.е. $(x - z)(y - 1) = 14$.

Бидејќи x, y, z се природни броеви, можни се следниве случаи:

$$\begin{cases} x - z = 14 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z - x = 7 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z - x = 2 \\ y - 1 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} z - x = 1 \\ y - 1 = 14 \end{cases}$$

од каде добиваме $y=2, y=3, y=8, y=15$. Сега, ако ја искористиме равенката $xy+z=43$ ги добиваме системите

$$\begin{cases} x-z=14 \\ 2x+z=43 \end{cases} \qquad \begin{cases} z-x=7 \\ 3x+z=43 \end{cases} \qquad \begin{cases} z-x=2 \\ 8x+z=43 \end{cases} \qquad \begin{cases} z-x=1 \\ 15x+z=43 \end{cases}$$

Во првиот случај имаме $x=19, y=2, z=5$, а во третиот случај $x=5, y=8, z=3$. Во останатите два случај решенијата не се целобројни. Вкупниот број патишта меѓу A и C е еднаков на $xz+y$ и може да е еднаков на 97 или 23.

68. Во една кошница се наоѓаат црвени, бели и жолти цветови. Бројот на жолтите цветови не е помал од бројот на белите цветови и не е поголем од третината на црвените цветови. Вкупниот број на бели и жолти цветови не е помал од 55. Најди го најмалиот број на црвени цветови.

Решение. Во кошницата нека има: a-жолти цветови, b-бели цветови и c-црвени цветови. Од условот на задачата следува:

(1) $a \geq b$ (2) $a \leq \frac{1}{3}c$ (3) $b+a \geq 55$.

Од (1) и (3) наоѓаме: $2a \geq 55$, т.е. $a \geq 28$ ($a \in \mathbb{N}$). Тогаш од (2) добиваме: $c \geq 3a = 3 \cdot 28 = 84$.

Значи, најмалиот број црвени цветови е 84.

69. Во еден град има три вида на училишта. Во секое училиште од првиот вториот и третиот вид има соодветно по 150, 310 и 40 ученици што учат англиски јазик, а по 17, 37 и 5 ученици што учат француски јазик. Во училиштата во градот има вкупно 1040 ученици што учат англиски јазик и 123 ученици што учат француски јазик. Одреди го бројот на училиштата од секој вид, знаејќи дека нивниот број не е поголем од 10.

Решение. Ако со a, b, c ги означиме бројот на училиштата од секој вид, тогаш условите од задачата ги изразуваме со системот:

$$\begin{cases} 150a+310b+40c=1040 \\ 17a+37b+5c=123 \\ a+b+c \leq 10 \end{cases}, \quad a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Од првата и втората равенка добиваме $14a+14b=56$, т.е. $a+b=4$. Имајќи предвид дека $a \geq 1$, $c \geq 1$, од втората равенка добиваме $37b \leq 123-17-5$, т.е. $b \leq 2$.

Ако $b=1$, тогаш $a=3, c=7$, што не е можно, бидејќи $3+1+7>10$.

Ако $b=2$, тогаш $a=2, c=3$.

Следствено, од првиот и вториот вид има по две, а од третиот вид на училишта има три.

70. Во текот на петгодишното студирање Киро положил 31 испит. Тој секоја година полагал повеќе испити од претходната, а петтата година положил три пати повеќе испити отколку првата. Колку испити положил Киро во четвртата година?

Решение. Нека a, b, c, d, e се бројот на положени испити од првата до петтата година соодветно. Тогаш, $a<b<c<d<e$, $a+b+c+d+e=31$ и $e=3a$. Ако

$a \geq 4$, тогаш $b \geq a+1 \geq 5$, $c \geq b+1 \geq 6$, $d \geq c+1 \geq 7$, $e = 3a \geq 12$, па затоа $a+b+c+d+e \geq 34 > 31$, што не е можно. Ако $a=1$, тогаш $e=3$, па не постојат природни броеви b, c, d така што $1 < b < c < d < 3$. Ако $a=2$, тогаш $e=6$, па од $2 < b < c < d < 6$ следи дека $b=3$, $c=4$, $d=5$, односно $a+b+c+d+e = 20 \neq 31$, кое исто така не е можно. Значи, $a=3$ и $e=9$. Ако $d \leq 7$, тогаш $c \leq 6$, $b \leq 5$, па $a+b+c+d+e \leq 30 < 31$. Значи, мора $d=8$. Ова е можно, на пример за $a=3$, $b=4$, $c=7$, $d=8$, $e=9$ или $a=3$, $b=5$, $c=6$, $d=8$, $e=9$.

Конечно, Киро четвртата година положил 8 испити.

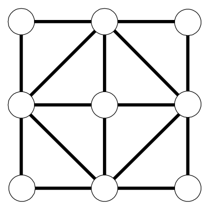
71. Најди ги сите дропки со едноцифрен именител, кои се наоѓаат меѓу дропките $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

Решение. Нека се тоа дропките $\frac{a}{b}$, каде што $a < b$, $b \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Од условот $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < \frac{3}{4}$ добиваме $4b < 12a < 9b$. Ги разгледуваме сите можности за b.

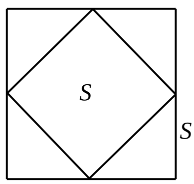
Ако $b=2$, тогаш $8 < 12a < 18$, $a=1$ и $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. Ако $b=3$, тогаш $12 < 12a < 27$, $a=2$ и $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. Ако $b=4$, тогаш $16 < 12a < 36$, $a=2$ и $\frac{a}{b} = \frac{2}{4}$. Ако $b=5$, тогаш $20 < 12a < 45$, $a \in \{2,3\}$ и дропките се: $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$. Ако $b=6$, тогаш $24 < 12a < 54$, $a \in \{3,4\}$ и дропките се: $\frac{3}{6}, \frac{4}{6}$. Ако $b=7$, тогаш $28 < 12a < 63$, $a \in \{3,4,5\}$ и дропките се: $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$. Ако $b=8$, тогаш $32 < 12a < 72$, $a \in \{3,4,5\}$ и дропките се $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}$. Ако $b=9$, тогаш $36 < 12a < 81$, $a \in \{4,5,6\}$ и дропките се: $\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}$.

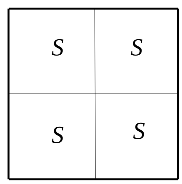
Следствено, бараните дропки се: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}$.

72. Дадени се броевите од 1 до 9 и квадратна шема од девет крукчиња како на цртежот десно. Броевите се распоредуваат во крукчињата, така што секој број е запишан еднаш и во секое крукче е запишан по еден број. За секој квадрат се пресметува збирот на броевите запишани во крукчињата кои го определуваат, т.е. се негови темиња. Дали постои распоред на броевите таков што тие збирови да се еднакви меѓу себе.



Решение. Деветте кругчиња како темиња определуваат шест квадрати. Нека бројот запишан во централното кругче (крукчето што се наоѓа на пресекот на дијагоналите на најголемиот квадрат) го означиме со x, а збирот на броевите во секој од шесте квадрати го означиме со S.





Збирот на сите броеви во квадратната шема е

$$1+2+3+\ldots+9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

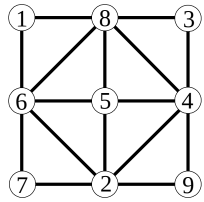
При тоа, збирот на броевите во двата најголеми квадрати заедно со бројот x го дава вкупниот збир на запишаните броеви, т.е. $S+S+x = 45$.

Од друга страна збирот на сите броеви собран со збирот на броевите во вториот по големина квадрат и трипати бројот во средното квадратче е еднаков на $4S$, т.е. $4S = 45 + S + 3x$.

Од системот равенки

$$\begin{cases} S - x = 15 \\ 2S + x = 45 \end{cases},$$

добиваме $S = 20$ и $x = 5$. Еден таков распоред е даден на цртежот десно.

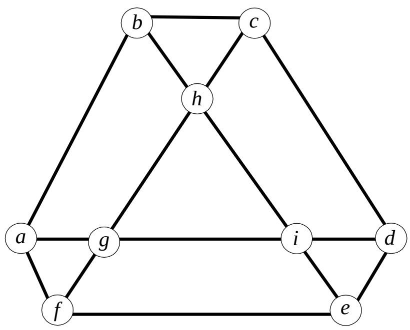


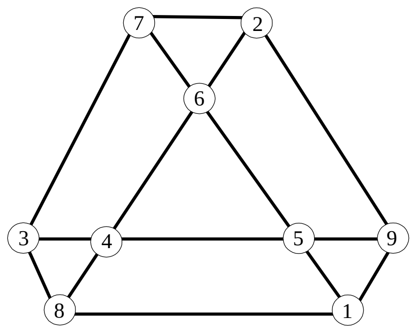
73. Во празните кругови (види го цртежот) се запишани броевите од 1 до 9 (во секој круг по еден број), при што збировите на броевите во круговите што се темиња на рамностран триаголник, (во секој од седумте рамнострани триаголници) се меѓу себе еднакви.

а) Определи кој е тој збир

б) Определи едно такво решение, т.е. еден таков распоред на броевите.

Решение. **а)** Броевите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ќе ги означиме буквите a,b,c,d,f,g,h,i на некој начин, не мора да е соодветно. Нека претпоставиме дека имаме еден таков распоред (види цртеж). Нека во средниот триаголник се запишани броевите g,h и i , а останатите броеви a,b,c,d,e,f во периферните кругчиња.





Нека збирот на броевите во еден рамностран триаголник е m . Бидејќи имаме седум такви триаголници, збирот на збировите од броевите во триаголниците е $7m$. Во тој вкупен збир, секој од броевите a,b,c,d,e,f го собираме точно два пати, а секој од броевите g,h и i го собираме точно три пати, при што $g+h+i=m$.

Според тоа $3(g+h+i)+2(a+b+c+d+e+f)=7m$, односно

$$\underbrace{(g+h+i)}_{m}+2(a+b+c+d+e+f+g+h+i)=7m\,,$$

од каде што добиваме $2\frac{9\cdot 10}{2}=6m$. Значи, $m=15$.

б) Определи ги сите тројки од различни броеви од броевите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ кои имаат збир 15. Со секоја таква тројка, одделно, пополни ги кругчињата од средниот триаголник. Потоа пробај да ги пополниш останатите кругчиња.

Едно такво пополнување е дадено на цртежот.

74. Во квадратна шема со димензии 3×3 се запишани броевите од 1 до 9, така да тој е магичен квадрат (збировите на броевите по секоја хоризонтала, вертикала и дијагонала се еднакви меѓу себе). Кој број е запишан во средното квадратче?

Решение. Нека броевите 1 до 9 се распоредени во квадратна шема со димензии 3×3, така што во секоја хоризонтална, вертикална колона и секоја дијагонала збировите се еднакви. Збирот на броевите од 1 до 9 е
$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$

па според тоа во секоја вертикала, хоризонтала и дијагонала збирот е $\frac{45}{3}=15$. Нека со x_{ij} го означиме елементот од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ кој е запишан во i -та редица и j -та колона (види цртеж).

Елементот x_{22} ќе го означиме со a. Од секоја колона редица и дијагонала во која се наоѓа бројот a можеме да формираме по една равенка. При тоа го добиваме системот:

$$\begin{cases} x_{11} + a + x_{33} = 15 \\ x_{31} + a + x_{13} = 15 \\ x_{12} + a + x_{32} = 15 \\ x_{21} + a + x_{23} = 15 \end{cases}$$

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	a	x_{23}
x_{31}	x_{32}	x_{33}

Ако ги собереме равенките од последниот систем,ја добиваме равенката:
$(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+a+x_{23}+x_{31}+x_{32}+x_{33})+3a=60$,
т.е.

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+3a=60.$$

Бидејќи

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$$

добиваме $3a=15$. Значи, во средното поле на магичниот квадрат ќе стои бројот $a=5$.

IV НЕРАВЕНСТВА

1. ЕЛЕМЕНТАРНО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Збирот на пет броеви е 10. Докажи, дека меѓу нив постојат два броја чиј збир е најмалку 4.

Решение. Ги подредуваме броевите во растечки редослед: $A \le B \le C \le D \le E$. Да претпоставиме дека $D+E<4$. Од претходните две неравенства следува дека $B+C<4$.

Бидејќи $B+C<4$ и $B \le C$ следува дека $B<2$. Од $A \le B$ и $B<2$ следува $A<2$. Ако ги собереме неравенствата $A<2$, $B+C<4$, $D+E<4$, добиваме $A+B+C+D+E<10$, што е противречи на условот на задачата.

Конечно, од добиената противречност следува $D+E \ge 4$.

2. Ако $x+y+z$, $xy+yz+zx$ и xyz се позитивни броеви, тогаш и броевите x, y и z се позитивни. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Да претпоставиме дека $x<0$. Тогаш од $xyz>0$ следува дека $yz<0$, а од $x+y+z>0$ следува дека $y+z>0$, т.е. $x(y+z)<0$, па затоа

$$x(y+z)+yz<0 \text{, т.е. } xy+yz+zx<0$$

што противречи на вториот услов. Ако $x=0$ добиваме пак противречност: $yz>0$ и $yz=0$.

Значи, $x>0$. Заради симетрија на променливите x, y и z, заклучуваме дека $y>0$, $z>0$, со што тврдењето е докажано.

Втор начин. Имаме

$$x+y+z>0 \qquad (1)$$

$$xy+yz+zx>0 \qquad (2)$$

$$xyz>0 \qquad (3)$$

Од (3) заклучуваме дека постојат само две можности

1) Сите три броја x, y и z се позитивни и тогаш тврдењето важи.

2) Два од броевите x, y и z се негативни, а еден позитивен. Нека $x<0$, $y<0$ и $z>0$. Тогаш

$$x+y+z>0 \Rightarrow z>-(x+y)$$

Множејќи го ова равенство со $x+y<0$ добиваме:

$$z<-(x+y)^2$$

$$zx+zy+xy<-x^2-2xy-y^2+xy$$

$$zx+zy+xy<-(x^2+2xy+y^2)<0$$

Добиената противречност на (2) ја исклучува втората можност.

Значи, останува единствена можност дека: $x>0, y>0, z>0$.

3. Докажи дека збирот $A=\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{2000}$ е поголем од $\frac{5}{8}$.

Решение. Ги групираме собироците на сумата на следниот начин:

$$A=(\tfrac{1}{1001}+...+\tfrac{1}{1250})+(\tfrac{1}{1251}+...+\tfrac{1}{1500})+(\tfrac{1}{1501}+...+\tfrac{1}{1750})+(\tfrac{1}{1751}+...+\tfrac{1}{2000})$$

$$>\frac{250}{1250}+\frac{250}{1500}+\frac{250}{1750}+\frac{250}{2000}=\frac{107}{210}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

4. Реалните броеви a,b и c го исполнуваат неравенството

$$|\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}|<c.$$

Докажи, дека $|a|<c$ и $|b|<c$.

Решение. Од својствата на апсолутни вредности, имаме

$$|a|=|2\tfrac{a}{2}|=|(\tfrac{a}{2}+\tfrac{b}{2})+(\tfrac{a}{2}-\tfrac{b}{2})|\le|\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}|<c.$$

Значи, $|a|<c$. Потполно аналогно се добива $|b|<c$.

5. За реалните броеви a и b точно е неравенството $(\frac{1+ab}{a+b})^2<1$. Докажи дека апсолутната вредност на еден од броевите a и b е помала од 1, а на другиот е поголема од 1.

Решение. Неравенството можеме да го запишеме во облик $\frac{(1+ab)^2}{(a+b)^2}<1$. Бидејќи реалниот број $(a+b)^2$ е позитивен за секои a и b, последното неравенство е еквивалентно со неравенството $(1+ab)^2<(a+b)^2$, кое можеме да го запишеме во облик $1+2ab+a^2b^2<a^2+2ab+b^2$, т.е. во обликот

$$(1-a^2)(1-b^2)<0.$$

Производ на два броја е негативен ако еден од множителите е негативен а другиот позитивен. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $1-a^2<0$ и $1-b^2>0$, од каде добиваме $1<|a|$ и $|b|<1$.

6. Нека x и y се позтивни реални броеви чиј производ е еднаков на 1. Докажи дека нивниот збир достигнува најмала вредност само за $x=y=1$.

Решение. Од условот на задачата имаме $xy=1$, од каде добиваме $y=\frac{1}{x}$. Тогаш за нивниот збир $x+y$ добиваме

$$x+y=x+\tfrac{1}{x}=(\sqrt{x})^2-2+\tfrac{1}{(\sqrt{x})^2}+2=(\sqrt{x}-\tfrac{1}{\sqrt{x}})^2+2\ge 2.$$

Во последното неравенство, знак за равенство ќе важи само ако $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, од каде добиваме $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, т.е. $(\sqrt{x})^2=1$. Значи, $x=1$ и затоа $y=1$.

7. Докажи, дека за секои позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството

$$|\tfrac{a-b}{a+b}+\tfrac{b-c}{b+c}+\tfrac{c-a}{c+a}|<1.$$

Решение. Од равенството $c-a=(c-b)+(b-a)$ добиваме

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-b}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}=(a-b)(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a})+(b-c)(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a})$$
$$=\frac{(a-b)(c-b)}{(a+b)(c+a)}+\frac{(b-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(a-b)(b-c)}{c+a}(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b})=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Сега, бараното неравенство следува од неравенствата $|a-b|<a+b$, $|b-c|<b+c$ и $|c-a|<c+a$, односно

$$|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}|=|\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}|=\frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|a-c|}{(a+b)(b+c)(c+a)}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$

8. Нека a,b,p,q,r,s се природни броеви, такви што $qr-ps=1$ и $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$. Докажи дека $b\geq q+s$.

Решение. Од $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$ следува $aq-pb>0$. Бидејќи $aq-pb\in\mathbb{Z}$ добиваме дека $aq-pb\geq 1$. Од $\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$ следува $br-as>0$. Бидејќи $br-as\in\mathbb{Z}$ добиваме дека $br-as\geq 1$. Тогаш

$$b=b(qr-ps)=bqr-bps=(bqr-qas)+(qas-bps)=q(br-as)+s(aq-bp).$$

Со користење на претходните две неравенства и последното равенство, добиваме $b\geq q+s$.

9. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a>b>c>0$. Докажи дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Решение. Почетното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}<0.$$

Левата страна на последното неравенство ќе ја запишеме во облик

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}&=\frac{a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b}{abc}\\&=\frac{abc-ac^2-a^2b+a^2c-b^2c+bc^2+ab^2-abc}{abc}\\&=\frac{a(bc-c^2-ab+ac)-b(bc-c^2-ab+ac)}{abc}\\&=\frac{a[c(b-c)-a(b-c)]-b[c(b-c)-a(b-c)]}{abc}\\&=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}<0\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

10. Нека a,b,c се броеви за кои $a^2+b^2+ab+bc+ca<0$. Докажи дека

$$a^2+b^2<c^2.$$

Решение. Нека a,b,c се реални броеви за кои $a^2+b^2+ab+bc+ca<0$. Тогаш

$$2a^2+2b^2+2ab+2bc+2ca<0$$

и

$$(a+b+c)^2+a^2+b^2-c^2<0 \Rightarrow a^2+b^2-c^2<-(a+b+c)^2$$

и бидејќи $-(a+b+c)^2 \leq 0$ добиваме $a^2+b^2-c^2<0$, т.е. $a^2+b^2<c^2$.

11. Докажи дека за секои $a,b,c \geq 0$ важи

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b) \geq 0.$$

Решение. *Прв начин.* Имаме:

$$\begin{aligned}&ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)=\\&=a^2b+ab^2-2abc+b^2c+bc^2-2abc+c^2a+ca^2-2abc=\\&=(a^2b+bc^2-2abc)+(ab^2+c^2a-2abc)+(ca^2+b^2c-2abc)=\\&=b(c-a)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2 \geq 0\end{aligned}$$

бидејќи $a,b,c \geq 0$ и $(c-a)^2,(b-c)^2,(a-b)^2 \geq 0$.

Втор начин. Од $a,b,c \geq 0$ и $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2 \geq 0$ добиваме

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geq 0$$

или

$$\begin{aligned}&ab^2-2abc+ac^2+bc^2-2abc+ba^2+ca^2-2abc+cb^2 \geq 0\\&(a^2b+ab^2-2abc)+(b^2c+bc^2-2abc)+(a^2c+ac^2-2abc) \geq 0\\&ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b) \geq 0.\end{aligned}$$

12. Ако a,b,c се позитивни броеви, тогаш барем еден од броевите

$$(a+b+c)^2-8ab,\ (a+b+c)^2-8bc,\ (a+b+c)^2-8ca$$

е позитивен. Докажи!

Решение. *Прв начин.* За збирот S на броевите добиваме:

$$\begin{aligned}S&=3(a+b+c)^2-8(ab+bc+ca)\\&=3(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)-8(ab+bc+ca)\\&=3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+2bc+ac).\end{aligned}$$

Бидејќи $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, што лесно се докажува, тогаш уште повеќе

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca),\text{ т.е. } S>0,$$

од каде што заклучуваме дека еден од броевите е позитивен.

Втор начин. Збирот на броевите

$$S=3(a+b+c)^2-8(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

е очигледно позитивен, па значи еден од собироците е секако позитивен.

13. Да се докаже дека, ако производот на три позитивни броеви е еднаков на еден, а збирот на тие три броеви е поголем од збирот на нивните реципрочни вредности, тогаш точно еден од тие броеви е поголем од еден.

Решение. Нека x, y и $\frac{1}{xy}$ се дадените броеви. Од условот на задачата имаме

$$x+y+\tfrac{1}{xy}\geq \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+xy\,.$$

По низа од елементарни трансформации добиваме:

$$(x-1)(\ y-1)(\tfrac{1}{xy}-1)>0$$

од каде што е очигледно дека точно еден од множителите е позитивен.

14. За позитивните броеви a,b,c,x,y,z важи: $a+x=b+y=c+z=k$. Докажи дека

$$ax+by+cz<k^2\,.$$

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned}k^3&=(a+x)(b+y)(c+z)\\&=abc+xyz+ay(c+z)+bz(a+x)+cx(b+y)\\&=abc+xyz+k(ay+bz+cx).\end{aligned}$$

Бидејќи $abc+xyz>0$, следува $k^3>k(ay+bz+cx)$ и како $k>0$ заклучуваме

$$k^2>ay+bz+cx\,.$$

15. Ако $0\leq b\leq a$, тогаш $a^4+b^4\geq 2ab^3$.

Решение. Од очигледното неравнство $(a^2-b^2)^2\geq 0$, добиваме

$$a^4+b^4-2a^2b^2\geq 0\text{, т.е. } a^4+b^4\geq 2a^2b^2.$$

Од условот $b\leq a$ следува $2ab^3\leq 2a^2b^2$ па тогаш

$$a^4+b^4\geq 2a^2b^2\geq 2ab^3\text{, т.е. } a^4+b^4\geq 2ab^3.$$

Знакот за еднаквост важи само ако $a=b$.

16. Нека a и b се реални броеви такви што $|a+b|+|a-b|\leq 2$. Докажи дека $a^2+b^2\leq 2$.

Решение. *Прв начин.* Од својствата на апсолутната вредност, имаме

$$2|a|=|2a|=|(a+b)+(a-b)|\leq|a+b|+|a-b|\leq 2\,,$$

$$2|b|=|2b|=|(a+b)+(b-a)|\leq|a+b|+|b-a|\leq 2\,.$$

Од $2|a|\leq 2$ и $2|b|\leq 2$, т.е. $|a|\leq 1$, $|b|\leq 1$, имаме

$$a^2+b^2=|a|^2+|b|^2\leq 1^2+1^2=2\,.$$

Втор начин. Бидејќи a и b се реални броеви за кои $0\leq|a+b|+|a-b|\leq 2$, со квадрирање на неравенството добиваме

$$0\leq(|a+b|+|a-b|)^2\leq 2^2=4\,,$$

$$(a+b)^2+2|a^2-b^2|+(a-b)^2\leq 4\,.$$

Бидејќи

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2 \text{ и}$$

$$(a-b)^2+(a+b)^2\leq(a+b)^2+2|a^2-b^2|+(a-b)^2$$

добиваме дека

$$2(a^2+b^2)\le 4\text{, т.е. } a^2+b^2\le 2.$$

17. За реалните броеви a,b,c и d важат равенството $a^2+b^2=c^2+d^2$ и неравенствата $ab+cd>0$, $ac+bd>0$. Докажи дека $ad+bc>0$.

Решение. Од равенството $a^2+b^2=c^2+d^2>0$ и неравенствата $ab+cd>0$, $ac+bd>0$ добиваме:

$$\begin{aligned}(ad+bc)(ac+bd)&=a^2dc+c^2ab+d^2ab+b^2dc=(a^2+b^2)dc+(c^2+d^2)ab\\&=(a^2+b^2)dc+(a^2+b^2)ab=(a^2+b^2)(dc+ab)>0\end{aligned}$$

т.е. $(ad+bc)(ac+bd)>0$. Бидејќи $ac+bd>0$, од последното неравенство следува $ad+bc>0$, што и требаше да се докаже.

18. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+y+z$, ако x,y,z се реални броеви такви што $x\ge 4$, $y\ge 5$, $z\ge 6$ и $x^2+y^2+z^2\ge 90$.

Решение. Нека $x=4+a,\ y=5+b,\ z=6+c$. Тогаш $a,b,c\ge 0$ и важи

$$(4+a)^2+(5+b)^2+(6+c)^2\ge 90 \quad\Leftrightarrow\quad a^2+8a+b^2+10b+c^2+12c\ge 13.$$

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c+6)^2&=a^2+12a+b^2+12b+c^2+12c+2ab+2bc+2ca+36\\&\ge a^2+8a+b^2+10b+c^2+12c+36\\&\ge 13+36.\end{aligned}$$

Според тоа, $(a+b+c+6)^2\ge 49$, од каде заклучуваме дека $a+b+c+6\ge 7$, односно $a+b+c\ge 1$. Последното неравенство е еквивалелнтно со неравенството $x+y+z\ge 16$ и како во последното неравенство знак за равенство важи за $x=4,\ y=5,\ z=6$, заклучуваме дека бараната најмала вредност на изразот $x+y+z$ е 16.

19. Определи ја најголемата вредност на изразот

$$f(x,y)=-x^2+2xy-4y^2+2x+10y-3.$$

Решение. Изразот можеме да го запишеме во видот

$$\begin{aligned}f(x,y)&=-(x^2-2xy+4y^2-2x-10y+3)\\&=-[\,x^2-2(\,y+1)x+(\,y+1)^2-(\,y+1)^2+4y^2-10y+3]\\&=-[(x-y-1)^2+3y^2-12y+2]=-[(x-y-1)^2+3(y-2)^2-10]\\&=10-(x-y-1)^2-3(y-2)^2\le 10\end{aligned}$$

Според тоа, најголемата вредност на изразот е 10 и се достигнува за $x-y-1=0$, $y-2=0$ односно за $x=2, y=3$.

20. Нека $a,b,c\ge 0$ и нека $a=\min\{a,b,c\}$. Докажи, дека важи неравенството

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge 2(\tfrac{b+c}{2}-a)^3$$

Решение. Нека $b-a=x\geq 0$ и $c-a=y\geq 0$. Тогаш важи $b-c=x-y$. Користејќи го идентитетот

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2(3a+x+y)[x^2+y^2+(x-y)^2]\geq(x+y)^3$$
$$6a(2x^2+2y^2-2xy)+4(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq(x+y)^3$$
$$12a(x^2-xy+y^2)+3(x^3+y^3)\geq 3xy(x+y)$$
$$4a(x^2-xy+y^2)+(x^3+y^3)\geq xy(x+y)$$
$$4a(x^2-xy+y^2)+(x+y)(x^2-2xy+y^2)\geq 0$$
$$4a[(x-\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3y^2}{4}]+(x+y)(x-y)^2\geq 0.$$

Последното неравенство е точно бидејќи $a\geq 0$. Знал за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

21. Реалните броеви x и y припаѓаат на интервалот $[0,1]$. Докажи дека

$$x^5+y^5+(x-y)^5\leq 2\,.$$

Решение. За било кој реален број $a\in[0,1]$ е исполнето неравенството $a^5\leq a$. За реалните броеви x и y кои што припаѓаат на сегментот $[0,1]$ е исполнето неравенството $-1\leq x-y\leq 1$. Навистина, $0\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 0$ и ако ги собереме овие неравенства добиваме $-1\leq x-y\leq 1$. Според тоа ќе разгледаме два случаи, и тоа

a) $x-y\geq 0$. Во овој случај $x^5\leq x$, $y^5\leq y$, $(x-y)^5\leq x-y$, па според тоа

$$x^5+y^5+(x-y)^5\leq x+y+x-y=2x\leq 2\,.$$

b) $x-y\leq 0$. Во овој случај $(x-y)^5\leq 0$, од каде што добиваме

$$x^5+y^5+(x-y)^5\leq x^5+y^5\leq x+y\leq 2\,.$$

22. Нека $0\leq a,b,c\leq 1$ и $a+b+c=2$. Докажи $a^2b+b^2c+c^2a\leq 1.$

Решение. Од условите на задачата не е тешко да се види дека се точни неравенствата $(a-1)^2(b-1)\leq 0, (b-1)^2(c-1)\leq 0$ и $(c-1)^2(a-1)\leq 0$. Според тоа имаме

$$a^2b\leq a^2+2ab-2a-b+1,\quad b^2c\leq b^2+2bc-2b-c+1 \text{ и } c^2a\leq c^2+2ca-2c-a+1.$$

Со собирање на последните три неравенства добиваме :

$$\begin{aligned}a^2b+b^2c+c^2a&\leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)-3(a+b+c)+3\\&=(a+b+c)^2-3(a+b+c)+3=1\end{aligned}.$$

23. Ако a и b се позитивни броеви и ако $a^5+b^5=a^3+b^3$, тогаш

$$a^2+b^2\leq 1+ab\,.$$

Докажи!

Решение. *Прв начин*. Бидејќи

$$a^5+b^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)$$

имаме:

$$(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)=a^3+b^3$$

$$(a^3+b^3)(a^2+b^2-1)=a^2b^2(a+b)$$

$$a^2+b^2-1=\frac{a^2b^2(a+b)}{a^3+b^3}=\frac{a^2b^2(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-ab}\le\frac{a^2b^2}{2ab-ab}=ab$$

Конечно:

$$a^2+b^2-1\le ab\text{, т.е. } a^2+b^2\le 1+ab.$$

Втор начин. Бидејќи $a>0$ и $b>0$ имаме $(a-b)^2\ge 0$ и $a+b>0$, т.е.

$$(a-b)^2(a+b)\ge 0$$

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2\ge 0$$

$$a^2b+ab^2\le a^3+b^3.$$

Бидејќи $a^5+b^5=a^3+b^3$ добиваме

$$a^2b+ab^2\le a^5+b^5 \quad /\cdot ab$$

$$a^3b^2+a^2b^3\le a^6b+b^6a$$

$$a^5+a^3b^2+a^2b^3+b^5\le a^5+a^6b+b^5+ab^6$$

$$a^3(a^2+b^2)+b^3(a^2+b^2)\le a^5(1+ab)+b^5(1+ab)$$

$$(a^3+b^3)(a^2+b^2)\le(a^5+b^5)(1+ab)$$

$$a^2+b^2\le 1+ab.$$

Трет начин. Да го претпоставиме спротивното, т.е. нека $a^2+b^2>1+ab$. Тогаш

$$a^3(a^2+b^2)>a^3(1+ab)$$

$$b^3(a^2+b^2)>b^3(1+ab)$$

од каде што по собирање добиваме

$$a^3b^2+b^3a^2>a^4b+ab^4 \quad /:ab \quad (ab>0)$$

$$a^2b+b^2a>a^3+b^3$$

$$ab(a+b)>(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$ab>a^2-ab+b^2$$

$$(a-b)^2<0$$

Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

24. Ако , $x,y,z\in\mathbb{R}$, докажи дека е точно неравенството

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge\max\{\frac{3(x-y)^2}{4},\frac{3(y-z)^2}{4},\frac{3(z-x)^2}{4}\}.$$

Решение. Неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \le y \le z$. Сега неравенството последователно е еквивалентно со неравенствата

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge \tfrac{3(z-x)^2}{4}$$
$$4x^2+4y^2+4z^2-4xy-4yz-4zx \ge 3z^2-6zx+3x^2$$
$$x^2+4y^2+z^2+2xz-4xy-4yz \ge 0$$
$$(2y)^2-4y(x+z)+(x+z)^2 \ge 0$$
$$(2y-x-z)^2 \ge 0,$$

а последното неравенство е очигледно точно. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

25. Нека a,b и c се реални броеви такви што $abc \ne 0$. Нека функцијата f е дефинирана со:

$$f(a,b,c)=\left|\tfrac{|b-a|}{|ab|}+\tfrac{b+a}{ab}-\tfrac{2}{c}\right|+\tfrac{|b-a|}{|ab|}+\tfrac{b+a}{ab}+\tfrac{2}{c}$$

Докажи дека $f(a,b,c)=4\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}$.

Решение. Имаме $|x-y|+x+y=2\max\{x,y\}$. Затоа

$$\begin{aligned}f(a,b,c)&=\left|\tfrac{|b-a|}{|ab|}+\tfrac{b+a}{ab}-\tfrac{2}{c}\right|+\tfrac{|b-a|}{|ab|}+\tfrac{b+a}{ab}+\tfrac{2}{c}\\&=\left||\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}-\tfrac{2}{c}\right|+|\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{2}{c}\\&=\left|2\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b}\}-\tfrac{2}{c}\right|+2\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b}\}+\tfrac{2}{c}\\&=4\max\{\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b}\},\tfrac{1}{c}\}=4\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b},\tfrac{1}{c}\}.\end{aligned}$$

26. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca \ge 12$. Докажи, дека $a+b+c \ge 6$.

Решение. Да забележиме дека за било кои реални броеви a,b и c важи

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$$
$$2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2bc+2ca$$
$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$$

Сега,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\&\ge (ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)\\&=3(ab+bc+ca)\ge 3\cdot 12=36,\end{aligned}$$

од каде следува дека $a+b+c \ge 6$.

27. За позитивните реалните броеви a, b и c важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge a+b+c$. Докажи дека $a+b+c \ge 3abc$.

Решение. Неравенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c$ е еквивалентно со неравенството $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\geq abc$. Затоа, доволно е да докажеме дека $\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$. Последното неравенство е еквивалентно со низата од неравенства:

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$$

Сега, од точноста на последното неравенство, следува точноста на бараното неравенство.

28. Ако a,b и c се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Докажи!

Решение. Неравенството следува од неравенство

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,$$

за $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{b}}$, $z=\frac{1}{\sqrt{c}}$. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

29. Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $x^2+y^2+z^2=1$. Докажи дека

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq\sqrt{3}.$$

Решение. Јасно, $S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq 0$. Ако го искористиме неравенствот

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,$$

за $a=\frac{xy}{z}, b=\frac{yz}{x}, c=\frac{zx}{y}$ добиваме

$$\begin{aligned}S^2&=(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y})^2=(\frac{xy}{z})^2+(\frac{yz}{x})^2+(\frac{zx}{y})^2+2\frac{xy}{z}\frac{yz}{x}+2\frac{yz}{x}\frac{zx}{y}+2\frac{xy}{z}\frac{zx}{y}\\&=(\frac{xy}{z})^2+(\frac{yz}{x})^2+(\frac{zx}{y})^2+2(x^2+y^2+z^2)\\&\geq\frac{xy}{z}\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\frac{zx}{y}+2(x^2+y^2+z^2)\\&=3(x^2+y^2+z^2)=3.\end{aligned}$$

Според тоа $S\geq\sqrt{3}$. Равенство се достигнува ако и само ако $\frac{xy}{z}=\frac{yz}{x}=\frac{zx}{y}$, т.е. ако и само ако $x^2=y^2=z^2$. Бидејќи x, y и z се позитивни, равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

30. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geq 1.$$

Решение. Бидејќи $\frac{1}{t^2+t+1} \geq \frac{1}{t^2+|t|+1}$, можеме да сметаме дека $a \geq b \geq c > 0$. Прво ќе докажеме дека

$$\frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} \geq \frac{2}{ab+\sqrt{ab}+1}.$$

Ако замениме $x = \sqrt{a},\ y = \sqrt{b}$, го добиваме еквивалентното неравенство

$$(x-y)^2[(x+y)^2(xy)^2 - 1 + (xy-1)(x^2+xy+y^2)] \geq 0$$

кое е точно, бидејќи $xy \geq 1$, па затоа $x+y \geq 2$. Според тоа, доволно е да го докажеме даденото неравенство кога $a=b$. Тогаш $c = \frac{1}{a^2}$, па добиваме дека неравенството кое треба да го докажеме е еквивалентно со неравенството $a^4 - a^3 - a + 1 \geq 0$, т.е. со неравенството $(a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0$, кое очигледно е исполнето. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

31. Ако $a+b>2$, тогаш $a^4+b^4>4$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од условот $a+b>2$ следува $(a+b)^2>4$, т.е.

$$a^2+2ab+b^2>4. \qquad (1)$$

Од очигледното неравенство $(a-b)^2 \geq 0$ следува

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0. \qquad (2)$$

Со собирање на неравенствата (1) и (2) добиваме $2(a^2+b^2)>4$, т.е. $a^2+b^2>2$. На сличен начин од неравенството $a^2+b^2>2$ добиваме

$$a^4+2a^2b^2+b^4>4, \qquad (3)$$

а од неравенството $(a^2-b^2)^2 \geq 0$ следува

$$a^4-2a^2b^2+b^4 \geq 0. \qquad (4)$$

Со собирање на (3) и (4) конечно добиваме $2(a^4+b^4)>4$, т.е. $a^4+b^4>2$.

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &= \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2 + \tfrac{1}{2}(a^2-b^2)^2 \geq \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(a+b)^2 + \tfrac{1}{2}(a-b)^2]^2 \geq \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}(a+b)^4 \geq \tfrac{1}{8}\cdot 2^4 = 2. \end{aligned}$$

32. Докажи, дека ако a и b се реални броеви поголеми од -1, тогаш

$$\frac{1+a^6}{1+a}\cdot\frac{1+b^6}{1+b} \geq \frac{1+ab}{2}\cdot\frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Решение. Имаме

$$(\tfrac{1+x^2}{1+x})^2 \geq \tfrac{1+x^2}{2}, \quad (\tfrac{1+x^3}{1+x})^2 = (1-x+x^2)^2 \geq \tfrac{1+x^4}{2},$$

бидејќи после сведување под заеднички именител и средување на изразот второто неравенство е квивалентно со неравенството $(x-1)^4 \geq 0$. Уште ќе искористиме дека

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2.$$

Тогаш

$$\frac{1+a^2}{1+a}\cdot\frac{1+b^2}{1+b} \ge \sqrt{\frac{1+a^2}{2}\cdot\frac{1+b^2}{2}} \ge \frac{1+ab}{2}$$

$$\frac{1+a^6}{1+a^2}\cdot\frac{1+b^6}{1+a^2} \ge \sqrt{\frac{1+a^8}{2}\cdot\frac{1+b^8}{2}} \ge \frac{1+a^4b^4}{2}$$

и останува да ги помножиме овие неравенства. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=1$.

33. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=1$. Докажи, дека

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}+\frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2}+\frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2}+\frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2} \ge \frac{1}{8}.$$

Решение. Неравенството

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2} \ge \frac{a}{4}-\frac{b+c}{16} \qquad (1)$$

е еквивалентно со очигледното неравенство $(b+c)(2a-b-c)^2 \ge 0$. Сега, бараното неравенство се добива ако го собереме неравенството (1) со трите аналогни неравенства.

34. Докажи, дека за секои позитивни реални броеви a,b,c,d е точно неравенството

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3} \ge \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Решение. Неравенството

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} \ge \frac{5}{8}a-\frac{3}{8}b \qquad (1)$$

е еквивалентно со неравенството

$$3(a^4+b^4) \ge 2(a^3b+a^2b^2+ab^3),$$

кое очигледно е точно. Ако (1) гособереме со аналогните неравенства добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3} &\ge \\ \ge \frac{5(a+b+c+d)}{8}-\frac{3(b+c+d+a)}{8} \\ = \frac{a+b+c+d}{4}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=d$.

35. Докажи дека за произволни реални броеви a,b,c и d е точно неравенството

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \ge ab+ac+ad.$$

Решение. За било кои реални броеви a,b,c и d се исполнети неравенствата

$$(a-b)^2 \ge 0,\ (a-c)^2 \ge 0,\ (a-d)^2 \ge 0,\ (b-c)^2 \ge 0,$$

$$(b-d)^2 \ge 0,\ (c-d)^2 \ge 0 \text{ и } (b+c+d-a)^2 \ge 0.$$

Ако ги собереме овие неравенства добиваме

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2+(b+c+d-a)^2 \ge 0 .$$

Последното неравенство ќе го запишеме во облик

$$4a^2+4b^2+4c^2+4d^2-4ab-4ac-4ad \ge 0 ,$$

т.е.

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \ge ab+ac+ad .$$

36. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи, дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \ge \frac{3}{2} .$$

Решение. Бидејќи за секој $x \ge 0$ важи $2x \le x^2+1$, т.е. $\frac{x}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$, добиваме

$$a+b+c-\frac{a}{b^2+1}-\frac{b}{c^2+1}-\frac{c}{a^2+1}=\frac{b}{b^2+1}ab+\frac{c}{c^2+1}bc+\frac{a}{a^2+1}ca$$

$$\le \frac{ab+bc+ca}{2} \le \frac{(a+b+c)^2}{6}$$

и останува да искористиме дека $a+b+c=3$.

37. Ако x, y, z се ненегативни броеви такви што $x+y+z=6$, тогаш

$$x^2+y^2+z^2 \ge 12 .$$

Докажи!

Решение. За секои ненегативни реални броеви x, y, z важи

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0 .$$

Затоа

$$2x^2+2y^2+2z^2-2(xy+yz+zx) \ge 0 , \text{ т.е. } 3x^2+3y^2+3z^2 \ge (x+y+z)^2=36 ,$$

односно

$$x^2+y^2+z^2 \ge 12 .$$

38. Ако $x, y \in (0,1)$, тогаш $\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{1+y^2}{1-y^2} \ge (\frac{1+xy}{1-xy})^2$, при што равенство важи ако и само ако $x=y$. Докажи!

Решение. Следната низа неравенства се еквивалентни на даденото неравенство:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1-xy)^2 \ge (1-x^2)(1-y^2)(1+xy)^2$$

$$(1+x^2y^2+x^2+y^2)(1-x^2y^2-2xy) \ge (1+x^2y^2+2xy)(1+x^2y^2-x^2-y^2) .$$

Нека $z=1+x^2y^2$, $t=x^2+y^2$ и $w=2xy$. Тогаш последното неравенство го добива еквивалентниот облик $(z+t)(z-w) \ge (z-t)(z+w)$ односно $t \ge w$, па затоа

$$x^2+y^2 \ge 2xy .$$

Последното неравенство е точно, па затоа е точно и почетното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y$.

39. Провери ја точноста на неравенството

а) $(a+b)(a+b-2c)+(b+c)(b+c-2a)+(c+a)(c+a-2b)\geq 0$

б) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq a(b+c+d+e)$,

каде a,b,c,d,e се позитивни реални броеви.

Решение. а) Левата страна на неравенството можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned}&(a+b)(a+b-2c)+(b+c)(b+c-2a)+(c+a)(c+a-2b)=\\ &=(a+b)^2-2ac-2bc+(b+c)^2-2ab-2ac+(c+a)^2-2ab-2bc\\ &=a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2-2ab-2bc-2ca\\ &=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.\end{aligned}$$

Изразот $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ е позитивен за секои реални броеви a,b,c па затоа даденото неравенство е точно за секои реални броеви a,b и c .

б) Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)\geq 0,$$

$$\tfrac{a^2}{4}-ab+b^2+\tfrac{a^2}{4}-ac+c^2+\tfrac{a^2}{4}-ad+d^2+\tfrac{a^2}{4}-ae+e^2\geq 0,$$

$$(\tfrac{a}{2}-b)^2+(\tfrac{a}{2}-c)^2+(\tfrac{a}{2}-d)^2+(\tfrac{a}{2}-e)^2\geq 0,$$

па бидејќи последното неравенство е точно, точно е и почетното неравенство.

40. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{9b+4c}{11a^2}+\frac{9c+4a}{11b^2}+\frac{9a+4b}{11c^2}\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Решение. Неравенството $(2a-3b)^2(a+b)\geq 0$ за позитивните реални броеви a и b е еквивалентно со неравенството $\frac{4a}{b^2}+\frac{9b}{a^2}\geq\frac{3}{a}+\frac{8}{b}$. Аналогно, за паровите позитивни реални броеви b и c , и a и c се добиваат неравенствата

$$\frac{4b}{c^2}+\frac{9c}{b^2}\geq\frac{3}{b}+\frac{8}{c}\quad\text{и}\quad\frac{4c}{a^2}+\frac{9a}{c^2}\geq\frac{3}{c}+\frac{8}{a}.$$

Ако ги собереме трите неравенства имаме

$$\frac{4a}{b^2}+\frac{9b}{a^2}+\frac{4b}{c^2}+\frac{9c}{b^2}+\frac{4c}{a^2}+\frac{9a}{c^2}\geq\frac{3}{a}+\frac{8}{b}+\frac{3}{b}+\frac{8}{c}+\frac{3}{c}+\frac{8}{a},$$

$$\frac{9b+4c}{a^2}+\frac{9c+4a}{b^2}+\frac{9a+4b}{c^2}\geq\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}.$$

Конечно, последното равенство го делиме со 11 и го добиваме бараното неравенство.

41. Нека a , b и c се реални броеви, такви што $abc=1$. Докажи, дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b},2b-\frac{1}{c},2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

Решение. Да претпоставиме дека сите три броја $2a-\frac{1}{b},2b-\frac{1}{c},2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1. Најмалку еден од броевите a,b или c е позитивен. Без губење од општоста нека $a>0$. Тогаш $2c>2c-\frac{1}{a}>1$, т.е. $c>0$. Аналогно, од $2b>2b-\frac{1}{c}>1$, добивме дека и $b>0$. Значи, сите три броеви a,b и c се позитивни.

Од $2b-\frac{1}{c}>1$ следува дека

$$b>\frac{1+\frac{1}{c}}{2} \tag{1}$$

Од $2a-\frac{1}{b}>1$ следува дека $\frac{2}{bc}-\frac{1}{b}>1$, од каде што

$$b<\frac{2}{c}-1. \tag{2}$$

Од неравенствата (1) и (2) го добиваме неравенството $\frac{2}{c}-1>\frac{1+\frac{1}{c}}{2}$, па затоа $c<1$.

Аналогно се добива дека $a<1$ и $b<1$, што е противречи на $abc=1$.

42. Еден од броевите x^2 и $(1-x)^2$ е помал од 1, а другиот е поголем од 1. Докажи, дека $0<x^2-x<2$.

Решение. Од условот на здачата следува $x^2<1<(1-x)^2$ или $(1-x)^2<1<x^2$, односно

$$x^2-1<0<x^2-2x \text{ или } x^2-2x<0<x^2-1.$$

И во двата случаја важи

$$(x^2-2x)(x^2-1)<0.$$

Бидејќи $x^2-1=(x^2-x)+(x-1)$ и $x^2-2x=(x^2-x)-x$ добиваме

$$(x^2-2x)(x^2-1)<0$$
$$((x^2-x)+(x-1))((x^2-x)-x)<0$$
$$(x^2-x)^2+(x-1)(x^2-x)-x(x^2-x)-x(x-1)<0$$
$$(x^2-x)^2-2(x^2-x)<0$$
$$(x^2-x)(x^2-x-2)<0 \tag{1}$$

Бидејќи $x^2-x-2<x^2-x$ од неравенството (1) следува дека $x^2-x>0$ и $x^2-x-2<0$, т.е. $0<x^2-x<2$.

43. Нека x,y и z се реални броеви такви што $x,y,z\geq 1$. Докажи, дека

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2)\leq (xyz)^2-2xy+2.$$

Решение. Ставаме $a=x-1, b=y-1$ и $c=z-1$ и дадено неравенство го запишуваме во видот

$$\begin{aligned}(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)&\leq [(a+1)(b+1)(c+1)-1]^2+1\\ &=(abc+ab+bc+ca+a+b+c)^2+1.\end{aligned} \tag{1}$$

Последното неравенство ќе го докажеме ако го искористиме неравенството

$$(A^2+1)(B^2+1)\leq [(A+1)(B+1)-1]^2+1=(AB+A+B)^2+1,$$

кое се докажува со непосредно ослободување од заградите. Ако последното неравенство го примениме за $(A,B)=(a,b)$, а потоа за $(A,B)=(ab+a+b,c)$ го добиваме неравенството (1).

44. Што е поголемо

а) 3^{200} или 2^{300}, б) 3^{303} или 2^{474}.

Решение. а) Имаме:

$$3^{200}=9^{100}>8^{100}=(2^3)^{100}=2^{300}.$$

б) Од

$$3^{303}=3^2\cdot 3^{301}=9\cdot(3^7)^{43}=9\cdot 2187^{43},$$

$$2^{474}=2\cdot 2^{473}=2\cdot(2^{11})^{43}=2\cdot 2048^{43},$$

следува дека $3^{303}>2^{474}$.

45. Нека x и y се реални броеви такви што $x^{2017}+y^{2017}>x^{2016}+y^{2016}$. Докажи, дека

$$x^{2018}+y^{2018}>x^{2017}+y^{2017}. \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека

$$x^{2017}+y^{2017}\ge x^{2018}+y^{2018}.$$

Ако ги собереме последното неравенство и неравенството

$$x^{2017}+y^{2017}>x^{2016}+y^{2016}$$

последователно добиваме

$$2x^{2017}+2y^{2017}>x^{2018}+y^{2018}+x^{2016}+y^{2016}$$

$$0>x^{2018}-2x^{2017}+x^{2016}+y^{2018}-2y^{2017}+y^{2016}$$

$$0>x^{2016}(x-1)^2+y^{2016}(y-1)^2$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува неравенството (1).

46. Докажете дека за произволни позитивни реални броеви x и y и природни броеви m и n ($n\ge m$) важи неравенството

$$\sqrt[m]{x^m+y^m}\ge\sqrt[n]{x^n+y^n}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\ge y$. Тогаш $\frac{y}{x}=\alpha\le 1$, па даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\sqrt[m]{1+\alpha^m}\ge\sqrt[n]{1+\alpha^n}$$

односно на неравенството

$$(1+\alpha^m)^n\ge(1+\alpha^n)^m.$$

Јасно,

$$(1+\alpha^m)^n\ge(1+\alpha^m)^m\ge(1+\alpha^n)^m$$

бидејќи $0\le\alpha\le 1$, а $n\ge m$

47. Ако $x\ge y>0$ и $x^5+y^5=x-y$, тогаш $x^4+y^4<1$. Докажи!

Решение. Ако $x=y$, тогаш од $x^5+y^5=x-y$ добиваме $x=y=0$, па неравенството важи. Нека $x>y>0$. Тогаш

$$0<x^5-y^5<x^5+y^5=x-y.$$

Значи $x^5-y^5<x-y$. Важи

$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)<x-y,$$

па заради $x\neq y$ добиваме

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4<1.$$

Значи,

$$1>x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4>x^4+y^4.$$

48. Кој број е поголем $\frac{1+1981^{1978}}{1+1981^{1979}}$ или $\frac{1+1981^{1980}}{1+1981^{1981}}$?

Решение. Да ставиме $a=1981$, $n=1978$. Разликата помеѓу првиот и вториот број е

$$\frac{1+a^n}{1+a^{n+1}}-\frac{1+a^{n+2}}{1+a^{n+3}}=\frac{(1+a^n)(1+a^{n+3})-(1+a^{n+2})(1+a^{n+1})}{(1+a^{n+3})(1+a^{n+1})}=\frac{a^n(a+1)(a-1)^2}{(1+a^{n+3})(1+a^{n+1})}.$$

Бидејќи оваа разлика е очигледно позитивна за секој $n\in\mathbb{N}$ и за секој $a\neq 1$, следува дека првиот број е поголем од вториот, т.е.

$$\frac{1+1981^{1978}}{1+1981^{1979}}>\frac{1+1981^{1980}}{1+1981^{1981}}.$$

49. а) Докажи, дека ако $a,b\in[0,1]$ и $a+b\leq 1$, тогаш $a^2+b^2\leq 1$.

б) Секои два од броевите x,y,z не се разликуваат за повеќе од 1 и $xy+yz+zx=96$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот $A=x^2+y^2+z^2$.

Решение. а) Имаме $a^2+b^2\leq a^2+(1-a)^2=2a(a-1)+1\leq 1$.

б) Имаме $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$, па затоа

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\geq 96.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=4\sqrt{2}$. Значи, најмалата вредност на A е 96.

Да ја определиме најголемата вредност на A. Без ограничување на оштоста можеме да земеме дека $x\leq y\leq z$. Тогаш $z-y+y-x=z-x\leq 1$ и од а) следува дека

$$(z-y)^2+(y-x)^2+(x-z)^2\leq 1+1=2.$$

Ако поделиме со 2 добиваме дека

$$A=x^2+y^2+z^2\leq 1+xy+yz+zx=97.$$

Знак за равенство важи, на пример, за $x=5, y=z=6$. Според тоа, најголемата вредност на A е 97.

50. Докажи дека при $a>0$, $b>0$, $c>0$, важи неравенството

$$(\tfrac{4a}{b+c}+1)(\tfrac{4b}{c+a}+1)(\tfrac{4c}{a+b}+1)>25\,.$$

Решение. Двете страни на неравенството ќе ги помножиме со

$$(a+b)(b+c)(c+a)>0$$

знакот на неравенство нема да се смени), а потоа со средување на добиениот израз го добиваме следново неравенство еквивалентно со даденото:

$$a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2+7abc>0\,. \qquad (1)$$

Да претпоставиме прво дека $a=b$. Тогаш неравенството (1) го добива видот $c(c^2-2ac+5a^2)>0$, односно $c\cdot((c-a)^2+4a^2)>0$. Последното неравенство е точно за секои $a,c>0$. По аналогија се докажуваат и случаите $a=c$ и $b=c$.

Затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c$. Тогаш неравенството (1) е еквивалентно со

$$(a^3-a^2b-a^2c+abc)+(b^3-b^2a-b^2c+abc)+(c^3-c^2a-c^2b+abc)+4abc>0\,,$$

Односно со неравенството

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)+4abc>0\,. \qquad (2)$$

Заради претпоставката $a<b<c$ имаме $a(a-b)(a-c)>0$ и $b(b-a)<c(c-a)$. Ако последното неравенство го помножиме со $b-c$, кој е негативен број, добиваме

$$b(b-a)(b-c)>c(c-a)(b-c)=-c(c-a)(c-b)\,,$$

од што следува точноста на (2). Бидејќи (2) е еквивалентно тврдење на почетното, добиваме точност на тврдењето од задачата.

51. Нека $a,b,c\in[0,1]$. Докажи дека

$$\tfrac{1}{1+a+b}+\tfrac{1}{1+b+c}+\tfrac{1}{1+c+a}+a+b+c\le 3+\tfrac{1}{3}(ab+bc+ca)\,.$$

Решение. За произволни реални броеви $x,y\in[0,1]$ важи

$$\tfrac{1}{1+x+y}\le 1-\tfrac{x+y}{2}+\tfrac{xy}{3}\,. \qquad (1)$$

Навистина, даденото неравенство е еквивалентно со низата неравенства

$$6\le(1+x+y)[6-3(x+y)+2xy]$$

$$6\le 6+6(x+y)-3(x+y)-3(x+y)^2+2xy+2xy(x+y)$$

$$2x^2y+2xy^2-3x^2-3y^2-4xy+3x+3y\ge 0$$

$$2x(x-1)(y-1)+2y(x-1)(y-1)+x(1-x)+y(1-y)\ge 0\,.$$

Од точноста на последното неравенство се добива точноста и на неравенството (1). Сега, за a, b; b, c и c, a со примена на (1) ги добиваме неравенствата

$$\tfrac{1}{1+a+b}\le 1-\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{ab}{3}\,,\quad \tfrac{1}{1+b+c}\le 1-\tfrac{b+c}{2}+\tfrac{bc}{3}\,,\quad \tfrac{1}{1+c+a}\le 1-\tfrac{c+a}{2}+\tfrac{ac}{3}\,.$$

Со собирање на последните три неравенства се добива точноста на бараното неравенство.

52. Нека a,b,c се позитивни реални броеви поголеми од 1. Докажи дека

$$abc+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}>a+b+c+\tfrac{1}{abc}\,.$$

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $a,b,c>1$ добиваме дека $a>\frac{1}{b}$, $b>\frac{1}{c}$, $c>\frac{1}{a}$ и $(a-\frac{1}{b})(b-\frac{1}{c})(c-\frac{1}{a})>0$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$abc-a-b-c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}>0,$$

т.е. со неравенството

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c+\frac{1}{abc}.$$

Втор начин. Од условот на задачата имаме $a,b,c>1$, па според тоа $ac>1$ и $\frac{1}{bc}<1$, односно $ac-1>0$ и $\frac{1}{bc}-1<0$, од каде што следува $(ac-1)(\frac{1}{bc}-1)<0$, т.е. $\frac{ac}{bc}-ac-\frac{1}{bc}+1<0$. Бидејќи $bc>1$, ја добиваме следнава низа од еквивалентни неравенства:

$$\begin{aligned}
&ac-abc^2-1+bc<0\\
&abc^2+1>ac+bc\\
&(abc^2+1)(ab-1)>(ac+bc)(ab-1)\\
&(abc)^2+ab+bc+ca>abc(a+b+c)+1 \quad /:(abc)\\
&abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c+\frac{1}{abc}.
\end{aligned}$$

53. Нека $a_1,a_2,...,a_{100}$ се реални броеви за кои важи

$$\begin{aligned}
&a_1\ge a_2\ge ...\ge a_{100}\ge 0\\
&a_1^2+a_2^2\ge 100\\
&a_3^2+a_4^2+...+a_{100}^2\ge 100.
\end{aligned}$$

Која е најмалата можна вредност на збирот $a_1+a_2+...+a_{100}$?

Решение. Од условите на задачата следува дека $a_2>0$. Понатаму, од

$$a_2a_3+a_2a_4+...+a_2a_{100}\ge a_3^2+a_4^2+...+a_{100}^2\ge 100$$

следува

$$a_3+a_4+...+a_{100}\ge \frac{100}{a_2}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+...+a_{100}&\ge a_1+a_2+\frac{100}{a_2}\\
&\ge 2a_2+\frac{100}{a_2}\\
&\ge 2\sqrt{2a_2\cdot\frac{100}{a_2}}\\
&=20\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Бараниот минимум не е помал од $20\sqrt{2}$. Знак за равенство се достигнува за $a_1=a_2=a_3=a_4=5\sqrt{2}$ и $a_5=a_6=...=a_{100}=0$. Значи, бараната најмала вредност е еднаква на $20\sqrt{2}$.

54. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\leq\frac{2n-1}{n}.$$

Решение. Последователно имаме

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1+\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+...+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n}$$

$$=1+(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+...+(\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n})=2-\tfrac{1}{n}=\tfrac{2n-1}{n},$$

што и требаше да се докаже.

55. Докажи, дека

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}.$$

Решение. Да забележиме дека за $k>1$ важи

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2(k-1)k}-\frac{1}{2k(k+1)}.$$

Тогаш

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{3^3-3}+\frac{1}{4^3-4}+...+\frac{1}{n^3-n}$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1n(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<\frac{1}{4}.$$

56. Нека $p_1,p_2,...,p_n$ се n различни природни броеви поголеми од 1. Докажи дека

$$(1-\frac{1}{p_1^2})\cdot(1-\frac{1}{p_2^2})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{p_n^2})>\frac{1}{2}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека природните броеви $p_1,p_2,...,p_n$ се подредени по големина, т.е. $1<p_1<p_2<...<p_n$. Според тоа, ако $p_n=m$ имаме

$$(1-\frac{1}{p_1^2})\cdot(1-\frac{1}{p_2^2})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{p_n^2})\geq(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{m^2}).$$

Десната страна на последното неравенство ќе го запишеме во облик

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{m^2})=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(m-1)^2-1}{(m-1)^2}\cdot\frac{m^2-1}{m^2}$$

$$=\frac{(1\cdot 3)}{2^2}\cdot\frac{(2\cdot 4)}{3^2}\cdot\frac{(3\cdot 5)}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(m-2)\cdot m}{(m-1)^2}\cdot\frac{(m-1)\cdot(m+1)}{m^2}=\frac{m+1}{2m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}>\frac{1}{2},$$

од каде што се добива точноста на бараното неравенство.

57. Докажи дека

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Решение. *Прв начин.* Нека $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{99}{100}$ и $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{100}{101}$. Ќе докажеме дека $A<B$. Имено: $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$, …, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$, бидејќи $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$, што е еквивалентно со $(n-1)(n+1)=n^2-1<n^2$ за секој природен број n. Од друга страна

$$AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot...\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101},$$

па според тоа $A^2<AB=\frac{1}{101}$, од каде следува $A<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$.

Втор начин. Имаме:

$$A^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2}{100^2}<\frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2}{100^2-1}$$
$$<\frac{1}{1\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3}{3\cdot5}\cdot\frac{5\cdot5}{5\cdot7}\cdot\ldots\cdot\frac{99\cdot99}{99\cdot101}=\frac{1}{101}<\frac{1}{100},$$

од каде следува $A<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$.

58. За секој природен број n означуваме

$$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1) \text{ и } (2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n).$$

Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи неравенството

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n}}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Ги воведуваме ознаките

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \text{ и } B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}.$$

Од

$$\frac{2}{3}>\frac{1}{2},\ \frac{4}{5}>\frac{3}{4},\ \frac{6}{7}>\frac{5}{6},\ldots,\frac{2n-2}{2n-1}>\frac{2n-3}{2n-2} \text{ и } 1>\frac{2n-1}{2n}$$

следува $B>A$. Понатаму,

$$AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{2n}$$

и како $B>A$ добиваме $A^2<AB=\frac{1}{2n}$, т.е. $A<\frac{1}{\sqrt{2n}}$, со што е покажано десното неравенство во (1).

Понатаму, бидејќи

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4},\ \frac{4}{5}<\frac{5}{6},\ldots,\frac{2n-2}{2n-1}<\frac{2n-1}{2n}$$

добиваме

$$B<2A=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}.$$

Според тоа, $2A^2>AB=\frac{1}{2n}$, т.е. $A>\frac{1}{2\sqrt{n}}$ со што е покажано левото неравенство во (1).

Втор начин. Имаме

$$A^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2},$$

па затоа

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2-1}{(2n)^2}<A^2<\frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2-1},$$

што значи

$$\frac{1}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{4\cdot4}\cdot\frac{4\cdot6}{6\cdot6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-2)\cdot2n}{2n\cdot2n}<A^2<\frac{1}{1\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3}{3\cdot5}\cdot\frac{5\cdot5}{5\cdot7}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)\cdot(2n-1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)},$$

од каде после скратувањето на дропките наоѓаме $\frac{1}{4n}<A^2<\frac{1}{2n+1}$. Според тоа,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \qquad (2)$$

и како $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$ добиваме дека неравенството (1) е исполнето.

59. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенството

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}\,. \qquad (1)$$

Решение. За секој $k = 1, 2, 3, ..., n$ важи

$$k(n-k+1)-n = k(n-k)+k-n = k(n-k)-(k-n) = (n-k)(k-1) \geq 0$$

па затоа $n \leq k(n-k+1)$, за секој $k = 1, 2, 3, ..., n$. Според тоа, точни се следниве неравенства

$$n \leq 1 \cdot n$$
$$n \leq 2 \cdot (n-1)$$
$$n \leq 3 \cdot (n-2)$$
$$..................$$
$$n \leq (n-2) \cdot 3$$
$$n \leq (n-1) \cdot 2$$
$$n \leq n \cdot 1.$$

Ако ги помножиме последните неравенства го добиваме неравенството

$$n^n \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = n! \cdot n! = (n!)^2$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

60. Нека $x_1, x_2, ..., x_n \geq -1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$. Докажи дека $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{3}$.

Решение. Неравенството $0 \leq x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)(x-\frac{1}{2})^2$ важи за $x \geq -1$. Ако во горното неравенство x го замениме со $x_1, x_2, ..., x_n$, а потоа ги собереме добиените неравенства, наоѓаме

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 - \tfrac{3}{4}x_i + \tfrac{1}{4}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} \tfrac{3}{4}x_i + \tfrac{n}{4} = 0 - \tfrac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \tfrac{n}{4}\,,$$

од каде што следува дека $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{3}$.

61. Нека $a > b > 0$. Кој од следниве броеви е поголем:

$$A = \frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{1+a+a^2+...+a^n} \text{ или } B = \frac{1+b+b^2+...+b^{n-1}}{1+b+b^2+...+b^n}\,.$$

Решение. Бројот $\frac{1}{A}$ можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{A} = \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}} = 1 + \frac{a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+...+\frac{1}{a}}\,.$$

Слично и за B, бројот $\frac{1}{B}$ можеме да го запишеме во облик: $\frac{1}{B} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+...+\frac{1}{b}}$.

Но, $a > b > 0$, па затоа $0 < \frac{1}{a^k} < \frac{1}{b^k}$, за $k = 1, 2, ..., n$, па затоа $0 < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k} < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{b^k}$, од каде што следува $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$, односно $B > A$.

62. Докажи го неравенството
$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<3.$$

Решение. Имаме
$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{9}}}=3.$$

63. Докажи дека за $x\geq 1$ важат неравенствата
$$2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}<\tfrac{1}{\sqrt{x}}<2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}.$$

Решение. Точни се следните неравенства
$$-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})^2<0<(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x(x+1)}-2x<1<2x-2\sqrt{x(x-1)}$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}<\tfrac{1}{\sqrt{x}}<2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}$$

64. Ако $a,b,c\geq 1$, докажи дека важи неравенството
$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c(ab+1)+1}.$$

Решение. *Прв начин.* Заради условот $a,b,c\geq 1$, може да воводеме смени
$$a-1=x^2, b-1=y^2, c-1=z^2; (x,y,z\geq 0)$$
после кои неравенството станува
$$x+y+z<\sqrt{(z^2+1)(x^2y^2+x^2+y^2+2)+1}$$
$$(x+y+z)^2<(z^2+1)(x^2y^2+x^2+y^2+2)+1$$
$$x^2y^2z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+z^2-2xy-2xz-2yz+3>0$$
$$(xy-1)^2+(yz-1)^2+(xz-1)^2+z^2(x^2y^2+1)>0.$$
Очигледно последното неравенство е точно за секои $x,y,z\geq 0$ па затоа е точно и почетното неравенство.

Втор начин. Од очигледното неравенство
$$(\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}-1)^2\geq 0,$$
последователно добиваме
$$(x-1)(y-1)-2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}+1\geq 0$$
$$xy\geq x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}+y-1$$
$$xy\geq(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})^2$$
$$\sqrt{xy}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}. \qquad (1)$$
Во последното неравенство знак за равенство важи ако и само ако
$$\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}=1$$
$$(x-1)(y-1)=1$$
$$xy=x+y \qquad (2)$$
Сега, од неравенството (1) добиваме:
$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leq\sqrt{ab}+\sqrt{c-1}=\sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1}\leq\sqrt{c(ab+1)}$$

т.е. точно е почетното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $c(ab+1)=c+ab+1$, т.е.

$$abc=ab+1. \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува дека во почетното неравенство знак за равенство важи ако и само ако $ab=a+b$ и $abc=ab+1$, т.е. $c=\frac{ab+1}{ab}=1+\frac{1}{ab}=1+\frac{1}{a+b}$.

65. Да се докаже дека полиномот $x^8-x^5+x^2-x+1$ има позитивна вредност за сите $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Ќе покажеме дека

$$x^8+x^2+1>x^5+x \tag{*}$$

за секој $x\in\mathbb{R}$. Ќе разгледаме три случаи.

а) Ако $x\le 0$ тогаш левата страна е позитивен број, а десната страна е негативен број. Според тоа, во овој случај неравенството е исполнето.

б) Нека $0<x<1$. Неравенството (*) ќе го трансформираме во видот

$$x^8+(x^2-x^5)+(1-x)>0\,. \tag{**}$$

Бидејќи $x^2>x^5$ и $1>x$, последното неравенство е точно, затоа што збир на три позитивни собироци е позитивен број. Значи неравенството (**) е точно, па според тоа и (*) е точно неравенство.

в) Нека $x\ge 1$. Даденото неравенство ќе го запишеме во облик

$$x^5(x^3-1)+x(x-1)+1>0\,.$$

Во последното неравенство сите три собироци се позитивни, за $x\in[1,+\infty)$, па според тоа неравенство е точно.

Следствено од а), б) и в) добиваме дека $x^8-x^5+x^2-x+1>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

66. Колкав е минимумот на функцијата

$$f(x,y)=x^2-2xy+6y^2-12x+2y+45 \tag{1}$$

и за кои вредности на променливите се достигнува?

Решение. За полиномот $f(x,y)$ имаме:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=x^2-2(y+6)x+6y^2+2y+45\\ &=(x-y-6)^2+5y^2-10y+9\\ &=(x-y-6)^2+5(y-1)^2+4. \end{aligned}$$

Сега, лесно се заклучува дека минимумот на $f(x,y)$ е 4 и тој се добива за $x-y-6=0$ и $y-1=0$, т.е. за $x=7$ и $y=1$.

67. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=4$. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}\,.$$

Решение. Ако земеме предвид дека за секои ненегативни реални броеви a,b,c важи $\frac{a}{\sqrt{a+1}+1}\ge\frac{a}{\sqrt{a+b+c+1}+1}$ и до искористиме условот $x+y+z=4$, добиваме

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}-3=(\sqrt{2x+1}-1)+(\sqrt{2y+1}-1)+(\sqrt{2z+1}-1)$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{2y}{\sqrt{2y+1}+1}+\frac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}$$
$$\geq\frac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1}=\frac{8}{\sqrt{9}+1}=2.$$

Според тоа, $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}\geq 5$. Но, во последното неравенство знак за равенство важи, на пример, за $x=4, y=z=0$, па заклучуваме дека бараната најмала вредност на изразот е 5.

68. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=4$. Определи ја најмалата вредност на изразот $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}$.

Решение. Ако земеме предвид дека за секои ненегативни реални броеви a,b,c важи $\frac{a}{\sqrt{a+1}+1}\geq\frac{a}{\sqrt{a+b+c+1}+1}$ и до искористиме условот $x+y+z=4$, добиваме

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}-3=(\sqrt{2x+1}-1)+(\sqrt{3y+1}-1)+(\sqrt{4z+1}-1)$$
$$\geq(\sqrt{2x+1}-1)+(\sqrt{2y+1}-1)+(\sqrt{2z+1}-1)$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{2y}{\sqrt{2y+1}+1}+\frac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}$$
$$\geq\frac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1}=\frac{8}{\sqrt{9}+1}=2.$$

Според тоа, $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}\geq 5$. Но, во последното неравенство знак за равенство важи за $x=4, y=z=0$, па заклучуваме дека бараната минимална вредност на изразот е 5.

69. Нека a,b и c се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq 1.$$

Решение. Користиме $\sqrt{(a+b)(a+c)}\geq\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})$. Тогаш

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq$$
$$\leq\frac{a}{a+\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})}+\frac{b}{b+\sqrt{b}(\sqrt{c}+\sqrt{a})}+\frac{c}{c+\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$
$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$$

70. Нека n е природен број поголем од 1. Определи ја најголемата вредноста на збирот $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n}{2^k(n-k)}$.

Решение. За $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ да означиме $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n}{2^k(n-k)}$. Тогаш $S_2=1$, $S_3=\frac{3}{2}$, $S_4=\frac{5}{3}=S_5$. За $n\geq 5$ важи

$$S_n - S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{2^k(n-k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{2^k(n-k)} - \frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\right) - \frac{n+1}{2^n \cdot 1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k(n-k)(n-k+1)} - \frac{n+1}{2^n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-4} \frac{k}{2^k(n-k)(n-k+1)} + \frac{n-3}{2^{n-3} \cdot 4 \cdot 3} + \frac{n-2}{2^{n-2} \cdot 3 \cdot 2} + \frac{n-1}{2^{n-1} \cdot 2 \cdot 1} - \frac{n+1}{2^n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-4} \frac{k}{2^k(n-k)(n-k+1)} + \frac{n-4}{2^{n-2} \cdot 3} > 0$$

Значи за секој $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ важи $S_n \le S_4 = \frac{5}{3}$. Значи најголемата вредност е $\frac{5}{3}$.

71. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви. Докажи дека
$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} .$$

Решение. Ако $0 \le x \le 1$, тогаш $x^{\frac{3}{2}} \le x$. Притоа, равенство се достигнува за $x = 0$ и $x = 1$.

Нека во конечната низа $a_1, a_2, ..., a_n$ има ненулти елемент, т.е. постои $k \in \{1, 2, ..., n\}$ така што $a_k \ne 0$. Тогаш
$$x_s = \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2}, \quad s = 1, 2, ..., n$$
се такви што $0 \le x_s \le 1$. Според забелешката на почетокот на решението на задачата имаме $x_s^{\frac{3}{2}} \le x_s$, т.е.
$$\left(\frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2}\right)^{\frac{3}{2}} \le \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2}, \quad s = 1, 2, ..., n .$$
Но, тогаш
$$\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2}\right)^{\frac{3}{2}} \le \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2} = \frac{\sum_{s=1}^{n} a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2} = 1 \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s^3}{\left(\sum_{p=1}^{n} a_p^2\right)^{\frac{3}{2}}} \le 1 \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n} a_s^3 \le \left(\sum_{p=1}^{n} a_p^2\right)^{\frac{3}{2}} .$$
Сега, јасно е дека $\left(\sum_{p=1}^{n} a_p^3\right)^{\frac{1}{3}} \le \left(\sum_{p=1}^{n} a_p^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ако пак сите $a_s, s = 1, 2, ..., n$ се еднакви на нула, тогаш важи знакот за равенство.

72. Позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и k се такви, што
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 3k, \; a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 3k^2 \text{ и } a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 > 3k^3 + k .$$
Докажи, дека разликата на некои два од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ е поголема од 1.

Решение. Ги множиме равенството
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 3k \qquad (1)$$

и неравенството

$$a_1^3+a_2^3+...+a_n^3>3k^3+k$$

и го добиваме неравенството

$$a_1^4+a_2^4+...+a_n^4+a_1^3a_2+a_1a_2^3+a_1^3a_3+a_1a_3^3+...+a_{n-1}^3a_n+a_{n-1}a_n^3>9k^4+3k^2. \quad (2)$$

Го квадрираме равенството

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=3k^2, \quad (3)$$

и добиваме

$$a_1^4+a_2^4+...+a_n^4+2a_1^2a_2^2+2a_1^2a_3^2+...+2a_{n-1}^2a_n^2=9k^4. \quad (4)$$

Ако од неравенството (2) го одземеме равенството (4) добиваме

$$a_1^3a_2-2a_1^2a_2^2+a_1a_2^3+a_1^3a_3-2a_1^2a_3^2+a_1a_3^3+...+a_{n-1}^3a_n-2a_{n-1}^2a_n^2+a_{n-1}a_n^3>3k^2,$$

т.е.

$$a_1a_2(a_1-a_2)^2+a_1a_3(a_1-a_3)^2+...+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n)^2>3k^2. \quad (5)$$

Нека препоставиме, дека разликата на секои два броја не е поголема од 1. Тогаш квадратот на нивната разлика не е поголем од 1, па од неравенството (5) следува

$$a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n>3k^2. \quad (6)$$

Ако го одземеме равенството (3) од квадратот на равенството (1) ќе добиеме

$$2a_1a_2+2a_1a_3+...+2a_{n-1}a_n=6k^2,$$

што противречи на (6). Од добиената противречност следува дека разликата на некои два од броевите $a_1,a_2,...,a_n$ е поголема од 1.

73. Секои два од реалните броеви a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 се разликуваат барем за 1. За некој реален број k се исполнети равенствата

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \text{ и } a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажи, дека $k^2\ge\frac{25}{3}$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$. Според условот, $a_{i+1}-a_i\ge1$, за секој $i=1,2,3,4$. Според тоа, $a_j-a_i\ge j-i$, за $1\le i<j\le5$. Добиваме

$$\sum_{1\le i<j\le5}(a_j-a_i)^2\ge\sum_{1\le i<j\le5}(j-i)^2=4\cdot1^2+3\cdot2^2+2\cdot3^2+4^2=50 \;,$$

па затоа

$$4\sum_{i=1}^5 a_i^2-2\sum_{1\le i<j\le5}a_ia_j\ge50. \quad (1)$$

Од друга страна, според условот имаме

$$\sum_{i=1}^5 a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le5}a_ia_j=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2=4k^2. \quad (2)$$

Ако ги собереме (1) и (2) добиваме

$$5\sum_{i=1}^5 a_i^2=10k^2\ge50+4k^2$$

па затоа $6k^2 \geq 50$, т.е. $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

74. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c,d важи неравенството

$$\max\{a^2-b, b^2-c, c^2-d, d^2-a\} \geq \max\{a^2-a, b^2-b, c^2-c, d^2-d\}.$$

Решение. Нека

$M_1 = \max\{a^2-a, b^2-b, c^2-c, d^2-d\}$ и $M_2 = \max\{a^2-b, b^2-c, c^2-d, d^2-a\}$.

Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $M_1 > M_2$. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $M_1 = a^2-a$. Тогаш важи $a^2-a \geq a^2-b$, од каде се добива дека $b \geq a$. Натаму, $a^2-a \geq b^2-c \geq a^2-c$, од каде се добива $c \geq a$. Од $a^2-a \geq c^2-d \geq a^2-d$, добиваме и дека $d \geq a$. Оттука $d^2-a \geq a^2-a$, што е во контрадикција со претпоставката $M_1 > M_2$.

75. Докажи дека за секој природен број $n \in \mathbb{N}$ е исполнето неравенството

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \ldots + \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} < \frac{1}{2}.$$

Решение. За секој природен број k имаме

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!} = \frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+2)(k+1)]} = \frac{k+2}{k!(k+2)^2} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}.$$

Сега,

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \ldots + \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} =$$

$$= (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + (\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) + .. + (\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!} < \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

76. Кој од следните изрази е поголем: $A = \frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{1+a+a^2+...+a^n}$, $B = \frac{1+b+b^2+...+b^{n-1}}{1+b+b^2+...+b^n}$, ако $a > b > 0$.

Решение. Изразот $\frac{1}{A}$ можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{A} = \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}} = 1 + \frac{a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + ... + \frac{1}{a}}$$

Слично и за B, изразот $\frac{1}{B}$ можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{B} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{n-1}} + ... + \frac{1}{b}}.$$

Сега, од $a > b > 0$ следува $\frac{1}{b^k} > \frac{1}{a^k}$, за $k = 1,2,...,n$, па затоа

$$\frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{b} > \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a},$$

оОд што следува $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ одкаде $B > A$.

77. Нека $n \geq 2$ е природен број и $f(x) = (x+a)(x+b)$, каде a и b се позитивни реални броеви. Определи ја најголемата вредност на

$$F=\sum_{1\le i<j\le n}\min\{f(x_i),f(x_j)\},$$

каде $x_1,x_2,...,x_n$ се ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1.

Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned}\min\{f(x_i),f(x_j)\}&=\min\{(x_i+a)(x_i+b),(x_j+a)(x_j+b)\}\\&\le\sqrt{(x_i+a)(x_i+b)(x_j+a)(x_j+b)}\\&\le\tfrac{1}{2}((x_i+a)(x_j+b)+(x_j+a)(x_i+b))\\&=x_ix_j+\tfrac{1}{2}(x_i+x_j)(a+b)+ab,\end{aligned}$$

добиваме

$$\begin{aligned}F&\le\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j+\tfrac{a+b}{2}\sum_{1\le i<j\le n}(x_i+x_j)+\tbinom{n}{2}ab\\&=\tfrac{1}{2}[(\sum_{i=1}^n x_i)^2-\sum_{i=1}^n x_i^2]+\tfrac{a+b}{2}(n-1)\sum_{i=1}^n x_i+\tbinom{n}{2}ab\\&=\tfrac{1}{2}(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)+\tfrac{a+b}{2}(n-1)+\tbinom{n}{2}ab\\&\le\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)^2)+\tfrac{a+b}{2}(n-1)+\tbinom{n}{2}ab\\&=\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{n-1}{2}(a+b)+\tfrac{n(n-1)}{2}ab\\&=\tfrac{n-1}{2}(\tfrac{1}{n}+a+b+nab).\end{aligned}$$

Во користените неравенства знаци за равенства важат ако и само ако $x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{n}$, па затоа најголемата вредност на F е $\frac{n-1}{2}(\frac{1}{n}+a+b+nab)$.

78. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ и $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$4(\tfrac{x_1^3-x_2^3}{x_1+x_2}+\tfrac{x_2^3-x_3^3}{x_2+x_3}+...+\tfrac{x_{n-1}^3-x_n^3}{x_{n-1}+x_n}+\tfrac{x_n^3-x_1^3}{x_n+x_1})\le(x_1-x_2)^2+(x_2-x_2)^2+...+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2.$$

Решение. Ќе воведеме ознака $x_{n+1}=x_1$. За секој $i=1,2,3,...,n$ важи

$$\begin{aligned}\tfrac{x_i^3-x_{i+1}^3}{x_i+x_{i+1}}&=\tfrac{x_i^3+x_i^2x_{i+1}-x_i^2x_{i+1}+x_ix_{i+1}^2-x_ix_{i+1}^2-x_{i+1}^3}{x_i+x_{i+1}}=\tfrac{x_i^3+x_i^2x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}-\tfrac{x_i^2x_{i+1}-x_ix_{i+1}^2}{x_i+x_{i+1}}-\tfrac{x_ix_{i+1}^2+x_{i+1}^3}{x_i+x_{i+1}}\\&=x_i^2-x_{i+1}^2+\tfrac{x_ix_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i},\end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned}4\sum_{i=1}^n\tfrac{x_i^3-x_{i+1}^3}{x_i+x_{i+1}}&=4\sum_{i=1}^n(x_i^2-x_{i+1}^2+\tfrac{x_ix_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i})=4\sum_{i=1}^n(x_i^2-x_{i+1}^2)+4\sum_{i=1}^n\tfrac{x_ix_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i}\\&=4\sum_{i=1}^n\tfrac{x_ix_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i}.\end{aligned}\tag{1}$$

Од друга страна, непосредно се проверува дека за секој $i=1,2,3,...,n$ важи

$$\tfrac{x_ix_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i}\le\tfrac{1}{2}x_{i+1}(x_{i+1}-x_i).\tag{2}$$

Конечно, од равенството (1) и неравенствата (2) следува

$$4\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3-x_{i+1}^3}{x_i+x_{i+1}}=4\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i}\le 4\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2,$$

што и требаше да се докаже.

2. ДОКАЖУВАЊЕ НЕРАВЕНСТВА СО ПОМОШ НА МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

1. Докажи дека $n!>2^n$, за секој природен број $n\ge 4$.

Решение. Доказот ќе го дадеме со помош на математичка индукција. За $n=4$, имаме дека $4!=24>2^4=16$, тврдењето важи.

Претпоставуваме дека трврдењето е точно за $n=k$, т.е. важи $k!>2^k$, за $k\ge 4$. За $n=k+1$, имаме $(k+1)!=(k+1)k!>(k+1)2^k>2^{k+1}$, при што искористивме дека $k+1>2$, за $k\ge 4$. Согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број $n\ge 4$.

2. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2}.$$

Решение. За $n=1$ имаме $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n=k$, т.е. дека

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\ge\frac{1}{2}.$$

За $n=k+1$, од индуктивната претпоставка и од неравенството $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0$ следува

$$\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k})+(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{k+1})$$

$$\ge\frac{1}{2}+(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2})>\frac{1}{2}.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција заклучуваме дека

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2}, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

3. Да означиме

$$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n-2)\cdot(2n) \text{ и } (2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-3)\cdot(2n-1).$$

Докажи, дека

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}. \qquad (1)$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош ма математичка индукција.

i) За $n=1$ имаме $\frac{1!!}{2!!}=\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3\cdot1+1}}$, т.е. неравенството важи.

i) Нека претпоставиме дека (1) важи за $n=k$, т.е. дека

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Ако последното неравенство го помножиме $\frac{2k+1}{2k+2}$ добиваме

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}. \tag{2}$$

Останува да докажеме дека $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \bullet \frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Навистина, последното неравенство следува од низата неравенства

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \quad &\Leftrightarrow \quad (2k+1)\sqrt{3k+4} \le (2k+2)\sqrt{3k+1} \\
&\Leftrightarrow \quad (2k+1)^2(3k+4) \le (2k+2)(3k+1) \\
&\Leftrightarrow \quad 12k^3+28k^2+19k+4 \le 12k^3+28k^2+20k+4 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \le k
\end{aligned}$$

и како последното неравенство е исполнето за секој $k \in \mathbb{N}$, добиваме дека

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+4}},$$

што заедно со (2) дава

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \le \frac{1}{\sqrt{3k+4}},$$

т.е. неравенството (1) важи и за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

4. Докажи, дека за секој природен број $n \ge 2$ важи неравенството

$$2!4!6!...(2n)! > [(n+1)!]^n. \tag{1}$$

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на математичка индукција.

i) За $n=2$ имаме $2!4! = 48 > 36 = 6^2 = (3!)^2$, т.е. неравенството (1) важи.

ii) Нека претпоставиме дека неравенството (1) важи за $n=k-1$, т.е. дека

$$2!4!6!...(2k-2)! > [k!]^{k-1}.$$

Ако последното неравенство го помножиме со $(2k)!$ добиваме

$$\begin{aligned}
2!4!6!...(2k-2)!(2k)! &> (k!)^{k-1}(2k)! = \frac{(k!)^k(2k)!}{k!} = 2k\cdot(2k-1)\cdot...\cdot(k+1)\cdot(k!)^k \\
&> \underbrace{(k+1)\cdot...(k+1)}_{k \text{ пати}}\cdot(k!)^k = [(k+1)!]^k,
\end{aligned}$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n \ge 2$.

5. Користејќи го неравенството $(1+\frac{1}{k})^k < 3$, за секој $k \in \mathbb{N}$, докажи дека

$$(\tfrac{n}{3})^n < n!, \tag{1}$$

за секој природен број n.

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на математичка индукција *i*) За $n=1$ имаме $1!=1>\frac{1}{3}=(\frac{1}{3})^1$, т.е. неравенството (1) важи.

ii) Нека претпоставиме дека неравенството (1) важи за $n=k$, т.е. дека

$$(\tfrac{k}{3})^k<k!.$$

Последното неравенство го множиме со $k+1$ и добиваме

$$(k+1)!>(\tfrac{k}{3})^k(k+1)=\frac{k^k(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)^k}\cdot 3=(\tfrac{k+1}{3})^{k+1}\cdot\frac{3}{(\frac{k+1}{k})^k}=(\tfrac{k+1}{3})^{k+1}\cdot\frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k}$$

и како $(1+\frac{1}{k})^k<3$ од претходното неравенство следува $(k+1)!>(\frac{k+1}{3})^{k+1}$, т.е. неравенството (1) важи и за $n=k+1$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (1) важи за секој природен број n.

6. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}+\dots+\frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}<\frac{1}{2}.$$

Решение. Да означиме

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}+\dots+\frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}, \text{ за } n\ge 1.$$

После сведувањето на збирот на најмал заеднички содржател добиваме $S_n=\frac{a_n}{b_n}$, каде $b_n=3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)$. Ќе докажеме дека за секој $n\ge 1$ важи $b_n=2a_n+1$.

За $n=1$ добиваме $a_1=1, b_1=3=2a\ \ +1$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $b_k=2a_k+1$. Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}&=S_{k+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}+\dots+\frac{k}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2k+1)}+\frac{k+1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)}\\&=S_k+\frac{k+1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{a_k}{b_k}+\frac{k+1}{b_k(2k+3)}=\frac{(2k+3)a_k+k+1}{(2a_k+1)(2k+3)}\\&=\frac{(2k+3)a_k+k+1}{2((2k+3)a_k+k+1)+1}\end{aligned}$$

што значи $b_{k+1}=2a_{k+1}+1$. Конечно од принципот на математичка индукција следува дека $b_n=2a_n+1$, за секој $n\ge 1$.

Од претходно изнесенот добиваме

$$S_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n}{2a_n+1}<\frac{1}{2}, \text{ за секој } n\ge 1.$$

7. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

Решение. За $n=1$ имаме $\frac{3}{5}<\sqrt{\frac{3}{7}}$, т.е. неравенството важи. Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n=k$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)(4n+3)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)(4n+5}<\frac{4n+3}{4n+5}\sqrt{\frac{3}{4n+3}},$$

па за да докажеме дека неравенството важи за $n=k+1$ доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{4n+3}{4n+5}\sqrt{\frac{3}{4n+3}}<\sqrt{\frac{3}{4n+5}},$$

кое е еквивалентно со очигледното неравенство $\sqrt{\frac{4n+3}{4n+5}}<1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

8. Нека $n\geq 2$ е природен број и нека за позитивните реални броеви $a_0,a_1,...,a_n$ важи

$$(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1})=a_{k-1}-a_{k+1}, \text{ за секој } k=1,2,...,n-1.$$

Докажи, дека $a_n<\frac{1}{n-1}$.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{a_k+a_{k+1}}=\frac{1}{a_{k-1}+a_k}+1, \text{ за секој } k>0.$$

Сега со индукција следува дека $\frac{1}{a_k+a_{k+1}}=\frac{1}{a_0+a_1}+k$, за $k>0$, од што добиваме $\frac{1}{a_n+a_{n-1}}>n-1$, па затоа $a_n<a_n+a_{n-1}<\frac{1}{n-1}$.

9. Докажи дека

$$\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}<4$$

за секој природен број n таков што $n\geq 2$.

Решение. *Прв начин.* Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n=2$ имаме $\frac{2}{2^{2-1}1}=2<4$, па тврдењето е точно.

Ако $n=3$ добиваме $\frac{3}{2^1\cdot 2}+\frac{3}{2^2\cdot 1}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}<4$, па неравенството важи и за $n=3$.

Сега да претпоставиме дека неравенството е точно за природноит број n, $n\geq 3$. За $n+1$ имаме:

$$\frac{n+1}{2^1n}+\frac{n+1}{2^2(n-1)}+\frac{n+1}{2^3(n-2)}+...+\frac{n+1}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n+1}{2^n\cdot 1}=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{2^1n}+\frac{n}{2^2(n-1)}+\frac{n}{2^3(n-2)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n}{2^n\cdot 1}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n}\left[\frac{n}{2^1n}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}\right)\right]$$

$$\leq\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{5}{2}\overset{n\geq 3}{\leq}\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}=\frac{20}{6}<4$$

Според тоа тврдењето важи за секој $n\geq 2$.

Втор начин. Неравенството ќе го докажеме со помош на математичка индукција. Воведуваме ознака $\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}$. За $n=2$ и $n=3$ неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека $\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}<4$. Тогаш

$$\sigma_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1}{2^i(n+1-i)}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n+1}{2^{i+1}(n-i)}=\frac{n+1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{2^i(n-i)}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1+\sigma_n}{2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1+4}{2}<4$$

Последното неравенство е исполнето за секој природен број $n>3$

Според принципот на математичка индукција $\sigma_n<4$, за секое n.

10. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n>1$ и $a>0$. Докажи дека

$$\frac{1+a+a^2+...+a^n}{a+a^2+...+a^{n-1}}\geq\frac{n+1}{n-1}.$$

Решение. Со математичка индукција ќе го докажеме неравенството за $a\geq 1$. Од $(a-1)^2\geq 0$ следува $a^2+a+1\geq 3a$ и оттука $\frac{a^2+a+1}{a}\geq\frac{2+1}{2-1}$. Значи неравенството е точно за $n=2$. Нека неравенството е точно за $n=k$ и $a\geq 1$, т.е. важи

$$\frac{1+a+a^2+...+a^k}{a+a^2+...+a^{k-1}}\geq\frac{k+1}{k-1}.$$

Прво ќе го докажеме неравенството

$$\frac{k+1}{k-1}(a+a^2+...+a^{k-1})+a^{k+1}\geq\frac{k+2}{k}(a+a^2+...+a^{k-1}+a^k)\,. \qquad (*)$$

Навистина, даденото неравенство е еквивалентно со

$$2(a+a^2+...+a^k)+ka^k((k-1)a-(k-1))\geq 0,$$

кое е точно бидејќи од $a\geq 1$ имаме

$$2(a+a^2+...+a^k)+ka^k((k-1)a-(k-1))\geq 2k+k(k-1-k+1)=2k-2k=0.$$

Сега, од индуктивната претпоставка и (*) имаме

$$\frac{1+a+a^2+...+a^k+a^{k+1}}{a+a^2+...+a^{k-1}+a^k}\geq\frac{\frac{k+1}{k-1}(1+a+a^2+...+a^k)+a^{k+1}}{a+a^2+...+a^{k-1}+a^k}\geq\frac{k+2}{k}=\frac{(k+1)+1}{(k+1)-1}.$$

Според тоа неравенството е точно за $a\geq 1$. Ако $a\in(0,1)$, тогаш $\frac{1}{a}>1$, па

$$\frac{1+a+a^2+...+a^n}{a+a^2+...+a^{n-1}}=\frac{\frac{1+a+a^2+...+a^n}{a^n}}{\frac{a+a^2+...+a^{k-1}+a^{n-1}}{a^n}}=\frac{1+\frac{1}{a}+(\frac{1}{a})^2+...+(\frac{1}{a})^n}{\frac{1}{a}+(\frac{1}{a})^2+...+(\frac{1}{a})^n}\geq\frac{n+1}{n-1}$$

За $a=1$ важи знак за равенство. Дали за други вредности на a важи знак за равенство?

11. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{...+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n}+1.$$

Решение. Нека $S(n)=\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{...+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$. Тогаш за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $S(n+1)=\sqrt{n+1+S(n)}$. За $n=1$ очигледно важи $S(1)<\sqrt{1}+1$. Да претпоставиме дека за природниот број $n-1$ важи $S(n-1)<\sqrt{n-1}+1$. Тогаш

$$S(n)=\sqrt{n+S(n-1)}<\sqrt{n+\sqrt{n-1}+1}<\sqrt{n+2\sqrt{n}+1}=\sqrt{(\sqrt{n}+1)^2}=\sqrt{n}+1,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

12. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}\leq 2\sqrt[n]{n}$$

Решение. Со смената $x=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}};\, y=\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}$ неравенството се сведува на обликот

$$(\tfrac{x+y}{2})^n \le \tfrac{x^n+y^n}{2} \tag{1}$$

Јасно, неравенството (1) важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $(\frac{x+y}{2})^k \le \frac{x^k+y^k}{2}$. Тогаш, ако го искористиме неравенството

$$(x^k+y^k)(x+y)\le 2(x^{k+1}+y^{k+1}),$$

кое е еквивалентно со очегледното неравенство

$$(x-y)^2(x^{k-1}+x^{k-2}y+...+xy^{k-2}+y^{k-1})\ge 0,$$

од индуктивната претпоставка следува дека за $n=k+1$ важи

$$(\tfrac{x+y}{2})^{k+1}=(\tfrac{x+y}{2})^k\,\tfrac{x+y}{2}\le \tfrac{x^k+y^k}{2}\,\tfrac{x+y}{2}\le \tfrac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (1) важи за секој природен број n.

13. Нека $a_1,a_2,...\,,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n=1.$$

Докажи дека важи неравенството

$$\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+.\ \ .\ \ .\ +\frac{b_n^2}{a_n}\ge 1\ \ y=1.$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството $(b_i-a_i)^2\ge 0$ следува

$$b_i^2\ge 2b_ia_i-a_i^2,\, i=1,2,...,n.$$

Оттука $\frac{b_i^2}{a_i}\ge 2b_i-a_i$. Собирајќи ги овие n неравенства добиваме

$$\sum_{i=1}^n\frac{b_i^2}{a_i}\ge 2\sum_{i=1}^n b_i-\sum_{i=1}^n a_i=2\cdot 1-1=1.$$

Втор начии. Неравенството ќе го докажеме со математичка индукција. За $n=1$ имаме $a_1=b_1=1$, па $\frac{b_1^2}{a_i}=1$.

Да претпоставиме дека неравенството е точно за секои $a_1,a_2,...,a_n$, $b_1,b_2,...,b_n$ такви што $a_1+...+a_n=b_1+...+b_n=1$. За $n+1$ нека ставиме $a_n^{'}=a_n+a_{n+1}$ и $b_n^{'}=b_n+b_{n+1}$. Тогаш важи

$$a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n^{'}=b_1+b_2+...+b_{n-1}+b_n^{'}=1$$

и за овие броеви важи индуктивната претпоставка, т.е. $\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+...+\frac{b_n^{'2}}{a_n^{'}}\ge 1$. Нека $A=\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+...+\frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1}}$. Тогаш

$$A+\frac{b_n^2}{a_n}+\frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}=A+\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}(\frac{b_n^2}{a_n}+\frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}})=A+\frac{b_n^2+(\frac{a_{n+1}b_n^2}{a_n}+\frac{a_nb_{n+1}^2}{a_{n+1}})+b_{n+1}^2}{a_n+a_{n+1}}$$

$$\geq A+\frac{b_n^2+2\sqrt{\frac{a_{n+1}b_n^2}{a_n}\cdot\frac{a_nb_{n+1}^2}{a_{n+1}}}+b_{n+1}^2}{a_n+a_{n+1}}=A+\frac{b_n^2+2b_nb_{n+1}+b_{n+1}^2}{a_n+a_{n+1}}$$
$$=A+\frac{(b_n+b_{n+1})^2}{a_n+a_{n+1}}=\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+...+\frac{b_n^{'2}}{a_n^{'}}\geq 1$$

Значи неравенството важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

14. Нека $n \geq 2$ е природен број и $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{2n+1}$ се реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+...-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}}<\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}\,.$$

Решение. Нека $m \geq 2$ е природен број. Со индукција по $n \geq 1$ ќе докажеме поопшто неравенство од даденото, т.е. дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+...-\sqrt[m]{a_{2n}}+\sqrt[m]{a_{2n+1}}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}\,.$$

За $n=1$ треба да докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+\sqrt[m]{a_3}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3}\,,$$

т.е. $(a-b+c)^m-a^m \leq c^m-b^m$, каде $a=\sqrt[m]{a_1}, b=\sqrt[m]{a_2}, c=\sqrt[m]{a_3}$. Последното неравенство следува од

$$(a-b+c)^m-a^m=(c-b)(a^{m-1}+a^{m-2}(c-b)+...+a(c-b)^{m-2}+(c-b)^{m-1})$$
$$<(c-b)(b^{m-1}+b^{m-2}c+...+bc^{m-2}+c^{m-1})=c^m-b^m,$$

при што искористивме дека $m>1, 0<a<b$ и $0<c-b<c$.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за $n \geq 1$. Тогаш

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+...-\sqrt[m]{a_{2n}}+\sqrt[m]{a_{2n+1}}-\sqrt[m]{a_{2n+2}}-\sqrt[m]{a_{2n+3}}<$$
$$<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}-\sqrt[m]{a_{2n+2}}-\sqrt[m]{a_{2n+3}}$$
$$<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}+a_{2n+3}},$$

при што првото неравенството следува од индуктивната претпоставка, а второто од веќе докажаната база на индукцијата, т.е. неравенството за три броја. Според тоа, неравенството важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

15. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека постојат $a_1, a_2, ..., a_n \in \{-1,1\}$ такви што

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+...+a_nx_n^2 \geq (a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)^2\,.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$. Ќе покажеме дека неравенството е исполнето со избор на $a_k=(-1)^{k+1}$.

На почеток ќе го провериме неравенството за $n=2$ и $n=3$. За $n=2$ неравенството го добива обликот

$$x_1^2-x_2^2 \geq (x_1-x_2)^2\,,$$

кое е еквивалентно со нервенството $2x_1x_2-2x_2^2\geq 0$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $2x_2(x_1-x_2)\geq 0$, кое очигледно е точно. За $n=3$ неравенството го добива обликот

$$x_1^2-x_2^2+x_3^2\geq(x_1-x_2+x_3)^2,$$

кое е еквивалентно со $x_1x_2+x_2x_3-x_1x_3-x_2^2\geq 0$, т.е. $(x_1-x_2)(x_2-x_3)\geq 0$, кое очигледно е точно.

За $n>3$ земаме $Y=a_3-a_4+a_5-a_6+....+(-1)^{n+1}a_n$. Да забележиме дека

$$Y=x_3-(x_4-x_5)-(x_6-x_7)-...\leq x_3$$

$$Y=(x_3-x_4)+(x_5-x_6)+...\geq 0$$

Заради точноста на случаите за $n=2$ и $n=3$ е исполнето неравенството

$$x_1^2-x_2^2+Y^2\geq(x_1-x_2+Y)^2.$$

Сега е доволно да се направи индукција во која индуктивната претпоставка е

$$x_1^2-x_2^2+x_3^2...+(-1)^{n+1}x_n^2\geq Y^2.$$

16. Дали постојат ненулти реални броеви $a_1,a_2,...,a_{10}$ за кои

$$(a_1+\tfrac{1}{a_1})(a_2+\tfrac{1}{a_2})....(a_{10}+\tfrac{1}{a_{10}})=(a_1-\tfrac{1}{a_1})(a_2-\tfrac{1}{a_2})....(a_{10}-\tfrac{1}{a_{10}})\ ?$$

Решение. Броевите a_i и $\frac{1}{a_i}$, за $i=1,2,...,10$ се со ист знак, па затоа

$$|a_i+\tfrac{1}{a_i}|=|a_i|+|\tfrac{1}{a_i}|>\max\{|a_i|,|\tfrac{1}{a_i}|\}\geq|a_i-\tfrac{1}{a_i}|,$$

за $i=1,2,...,10$. Ако ги помножиме послените неравенства, добиваме

$$|a_1+\tfrac{1}{a_1}|\cdot|a_2+\tfrac{1}{a_2}|....|a_{10}+\tfrac{1}{a_{10}}|>|a_1-\tfrac{1}{a_1}|\cdot|a_2-\tfrac{1}{a_2}|....|a_{10}-\tfrac{1}{a_{10}}|,$$

што значи дека не постојат броеви $a_1,a_2,...,a_{10}$, кои го задоволуваат бараното равенство.

17. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21.$$

Решение. Имаме

$$x^2-x+1=(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\geq\tfrac{3}{4}, \tag{1}$$

$$4y^2+6y+4=4(y+\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{7}{4}\geq\tfrac{7}{4} \tag{2}$$

и

$$4z^2-12z+25=4(z-\tfrac{3}{2})^2+16\geq 16. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) следува дека

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)\geq 16\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{7}{4}=21 \qquad (4).$$

Равенство е исполнето ако и само ако во (1),(2) и (3) се исполнети равенства. Но, условот за равенство е зададената равенка

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21$$

па според тоа решение на равенката е $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{4}$, $z=\frac{3}{2}$.

18. Да се најдат сите реални броеви $x \geq -1$ такви што неравенството

$$\frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} \cdot .... \cdot \frac{a_n+x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 ... a_n + x}{2}$$

е исполнето за секои $a_1, a_1, ..., a_1 \geq 1$, каде $n \geq 2$.

Решение. Ако $x \geq -1$ е реален број за кој што неравенството е исполнето, тогаш заменувајќи $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ кои се реални броеви не помали од 1 во почетното неравенство

$$\frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} \cdot .... \cdot \frac{a_n+x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 ... a_n + x}{2}, \tag{1}$$

добиваме $(\frac{1+x}{2})^n \leq \frac{1+x}{2}$, т.е.

$$(\frac{1+x}{2})^{n-1} \leq 1. \tag{2}$$

За $n \geq 2$ неравенство (2) е исполнето за сите реални броеви $x \leq 1$.

Со индукција по n ќе покажеме дека за $x \in [-1,1]$ неравенството (1) е исполнето за секои $a_1, a_2, ..., a_n \geq 1$, $n \geq 2$. За $n = 2$ неравенството го добива обликот $\frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 + x}{2}$ кое е еквивалентно со $x^2 + (a_1 + a_2 - 2)x - a_1 a_2 \leq 0$. Според тоа, тврдењето е точно за $n = 2$

Нека тврдењето е точно за било кои n реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ не помали од 1, и за секој $x \in [-1,1]$. Од индуктивната претпоставка имаме дека важи неравенството (1), па затоа

$$\frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} \cdot .... \cdot \frac{a_n+x}{2} \cdot \frac{a_{n+1}+x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 ... a_n + x}{2} \cdot \frac{a_{n+1}+x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} + x}{2}.$$

Конечно, според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно за било кој природен број n.

3. НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

1. Докажи дека $(x+y)^4 \leq 8(x^4 + y^4)$, за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= [(x+y)^2]^2 = (x^2 + 2xy + y^2)^2 \leq (x^2 + x^2 + y^2 + y^2)^2 = 4(x^2 + y^2)^2 \\ &= 4(x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) = 4(x^4 + y^4) + 4 \cdot 2x^2 y^2 \\ &\leq 4(x^4 + y^4) + 4(x^4 + y^4) = 8(x^4 + y^4).\end{aligned}$$

2. Ако $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ се позитивни реални броеви, такви што $a_1 a_2 a_3 ... a_n = 1$, тогаш

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)...(1 + a_n) \geq 2^n.$$

Докажи!

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува $\frac{1+a_i}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_i} = \sqrt{a_i}$, за $i = 1, 2, ..., n$. Ако ги помножиме овие n равенства добиваме

$$\frac{1+a_1}{2}\cdot\frac{1+a_2}{2}\cdot\frac{1+a_3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+a_n}{2}\geq\sqrt{a_1a_2a_3...a_n}=1,$$

т.е.

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n)\geq 2^n.$$

3. Ненегативните реални броеви a,b,x и y се такви што $a^5+b^5\leq 1$ и $x^5+y^5\leq 1$. Докажи дека $a^2x^3+b^2y^3\leq 1$.

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме

$$a^2x^3=\sqrt[5]{a^5a^5x^5x^5x^5}\leq\tfrac{1}{5}(a^5+a^5+x^5+x^5+x^5)$$
$$b^2y^3=\sqrt[5]{b^5b^5y^5y^5y^5}\leq\tfrac{1}{5}(b^5+b^5+y^5+y^5+y^5)$$

Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме

$$a^2x^3+b^2y^3\leq\tfrac{2}{5}a^5+\tfrac{3}{5}x^5+\tfrac{2}{5}b^5+\tfrac{3}{5}y^5=\tfrac{2}{5}(a^5+b^5)+\tfrac{3}{5}(x^5+y^5)\leq\tfrac{2}{5}\cdot 1+\tfrac{3}{5}\cdot 1=1.$$

4. Ако a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$, тогаш $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од $a+b+c=1$ следува

$$\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a},\ \frac{1}{b}=1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\ \text{ и }\ \frac{1}{c}=1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Собирајќи ги овие равенства и користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\geq 3+2+2+2=9.$$

Да забележиме дека знак за равенството важи ако и само ако $\frac{a}{b}=\frac{b}{a},\frac{b}{c}=\frac{c}{b},\frac{c}{a}=\frac{a}{c}$, па како броевите a,b,c се позитивни и $a+b+c=1$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Втор начин. За позитивните реални броеви a,b,c од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$$

и како $a+b+c=1$ добиваме $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

5. Докажи дека за произволни десет позитивни реални броеви, производот од нивниот збир и збирот на нивните реципрочни вредности не е помал од 100.

Решение. Нека $x_1,x_2,...,x_{10}$ се кои било позитивни реални броеви, тогаш од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина добиваме

$$(x_1+x_2+...+x_{10})(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_{10}})\geq 10\cdot 10=100$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=...=x_{10}$.

6. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2})(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2})(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2})\geq 1\,. \qquad (1)$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата:

$$\frac{(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)}{8(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 1$$

$$(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)\geq 8(a+b)(b+c)(c+a)\,. \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$(a+b)+(a+c)\geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$$

$$(b+c)+(b+a)\geq 2\sqrt{(b+c)(b+a)}$$

$$(c+a)+(c+b)\geq 2\sqrt{(c+a)(c+b)}$$

Со множење на последните три неравенства се добива неравенството (2), што значи дека е точно неравенството (1).

7. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрискста средина следува дека за $x,y\in\mathbb{R}^+$ важи $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, при што равенството се достигнува за $x=y$.

Да ставиме $S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{a}$. Тогаш

$$3S=\frac{3a}{b+c+d}+9\frac{b+c+d}{3a}=(\frac{3a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{3a})+\frac{8}{3}\frac{b+c+d}{a}\geq 2+\frac{8}{3}\frac{b+c+d}{a}\,.$$

Сега за изразот $3A$ добиваме

$$\begin{aligned}3A&=(\frac{3a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{3a})+(\frac{3b}{a+c+d}+\frac{a+c+d}{3b})+(\frac{3c}{a+b+d}+\frac{a+b+d}{3c})+(\frac{d}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{d})+\\&\quad+\frac{8}{3}(\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d})\\&\geq 2+2+2+2+\frac{8}{3}[(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{a}{d}+\frac{d}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{b}{d}+\frac{d}{b})+(\frac{c}{d}+\frac{d}{a})]\\&\geq 8+\frac{8}{3}(2+2+2+2+2+2)=40\end{aligned}$$

па затоа $A\geq\frac{40}{3}$. Јасно, најмалата вредност се добива за $A_{\min}=\frac{40}{3}$ и таа се достигнува за $a=b=c=d$.

8. Нека a,b и c се реални броеви различни од нула. За нив точно е неравенството

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 3\,.$$

Равенство важи ако и само ако $|a|=|b|=|c|$. Докажи!

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{c^2}\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt[3]{1}=1\,,$$

т.е.

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 3.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{a^2}=1,$$

од каде наоѓаме ако и само ако $|a|=|b|=|c|$.

9. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xy+yz+zx=3xyz$. Докажи, дека

$$x^2y+y^2z+z^2x\geq 2(x+y+z)-3.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Равенството од условот е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу средините следува $x^2y+\frac{1}{y}\geq 2x$ и аналогно добиваме $y^2z+\frac{1}{z}\geq 2y$ и $z^2x+\frac{1}{x}\geq 2x$. Ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме равенството (1) го добиваме бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $x^2y=\frac{1}{y}$, $y^2z=\frac{1}{z}$ и $z^2x=\frac{1}{x}$, од каде лесно следува $x=y=z=1$.

10. Докажи дека за ненегативните реални броеви a, b и c важи неравенството

$$(a+1)(b+1)(c+1)\geq 8\sqrt{abc}.$$

Решеие. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$a+1\geq\sqrt{2a}, b+1\geq\sqrt{2b}, c+1\geq\sqrt{2c},$$

и со множење на трите неравенства се добива бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

11. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0.$$

Решение. Неравенството е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-a^3b^2c-b^3c^2a-c^3a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу средините следува

$$a^3b^3+a^3b^3+a^3c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^3b^3\cdot a^3c^3}=3a^3b^2c.$$

Конечно, ако ги собереме аналогните циклични неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

12. Ако a и b се позитивни реални броеви, докажи го неравенството

$$2(a^{2b}b^{2a})^{\frac{1}{a+b}} \le a^2+b^2$$

Решение. Нека $a \ge b$. Тогаш

$$a^2+b^2 \ge 2ab = 2(a^{a+b}b^{a+b})^{\frac{1}{a+b}} = 2(a^{2b}b^{2a}(\tfrac{a}{b})^{a-b})^{\frac{1}{a+b}} \ge 2(a^{2b}b^{2a})^{\frac{1}{a+b}},$$

при што е искористено очигледното неравенство $(\frac{a}{b})^{a-b} \ge 1$.

13. Нека $A=\frac{a+b}{2}$ и $B=\sqrt{ab};\ a>b>0.$ Докажи дека важи неравенството

$$B < \frac{(a-b)^2}{8(A-B)} < A.$$

Решение. Имаме

$$\frac{(a-b)^2}{8(A-B)} = \frac{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2} = \frac{A+B}{2}. \qquad (1)$$

Заради $B<\frac{A+B}{2}<A$ од равенството (1) се добива бараното неравенство.

14. Ако a и b се позитивни реални броеви, докажи го неравенството

$$a^3+b^3+2 \ge 2ab+a+b.$$

Решение. Неравенството $(a-1)^2 \ge 0$ е еквивалентно со $a^2-a+1 \ge a$. Ако последното неравенство го помножиме со $a+1,\ (a+1>0)$ добиваме $a^3+1 \ge a^2+a$. Аналогно се добива $b^3+1 \ge b^2+b$. Со собирање на овие две неравенства и од неравенството меѓу аритметичката и геометриска средина, се добива:

$$a^3+b^3+2 \ge a^2+a+b^2+b \ge 2ab+a+b.$$

15. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \le \frac{1}{2}.$$

Решение. Да забележиме дека

$$a^2+b^2 \ge 2ab \quad \Rightarrow \quad 1+a^2+(b+1)^2 = 2+2b+a^2+b^2 \ge 2+2b+2ab = 2(1+b+ab)$$

$$b^2+c^2 \ge 2bc \quad \Rightarrow \quad 1+b^2+(c+1)^2 = 2+2c+b^2+c^2 \ge 2+2c+2bc = 2(1+c+bc)$$

$$c^2+a^2 \ge 2ac \quad \Rightarrow \quad 1+c^2+(a+1)^2 = 2+2a+a^2+c^2 \ge 2+2a+2ac = 2(1+a+ac).$$

Сега

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+b+ab}+\frac{1}{1+c+bc}+\frac{1}{1+a+ac}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+b+ab}+\frac{ab}{1+b+ab}+\frac{b}{1+b+ab}\right) = \frac{1}{2}$$

16. Нека a и b се реални броеви такви што $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$. Докажи, дека

$$1+a+b \ge 3\sqrt{ab}$$

Решение. *Прв начин.* Заради условот на задачата добиваме

$$1+a+b \ge 3\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2+b^2+1+2a+2b+2ab \ge 9ab$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(1-ab)+2[a(1-b)+b(1-a)] \ge 0.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=1$.

Втор начин. Бидејќи за $0\le a,b\le 1$ важи

$$a^2b^2(1-ab)\ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2\ge a^3b^3,$$

па затоа

$$a^2b^2\ge a^3b^3 \Leftrightarrow \sqrt[6]{a^2b^2}\ge \sqrt[6]{a^3b^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{ab}\ge \sqrt{ab}.$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$1+a+b\ge 3\sqrt[3]{ab}\ge 3\sqrt{ab}.$$

17. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a})\le 1.$$

Решение. Од $abc=1$ следува дека $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ за некои $x,y,z>0$. Даденото неравенство се сведува на неравенството

$$\frac{x-y+z}{y}\cdot\frac{y-z+x}{z}\cdot\frac{z-x+y}{x}\le 1. \qquad (1)$$

Ги воведуваме ознаките $p=z-x+y, q=x-y+z, r=y-z+x$ и неравенството (1) го запишуваме во обликот

$$8pqr\le (p+q)(q+r)(r+p). \qquad (2)$$

Меѓу броевите p,q,r најмногу еден е негативен. На пример, ако $p<0$, тогаш левата страна на (2) е негативна, а десната страна е позитивна. Ако $p,q,r\ge 0$, тогаш неравенството (2) се добива со множење на неравенствата

$$p+q\ge 2\sqrt{pq},\ q+r\ge 2\sqrt{qr} \text{ и } r+p\ge 2\sqrt{rp}.$$

18. Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $x^2+y^2+z^2=1$. Докажи, дека

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge\sqrt{3}.$$

Решение. Јасно, $S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge 0$. Сега,

$$S^2=(\tfrac{xy}{z}+\tfrac{yz}{x}+\tfrac{zx}{y})^2=(\tfrac{xy}{z})^2+(\tfrac{yz}{x})^2+(\tfrac{zx}{y})^2+2\tfrac{xy}{z}\tfrac{yz}{x}+2\tfrac{yz}{x}\tfrac{zx}{y}+2\tfrac{xy}{z}\tfrac{zx}{y}$$
$$=(\tfrac{xy}{z})^2+(\tfrac{yz}{x})^2+(\tfrac{zx}{y})^2+2(x^2+y^2+z^2).$$

Од друга страна од неравенството $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, добиваме

$$(\tfrac{xy}{z})^2+(\tfrac{yz}{x})^2+(\tfrac{zx}{y})^2\ge \tfrac{xy}{z}\tfrac{yz}{x}+\tfrac{yz}{x}\tfrac{zx}{y}+\tfrac{xy}{z}\tfrac{zx}{y}=x^2+y^2+z^2,$$

па според тоа

$$S^2\ge 3(x^2+y^2+z^2)=3, \text{ т.е. } S\ge\sqrt{3}.$$

Равенство се достигнува ако и само ако $\frac{xy}{z}=\frac{yz}{x}=\frac{zx}{y}$, т.е. $x^2=y^2=z^2$. Бидејќи x, y и z се позитивни броеви, равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

19. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x^3+y^3+z^3=1$. Докажи, дека

$$x^2+y^2+z^2 > x^5+y^5+z^5+3x^2y^2z^2(x+y+z).$$

Решение. Од условот на задачата следува $0<xy<1$, па затоа $0<xyz^2<z^2$ и аналогно $0<yzx^2<x^2$ и $0<zxy^2<y^2$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &= (x^2+y^2+z^2)\cdot 1=(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)\\
&= x^5+y^5+z^5+x^2y^3+x^2y^3+y^2z^3+y^2x^3+z^2x^3+z^2y^3\\
&= x^5+y^5+z^5+x^3(y^2+z^2)+y^3(z^2+x^2)+z^3(x^2+y^2)\\
&= x^5+y^5+z^5+x^3\cdot 2yz+y^3\cdot 2zx+z^3\cdot 2xy\\
&= x^5+y^5+z^5+2xyz(x^2+y^2+z^2)\\
&> x^5+y^5+z^5+2xyz\cdot xyz(x+y+z)\\
&= x^5+y^5+z^5+2x^2y^2z^2(x+y+z).
\end{aligned}$$

20. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$. Докажи, дека

$$\frac{1-a^2+c^2}{c(a+2b)}+\frac{1-b^2+a^2}{a(b+2c)}+\frac{1-c^2+b^2}{b(c+2a)}\ge 6.$$

Решение. Ако го искористиме условот $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ac+2bc}+\frac{b^2+2c^2+3a^2}{ab+2ac}+\frac{c^2+2a^2+3b^2}{bc+2ab}\ge 6. \qquad (1)$$

Понатаму, важи

$$a^2+2b^2+3c^2=(a^2+c^2)+2(b^2+c^2)\ge 2ac+4bc=2(ac+2bc),$$

па затоа $\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ac+2bc}\ge 2$. Аналогно се добива $\frac{b^2+2c^2+3a^2}{ab+2ac}\ge 2$ и $\frac{c^2+2a^2+3b^2}{bc+2ab}\ge 2$. Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1) кое е еквивалентно со бараното неравенство.

21. За броевите a, b и c важи $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}$. Докажи дека

$$\frac{1-a^2+c^2}{3ac+2cb+b^2}+\frac{1-b^2+a^2}{3ab+2ac+c^2}+\frac{1-c^2+b^2}{3bc+2ab+a^2}\ge 6$$

Решение. Од равенството $4a^2+4b^2+4c^2=1$, и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина во првиот собирок од левата страна на даденото неравенство имаме

$$\frac{1-a^2+c^2}{3ac+2cb+b^2}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2-a^2+c^2}{3ac+2cb+b^2}=\frac{3a^2+4b^2+5c^2}{3ac+2cb+b^2}=$$

$$=\frac{3(a^2+c^2)+2(c^2+b^2)+2b^2}{3ac+2cb+b^2}\ge\frac{3\cdot 2ac+2\cdot 2cb+2b^2}{3ac+2cb+b^2}=2$$

Аналогно се покажува дека и другите два собирока од левата страна на нераenсвнтвото се поголеми од 2, што значи дека збирот е поголем од 6, што требаше и да се докаже.

22. Нека a,b,c се позитивни реални броеви, за кои е исполнето неравенството $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \le 4$. Докажи дека

$$\tfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\tfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\tfrac{ca+1}{(c+a)^2} \ge 3.$$

Решение. Даденото неравенство во условот е еквивалентно на неравенството $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \le 2$. Ќе докажеме дека

$$\tfrac{2ab+2}{(a+b)^2}+\tfrac{2bc+2}{(b+c)^2}+\tfrac{2ca+2}{(c+a)^2} \ge 6. \qquad (1)$$

Имаме

$$\tfrac{2ab+2}{(a+b)^2} \ge \tfrac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2} = 1+\tfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}.$$

Ако го собереме последното неравенство со соодветните неравенства за другите два собирци на левата страна во (1) добиваме

$$\tfrac{2ab+2}{(a+b)^2}+\tfrac{2bc+2}{(b+c)^2}+\tfrac{2ca+2}{(c+a)^2} \ge 3+\tfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\tfrac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\tfrac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}.$$

Според тоа, треба да докажеме дека

$$\tfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\tfrac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\tfrac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2} \ge 3.$$

Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина.

23. Дадени се реалните броеви $a,b,c,d,e,f \ge 0$ за кои важи $a+b \le e$ и $c+d \le f$. Докажи дека $\sqrt{ac}+\sqrt{bd} \le \sqrt{ef}$.

Решение. Од условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}\sqrt{ac}+\sqrt{bd} &= \sqrt{(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2} = \sqrt{ac+2\sqrt{acbd}+bd} = \sqrt{ac+2\sqrt{(ad)(bc)}+bd}\\ &\le \sqrt{ac+ad+bc+bd} = \sqrt{(a+b)(c+d)} \le \sqrt{ef}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи при $a+b=e$, $c+d=f$ и $ad=bc$.

24. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c \ge abc$. Докажи, дека $a^2+b^2+c^2 > abc\sqrt{3}$.

Решение. Прво од неравенстото меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge \tfrac{1}{9}(a+b+c)^4 \ge 3(\tfrac{a+b+c}{3})^3(a+b+c) \ge 3abc(a+b+c) \ge 9(abc)^2,$$

т.е. $a^2+b^2+c^2 \ge 3abc > abc\sqrt{3}$.

25. Докажи, дека за ненегативните реални броеви a, b и c важи неравенството

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (\sqrt[3]{abc}+1)^3$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)(c+1) &= abc+ab+ac+bc+a+b+c+1 \\ &= abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c)+1 \\ &\geq abc+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+3\sqrt[3]{abc}+1^3 = (\sqrt[3]{abc}+1)^3\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

26. Нека се $a,b,c>0$. Докажи дека важи неравенството

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}) \geq 3(1+\sqrt[3]{\tfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}) .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}) &= 3+\tfrac{a+b}{c}+\tfrac{b+c}{a}+\tfrac{c+a}{b} \geq 3+3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{a+b}{c}\cdot\tfrac{b+c}{a}\cdot\tfrac{c+a}{b}} \\ &= 3(1+\sqrt[3]{\tfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

27. Ако x,y,z се позитивни реални броеви, тогаш

$$x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z} \geq 4 .$$

Докажи!

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z} &= x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{2y}+\frac{z^2}{2y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z} \\ &\geq 8\cdot\sqrt[8]{x\cdot\frac{y^2}{4x}\cdot(\frac{z^2}{2y})^2(\frac{1}{2z})^4} = 8\cdot\frac{1}{2}=4\end{aligned}.$$

28. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што нивниот производ е еднаков на 1. Докажи дека $(2+x)(2+y)(2+z)\geq 27$.

Решение. Од условот на задачата имаме $xyz=1$. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\begin{aligned}2+x &= 1+1+x \geq 3\sqrt[3]{1\cdot1\cdot x} = 3\sqrt[3]{x} ,\\ 2+y &= 1+1+y \geq 3\sqrt[3]{1\cdot1\cdot y} = 3\sqrt[3]{y} ,\\ 2+z &= 1+1+z \geq 3\sqrt[3]{1\cdot1\cdot z} = 3\sqrt[3]{z} .\end{aligned}$$

Ако ги помножиме последните три неравенства

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geq 3^3\cdot\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x} = 27\sqrt[3]{xyz} = 27\cdot\sqrt[3]{1} = 27 ,$$

што и требаше да се докаже.

29. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи, дека

$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3} \geq 3(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}) .$$

Решение. Од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина имаме $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^3y^3z^3}}=3$, па затоа со повторна примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3}=x^3+y^3+z^3+2(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3})\geq x^3+y^3+z^3+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+3$$

$$=(x^3+\frac{1}{y^3}+1)+(y^3+\frac{1}{z^3}+1)+(z^3+\frac{1}{x^3}+1)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}}+3\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3}}+3\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3}}=3(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}).$$

30. Определи ги сите позитивни реални броеви a,b,c,d за кои важи:

1) $16abcd=(a^2+b^2+c^2+d^2)(abc+abd+acd+bcd)$; и

2) $2ab+2cd+ac+ad+bc+bd=8$.

Решение. Од условот 1) и неравенствата меѓу средините имаме :

$$1=\frac{16abcd}{(a^2+b^2+c^2+d^2)(abc+abd+acd+bcd)}=\frac{1}{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

$$\leq\frac{1}{(\frac{a+b+c+d}{4})^2}\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{4}{a+b+c+d}.$$

од каде добиваме $a+b+c+d\leq 4$. Притоа равенство очигледно важи само кога $a=b=c=d=1$

Од условот 2) имаме:

$$16=4ab+4cd+2ac+2ad+2bc+2bd$$

$$=2ab+2cd+2ab+2cd+2ac+2ad+2bc+2bd$$

$$\leq a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd+2ac+2ad+2bc+2bd$$

$$=(a+b+c+d)^2$$

од каде $a+b+c+d\geq 4$. Затоа мора да цажи $a+b+c+d=4$, што значи дека $a=b=c=d=1$.

31. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ се такви што, $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Докажи го неравенството

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3+24$$

$$=a^3+b^3+c^3+\underbrace{3+...+3}_{8}\geq 9\sqrt[9]{(a^3+b^3+c^3)3^8}$$

Според тоа,

$$(\frac{a+b+c}{3})^3\geq\sqrt[9]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}},\text{ т.е. }\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

32. Ако $x+y+z=3$ и $x,y,z\geq 0$, докажи дека $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x^2+2\sqrt{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}\sqrt{x}}=3x,\ y^2+2\sqrt{y}\geq 3y \text{ и } z^2+2\sqrt{z}\geq 3z.$$

Сега од последните три неравенства и равенството $x+y+z=3$ добиваме

$$\begin{aligned}2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{z}&=x^2+2\sqrt{x}+y^2+2\sqrt{y}+z^2+2\sqrt{z}-x^2-y^2-z^2\\&\geq 3x+3y+3z-x^2-y^2-z^2\\&=x(3-x)+y(3-y)+z(3-z)\\&=2xy+2yz+2zx\end{aligned}$$

т.е. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx$.

33. Нека $a,b,c\geq 0$. Докажи дека важи:

а) $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3$;

б) $9(a^3+b^3+c^3)\geq(a+b+c)^3$.

Решение. а) Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3\cdot a\cdot a\cdot b+3\cdot a\cdot b\cdot b\\&\leq a^3+b^3+a^3+a^3+b^3+a^3+b^3+b^3=4(a^3+b^3).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

б) Слично како под а) добиваме

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc\\&\leq a^3+b^3+2a^3+b^3+2a^3+c^3+a^3+2b^3+2b^3+\\&\quad+c^3+a^3+2c^3+b^3+2b^3+2a^3+2b^3+2c^3=\\&=9(a^3+b^3+c^3).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

34. Нека $x,y\in\mathbb{R}$ се такви што $y\geq 0$ и $y(y+1)\leq(x+1)^2$. Тогаш важи

$$(y-1)y\leq x^2.$$

Докажи!

Решение. Ако $y\leq 1$, тогаш $(y-1)y\leq 0\leq x^2$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Нека $y>1$. За секој $x\in\mathbb{R}$ важи $|x+1|\leq|x|+1$. Од $y(y+1)\leq(x+1)^2$ добиваме

$$y(y+1)\leq(x+1)^2=|x+1|^2\leq(|x|+1)^2.$$

Од друга страна, користејќи дека $\frac{y+(y-1)}{2}\geq\sqrt{y(y-1)}$, имаме

$$\begin{aligned}(\sqrt{(y-1)y}+1)^2&=(y-1)y+1+2\sqrt{(y-1)y}\leq(y-1)y+1+y-1+y\\&=y^2+y=y(y+1)\leq(|x|+1)^2.\end{aligned}$$

Оттука следува $\sqrt{y(y-1)} \le |x|$, т.е. $y(y-1) \le x^2$.

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = 0$.

35. Докажи дека за произволни $a, b \ge 0$ важи

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2 + \tfrac{1}{4}(a+b) \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\,.$$

Решение. *Прв начин.* Ќе докажеме дека важи $x + y + \frac{1}{2} \ge \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Навистина

$$\begin{aligned} & x + y + \tfrac{1}{2} \ge \sqrt{x} + \sqrt{y} && \Leftrightarrow \\ & 2x + 2y + 1 \ge 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} && \Leftrightarrow \\ & 4x^2 + 4y^2 + 1 + 8xy + 4x + 4y \ge 4x + 8\sqrt{xy} + 4y && \Leftrightarrow \\ & 4x^2 + 4y^2 + 1 + 8xy \ge 8\sqrt{xy}. && \end{aligned}$$

Последново неравенство е точно бидејќи

$$4x^2 + 4y^2 + 1 + 8xy \ge 8xy + 1 + 8xy = 16xy + 1 \ge 8\sqrt{xy}\,.$$

Да забележиме дека знак равенство важи ако и само ако $x = y$ и $4\sqrt{xy} = 1$ односно ако и само ако $x = y = \frac{1}{4}$. Сега, ако ги искористиме претходните неравенства имаме:

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2 + \tfrac{1}{4}(a+b) = \tfrac{1}{2}(a+b)(a+b+\tfrac{1}{2}) \ge \sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

Притоа равенство важи ако и само ако $a = b = \frac{1}{4}$.

Втор начин. Од $(\sqrt{a} - \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{b} - \frac{1}{2})^2 \ge 0$ следува $a + b + \frac{1}{2} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Од последното неравенство и неравенството $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, добиваме дека

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2 + \tfrac{1}{4}(a+b) = \tfrac{a+b}{2}(a+b+\tfrac{1}{2}) \ge \sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\,.$$

36. Нека a, b, c се реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи го неравенството

$$\tfrac{1}{a+b} + \tfrac{1}{b+c} + \tfrac{1}{c+a} \le \tfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот на задачата, нееравеството меѓу аритметичката и геометриската средина и познатото неравенство $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$, последователно добиваме

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{a+b} + \tfrac{1}{b+c} + \tfrac{1}{c+a} &= \tfrac{c}{ac+bc} + \tfrac{a}{ab+ac} + \tfrac{b}{bc+ab} = \tfrac{c\cdot abc}{ac+bc} + \tfrac{a\cdot abc}{ab+ac} + \tfrac{b\cdot abc}{bc+ab} \\ &= \tfrac{ac\cdot bc}{ac+bc} + \tfrac{ab\cdot ac}{ab+ac} + \tfrac{bc\cdot ab}{bc+ab} \le \tfrac{ac+bc}{4} + \tfrac{ab+ac}{4} + \tfrac{ab+bc}{4} \\ &= \tfrac{ab+bc+ca}{2} \le \tfrac{a^2+b^2+c^2}{2}. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = 1$.

37. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1.$$

Решение. За секој позитивен реален број x е исполнето $x^2+1\geq 2x$. Според тоа, $x^2+2\geq 2x+1$ од каде добиваме $\frac{x}{x^2+2}\leq\frac{x}{2x+1}$. Според тоа,

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{a}}+\frac{1}{2+\frac{1}{b}}+\frac{1}{2+\frac{1}{c}}=R.$$

Сега $R\leq 1$ е еквивалентно со

$$(2+\tfrac{1}{a})(2+\tfrac{1}{b})+(2+\tfrac{1}{b})(2+\tfrac{1}{c})+(2+\tfrac{1}{c})(2+\tfrac{1}{a})\leq(2+\tfrac{1}{a})(2+\tfrac{1}{b})(2+\tfrac{1}{c}).$$

Последното неравенството е еквивалентно со неравенството

$$3\leq\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}. \qquad (1)$$

Но, $abc=1$ па точноста на (1) следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^2}}=3.$$

38. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\tfrac{a}{b+c}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{b}{a+c}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{c}{a+b}+\tfrac{1}{2})\geq 1.$$

Решение. Бидејќи a,b и c се позитивни реални броеви, даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{2a+b+c}{2(b+c)}\cdot\frac{2b+a+c}{2(a+c)}\cdot\frac{2c+a+b}{2(a+b)}\geq 1$$

$$(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)\geq 8(a+b)(b+c)(c+a).$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, имаме

$$2a+b+c=(a+b)+(a+c)\geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}>0$$

$$2b+a+c=(a+b)+(b+c)\geq 2\sqrt{(a+b)(b+c)}>0$$

$$2c+a+b=(a+c)+(b+c)\geq 2\sqrt{(a+c)(b+c)}>0$$

и ако ги помножиме последние три неравенства, добиваме

$$(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)\geq 8\sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}=8(a+b)(b+c)(c+a).$$

39. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3(a+b+c).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}a^2b^2+b^2c^2&\geq 2ab^2c\\ b^2c^2+c^2a^2&\geq 2abc^2\\ c^2a^2+a^2b^2&\geq 2a^2bc.\end{aligned} \qquad (1)$$

Ако ги собереме последните равенства, добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)\ .$$

Во последното равенство на двете страни додаваме $2abc(a+b+c)$ и добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\geq 3abc(a+b+c)$$

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c).$$

Според тоа, ако го искористиме условот $ab+bc+ca=1$, од последното равенство добиваме

$$ab+bc+ca=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$$

$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\geq 3(a+b+c).$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во равенствата (1) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $ab=bc=ca$, што значи ако и само ако $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

40. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи, дека важи неравенството

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1\ .$$

Решение. Јасно, $1+b-c=a+2b>0$, а слично и $1+c-a>0$ и $1+a-b>0$.

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\tfrac{1+1+(1+b-c)}{3}\geq\sqrt[3]{1+b-c}$$

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\leq a\tfrac{3+b-c}{3}=a+\tfrac{ab-ac}{3}.$$

Аналогно добиваме

$$b\sqrt[3]{1+c-a}\leq b+\tfrac{bc-ba}{3},\qquad c\sqrt[3]{1+a-b}\leq c+\tfrac{ca-cb}{3}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме условот $a+b+c=1$, го добиваме бараното неравенство.

41. Ако a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$, докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}\ .$$

Решение. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите $\frac{1}{2}$ и $b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}$, добиваме дека $2\sqrt{\frac{1}{2}(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})}\leq 1+b+\frac{1}{a}$, или

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}\qquad(1)$$

аналогно:

$$\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}\qquad(2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}\qquad(3)$$

Ако ги собереме неравенствата (1), (2) и (3), и ако го искористиме идентитетот

$$\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}=\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}+\frac{1}{1+a+ab}=1$$

добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}\left(\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}\right)=\sqrt{2}\,.$$

42. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\,.$$

Решение. Ако во познатото неравенство

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)\,,$$

земеме $x=a^2b, y=b^2c, z=c^2a$ добиваме

$$(a^2b+b^2c+c^2a)^2\geq 3(a^2b\cdot b^2c+b^2c\cdot c^2a+c^2a\cdot a^2b)$$
$$=3abc(b^2a+c^2b+a^2c)=3(b^2a+c^2b+a^2c).$$

Понатаму, од од условот $abc=1$ и неравенството меѓу аритметичката и геометрискcата средина следува

$$(a^2b+b^2c+c^2a)^2=(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2b+b^2c+c^2a)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\,(a^2b+b^2c+c^2a)=3(a^2b+b^2c+c^2a)$$

и

$$(a^2b+b^2c+c^2a)^2=(a^2b+b^2c+c^2a)\cdot(a^2b+b^2c+c^2a)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\,3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=9abc.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства последователно добиваме

$$3(a^2b+b^2c+c^2a)^2\geq 3(b^2a+c^2b+a^2c)+3(a^2b+b^2c+c^2a)+9abc$$
$$=3(a^2b+b^2c+c^2a+b^2a+c^2b+a^2c+3abc)$$
$$=3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

односно

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\,.$$

43. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=abc$. Докажи, дека

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1)\geq 54\sqrt{3}\,.$$

Решение. Од условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$abc=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\,,\text{ т.е. } abc\geq 3\sqrt{3}\,. \qquad (1)$$

Според тоа, ако прво го искористиме условот на задачата, потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и неравенството (1) последователно добиваме

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1)=abc(a^4+b^4+c^4)-a^5-b^5-c^5$$
$$=(a+b+c)(a^4+b^4+c^4)-a^5-b^5-c^5$$

$$\begin{aligned}&= ab^4 + ac^4 + bc^4 + ba^4 + ca^4 + cb^4\\ &\geq 6\sqrt[6]{ab^4 \cdot ac^4 \cdot bc^4 \cdot ba^4 \cdot ca^4 \cdot cb^4} = 6\sqrt[6]{a^{10}b^{10}c^{10}}\\ &\geq 6\sqrt[6]{(abc)^{10}} \geq 6\sqrt[6]{(3\sqrt{3})^{10}} = 54\sqrt{3}.\end{aligned}$$

44. Нека a и b се ненегативни броеви за кои важи $a^2 + b^2 = 4$. Докажи дека важи неравенството

$$\tfrac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1 \ . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Оттука и од условот $a^2 + b^2 = 4$, следува дека $ab \leq 2$, т.е. $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$, односно $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2}$, т.е.

$$\tfrac{1}{\sqrt{ab}} \geq \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ . \qquad (2)$$

Од исти причини, имаме дека

$$\tfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (3)$$

Тогаш од (2) и (3) добиваме:

$$\tfrac{a+b+2}{ab} \geq \tfrac{2\sqrt{ab}+2}{ab} = 2(\tfrac{1}{\sqrt{ab}} + \tfrac{1}{ab}) \geq 2(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}) = \sqrt{2} + 1$$

Претходно зедовме дека $ab \neq 0$, бидејќи за $a = 0$ или $b = 0$ даденото неравенство е очигледно точно.

Од последното неравенство $\frac{a+b+2}{ab} \geq \sqrt{2} + 1$ следува дека $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$ што и требаше да се покаже. Во (1) важи равенство ако и само ако $a = b = \sqrt{2}$.

Втор начин. Од неравенството (3) следува дека $a + b + 2 \geq 2\sqrt{ab} + 2$, односно $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}+2}$. Ставајќи смена $\sqrt{ab} = t$, имаме: $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{t^2}{2t+2}$. Притоа, заради неравенството $a^2 + b^2 \geq 2ab$ имаме дека важи $0 \leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$, односно $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Сега, доволно е да се покаже дека важи неравенството $\frac{t^2}{2t+2} \leq \sqrt{2} - 1$. Од последното неравенство добиваме: $t^2 \leq (\sqrt{2} - 1)(2t + 2)$, па затоа

$$t^2 - 2(\sqrt{2} - 1)t - 2(\sqrt{2} - 1) \leq 0 \text{ , т.е. } (t - \sqrt{2})(t - \sqrt{2} + 2) \leq 0 \ .$$

Последното неравенство важи заради условот $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Следствено, важи неравенството (1). Во (1) важи равенство ако и само ако $t = \sqrt{2}$, т.е. $ab = 2$. Заради условот $a^2 + b^2 = 4$, т.е. $(a - b)^2 + 2ab = 4$, следува дека $a = b = \sqrt{2}$.

Трет начин. Заради условот $4 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, т.е. $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$ добиваме дека

$$\begin{aligned}\tfrac{ab}{a+b+2} &= \sqrt{ab} \cdot \tfrac{\sqrt{ab}}{a+b+2} = \sqrt{ab}(\tfrac{a+b+2}{\sqrt{ab}})^{-1}\\ &= \sqrt{ab}(\tfrac{a}{\sqrt{ab}} + \tfrac{b}{\sqrt{ab}} + \tfrac{2}{\sqrt{ab}})^{-1} \qquad (4)\\ &= \sqrt{ab}(\sqrt{\tfrac{a}{b}} + \sqrt{\tfrac{b}{a}} + \tfrac{2}{\sqrt{ab}})^{-1}.\end{aligned}$$

(претпоставуваме дека $ab>0$, зашто за $a=0$ или $b=0$ даденото неравенство е очигледно точно). Понатаму, имаме $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geq 2$, па од ова неравенство и неравенството $\sqrt{ab}\leq\sqrt{2}$ добиваме $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\geq 2+\frac{2}{\sqrt{2}}$, односно

$$(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{2}{\sqrt{ab}})^{-1}\leq(2+\frac{2}{\sqrt{2}})^{-1}.$$

Одовде, од (4) и од неравенството $\sqrt{ab}\leq\sqrt{2}$ добиваме дека

$$\frac{ab}{a+b+2}\leq\sqrt{2}(2+\frac{2}{\sqrt{2}})^{-1}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}-1.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=2$ и $\sqrt{ab}=\sqrt{2}$, т.е. $a=b=\sqrt{2}$.

45. Докажи, дека за секои реални броеви x,y и z важи

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geq 0.$$

Решение. Ако на двете страни на даденото неравенство додадеме 3 добиваме дека тоа е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}+\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}+\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 3.$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}+\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}+\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 1. \qquad (1)$$

Повторно од неравеството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x^2+y^2+1=x^2+\frac{1}{2}+y^2+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})(y^2+\frac{1}{2})}=\sqrt{(2x^2+1)(2y^2+1)}$$

$$y^2+z^2+1=y^2+\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{(y^2+\frac{1}{2})(z^2+\frac{1}{2})}=\sqrt{(2y^2+1)(2z^2+1)}$$

$$z^2+x^2+1=z^2+\frac{1}{2}+x^2+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{(z^2+\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2})}=\sqrt{(2z^2+1)(2x^2+1)}.$$

Конечно, ако ги помноижиме последните три неравенства добиваме неравенство кое е еквивалентно со неравенството (1).

46. Нека $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ се ненегативни реални броеви и $c_k=\prod_{i=1}^{k}b_i^{\frac{1}{k}}, 1\leq k\leq n$. Докажи, дека

$$nc_n+\sum_{k=1}^{n}k(a_k-1)c_k\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^k b_k.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека за секој $k=2,3,...,n$ важи

$$ka_kc_k = ka_kb_k^{\frac{1}{k}}\underbrace{c_{k-1}^{\frac{1}{k}}...c_{k-1}^{\frac{1}{k}}}_{k-1 \text{ пати}} \le a_k^kb_k + (k-1)c_{k-1}.$$

Ако ги собереме овие неравенства и на добиеното неравенство од двете страни додадеме $a_1c_1 = a_1b_1$ го добиваме саканото неравенство.

47. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$2^{n-1}n! \le n^n. \tag{1}$$

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}(n-1)! &= \sqrt{(n-1)!}\cdot\sqrt{(n-1)!} = \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\cdot\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\\ &= \sqrt{1\cdot(n-1)}\cdot\sqrt{2\cdot(n-2)}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(n-2)\cdot 2}\cdot\sqrt{(n-1)\cdot 1}\\ &\le \tfrac{1+(n-1)}{2}\cdot\tfrac{2+(n-2)}{2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{(n-2)+2}{2}\cdot\tfrac{(n-1)+1}{2} = \tfrac{n^{n-1}}{2^{n-1}},\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството $2^{n-1}(n-1)! \le n^{n-1}$. Последното неравенство го множиме со n и го добиваме неравенството (1).

48. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што $abcd = 1$. Докажи, дека важи неравенството

$$\tfrac{1}{bc+cd+da-1} + \tfrac{1}{ab+cd+da-1} + \tfrac{1}{ab+bc+da-1} + \tfrac{1}{ab+bc+cd-1} \le 2.$$

Решение. Со множење на $1+bc+cd+da$ и $1+ab$ добиваме

$$\begin{aligned}(1+bc+cd+da)(1+ab) &= 1+bc+cd+da+ab+ab^2c+abcd+a^2bd\\ &= 2+ab+bc+cd+da+\tfrac{b}{d}+\tfrac{a}{c}\end{aligned}$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви $\frac{b}{d}$ и $\frac{a}{c}$, како и од $abcd = 1$ добиваме, $\frac{b}{d}+\frac{a}{c} \ge 2\sqrt{\frac{ab}{cd}} = 2ab$, па затоа важи неравенството

$$(1+bc+cd+da)(1+ab) \ge 2+2ab+ab+bc+cd+da,$$

т.е.

$$1+bc+cd+da \ge 2+\tfrac{ab+bc+cd+da}{1+ab}$$

или

$$\tfrac{1+ab}{ab+bc+cd+da} \ge \tfrac{1}{bc+cd+da-1} \tag{1}$$

Аналогно се добива

$$\tfrac{1+bc}{ab+bc+cd+da} \ge \tfrac{1}{ab+cd+da-1} \tag{2}$$

$$\tfrac{1+cd}{ab+bc+cd+da} \ge \tfrac{1}{ab+bc+da-1} \tag{3}$$

$$\tfrac{1+da}{ab+bc+cd+da} \ge \tfrac{1}{ab+bc+cd-1} \tag{4}$$

Со собирање на (1), (2), (3) и (4) се добива неравенството

$$\tfrac{4+ab+bc+cd+da}{ab+bc+cd+da} \ge \tfrac{1}{bc+cd+da-1} + \tfrac{1}{ab+cd+da-1} + \tfrac{1}{ab+bc+da-1} + \tfrac{1}{ab+bc+cd-1}$$

Бидејќи $ab+bc+cd+da \ge 4\sqrt[4]{(abcd)^2} = 4$ следува

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}\leq 1+\frac{4}{ab+bc+cd+da}\leq 2$$

што требаше да се докаже.

49. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\leq a+b+c\ .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина добиваме

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\leq\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c$$

50. Докажи, дека за позитивните рални броеви a,b,c такви што $a+b+c\leq 3$ важи

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\geq 2\ .$$

Решение. Имаме

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)\leq a+b+c+3\leq 6$$

и од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{9}{(a+1)+(b+1)+(c+1)}\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\ .$$

Сега, повотрно од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и од горните неравенства добиваме

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\geq\frac{9}{\frac{a(a+2)}{a+1}+\frac{b(b+2)}{b+1}+\frac{c(c+2)}{c+1}}=\frac{9}{\frac{(a+1)^2-1}{a+1}+\frac{(b+1)^2-1}{b+1}+\frac{(c+1)^2-1}{c+1}}$$

$$=\frac{9}{(a+1)+)b+1)+(c+1)-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})}\geq\frac{9}{6-\frac{3}{2}}=2.$$

51. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви a, b и c е исполнето

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}\leq\frac{3}{4}\ .$$

Решение. Ќе воведеме ознака $S=a+b+c$. Тогаш левата страна на неравенството го добива обликот

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}=\frac{a}{S+a}+\frac{b}{S+b}+\frac{c}{S+c}=3-S(\frac{1}{S+a}+\frac{1}{S+b}+\frac{1}{S+c})\ ,$$

па даденото неравенство го добива обликот

$$3-S(\frac{1}{S+a}+\frac{1}{S+b}+\frac{1}{S+c})\leq\frac{3}{4}$$

односно

$$9\leq 4S(\frac{1}{S+a}+\frac{1}{S+b}+\frac{1}{S+c})\ . \qquad (1)$$

Понатаму,

$$4S=3S+S=3S+(a+b+c)=(S+a)+(S+b)+(S+c)$$

па затоа неравенството (1) го добива обликот

$$[(S+a)+(S+b)+(S+c)](\frac{1}{S+a}+\frac{1}{S+b}+\frac{1}{S+c})\geq 9\ .$$

Бидејќи $S+a,S+b,S+c>0$, последното неравенство е неравенство меѓу аритметичка и хармониска средина за три позитивни реални броеви. Од точноста на последното неравенство следува точноста на почетното неравенство

52. За позитивните реални броеви a и b е исполнето равенството

$$a+b+a^{-1}+b^{-1}=5.$$

Докажи, дека

$$3\sqrt{a+b}\geq a+b+2.$$

Решение. Ќе воведеме смени $a+b=u$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=v$. Од неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина за два позитивни реални броеви имаме

$$uv=(a+b)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b})\geq 4,$$

добиваме $v\geq\frac{4}{u}$. Сега,

$$5=u+v\geq u+\tfrac{4}{u},$$

па за u е исполнета неравенката $u^2-5u+4\leq 0$, т.е. $(u-1)(u-4)\leq 0$. Решение на последната неравенка е $1\leq u\leq 4$, т.е. добиваме $1\leq\sqrt{u}\leq 2$. Значи, $\sqrt{u}-1\geq 0$ и $\sqrt{u}-2\leq 0$, т.е. $(\sqrt{u}-1)(\sqrt{u}-2)\leq 0$, односно $u-3\sqrt{u}+2\leq 0$, па затоа

$$3\sqrt{a+b}\geq a+b+2.$$

53. За произволни позитивни реални броеви a, b и c е исполнето неравенството

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\leq\frac{1}{6}(a+b+c).$$

Докажи!

Решение. Од неравенствата

$$a+3b+2c=2b+(b+c)+(a+c)$$
$$b+3c+2a=2c+(b+a)+(c+a)$$
$$c+3a+2b=2a+(b+a)+(b+c),$$

и неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина добиваме:

$$\frac{1}{a+3b+2c}\leq\frac{1}{9}(\frac{1}{2b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})$$
$$\frac{1}{b+3c+2a}\leq\frac{1}{9}(\frac{1}{2c}+\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a})$$
$$\frac{1}{c+3a+2b}\leq\frac{1}{9}(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+a}+\frac{1}{b+c}).$$

Сега

$$\frac{ab}{a+3b+2c}\leq\frac{1}{18}a+\frac{1}{9}(\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{a+c})$$
$$\frac{bc}{b+3c+2a}\leq\frac{1}{18}b+\frac{1}{9}(\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a})$$
$$\frac{ca}{c+3a+2b}\leq\frac{1}{18}c+\frac{1}{9}(\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}).$$

и ако ги собереме последните неравенства, добиваме

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\leq\frac{1}{18}(a+b+c)+\frac{1}{9}(\frac{bc+ca}{b+a}+\frac{ca+ab}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c})$$
$$\leq\frac{1}{18}(a+b+c)+\frac{1}{9}(a+b+c)=\frac{1}{6}(a+b+c)$$

што и требаше да се докаже.

54. Дадени се позитивните реални броеви a,b,c,d такви што $2(a+b+c+d) \geq abcd$. Докажи, дека $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq abcd$.

Решение. Можни се два случаја.

Прв случај. Нека $abcd \geq 16$. Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина следува

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4(\tfrac{a+b+c+d}{4})^2 \geq 4(\tfrac{abcd}{8})^2 \geq \tfrac{(abcd)^2}{16} \geq abcd\,.$$

Втор случај. Нека $abcd < 16$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4\cdot\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} \geq \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd\,.$$

55. Нека a и b се природни броеви, $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, A=\frac{a+b}{2}$. Ако $\frac{K}{A}$ е природен број докажи дека $a=b$.

Решение. Имаме $1 \leq \frac{K}{A} = \sqrt{\frac{K^2}{A^2}} = \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a^2+2ab+b^2}} < \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2}} = \sqrt{2}$, па затоа $1=\frac{K}{A}$, т.е. $a=b$.

56. Определи ја најголемата вредност на изразот $a+b+c+abc$, каде a,b и c се ненегативни броеви такви што важи $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Решение. Условот на задачата не може да важи ако $a^2+b^2+c^2<3$. Навистина, тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $3(abc)^{\frac{2}{3}} \leq a^2+b^2+c^2 < 3$, т.е. $abc<1$, па затоа ќе важи $a^2+b^2+c^2+abc<4$. Според тоа, $a^2+b^2+c^2 \geq 3$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$a+b+c+abc \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+abc \leq a^2+b^2+c^2+abc = 4\,.$$

Во последното неравенство важи знак за равенство ако и само ако $a=b=c=1$, па значи бараната најголема вредност е 4.

57. Докажи дека $x+y \geq 2a$, ако $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=2\sqrt{1+a}$.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина

$$2(z^2+t^2) \geq (z+t)^2$$

добиваме:

$$2(1+x+1+y) \geq (\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y})^2 = 4+4a,$$

од каде што следува бараното неравенство.

Втор начин. За x, y, a од интервалот $[-1,+\infty)$ имаме

$$1+x+1+y+2\sqrt{(1+x)(1+y)} = 4(1+a)$$

$$\tfrac{2+x+y}{2}+\sqrt{(1+x)(1+y)} = 2(1+a)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, добиваме:

$$\frac{2+x+y}{2}+\sqrt{(1+x)(1+y)}\leq\frac{2+x+y}{2}+\frac{1+x+1+y}{2}$$
$$2(1+a)\leq\frac{4+2x+2y}{2},$$
$$2+2a\leq 2+(x+y),$$

т.е. $x+y\geq 2a$.

58. Докажи го неравенството

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5,$$

ако $4a+1$, $4b+1$ и $4c+1$ се ненегативни реални броеви и $a+b+c=1$.

Решение. *Прв начин.* За ненегативните броеви x и y важи неравенството $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ и притоа знак на равенство важи ако и само ако $x=y$. Затоа имаме:

$$\sqrt{(4a+1)\cdot 1}\leq\frac{4a+1+1}{2},\ \sqrt{(4b+1)\cdot 1}\leq\frac{4b+1+1}{2}\ \text{и}\ \sqrt{(4c+1)\cdot 1}\leq\frac{4c+1+1}{2}.$$

Со собирање на овие три неравенства добиваме

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq 2(a+b+c)+3=5.$$

Сега ќе докажеме дека не важи равенство во последното неравенство. Равенство би важело ако и само ако $4a+1=1, 4b+1=1$ и $4c+1=1$, односно $a=b=c=0$, што не е можно заради $a+b+c=1$. Значи важи строго неравенство.

Втор начин. За ненегативните броеви x, y и z важи неравенството $\frac{x+y+z}{3}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$. Ставајќи $x=\sqrt{4a+1}$, $y=\sqrt{4b+1}$ и $z=\sqrt{4c+11}$ во последното неравенство добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}&\leq\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{4a+1+4b+1+4c+1}\\&=\sqrt{3}\sqrt{4(a+b+c)+3}\\&=\sqrt{3}\sqrt{7}=\sqrt{21}<\sqrt{25}=5.\end{aligned}$$

Забелешка. Во ова решение е докажано построгото неравенство

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq\sqrt{21}.$$

Знак за равенство се достигнува ако и само ако $4a+1=4b+1=4c+1$, т.е. $a=b=c$ и $3\sqrt{4a+1}=\sqrt{21}$. Значи $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Трет начин. Од $a+b+c=1$ следува дека барем еден од броевите a,b,c е позитивен (во спротивно, ако $a\leq 0, b\leq 0, c\leq 0$ би следувало дека $a+b+c\leq 0$ што е во спротивност со претпоставката $a+b+c=1$). Не се губи од општоста ако претпоставиме дека $a>0$. Тогаш имаме

$$1+4a<1+4a+4a^2=(1+2a)^2,\ \text{т.е.}\ \sqrt{1+4a}<|1+2a|=1+2a$$

(заради $a>0$). На сличен начин од

$$1+4b\leq 1+4b+4b^2\ \text{и}\ 1+4c\leq 1+4c+4c^2$$

следува

$$\sqrt{1+4b} \leq |1+2b| \text{ и } \sqrt{1+4c} \leq |1+2c|.$$

Од претпоставката дека $1+4b \geq 0$ и $1+4c \geq 0$ добиваме дека $b \geq -\frac{1}{4}$ и $c \geq -\frac{1}{4}$. Користејќи ги тие неравенства добиваме $1+2b \geq 1-2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$ и $1+2c = \frac{1}{2} > 0$. Затоа знакот за апсолутна вредност во горните неравенства може да се отфрли, па конечно добиваме: $\sqrt{1+4a} < 1+2a$, $\sqrt{1+4b} \leq 1+2b$ и $\sqrt{1+4c} \leq 1+2c$. Сега

$$\sqrt{1+4a}+\sqrt{1+4b}+\sqrt{1+4c} < 1+2a+1+2b+1+2c = 2(a+b+c)+3 = 2\cdot 1+3 = 5.$$

59. Збирот на природните броеви x, y и z е еднаков на 100. Определи ја најголемата вредност на $xy+yz+zx$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2} \geq xy+yz+zx.$$

Според тоа, од условот на задачата следува

$$100^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx),$$

од каде пак добиваме

$$zy+yz+zx \leq \frac{10000}{3}.$$

Бидејќи x, y, z се природни броеви и $xy+yz+zx$ е природен број, па затоа

$$zy+yz+zx \leq 3333.$$

Равенство се достигнува, на пример, за $(x, y, z) = (33, 33, 34)$.

60. Нека x, y, z, w се реални броеви такви што важи

$$x^2+y^2+z^2+w^2+x+3y+5z+7w = 4.$$

Определи ја најголемата можна вредност на збирот $x+y+z+w$.

Решение. Дадениот услов е еквивалентен со условот

$$(x+\tfrac{1}{2})^2+(y+\tfrac{3}{2})^2+(z+\tfrac{5}{2})^2+(w+\tfrac{7}{2})^2 = 25. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и условот (1) следува

$$\frac{(x+\frac{1}{2})+(y+\frac{3}{2})+(z+\frac{5}{2})+(w+\frac{7}{2})}{4} \leq \sqrt{\frac{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z+\frac{5}{2})^2+(w+\frac{7}{2})^2}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Според тоа, $(x+\frac{1}{2})+(y+\frac{3}{2})+(z+\frac{5}{2})+(w+\frac{7}{2}) \leq 10$, т.е. $x+y+z+w \leq 2$, при што вредноста 2 се достигнува, на пример, за $x=2, y=1, z=0, w=-1$.

61. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 2017$. Докажи, дека

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако прво го искористиме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и на крајот условот $abc = 2017$, последователно добиваме

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$
$$=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{abc}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2017}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2017}}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$, а ако замениме во $abc=2017$, добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\sqrt[3]{2017}$.

62. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека важи неравенството

$$\sum_{k=1}^{n}x_k+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\le\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\Big)$$

Решение. Ако со H,A и K ги означиме соодветно харонискатa, аритметичката и квадратната средина на броевите $x_1,x_2,...,x_n$, гледаме дека всушност го докажуваме неравенството:

$$nA+\sqrt{n}K\le\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}\cdot\frac{n}{H}\cdot nK^2$$

односно

$$nAH+\sqrt{n}KH\le(n+\sqrt{n})K^2.$$

Бидејќи $A,H\le K$ добиваме дека $AH\le K^2$. Слично од $K,H\le K$ следува $KH\le K^2$, односно $\sqrt{n}KH\le\sqrt{n}K^2$. Со собирање на овие две неравенства го добиваме бараното неравенство. Воедно гледаме дека равенство важи ако и само ако $A=H+K$, односно $x_1=x_2=...=x_n$.

63. Нека $n\ge3$ е природен број и $a_2,a_3,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_2a_3...a_n=1$. Докажи, дека

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n>n^n. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(1+a_k)^k=\Big(\frac{1}{k-1}+...+\frac{1}{k-1}+a_k\Big)^k\ge\Big(k\sqrt[k]{\big(\tfrac{1}{k-1}\big)^{k-1}a_k}\Big)^k=\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}a_k.$$

Множејќи ги овие неравенства за $k=2,3,...,n$ добиваме

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n\ge n^n.$$

Во последнот равенство знак за равенство ќе важи ако и само ако $a_k=\frac{1}{k-1}$ за $k=2,...,n$. Но, во овој случај важи $a_2a_3...a_n\ne1$, па затоа е точно неравенството (1).

64. Ако $x>0,y>0$ и $z>0$ докажи дека:

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)}.$$

Решение. Нека $x+y=z_1^2, y+z=x_1^2, z+x=y_1^2$ и

$$K=\sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{3}}, H=\frac{3}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}+\frac{1}{z_1}}, A=\frac{x_1+y_1+z_1}{3}.$$

Тогаш

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{y+z}}-\sqrt{y+z}+\frac{x+y+z}{\sqrt{z+x}}-\sqrt{z+x}+\frac{x+y+z}{\sqrt{x+y}}-\sqrt{x+z}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)} \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+y+z)(\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}})\geq\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}+\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{2}(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}+\frac{1}{z_1})\geq x_1+y_1+z_1+\sqrt{\frac{3}{4}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{3}}(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}+\frac{1}{z_1})\geq\frac{2\frac{x_1+y_1+z_1}{3}}{\sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{3}}}+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$3\frac{K}{H}\geq 2\frac{A}{K}+1.$$

Последното неравенство е очигледно бидејќи важи: $K\geq A\geq H$.

65. Докажи дека: ако a,b,c,d се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{16}{3(a+b+c+d)}. \tag{1}$$

Решение. Нека $x=b+c+d$, $y=a+c+d$, $z=a+b+d$, $u=a+b+c$.

Прв начин. Ставајќи во неравенството аритметичката и хармониската средина $a_1=x, a_2=y, a_3=z, a_4=u$, добиваме

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u})\geq\frac{4}{x+y+z+u} \tag{2}$$

од каде што следува неравенството (1).

Втор начин. До неравенството (2) можеме да дојдеме и користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Ставајќи во ова неравенство $a_1=x, a_2=y, a_3=z, a_4=u$, а потоа $a_1=\frac{1}{x}, a_2=\frac{1}{y}, a_3=\frac{1}{z}, a_4=\frac{1}{u}$ ги добиваме неравенствата $x+y+z+u\geq 4\sqrt[4]{xyzu}$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{xyzu}}$. Множејќи ги овие неравенства добиваме

$$(x+y+z+u)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u})\geq 16,$$

кое е исто со неравенството (2).

66. Нека се a,b и c позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Решение. Според неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните реални броеви $\frac{1}{b(a+b)},\frac{1}{c(b+c)},\frac{1}{a(c+a)}$, имаме

$$(\tfrac{1}{b(a+b)}+\tfrac{1}{c(b+c)}+\tfrac{1}{a(c+a)})^3 \geq \tfrac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \,. \qquad (1)$$

Повторно од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$(\tfrac{a+b+c}{3})^3 \geq abc \qquad (2)$$

$$(\tfrac{2(a+b+c)}{3})^3 = (\tfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3})^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a) > 0 \,. \qquad (3)$$

Ако ги помножиме неравенствата (2) и (3) добиваме

$$\tfrac{1}{2^3}(\tfrac{2(a+b+c)}{3})^6 \geq abc(a+b)(b+c)(c+a) \,. \qquad (4)$$

Од (4) имаме

$$\tfrac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \tfrac{3^9 \cdot 2^3}{[2(a+b+c)]^6} \,.$$

Од (1) и последното неравенство следува

$$(\tfrac{1}{b(a+b)}+\tfrac{1}{c(b+c)}+\tfrac{1}{a(c+a)})^3 \geq \tfrac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \tfrac{3^9 \cdot 2^3}{[2(a+b+c)]^6} \,,$$

односно

$$\tfrac{1}{b(a+b)}+\tfrac{1}{c(b+c)}+\tfrac{1}{a(c+a)} \geq \tfrac{27}{2(a+b+c)^2} \,,$$

што и требаше да се докаже.

67. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=1$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот

$$A(x,y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \,.$$

Решение. Имаме

$$A(x,y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \geq x\sqrt{1} + y\sqrt{1} = x+y = 1$$

и како $A(1,0) = 1\cdot\sqrt{1+0} + 0\cdot\sqrt{1+1} = 1$, заклучуваме дека најмалата вредност на изразот $A(x,y)$ е 1. Имаме $A(x,y) \geq 1 > 0$. Од условот на задача и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} A^2(x,y) &= (x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x})^2 = x^2(1+y) + y^2(1+x) + 2xy\sqrt{(1+x)(1+y)} \\ &= x^2 + y^2 + x^2 y + y^2 x + 2xy\sqrt{1+x+y+xy} \\ &= (x+y)^2 - 2xy + xy(x+y) + 2xy\sqrt{1+(x+y)+xy} \\ &= 1 - xy + 2xy\sqrt{2+xy} = 1 + xy(2\sqrt{2+xy} - 1) \\ &\leq 1 + (\tfrac{x+y}{2})^2(2\sqrt{2+(\tfrac{x+y}{2})^2} - 1) = 1 + \tfrac{1}{4}(2\sqrt{2+\tfrac{1}{4}} - 1) = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

па затоа $A(x,y) \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$. Но, $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, што значи дека најголемата вредност на изразот $A(x,y)$ е $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

68. Определи ја најмалата вредност на параметарот $a \in \mathbb{R}$ за која системот

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = a-1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = a+1 \end{cases}$$

има решение во множеството реални броеви.

Решение. Со одземање на дадените равенки добиваме дека

$$2=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1})+(\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1})$$
$$=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}+\frac{2}{\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}}.$$

Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и равенството

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}=2a$$

од последното неравенство следува

$$1=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}}\geq\frac{9}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}}=\frac{9}{2a}.$$

Според тоа, $a\geq\frac{9}{2}$, при што за да важи знак за равенство потребно и доволно е во претходното неравенство да важи

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}=\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}=3.$$

Решавајќи ја равенката $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=3$ добиваме дека едно нејзино решение е $x=\frac{85}{36}$. Според тоа, за $a=\frac{9}{2}$, почетниот систем во множеството реални броеви има решение $x=y=z=\frac{85}{36}$.

69. Нека $x,y\in[0,1]$. Определи ги најмалата и најголемата вредност на изразот

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}.$$

Решение. Имаме

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2})^2}$$
$$=\sqrt{2+2(\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2)}+\sqrt{(x^2+y^2)(1-y^2)}+\sqrt{(1-x^2)(1-x^2)})}\geq\sqrt{2}.$$

Притоа за $x=y=1$ дадениот израз има вредност $\sqrt{2}$. Значи $\sqrt{2}$ е најмалата вредност на дадениот израз.

Со примена на неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за броевите $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-y^2}$ добиваме

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\leq 3\sqrt{\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2+(\sqrt{1-x^2})^2+(\sqrt{1-y^2})^2}{3}}=\sqrt{36}.$$

Равенство се достигнува за $x^2+y^2=1-x^2=1-y^2$, т.е. за $x=y=\sqrt{\frac{1}{3}}$.

70. Определи ја најголемата вредност на изразот $A=\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3}$, ако x,y,z се реални броеви такви што $x+y+z=\frac{1989}{3}$.

Решение. *Прв начин.* Воведуваме смени $x+3=a, y+3=b, z+3=c$. Тогаш $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$ и $a+b+c=x+3+y+3+z+3=x+y+z+9=\frac{1989}{3}+9=\frac{2016}{3}$.

Изразот $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ е позитивен, па тој има најголема вредност ако и само ако неговиот квадрат има најголема вредност. За квадратот на A имаме

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \\ &= a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac} \\ &= \tfrac{2016}{3}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}. \end{aligned}$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$2\sqrt{ab}\le a+b,\ 2\sqrt{bc}\le b+c,\ 2\sqrt{ca}\le c+a,$$

при што равенство се добива ако и само ако $a=b$, $b=c$, $c=a$, т.е. $a=b=c$. Но тогаш

$$A^2 \le \tfrac{2016}{3}+2(a+b+c)=\tfrac{2016}{3}+2\cdot\tfrac{2016}{3}=3\cdot\tfrac{2016}{3}=2016,$$

при што $A^2=2016$ ако и само ако $a=b=c$. Значи, најголемата вредност за A е $\sqrt{2016}$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за броевите $\sqrt{x+3},\sqrt{y+3},\sqrt{y+3}$, добиваме

$$\begin{aligned} A &= 3\tfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3}}{3} \\ &\le 3\sqrt{\tfrac{(\sqrt{x+3})^2+(\sqrt{y+3})^2+(\sqrt{z+3})^2}{3}} \\ &= 3\sqrt{\tfrac{x+y+z+9}{3}} = 3\sqrt{\tfrac{\frac{1989}{3}+9}{3}} = \sqrt{2016}\ . \end{aligned}$$

Равенство се достигнува за $\sqrt{x+3}=\sqrt{y+3}=\sqrt{z+3}$, од каде што добиваме дека $x=y=z$. Од условот $x+y+z=\frac{1989}{3}$, добиваме $x=y=z=221$. Бидејќи во задачата се бара најголемата вредност за A, добиваме $A=\sqrt{2016}$ и се достигнува за $x=y=z=221$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниу191ченост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној промењљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика+, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагиђ, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагиђ, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагиђ, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагиђ, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое откріитие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011